DAVID HALLIDAY ROBERT RESNICK

Fizică

VOL. II

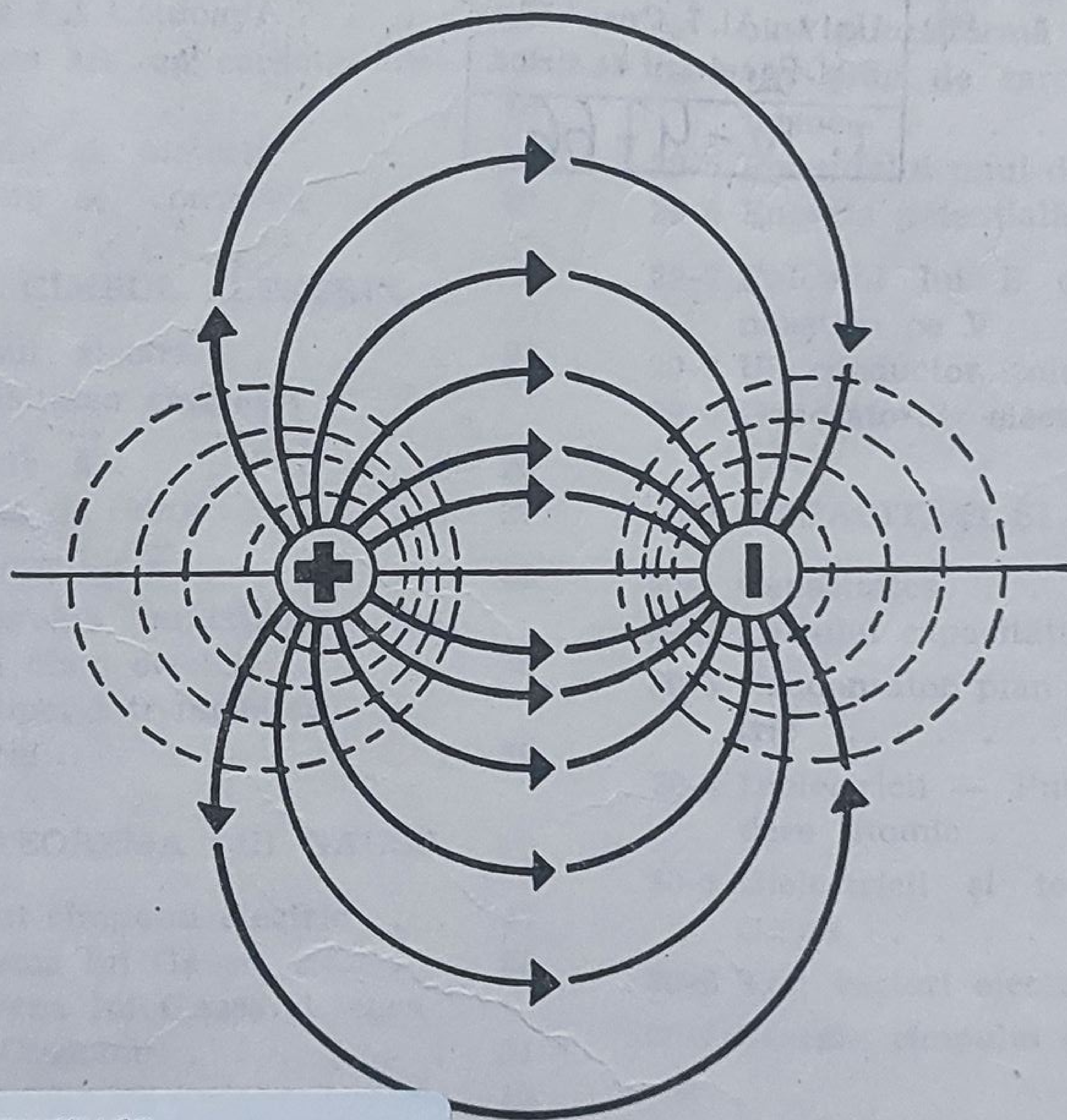


DAVID HALLIDAY
Profesor de fizică la
Universitatea din Pittsburg

ROBERT RESNICK
Profesor de fizică la Institutul
Politehnic Rensselaer

FIZICĂ

VOL. II







EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ – BUCUREŞTI, 1975

Cuprinsul volumului II

Capitolul 26

Sarcina și materia

26-1 Electromagnetismul ● Introducere

Electricitatea ca știință își are rădăcinile în observația, cunoscută încă de Thalles din Milet în anul 600 î.e.n., că o bucată de chihlimbar frecată atrage bucățele de paie. Studiul magnetismului începe odată cu observația că unele roci (de exemplu magnetita) atrag fierul. Aceste două științe s-au dezvoltat independent pînă în 1820 cînd Hans Christian Oersted (1777—1851) a observat legătura dintre ele și anume că un conductor străbătut de un curent *electric* influențează acul *magnetic* al busolei (paragraful 33-1).

Electromagnetismul ca o știință nouă a fost dezvoltat de mulți oameni de știință, dintre care unul din cei mai importanți a fost Michael Faraday (1791—1867). Cel care a dat legilor electromagnetismului forma sub care le cunoaștem azi a fost James Clerk Maxwell (1831—1879). Aceste legi numite de obicei *ecuațiile lui Maxwell* sînt prezentate în tabelul 38-3. Aceste legi joacă în magnetism același rol ca și cel pe care legile de mișcare și ale atracției universale ale lui Newton îl au în mecanică.

Cu toate că sinteza electromagnetismului dată de Maxwell se bazează în principal pe lucrările predecesorilor lui, contribuția lui este foarte importantă și vitală. Maxwell a dedus că lumina este de natură electromagnetică și că viteza ei poate fi găsită făcînd măsurători pur electrice și magnetice. Astfel știința opticii a fost legată intim de cea a electricității și magnetismului. Domeniul de aplicabilitate al ecuațiilor lui Maxwell este remarcabil de larg, cuprinzînd principiile fundamentale ale dispozitivelor electromagnetice și optice, cum ar fi: motoare, ciclotroane, calculatoare electronice, radioul și televiziunea, dispozitivele radar, microscoapele și telescoapele.

Dezvoltarea electromagnetismului clasic nu s-a terminat cu Maxwell. Fizicianul englez Oliver Heaviside (1850—1925) și în special fizicianul olandez H. A. Lorentz (1853—1928) au contribuit substanțial la clarifi-

carea teoriei lui Maxwell. Heinrich Hertz (1857—1894)* a făcut un mare pas înainte, cînd la mai mult de 20 de ani de la formularea teoriei lui Maxwell, a produs în laborator „unde maxwelliene“ electromagnetice de tipul pe care noi l-am numi acum unde scurte radio. Meritul de a aplica în practică undele electromagnetice ale lui Maxwell și Hertz i-a revenit lui Marconi și altor oameni de știință.

În prezent, interesul în electromagnetism este atît de natură practică cît și fundamentală. La nivelul aplicațiilor inginerești ecuațiile lui Maxwell sînt folosite în mod constant și universal la soluționarea unui domeniu larg de probleme practice. Din punct de vedere al aspectelor fundamentale există un efort continuu de a extinde domeniul lui de aplicare astfel încît electromagnetismul să rezulte ca un caz special al unei teorii mai generale. O astfel de teorie va putea să includă (eventual) teoria gravitației și a fizicii cuantice.

Această mare sinteză nu a fost încă realizată.

26-2 Sarcina electrică

În continuare întregul capitol se va ocupa de sarcina electrică și de legătura ei cu materia. Putem arăta că atunci cînd o vergea de sticlă atîrnată de un fir lung de mătase este frecată cu o bucată de mătase se produc *două feluri* de electricitate ca în fig. 26-1. Dacă frecăm cu mătase o a doua vergea de sticlă și o apropiem de capătul primei vergele frecate, vom vedea că ele se resping reciproc. Pe de altă parte o vergea din ebonită frecată cu o blană va *atrage* vergeaua de sticlă. Două vergele de ebonită frecate cu blană se vor respinge reciproc. Explicăm aceste fapte spunînd că prin frecare vergelele se încarcă cu *sarcină electrică* și că sarcinile de pe cele două vergele exercită forțe, unele asupra celorlalte. Este astfel evident că sarcinile de pe vergeaua de sticlă și de pe cea de cauciuc sînt diferite ca natură.

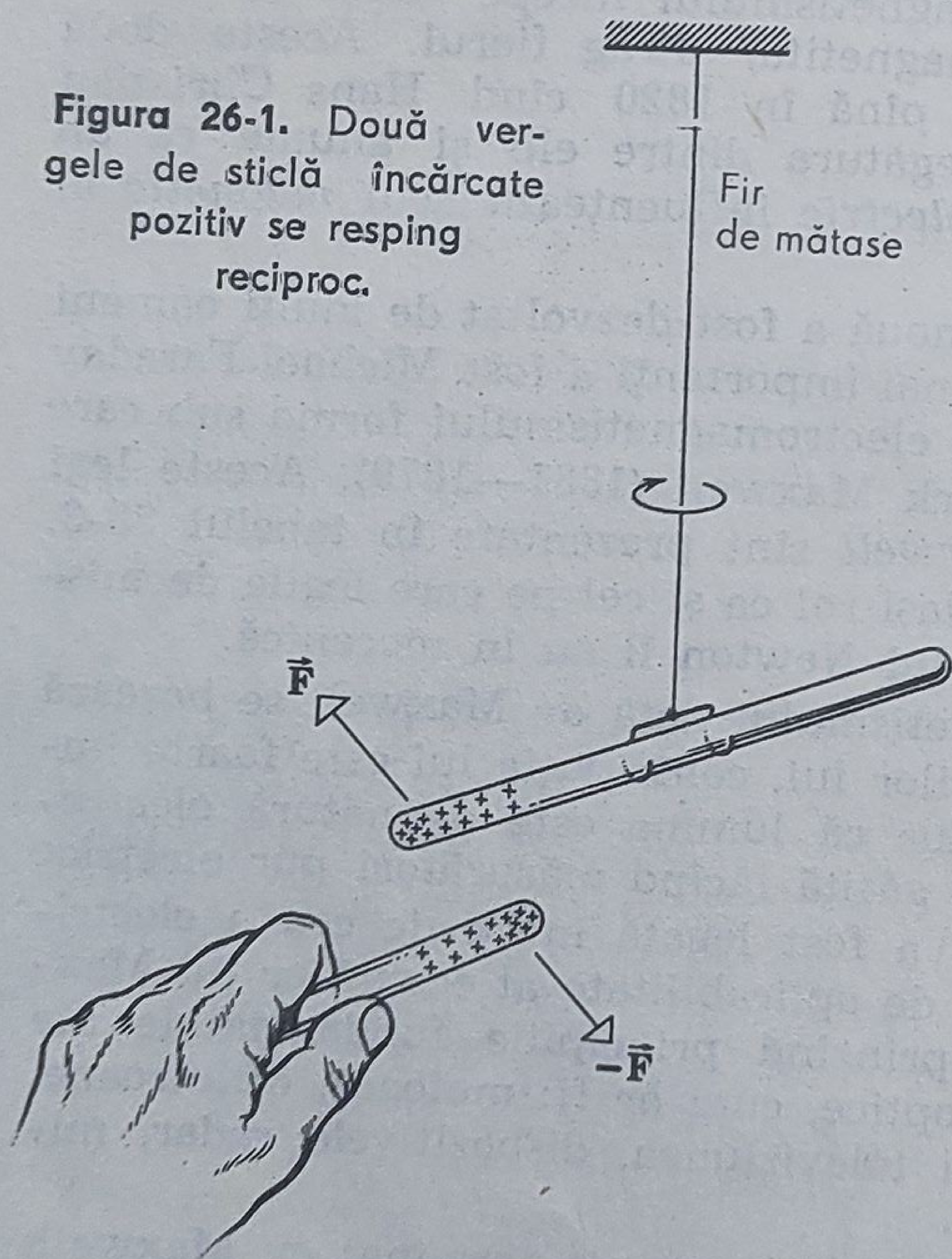


Figura 26-1. Două vergele de sticlă încărcate pozitiv se resping reciproc.

Benjamin Franklin (1706—1790), care, pe lîngă alte ocupații a fost și fizician, primul fizician american, a denumit electricitatea care apare pe sticlă *pozitivă*, iar cea de pe ebonită *negativă*, denumiri care

* Heinrich Hertz — de P. și E. Morrison, Scientific American, Decembrie 1957.

s-au păstrat pînă în zilele noastre. Putem să exprimăm aceste fapte experimentale spunînd că *sarcinile de acelaşi fel se resping** *şi cele de semn diferit se atrag.* Efectele electrice nu se rezumă la cele observate cu ocazia frecării vergelelor de sticlă sau de ebonită. Orice substanţă frecată cu o altă substanţă în condiţii corespunzătoare se va încărca într-o măsură oarecare; comparînd sarcinile produse cu cele de pe vergeau de sticlă sau de ebonită, ele pot fi categorisite fie pozitive fie negative.

Concepţia modernă asupra materiei arată că substanţele în starea lor normală, sau neutră, conţin sarcină egală pozitivă şi negativă. Dacă două corpuri, să zicem sticla şi mătasea, sînt frecate una de alta, o mică sarcină se transferă de la un corp la celălalt, perturbînd neutralitatea electrică a celor două corpuri. În cazul amintit sticla devine pozitivă, iar mătasea negativă.

26-3 Conductori şi izolatori

Un corp metalic ţinut în mînă şi frecat cu o blană nu va prezenta fenomene care să ne permită să spunem că s-a încărcat cu electricitate. Este totuşi posibil să încărcăm cu electricitate şi astfel de corpuri cu condiţia să aibă un mîner de sticlă sau de ebonită, iar în cursul frecării metalul să nu fie atins cu mîna. Explicaţia este aceea că metalele, corpul omenesc şi pămîntul sînt *conducătoare* de electricitate pe cînd sticla, ebonita, plasticele etc. sînt *izolatoare* (numite şi *dielectrice*).

În corpurile conducătoare sarcinile electrice sînt libere să se mişte prin material, pe cînd în izolatoare nu. Cu toate acestea nu există materiale perfect izolatoare; capacitatea de izolare a sticlei de cuarţ este de aproximativ 10^{25} ori mai mare ca cea a cuprului, astfel că din multe puncte de vedere ele se comportă ca izolatoare perfecte.

O experienţă mai rafinată, denumită *efect Hall* (vezi § 33-5), arată că în metale numai sarcinile negative sînt capabile să se mişte liber. Sarcinile pozitive sînt fixe ca în sticlă sau alte materiale dielectrice. În realitate purtătorii de sarcină din metale sînt *electronii liberi.* Cînd atomii izolaţi sînt strînşi la un loc pentru a forma un corp solid metalic, electronii exteriori ai atomilor nu rămîn localizaţi pe atomii respectivi ci devin liberi să se mişte în întregul volum al solidului. În unii conductori, ca de exemplu în electroliţi, ambele tipuri de sarcini se pot mişca.

O categorie de materiale denumite semiconductoare sînt, din punct de vedere al proprietăţilor de conducţie a electricităţii, intermediare între conductori şi izolatori. Siliciul şi germaniul sînt cele mai cunoscute elemente cu astfel de proprietăţi. În materialele semiconductoare se pot mări conductibilitatea foarte mult prin adăugarea unor cantităţi foarte mici de alte elemente; în acest scop urme de arsen sau de bor sînt adesea adăugate în siliciu. Semiconductoarele au nenumărate aplicaţii practice, printre care şi aceea că sînt utilizate la construcţia tranzistorilor. Proprietăţile semiconductoarelor nu pot fi descrise în mod corect fără cunoaşterea unor principii de bază de fizică cuantică.

---

* O exprimare abreviată pentru expresia purtătorii de acelaşi fel de sarcină se resping (N. R.).

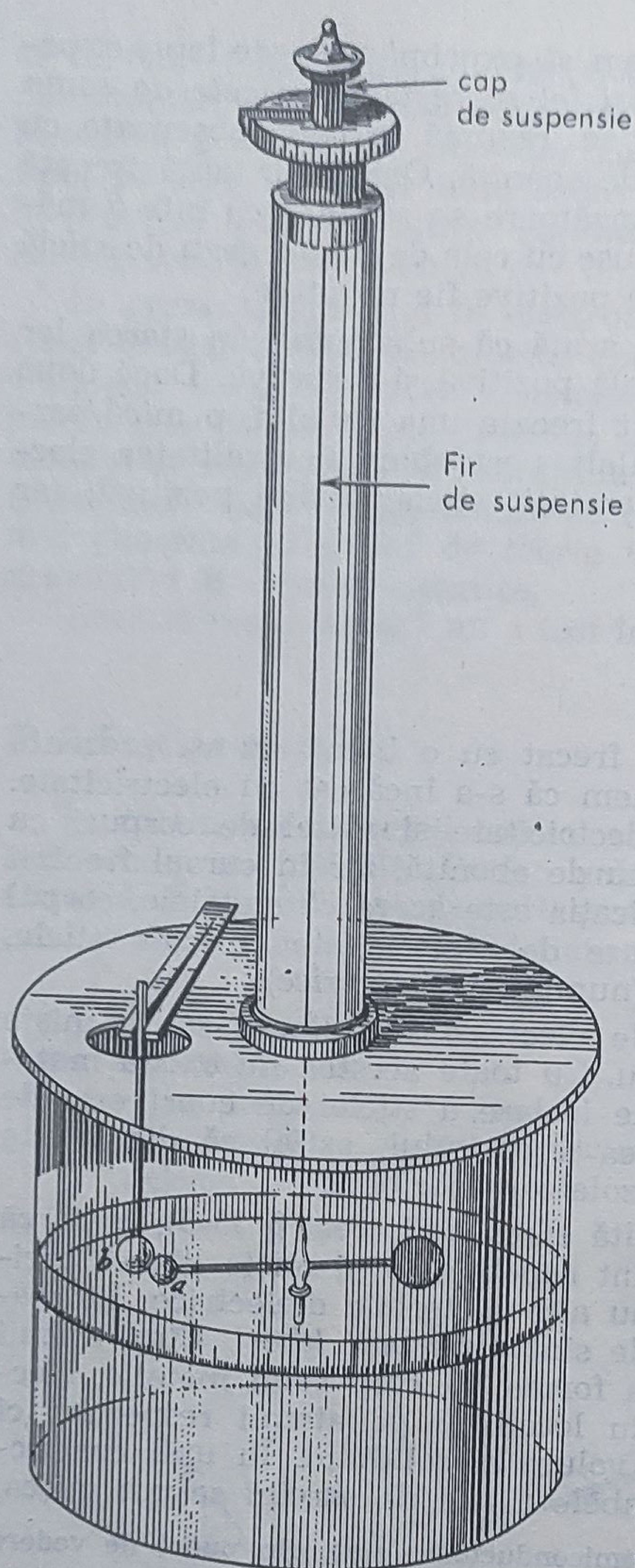


Figura 26-2. Balanța de torsiune a lui Coulomb prezentată în memoriul său din 1785 către Academia franceză de științe.

26-4 Legea lui Coulomb

Charles Augustin de Coulomb (1736—1806) a măsurat cantitativ pentru prima dată în 1785 atracția și respingerea electrică și a dedus legea care o guvernează. Aparatul folosit de el, care poate fi văzut în figura 26-2 seamănă cu vergeaua atîrnată de un fir din figura 26-1, cu deosebirea că sarcinile care interacționează în figura 26-2 sînt de fapt două mici sfere a și b.

Dacă a și b sînt încărcate cu sarcină, forța electrică ce acționează asupra lui a va căuta să răsucească firul de suspensie. Coulomb a echilibrat această forță, răsucind firul la capătul opus cu un unghi θ astfel ca distanța între a și b să rămînă constantă și egală cu o distanță aleasă inițial. Atunci, unghiul este o măsură relativă a forței electrice ce acționează asupra lui a. Dispozitivul din figura 26-2 se numește *balanță de torsiune;* un dispozitiv asemănător a fost folosit mai tîrziu de către Cavendish pentru a măsura atracția gravitațională (§ 16-3).

Primul rezultat experimental pe care Coulomb l-a obținut poate fi scris astfel

$$F \propto \frac{1}{r^2}.$$

unde F este mărimea forței ce acționează asupra fiecăreia din cele două sarcini a și b iar r este distanța ce le separă. Aceste forțe acționează, în conformitate cu cerința legii a treia a lui Newton: în lungul liniei care unește cele două sarcini dar în sensuri opuse. De observat că mărimea forței ce acționează asupra fiecărei sarcini este aceeași, cu toate că sarcinile pot fi diferite.

Coulomb a studiat de asemenea cum depinde forța electrică de sarcina electrică de pe sferele balanței lui de torsiune. De exemplu, dacă sfera conductoare încărcată o atingem cu o altă sferă conductoare de aceeași dimensiune, dar neîncărcată, sarcina trebuie să se împartă în mod egal între cele două sfere.

Cu o astfel de tehnică Coulomb a completat legea descrisă anterior aducînd-o la forma:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{26-1}$$

q_1 și q_2 sînt o măsură relativă a sarcinilor de pe sferele a și b. Ecuația 26-1 denumită *legea lui Coulomb*, este valabilă doar pentru acele obiecte încărcate ale căror dimensiuni sînt mult mai mici ca distanța dintre ele. Spunem adesea că legea este valabilă doar pentru *sarcini punctiforme.*

Legea lui Coulomb seamănă cu legea invers proporțională cu pătratul distanței a gravitației, lege care deja avea 100 de ani pe vremea experiențelor lui Coulomb; aici q joacă rolul lui m din legea gravitației. Cu toată această asemănare în gravitație forțele sînt totdeauna atractive; aceasta corespunde faptului că există două feluri de sarcini electrice dar (aparent) doar un singur fel de masă.

Corectitudinea legii Coulomb nu este verificată cantitativ numai cu ajutorul experiențelor lui Coulomb. Măsurătorile cu balanța de torsiune sînt dificile și nu dau o precizie mai mare de cîteva procente. Astfel de măsurători nu ne pot convinge că de exemplu exponentul din expresia 26-1 este exact 2 și nu să zicem 2,01. În paragraful 28-5 vom vedea că legea lui Coulomb poate fi dedusă dintr-o experiență indirectă care indică că exponentul din ecuația 26-1 are valoarea cuprinsă în intervalul $2 \pm 2 \cdot 10^{-9}$. Acest interval a fost restrîns recent de către Williams, Faller și Hill la $2 \pm 3 \cdot 10^{-16}$.

Cu toate că am introdus noțiunea de sarcină electrică, nu am definit încă unitatea ei de măsură. Este posibil să o definim în mod operațional punînd sarcini q egale pe sferele balanței de torsiune și măsurînd forța F care acționează asupra fiecăreia, cînd sarcinile se găsesc la o distanță r cunoscută. Putem lua ca valoare-unitate pentru q acea sarcină care acționează cu o forță unitate asupra fiecăreia cînd sarcinile se găsesc la distanță unitate una de alta; putem da apoi un nume sarcinii definite în acest fel.*

Din motive practice legate de precizia măsurătorilor, unitatea de sarcină în sistemul MKS nu este definită folosind o balanță de torsiune, ci plecînd de la unitatea pentru curentul electric. Știm că dacă conectăm extremitățile unui fir lung la bornele unei baterii prin fir va trece un *curent electric* de intensitate i. Ne imaginăm acest curent ca o deplasare de sarcină. Unitatea MKS pentru intensitatea curentului este *amperul* (prescurtat A). În paragraful 34-4 vom descrie procedeurile experimentale prin care este definit amperul.

---

* Acest procedeu stă la baza definiției unității de sarcină denumită *statcoulomb*. Totuși, în această carte noi nu vom folosi această unitate și nici sistemul de unități din care ea face parte; vezi anexa L.

Unitatea MKS de sarcină este *coulombul* (prescurtat C). *Un coulomb este definit prin: sarcina care trece printr-o secțiune dată a unui fir conductor într-o secundă dacă prin firul conductor s-a stabilit un curent staționar de 1 amper.* Adică

$$q = i\,t, \tag{26-2}$$

unde q este exprimat în coulombi, dacă i este exprimat în amperi, iar t în secunde. Astfel, dacă conectăm un fir conductor la o sferă metalică izolată, putem aduce pe sferă o sarcină de 10^{-6} C dacă prin fir trece un curent de 1,0 A timp de 10^{-6} s.

Exemplul 1. O monedă de cupru are o masă de 3,1 g. Fiind neutră din punct de vedere electric, ea conține sarcini egale, negativă și pozitivă. Care este mărimea q a acestei sarcini? Un atom de cupru are o sarcină nucleară pozitivă de $4{,}6\cdot10^{-18}$ C și o sarcină electronică egală în mărime.

Numărul N de atomi de cupru dintr-o monedă se găsește din raportul

$$\frac{N}{N_0} = \frac{m}{M},$$

unde N_0 este numărul lui Avogadro, m este masa monedei iar M este greutatea atomică a cuprului. Obținem

$$N = \frac{(6{,}0\cdot10^{23}\ \text{atomi/mol})\ (3{,}1\ \text{g})}{64\ \text{g/mol}} = 2{,}9\cdot10^{22}\ \text{atomi};$$

sarcina q este

$$q = (4{,}6\cdot10^{-18}\ \text{C/atom})\ (2{,}9\cdot10^{22}\ \text{atomi}) = 1{,}3\cdot10^{5}\ \text{C}$$

Într-un bec de 100 wați pentru 110 volți curentul este de 0,91 A. Studentul va verifica că sînt necesare 40 ore pentru ca această sarcină să treacă prin bec.

Relația 26-1 poate fi scrisă ca o egalitate dacă se introduce o constantă de proporționalitate. În loc ca aceasta să fie scrisă simplu, ca de exemplu k, de obicei este scrisă sub o formă mai complicată ca $1/4\,\pi\varepsilon_0$ sau

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{26-3}$$

Unele ecuații ce sînt deduse din ec. 26-3, dar sînt folosite mai des decît aceasta, vor avea o formă mai simplă dacă procedăm în acest fel.

În sistemul MKS putem măsura mărimile q_1, q_2, r și F din ec. 26-3 prin procedee independente de legea lui Coulomb. De asemenea, li se pot atașa valori și unități corespunzătoare. Așa-numita *constantă de permitivitate* ε_0 va rezulta în acest mod; și anume, ea va trebui să aibă acea valoare care face ca membrul drept al ec. 26-3 să fie egal cu cel stîng. Această valoare (măsurată) s-a dovedit a fi*

$$\varepsilon_0 = 8{,}85418\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2.$$

---

* Din motive practice această valoare nu este în realitate măsurată folosind direct ec. 26-3 ci printr-o metodă echivalentă, mult mai comodă, descrisă în paragraful 30-2.

În această carte, valoarea de $8{,}9\cdot10^{-12}$ $C^2/N\cdot m^2$ va fi considerată suficient de precisă pentru toate problemele. Pentru aplicarea directă a legii lui Coulomb sau orice altă problemă în care intervine cantitatea $1/4\pi\varepsilon_0$ putem folosi cu suficientă exactitate pentru această carte

$$1/4\pi\varepsilon_0=9{,}0\times10^9\ N\cdot m^2/C^2.$$

Exemplul 2. Să presupunem că am separat sarcina totală pozitivă de cea negativă dintr-o monedă de cupru de 3,1 g, la acea distanță pentru care forța lor de atracție să fie de 4,5 N. Care este acea distanță?

Avem (ec. 26-3).

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}.$$

Punînd $q_1q_2=q^2$ (vezi exemplul 1) și rezolvînd în funcție de r

$$r=q\sqrt{\frac{1/4\pi\varepsilon_0}{F}}=1{,}3\times10^5\ C\sqrt{\frac{9{,}0\cdot10^9 N\cdot m^2/C^2}{4{,}5\ N}}=5{,}8\times10^9\ m.$$

Aceasta arată că neutralitatea electrică a obiectelor macroscopice nu poate fi perturbată sensibil. Care ar fi forța dintre cele două sarcini dacă el ar fi plasate la distanța de 1,0 m?

Dacă sînt prezente mai mult de două sarcini, ecuația 26-3 este valabilă pentru fiecare pereche de sarcini. Fie sarcinile q_1, q_2 și q_3 etc.; calculăm forța exercitată asupra uneia din ele (fie q_1) de către toate celelalte, folosind ecuația vectorială

$$\vec{F}_1=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{14}+\ldots, \qquad (26\text{-}4)$$

unde $\vec{F}_{12}$, de exemplu, este forța exercitată de q_1 asupra lui q_2.

Exemplul 3. În figura 26-3 sînt arătate trei sarcini q_1, q_2 și q_3. Ce forță acționează asupra lui q_1? Presupunem că $q_1=-1{,}0\times10^{-6}$ C, $q_2=+3{,}0\times10^{-6}$ C, $q_3=-2{,}0\times10^{-6}$ C, $r_{12}=15$ cm, $r_{13}=10$ cm și $\theta=30°$.

Din ecuația 26-3 ne luînd în considerație semnele sarcinilor, deoarece ne interesează numai mărimea forțelor, avem

$$F_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}=$$

$$=\frac{(9{,}0\times10^9\ N\cdot m^2/C^2)(1{,}0\times10^{-6}\ C)(3{,}0\times10^{-6} C)}{(1{,}5\times10^{-1}\ m)^2}=1{,}2\ N$$

și

$$F_{13}=\frac{(9{,}0\times10^9 N\cdot m^2/C^2)(1{,}0\times10^{-6}\ C)(2{,}0\times10^{-6}\ C)}{(1{,}0\times10^{-1}\ m)^2}=1{,}8\ N$$

Direcțiile și sensul $\vec{F}_{12}$ și $\vec{F}_{13}$ sînt cele arătate în figură.

Componentele forței rezultante $\vec{F}_1$ ce acționează asupra lui q_1 (vezi ec. 26-4) sînt

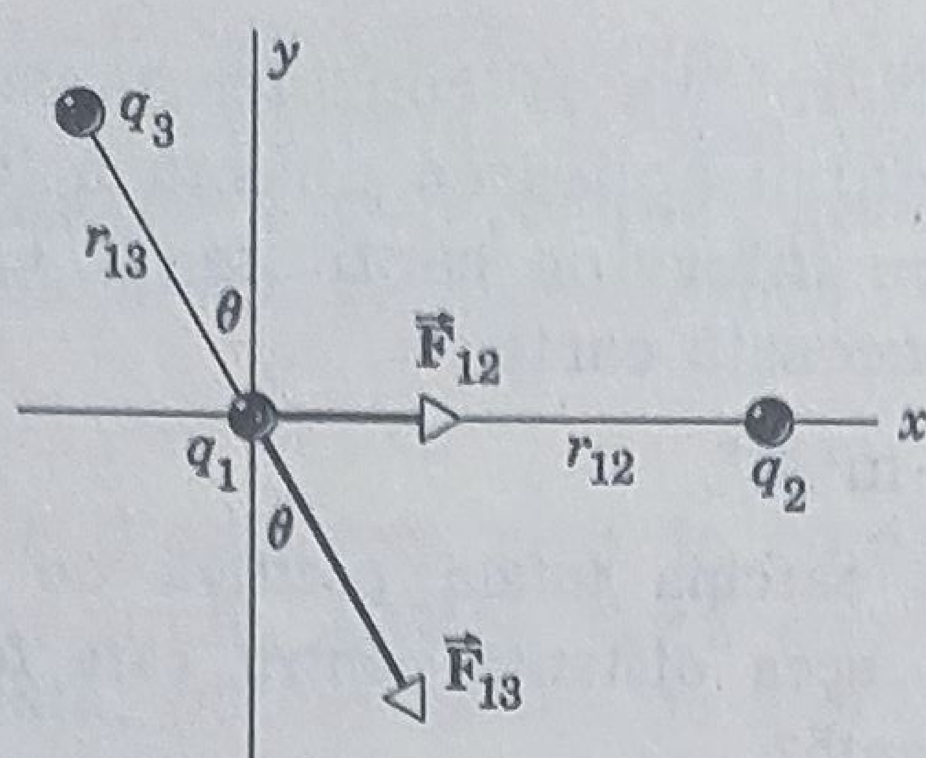


Figura 26-3. Exemplul 3. Forțele ce acționează asupra lui q_1 produse de q_2 și q_3.

$$F_{1x}=F_{12x}+F_{13x}=F_{12}+F_{13}\ \sin\theta$$
$$=1{,}2\ \text{N}+(1{,}8\ \text{N})\ (\sin 30°)=2{,}1\ \text{N}$$

și

$$F_{1y}=F_{12y}+F_{13y}=0-F_{13}\ \cos\theta$$
$$=-(1{,}8\ \text{N})\ (\cos 30°)=-1{,}6\ \text{N}.$$

Cititorul să găsească mărimea lui $\vec{F}_1$ și unghiul pe care îl face cu axa x.

26-5 Sarcina are un caracter discret

Pe vremea lui Franklin sarcina electrică era considerată ca un fluid continuu, idee ce a fost folositoare pentru multe scopuri. Teoria atomică a materiei a arătat că fluidele, ca de exemplu apa și aerul nu sînt continue ci, la rîndul lor sînt formate din atomi. Experiența a arătat că „fluidul electric" nu este nici el continuu ci este format din multiplii întregi a unei anumite sarcini electrice minime. Această sarcină fundamentală, pe care o notăm cu e, are mărimea $1{,}60210\times10^{-19}$ C. Orice sarcină electrică q, indiferent de modul de producere, poate fi scrisă ca ne unde n este un întreg pozitiv sau negativ.

Cînd o mărime fizică, ca de exemplu sarcina, există în „porții" discrete și nu în cantități continue variabile, mărimea se zice că este *cuantificată*. Cuantificarea este baza fizicii moderne. Existența atomilor și a particulelor de tipul electronului și al protonului indică că și *masa* este cuantificată. Mai tîrziu studentul va învăța că mai există încă alte cîteva mărimi care s-au dovedit a fi cuantificate atunci cînd au fost examinate la scară atomică; printre ele sînt energia și momentul cinetic.

Cuanta de sarcină este atît de mică încît caracterul discontinuu al electricității nu poate fi sesizat în experiențele macroscopice, tot așa cum nu ne dăm seama că aerul pe care-l respirăm este format din atomi. Într-un bec obișnuit de 110 V și 100 W intră și ies în și din filament într-o secundă $6\cdot10^{19}$ sarcini elementare.

În prezent nu există o teorie din care să rezulte cuantificarea sarcinii (sau cuantificarea masei, adică existența particulelor fundamentale ca protoni, electroni, pioni etc.). Chiar presupunînd cuantificarea, teoria clasică a electromagnetismului și mecanica newtoniană sînt incomplete prin aceea că ele nu descriu corect comportarea sarcinii și a materiei la scară atomică. Teoria clasică a electromagnetismului, de exemplu, descrie corect ce se petrece cînd un magnet în formă de bară este trecut printr-o buclă închisă din sîrmă de cupru; dar dă greș dacă vrem să explicăm proprietățile magnetice ale barei pornind de la atomii din care este formată. Sînt necesare teorii mai amănunțite ale fizicii cuantice pentru a explica aceasta și probleme similare.

26-6 Sarcina și materia

Materia cu care venim in contact poate fi privită ca fiind compusă din trei feluri de particule elementare: protonul, neutronul și electronul. În tabela 26-1 sînt indicate masele și sarcinile lor. De notat că masele

neutronului și protonului sînt aproximativ egale, pe cînd cea a electronului este mai mică de aproximativ 1840 ori.

Atomii sînt constituiți dintr-un *nucleu* dens, încărcat pozitiv, înconjurat de un nor de electroni; vezi figura 26-4.

Tabela 26-1

PROPRIETĂȚI ALE PROTONULUI, NEUTRONULUI ȘI ELECTRONULUI

Particula	Simbolul	Sarcina	Masa
Proton	p	+e	$1,67252 \times 10^{-27}$ kg
Neutron	n	o	$1,67482 \times 10^{-27}$ kg
Electron	e^-	$-e$	$9,1091 \times 10^{-31}$ kg

Raza nucleului variază de la aproximativ 1×10^{-15} m pentru hidrogen la aproximativ 7×10^{-15} m pentru cel mai greu atom. Diametrul exterior al norului de electroni, adică diametrul atomului, se situează în intervalul $1—3 \times 10^{-10}$ m, adică de aproximativ 10^5 ori mai mare decît diametrul nucleului.

Exemplul 4. Distanța r dintre electron și proton în atomul de hidrogen este de aproximativ $5,3 \cdot 10^{-11}$ metri. Care sînt mărimile a) forței electrice și b) forței gravitaționale dintre cele două patricule?

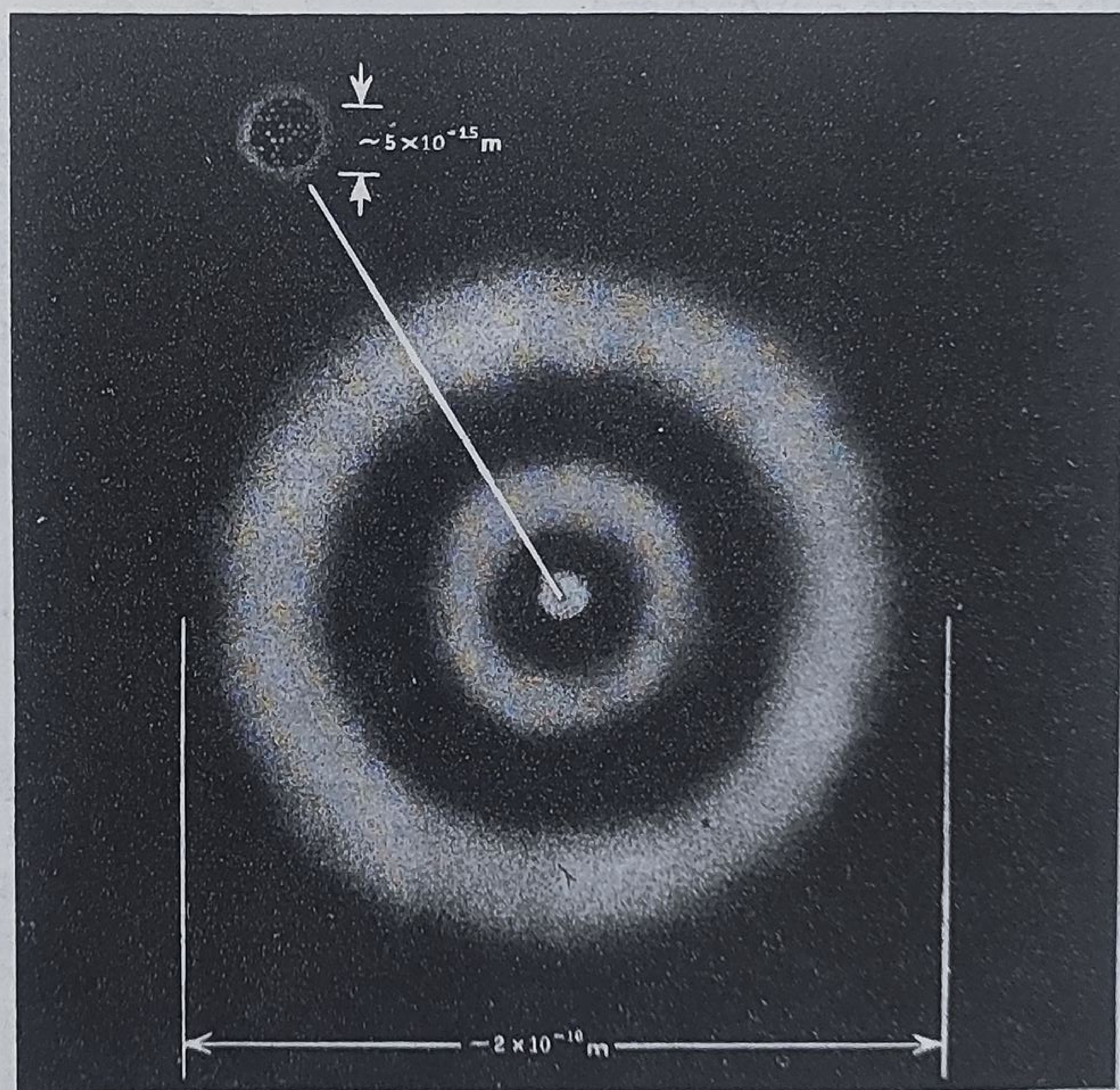


Figura 26-4. Imaginea unui atom; este sugerat norul electronic. Sus este dată imaginea mărită a nucleului.

Din legea lui Coulomb,

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{r^2} = \frac{(9,0\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\ (1,6\times10^{-19}\mathrm{C})^2}{(5,3\times10^{-11}\mathrm{m})^2} = 8,1\times10^{-8}\ \mathrm{N}$$

Forța gravitațională este dată de ecuația 16-1

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{(6,7\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/Kg^2})\ (9,1\times10^{-31}\ \mathrm{Kg})\ (1,7\times10^{-27}\ \mathrm{Kg})}{(5,3\times10^{-11}\mathrm{m})^2} = 3,7\times10^{-47}\ \mathrm{N}.$$

Astfel forța electrică este de aproximativ 10^{39} ori mai intensă decît forța gravitațională.

Semnificația legii lui Coulomb este mai profundă decît simpla descriere a forțelor ce acționează între sfere sau corpuri încărcate. Această lege, cînd este cuprinsă în cadrul fizicii cuantice, descrie corect (a) forțele electrice ce leagă electronii unui atom de nucleul său, (b) forțele ce leagă atomii împreună pentru a forma molecule și (c) forțele ce leagă atomii sau moleculele împreună pentru a forma solidele sau lichidele. Astfel, majoritatea forțelor cu care venim zilnic în contact și care nu sînt de natură gravitațională, sînt de natură electrică. O forță transmisă printr-un cablu de oțel este în esență o forță electrică, deoarece dacă ducem un plan imaginar perpendicular pe cablu, forțele interatomice electrice atractive ce acționează între atomii situați deoparte și de alta a planului sînt cele care țin cablul să nu se rupă. Noi înșine sîntem un ansamblu de nuclee și electroni legați împreună într-o configurație stabilă de forțele coulombiene.

În interiorul *nucleului* atomic întîlnim o forță a cărei natură nu este nici gravitațională nici electrică. Această forță atractivă puternică care leagă împreună protonii și neutronii ce formează nucleul este numită simplu *forță nucleară*. Dacă această forță nu ar fi prezentă, nucleul s-ar descompune imediat din cauza puternicei forțe coulombiene de respingere ce acționează între protonii din nucleu. Natura forței nucleare este astăzi înțeleasă numai parțial și formează problema centrală a cercetărilor actuale din fizica nucleară.

Exemplul 5. Ce forță coulombiană repulsivă există între doi protoni dintr-un nucleu de fier? Presupunem o distanță de separare între ei de $4,0\times10^{-15}$ m.

Din legea lui Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{(9\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\ (1,6\times10^{-19}\mathrm{C})^2}{(4,0\cdot10^{-15}\ \mathrm{m})^2} = 14\ \mathrm{N}.$$

Această enormă forță de repulsie trebuie să fie mai mult decît compensată de forțele nucleare atractive, intense. Acest exemplu, împreună cu exemplul 4 arată că forțele de legătură nucleară sînt mult mai intense decît forțele atomice de legătură. Forțele atomice de legătură sînt în schimb mult mai intense decît forțele gravitaționale corespunzătoare acelorași particule, separate prin aceeași distanță.

Forțele coulombiene repulsive ce acționează între protonii unui nucleu fac nucleul mai puțin stabil decît ar fi în lipsa lor. Emisia spontană a particulelor alfa din nucleele grele și fenomenul de fisiune nucleară sînt dovezi ale acestor instabilități.

Faptul că nucleele grele conțin considerabil mai mulți neutroni decît protoni este de asemenea alt efect al forțelor coulombiene. Să considerăm figura 26-5 în care o anumită specie atomică este reprezentată printr-un cerc de coordo-

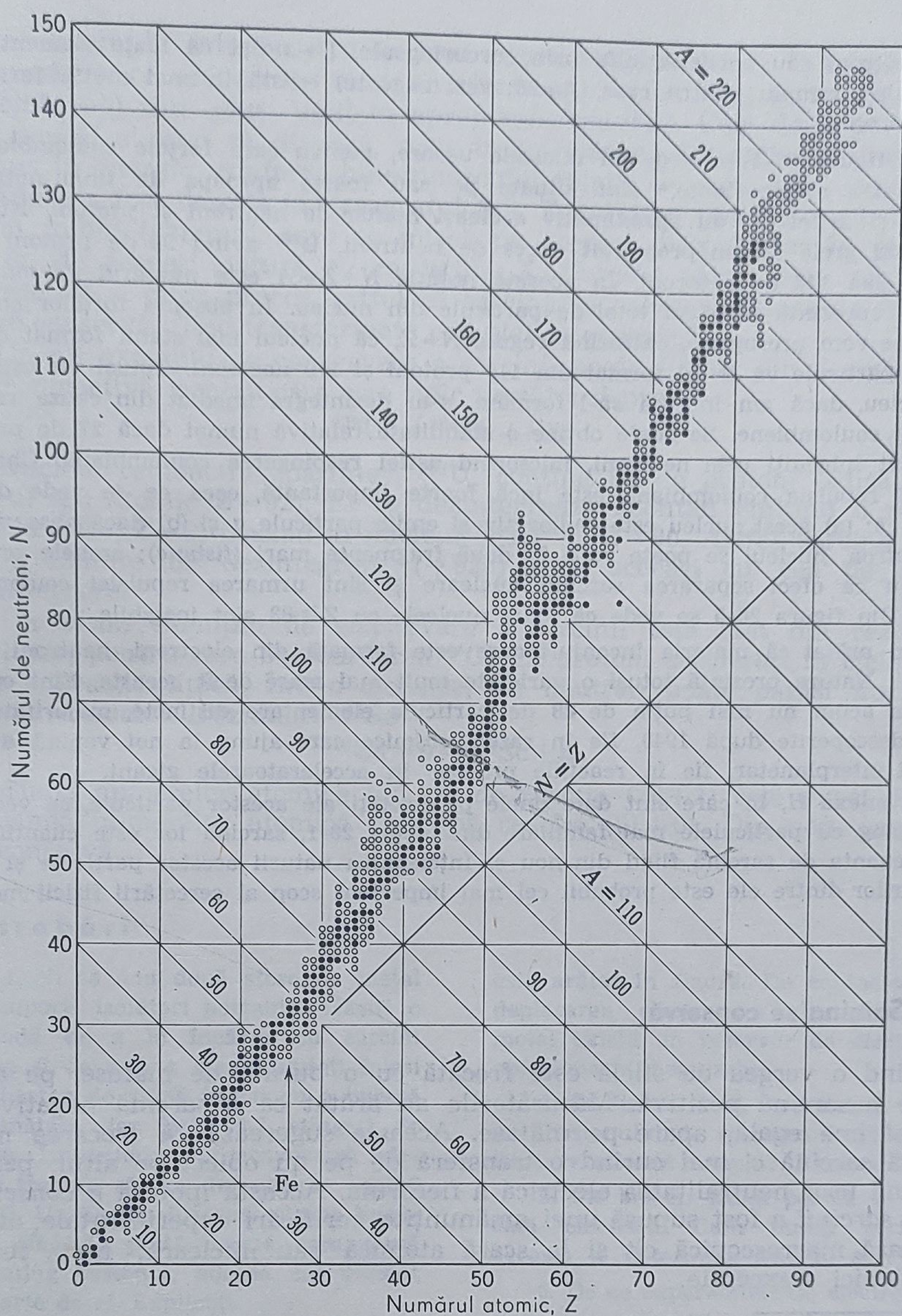


Figura 26-5. Cercurile negre reprezintă nucleele stabile iar cele albe nucleele radioactive. În figură nu sînt indicate nucleele radioactive descoperite recent, ce sînt răspîndite peste tot în această figură pînă la Z=103.

nate Z, numărul de protoni din nucleu (adică *numărul atomic*) și N, numărul de neutroni din nucleu (adică *numărul neutronic*). Nucleele stabile sînt reprezentate prin cercuri pline iar cele radioactive, adică cele ce se dezintegrează spontan, emi-

ţînd electroni sau particule alfa prin cercuri goale. De notat că toate elementele (fierul de exemplu pentru care, Z=26; vezi săgeata) există în mai multe forme, numite *izotopi*.

Din figura 26-5 se vede că nucleele uşoare, pentru care forţele coulombiene sînt relativ neimportante,* sînt situate pe sau foarte aproape de linia notată „$N=Z$" şi astfel ele au aproximativ aceleaşi număr de neutroni şi protoni. Nucleele mai grele au un pronunţat exces de neutroni, U^{238} avînd 92 de protoni şi 238—92 sau 146 de neutroni. În această notaţie $N+Z=A$ este *numărul de masă*. Acesta reprezintă numărul total de particule din nucleu. În absenţa forţelor coulombiene vom presupune, extinzînd regula $N=Z$, că nucleul mai stabil format din 238 de particule va fi cel format din 119 protoni şi 119 neutroni. Totuşi un astfel de nucleu, dacă am încerca să-l formăm, s-ar dezintegra imediat din cauza respingerii coulombiene. Se poate obţine o stabilitate relativă numai dacă 27 de protoni sînt înlocuiţi prin neutroni, micşorînd astfel respingerea coulombiană. Chiar în ^{238}U repulsia coulombiană este încă foarte importantă, ceea ce se vede din faptul că: (a) acest nucleu este radioactiv şi emite particule α şi (b) dacă abscarbe un neutron, nucleul se poate rupe în două fragmente mari (*fisiune*); ambele procese au ca efect separarea sarcinii nucleare şi sînt urmarea repulsiei coulombiene. Din figura 26-5 se vede că *toate* nucleele cu $Z \geqslant 83$ sînt instabile.

Am arătat că materia înconjurătoare este formată din electroni, neutroni şi protoni. Natura prezintă totuşi o varietate mult mai mare decît aceasta. Sînt cunoscute acum nu mai puţin de 28 de particule elementare distincte, majoritatea fiind descoperite după 1940, fie în razele cosmice care ajung la noi venind din spaţiul interplanetar, fie în reacţiile produse în acceleratoarele gigant.

În anexa *H*, în care sînt date unele proprietăţi ale acestor particule, se vede că analog cu particulele mai familiare din tabela 26-1, sarcina lor este cuantificată, cuanta de sarcină fiind din nou *e*. Înţelegerea naturii acestor particule şi a legăturilor dintre ele este probabil cel mai important scop al cercetării fizicii moderne.

26-7 Sarcina se conservă

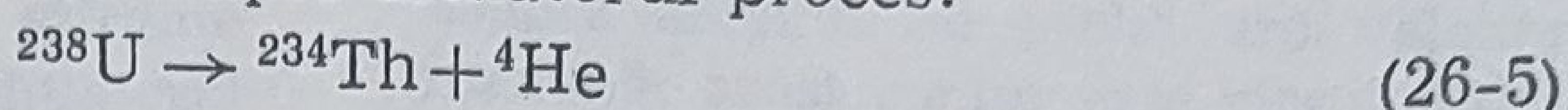
Cînd o vergea de sticlă este frecată cu o bucată de mătase, pe ea apare o sarcină pozitivă. Măsurătorile au arătat că o sarcină negativă, de mărime egală, apare pe mătase. Aceasta sugerează că frecarea nu crează sarcină ci mai curînd o transferă de pe un obiect pe altul, perturbînd uşor neutralitatea electrică a fiecăruia. Această ipoteză a *conservării sarcinii* a fost supusă unei amănunţite verificări experimentale, atît la scară macroscopică cît şi la scară atomică sau nucleară; nu a fost găsită nici o excepţie.

---

* Forţele coulombiene sînt importante în comparaţie cu intensele forţe nucleare de atracţie numai în cazul nucleelor grele, deoarece respingerea coulombiană ia naştere între *fiecare pereche* de protoni din nucleu pe cînd forţele nucleare de atracţie nu. În ^{238}U, de exemplu, fiecare proton exercită o forţă de repulsie asupra fiecăruia din ceilalţi 91 de protoni. Totuşi fiecare proton (şi neutron) exercită o atracţie nucleară numai asupra unui mic număr din ceilalţi neutroni şi protoni, acei ce se află în apropierea sa. Pe măsură ce trecem spre nucleele mai grele, energia corespunzătoare forţelor coulombiene repulsive creşte mult mai repede decît cea corespunzătoare forţelor nucleare de atracţie.

Un exemplu interesant de conservare a sarcinii poate fi următorul: să urmărim ce se petrece cînd un electron (sarcină —e) şi un pozitron (sarcină +e) sînt aduşi unul în apropierea celuilalt. Cele două particule pot pur şi simplu să dispară, prin transformarea întregii lor mase de repaus în energie, conform binecunoscutei relaţii $E=mc^2$; acest proces de *anihilare* a fost descris în paragraful 8-9. Energia se regăseşte sub forma a doi *fotoni* (gamma), care se mişcă pe aceeaşi direcţie dar în sensuri opuse, de aceeaşi natură cu radiaţiile X. Sarcina totală este zero atît înainte cît şi după proces, astfel că sarcina se conservă. Masa de repaus nu se conservă, fiind transformată complet în energie.*

Un alt exemplu de conservare a sarcinii poate fi luat din dezintegrarea radioactivă, pentru care este tipic următorul proces:



$$^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He \qquad (26\text{-}5)$$

Nucleul radioactiv „părinte", ^{238}U, conţine 92 de protoni (adică, numărul său atomic $Z=92$). El se dezintegrează spontan emiţînd o particulă α (^{4}He; $Z=2$) trecînd în nucleul ^{234}Th, cu $Z=90$. Astfel, sarcina prezentă înainte de dezintegrare ($+92e$) este aceeaşi cu cea de după dezintegrare.

Un ultim exemplu de conservare a sarcinii este luat din reacţiile nucleare, pentru care bombardarea ^{44}Ca cu protoni acceleraţi în ciclotron este o reacţie tipică. Într-o ciocnire, un neutron poate părăsi nucleul, lăsînd ca nucleu „rezultant" ^{44}Sc



$$^{44}Ca + p \rightarrow {}^{44}Sc + n$$

Suma numerelor atomice înainte de reacţie (20+1) este exact egală cu suma numerelor atomice de după reacţie (21+0). Din nou, sarcina se conservă.

Întrebări

1. Ni se dau două sfere de metal pe suporţi izolatori portabili. Găsiţi o metodă de a le încărca cu sarcini egale şi de semne opuse. Puteţi folosi un baston de sticlă frecat cu o bucată de mătase dar fără să-l atingeţi de sfere. În metoda dumneavoastră sferele trebuie să fie de mărime egală?

2. Un baston încărcat atrage bucăţele fine de plută uscată care, după ce ating bastonul, adesea sar violent departe de el. Explicaţi.

3. Dacă un baston de sticlă încărcat este ţinut lîngă unul din capetele unui baston de metal izolat, neîncărcat ca în figura 26-6, electronii sînt atraşi către un capăt, după cum este arătat în figură. De ce încetează deplasarea electronilor? În sfera de metal există un rezervor de electroni aproximativ inepuizabil.

4. În figura 26-6, acţionează asupra bastonului de metal o forţă electrică rezultantă nenulă? Explicaţi?

5. Un baston izolat poartă o sarcină electrică. Cum puteţi verifica aceasta şi determina semnul sarcinii?

6. De ce experienţele de electrostatică nu reuşesc bine în zilele umede?

7. O persoană aşezată pe un scaun izolat atinge un conductor încărcat izolat. Se descarcă conductorul complet?

---

* Mai corect: „în masă de mişcare a radiaţiilor gamma", masa şi energia fiind mărimi fizice diferite. (N.T.)

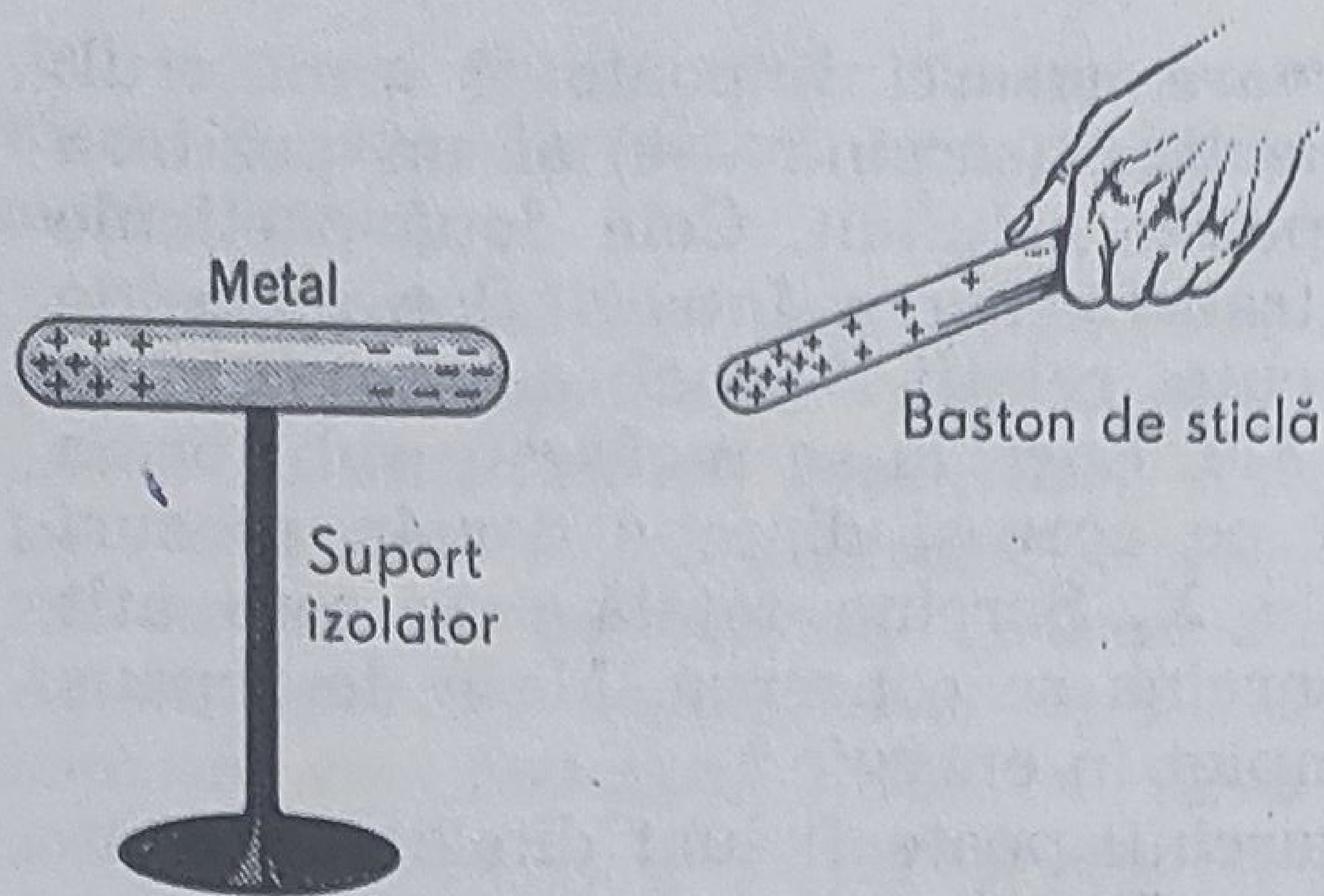


Figura 26-6·

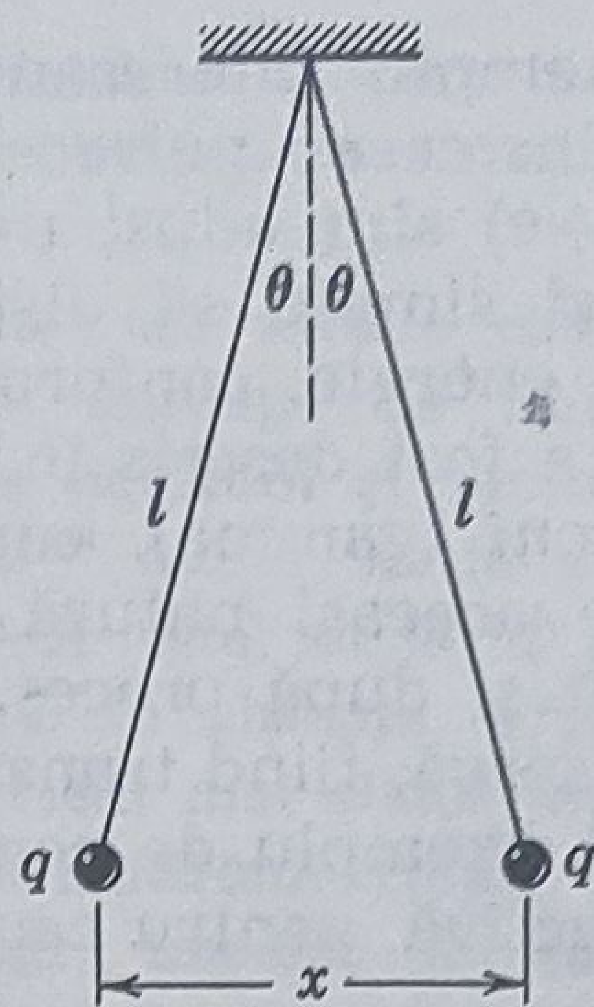


Figura 26-7.

8. (a) Un baston de sticlă încărcat pozitiv atrage un obiect suspendat. Putem trage concluzia că obiectul este încărcat negativ? (b) Un baston de sticlă încărcat pozitiv respinge un obiect suspendat. Putem trage concluzia că obiectul este încărcat pozitiv?

9. Se modifică forţa coulombiană pe care o sarcină o exercită asupra alteia dacă alte sarcini sînt aduse în apropiere?

10. Cuanta de sarcină este $1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Există pentru masă o cuantă unică similară?

11. Verificaţi că schemele de dezintegrare a particulelor elementare date în anexa E, satisfac legea de conservare a sarcinii.

12. Ce înseamnă cînd spunem că o cantitate fizică este (a) cuantificată sau (b) se conservă? Daţi exemple.

13. Un nucleu de ^{238}U se desface în două părţi identice. Este mai probabil ca nucleele astfel produse să fie stabile sau radioactive?

Probleme

1. Fluxul de protoni din radiaţiile cosmice care ajung în partea superioară a atmosferei este în medie de 0,15 protoni/cm^2.s. Ce curent total primeşte pămîntul din afara atmosferei sub formă de protoni din radiaţiile cosmice? Raza Pămîntului este de $6{,}4 \cdot 10^6$ m.

2. O sarcină punctiformă de $+3{,}0 \cdot 10^{-6}$ C este situată la 12 cm de o a doua sarcină punctiformă de $-1{,}5 \cdot 10^{-6}$ C. Calculaţi mărimea şi direcţia forţei ce acţionează asupra fiecărei sarcini.

3. Două mingii similare de masă m sînt atîrnate cu fire de mătase de lungime l şi poartă aceleaşi sarcini q ca în figura 26-7. Presupunem că este θ atît de mic încît tg θ poate fi înlocuit prin sin θ. Cu această aproximaţie să se arate că

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi \varepsilon_0 m g}\right)^{1/3}$$

unde x este distanţa dintre mingii. Dacă $l = 120$ cm, $m = 10$ g şi $x = 5{,}0$ cm, care este q?

4. Presupunem că fiecare minge din problema 3 pierde din sarcina sa o cantitate de $10 \cdot 10^{-9}$ C/s. Cu ce viteză relativă instantanee se apropie mingile una de alta?

5. Trei mingi mici, fiecare avînd masa de 10 g, sînt suspendate separat dintr-un punct comun, cu fire de mătase de 1,0 m lungime fiecare. Mingile

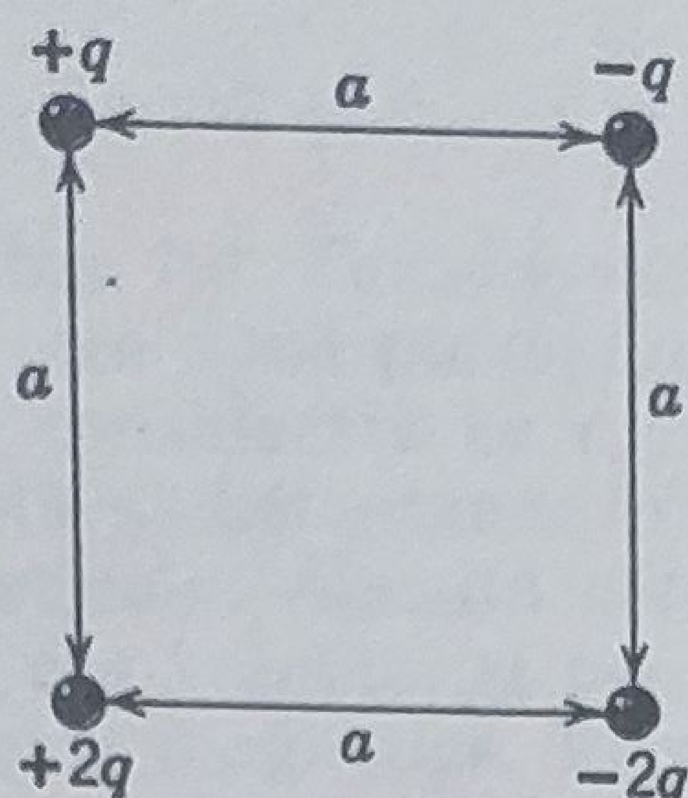


Figura 26-8.

sînt încărcate identic şi sînt atîrnate în colţurile unui triunghi echilateral cu latura de 0,1 m. Care este sarcina de pe fiecare minge?

6. Care este forţa rezultantă asupra sarcinii din colţul din stînga jos din figura 26-8? Presupunem că $q=1{,}0\cdot10^{-7}$ C iar $a=5{,}0$ cm.

7. O sarcină Q este plasată în fiecare din cele două colţuri opuse ale unui pătrat. O altă sarcină q este plasată în fiecare din celelalte două colţuri (a). Dacă forţa electrică rezultantă asupra lui Q este zero care este legătura dintre Q şi q (b). Poate fi ales q astfel încît forţa rezultantă asupra fiecărei sarcini să fie zero?

8. La ce distanţă trebuie să se găsească doi protoni pentru ca forţa electrică repulsivă ce acţionează asupra fiecăreia să fie egală cu greutatea sa?

9. (a) Ce mărime trebuie să aibe cele două sarcini egale şi pozitive plasate pe Pămînt şi pe Lună pentru ca atracţia lor gravitaţională să fie neutralizată? (b). Pentru rezolvarea acestei probleme este necesar să cunoaştem distanţa pămînt-lună? (c) Cîte tone de hidrogen ar fi necesare pentru a obţine sarcina pozitivă calculată în (a)?

10. O sarcină Q trebuie împărţită în două părţi q şi $Q-q$. Care trebuie să fie legătura dintre Q şi q pentru ca repulsia coulombiană, dintre cele două părţi plasate pe o distanţă dată, să fie maximă?

11. Sînt date două sfere mici, încărcate fiecare pozitiv sarcina totală fiind de $5{,}0\cdot10^{-5}$ C. Cum este distribuită sarcina totală între cele două sfere dacă fiecare sferă este respinsă de cealaltă cu o forţă de 1,0 N cînd ele se găsesc la distanţa 2,0 m?

12. Două sarcini egale punctiforme şi pozitive sînt separate prin distanţa $2a$. O sarcină punctiformă de probă este plasată într-un plan median. (a) Calculaţi raza r a cercului de simetrie din acest plan pentru care forţa asupra sarcinii de probă are valoare maximă; acest contur este circular din considerente de simetrie. (b) Care este direcţia acestei forţe presupunînd că sarcina de probă este pozitivă.

13. Un cub de latură a poartă în fiecare vîrf o sarcină punctiformă q. (a) Arătaţi că mărimea forţei rezultante asupra oricărei dintre sarcini este

$$F=\frac{0{,}261q^2}{\varepsilon_0 a^2}$$

(b) Care este direcţia lui $\vec{F}$ faţă de muchiile cubului?

14. Estimaţi numărul aproximativ de coulombi de sarcină pozitivă dintr-un pahar cu apă.

15. (a) Cîţi electroni ar trebui îndepărtaţi dintr-o monedă de 5 bani (de nichel) pentru ca aceasta să rămînă cu o sarcină de $+10^{-7}$ C? (b) Ce procent din electronii din monedă reprezintă aceasta?

16. Raza unui nucleu de cupru este de aproximativ $5{,}1\cdot10^{-13}$ cm. Calculaţi densitatea materiei care formează nucleul. Este rezonabil răspunsul dumneavoastră? (Greutatea atomică a cuprului este de 64 g/mol; se neglijează masa electronilor în comparaţie cu aceea a nucleului.)?

17. În dezintegrarea radioactivă a ^{238}U (vezi ec. 26-5) centrul particulei α care se emite este la un moment dat, la distanţa de $9\cdot10^{-15}$ m de centrul nucleului de ^{234}Th rezultant. Care este în acest moment (a) forţa electrostatică asupra particulei α şi (b) care este acceleraţia sa?

Capitolul 27

Cîmpul electric

27-1 Cîmpul electric

Fiecărui punct din spațiul din jurul Pămîntului îi putem asocia un vector $\vec{g}$ al *intensității cîmpului gravitațional* (vezi ec. 16-12). Aceasta este accelerația gravitațională care va acționa asupra unui corp de probă plasat în acest punct și lăsat apoi liber. Dacă m este masa corpului, iar $\vec{F}$ este forța gravitațională ce acționează asupra sa, $\vec{g}$ este dat de

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{27-1}$$

Acesta este un exemplu de *cîmp vectorial.* Pentru punctele situate în apropierea suprafeței Pămîntului, cîmpul este adesea considerat ca *uniform* adică $\vec{g}$ este același pentru toate punctele.

Curgerea apei într-un rîu este un alt exemplu de cîmp vectorial, numit *cîmp de curgere* (vezi paragraful 18-7). Fiecărui punct din apă îi este asociată o mărime vectorială, viteza $\vec{v}$ cu care apa curge în acel punct. Dacă $\vec{g}$ și $\vec{v}$ nu se modifică în timp, cîmpurile corespunzătoare se numesc *staționare.* Este de notat că în cazul rîului, chiar dacă apa se deplasează, vectorul $\vec{v}$ din oricare punct nu variază cu timpul în cazul curgerii staționare.

Spațiul din jurul unui corp încărcat este afectat de prezența corpului și noi vorbim de existența unui *cîmp electric* în acest spațiu. Analog, vorbim de existența unui cîmp magnetic în spațiul din jurul unui corp magnetic. În teoria clasică a electromagnetismului cîmpurile electrice și magnetice sînt noțiuni fundamentale.

Înaintea lui Faraday forța ce acționa între două particule încărcate era considerată ca o interacție directă și instantanee între cele două particule. Această *acțiune la distanță* era valabilă și pentru cazul forțelor magnetice. În prezent concepția noastră despre cîmpul electric este următoarea:

1. Sarcina q_1 din figura 27-1 produce în spațiul din jurul său un cîmp electric. Acest cîmp este sugerat în figură prin pata de lumină; mai tîrziu vom arăta cum putem reprezenta cîmpurile electrice mai corect.

2. Cîmpul acționează asupra sarcinii q_2; aceasta este indicată prin forța $\vec{F}$ asupra lui q_2.

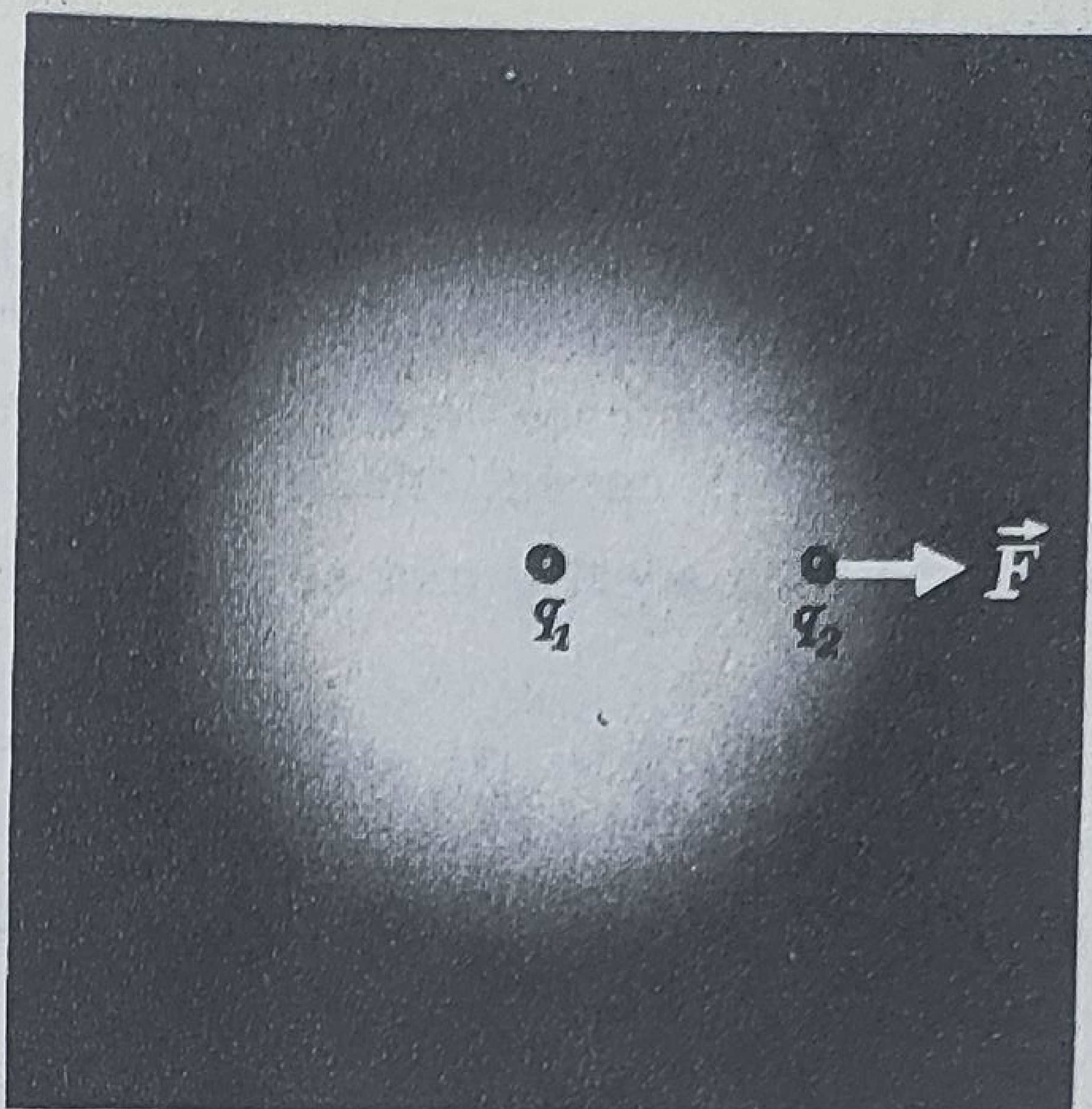


Figura 27-1. – Sarcina q_1 produce un cîmp ce exercită o forță $\vec{F}$ asupra sarcinii q_2.

Cîmpul joacă un rol de intermediar pentru forțele dintre sarcini. Există două probleme separate: (a) calculul cîmpurilor produse de distribuții date de sarcini și (b) calculul forțelor pe care cîmpuri date le exercită asupra sarcinilor plasate în ele. Imaginea noastră este

$$\text{sarcină} \rightleftarrows \text{cîmp}$$

diferită de cea a concepției acțiunii la distanță

$$\text{sarcină} \rightleftarrows \text{sarcină}$$

În figura 27-1 ne putem imagina de asemenea că sarcina q_2 dă naștere unui cîmp și că acest cîmp acționează asupra lui q_1, producînd forța $-\vec{F}$ asupra sa. Situația este complet simetrică, fiecare sarcină fiind situată într-un cîmp asociat celeilalte sarcini.

Dacă singura problemă din electromagnetism ar fi aceea a forțelor dintre sarcini staționare, cele două puncte de vedere: cea a cîmpului și cea a acțiunii la distanță ar fi perfect echivalente. Să presupunem totuși că sarcina q_1 din fig. 27-1 este accelerată brusc spre dreapta. Cît de repede simte sarcina q_2 deplasarea sarcinii q_1 și că forța ce acționează asupra sa (q_2) trebuie să crească? Teoria electromagnetică arată că sarcina q_2 simte deplasarea sarcinii q_1 datorită unei *perturbări a cîmpului*, perturbare ce pornește de la q_1, propagîndu-se cu viteza luminii. În concepția acțiunii la distanță se consideră că informația asupra accelerării sarcinii q_1 este comunicată *instantaneu* sarcinii q_2; aceasta nu este în concordanță cu experiența. Electronii accelerați în antena unui emițător radio influențează electronii dintr-o antenă receptoare depărtată numai după un timp l/c unde l este distanța dintre antene, iar c viteza luminii.

27-2 Intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$

Pentru a defini operațional cîmpul electric plasăm o mică probă ce poartă sarcina q_0 (pentru comoditate o presupunem pozitivă) în punctul din spațiu pe care vrem să-l examinăm și măsurăm forța electrică $\vec{F}$ (dacă există) ce acționează asupra acestei probe. *Intensitatea cîmpului electric* $\vec{E}$ în acest punct se definește ca*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \qquad (27\text{-}2)$$

Aici $\vec{E}$ este vector deoarece și $\vec{F}$ este, q_0 fiind scalar. Direcția lui $\vec{E}$ este aceea a lui $\vec{F}$, este direcția în care tinde să se deplaseze o sarcină pozitivă în repaos plasată în punctul dat.

Definiția intensității cîmpului gravitațional $\vec{g}$ este foarte asemănătoare aceleia a intensității cîmpului electric, cu excepția că masa corpului de probă și nu sarcina sa este proprietatea ce ne interesează. Deși unitățile în care este scris de obicei $\vec{g}$ sînt m/s^2 el poate fi scris și sub forma N/kg (ec. 27-1); unitățile pentru $\vec{E}$ sînt N/C (ec. 27-2). Astfel atît $\vec{g}$ cît și $\vec{E}$ sînt exprimate printr-o forță împărțită la o mărime caracteristică (masă sau sarcină) a probei.

Exemplul 1. Care trebuie să fie mărimea intensității cîmpului electric $\vec{E}$ pentru ca un electron plasat în cîmp să fie supus unei forțe electrice egală cu greutatea sa?

Din ecuația 27-2, înlocuind pe q_0 prin e și pe F prin mg, unde m este masa electronului, avem

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{mg}{e} =$$

$$= \frac{(9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{1{,}6\times10^{-19}\ \text{C}} = 5{,}6\times10^{-11}\ \text{N/C}.$$

Acesta este un cîmp electric foarte slab. Ce direcție trebuie să aibe $\vec{E}$ pentru ca forța electrică să echilibreze forța gravitațională?

Aplicînd ecuația 27-2 trebuie să folosim o sarcină de probă cît este posibil de mică. O sarcină de probă mare poate perturba sarcinile primare care produc cîmpul, modificînd chiar mărimea pe care încercăm s-o măsurăm. Ecuația 27-2 trebuie să fie înlocuită prin

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (27\text{-}3)$$

---

* Această definiție a lui $\vec{E}$, deși corectă și complet adecvată scopului nostru prezent, este rar folosită în practică din cauza dificultăților experimentale. În mod normal $\vec{E}$ este găsit prin calcul pornind de la mărimi mult mai ușor măsurabile ca de exemplu potențialul electric; vezi paragraful 29-7.

Această ecuaţie ne arată că trebuie să folosim sarcini de probă q_0 din ce în ce mai mici, evaluînd raportul $\vec{F}/q_0$ la fiecare etapă. Intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ este deci limita acestui raport atunci cînd mărimea sarcinii de probă tinde către zero.

27-3 Liniile de cîmp

Noţiunea de cîmp electric ca vector nu a fost folosită de Michael Faraday, care a judecat întotdeauna folosind ideia de *linii de cîmp*. Liniile de cîmp reprezintă încă o metodă comodă de vizualizare a distribuţiei cîmpului electric. Le vom folosi în acest scop dar nu le vom utiliza cantitativ.

Legătura dintre liniile de cîmp (imaginare) şi vectorul intensităţii cîmpului electric este următoarea:

1. Tangenta la o linie de cîmp în orice punct dă *direcţia* lui $\vec{E}$ în acel punct.
2. Liniile de cîmp sînt astfel desenate încît numărul de linii pe unitatea de suprafaţă transversală este proporţională cu *mărimea* lui $\vec{E}$. Acolo unde liniile sînt apropiate una de alta E este mare iar acolo unde sînt depărtate E este mai mic.

Nu este evident că este posibil să se deseneze un mănunchi continuu de linii pentru ca să îndeplineşti aceste condiţii. În adevăr, s-a dovedit că dacă legea lui Coulomb nu ar fi adevărată, aceasta *nu* ar fi posibil; vezi problema 4.

În figura 27-2 sînt arătate liniile de cîmp corespunzătoare unei pături uniforme de sarcină pozitivă. Presupunem că pătura este infinită, ceea ce pentru o pătură de dimensiuni finite este echivalent cu a considera numai acele puncte a căror distanţă pînă la pătură este mică în comparaţie cu distanţa către cea mai apropiată extremitate a păturii. O sarcină pozitivă de probă, lăsată liberă în faţa unei astfel de pături se va îndepărta de pătură de-a lungul unei linii perpendiculare. Astfel, vectorul intensităţii cîmpului electric în orice punct din apropierea păturii trebuie să fie perpendicular pe pătură. Liniile de forţă sînt echidistante, ceea ce indică că $\vec{E}$ are aceiaşi mărime pentru toate punctele din apropierea păturii.

În figura 27-3 sînt indicate liniile de forţă corespunzătoare unei sfere încărcate negativ. Din motive de simetrie liniile trebuie să fie în lungul razelor. Sensul lor este spre interiorul sferei, deoarece o sarcină pozitivă liberă ar fi accelerată în această direcţie. Intensitatea E a cîmpului electric nu este constantă ci descreşte cu creşterea distanţei de la sferă. Aceasta este evident din faptul că liniile de forţă sînt cu atît mai distanţate cu cît se îndepărtează mai mult de sferă. Din motive de simetrie E este constant pentru toate punctele situate la o distanţă dată de centrul sferei încărcate.

Exemplul 2. Cum variază E din figura 27-3, cu distanţa r de la centrul sferei încărcate?

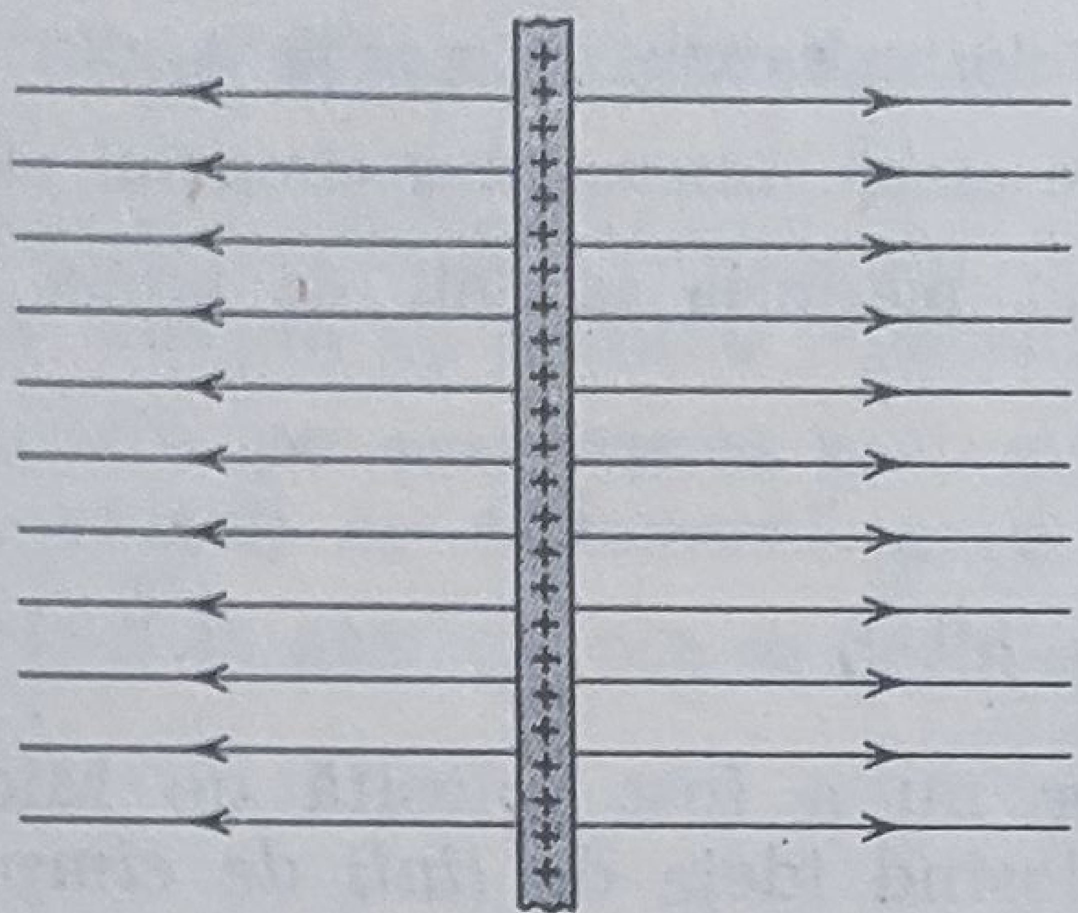


Figura 27-2. Liniile de cîmp corespunzătoare unei porțiuni dintr-o pătură de sarcină pozitivă de dimensiuni infinite.

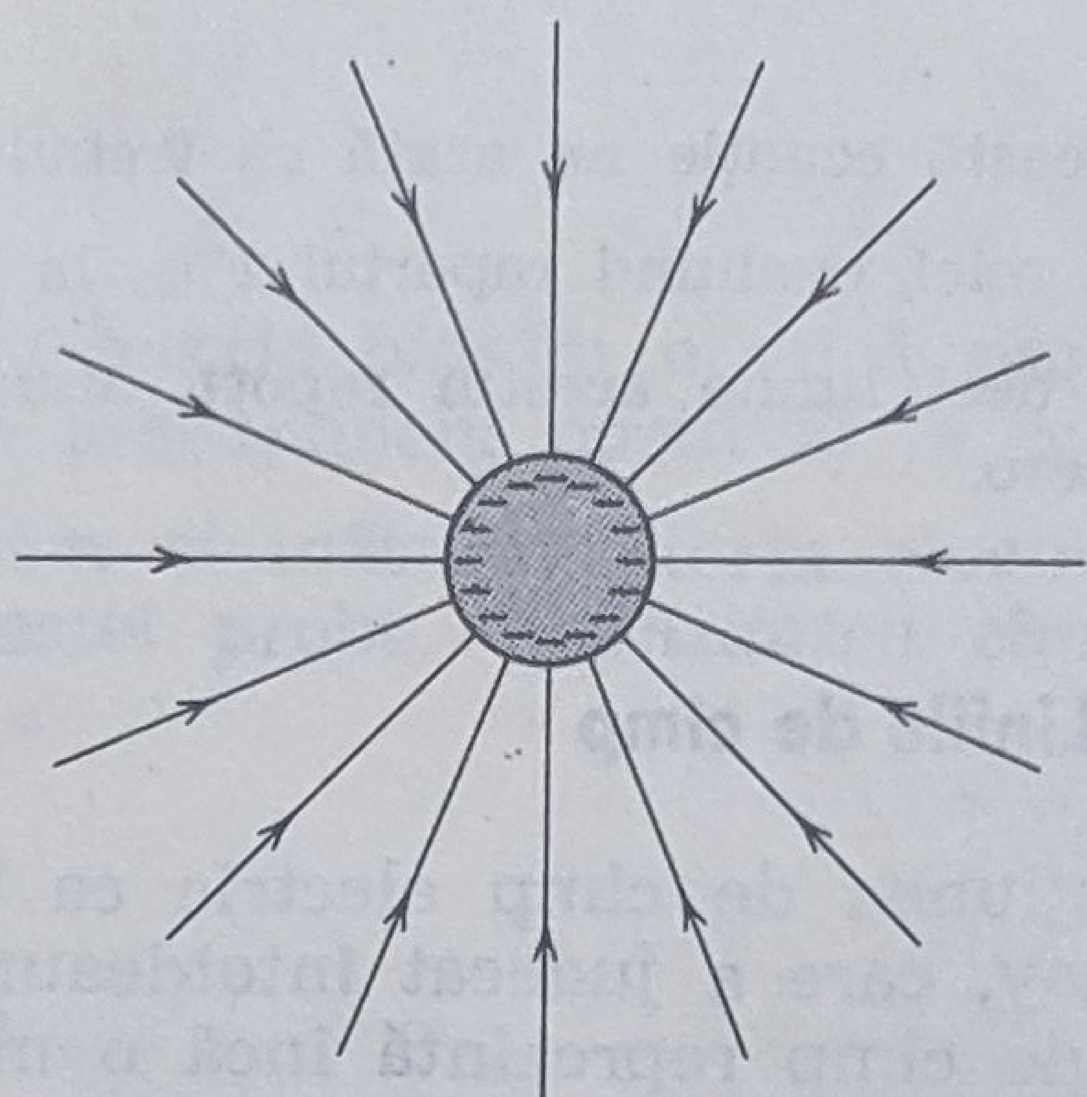


Figura 27-3. Liniile de cîmp ale unei sfere încărcate negativ

Să presupunem că pe sferă există N linii. Să desenăm o sferă imaginară concentrică de rază r; numărul de linii pe unitatea de suprafață transversală în orice punct de pe sferă este $N/4\pi r^2$. Deoarece E este proporțional cu acestea, putem scrie că

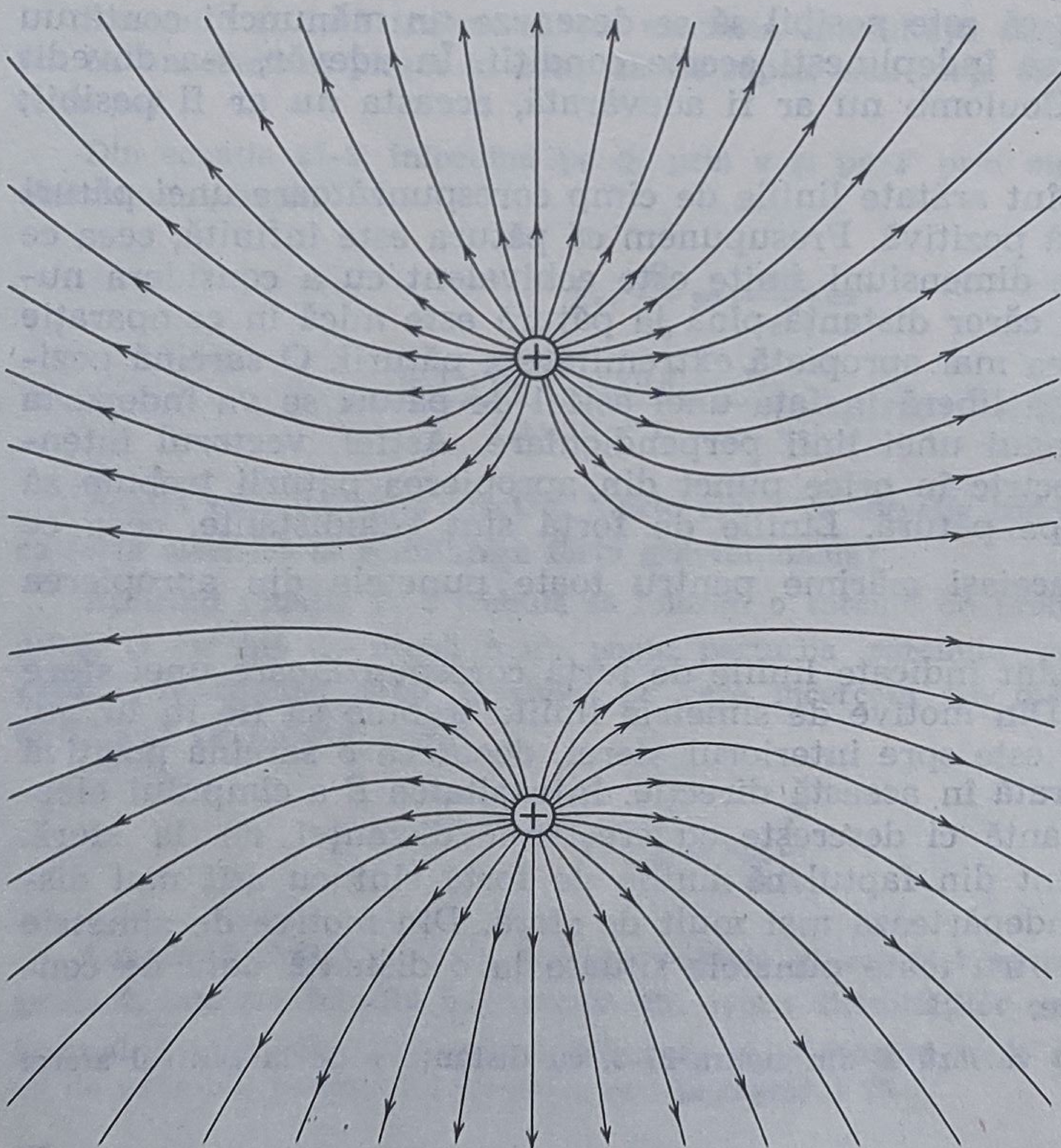


Figura 27-4. Liniile de cîmp corespunzătoare la două sarcini pozitive egale.

$$E \propto 1/r^2$$

În paragraful 27-4 vom deduce o relaţie exactă. Cum variază E cu distanţa pentru cazul unui fir lung uniform încărcat?

În figurile 27-4 şi 27-5 sînt indicate liniile de forţă corespunzătoare a două sarcini egale de acelaşi semn şi respectiv de semne contrare. După cum am mai spus, Michael Farady folosea foarte mult conceptul de linii de forţă în raţionamentele sale. Ele erau pentru el mult mai reale decît sînt, pentru oamenii de ştiinţă şi inginerii din ziua de azi. Este posibil să fim adepţii punctului de vedere al lui Faraday. Nu putem noi aproape „să vedem" cum liniile de cîmp caută parcă să îndepărteze sarcinile din fig. 27-4 şi să apropie pe cele din fig. 27-5? Studentul poate compara figura 27-5 cu figura 18-15 care reprezintă un cîmp de viteze al unui fluid în mişcare. În figura 27-6 este dată o reprezentare a liniilor de forţă din jurul unor conductori încărcaţi folosind seminţe de iarbă suspendate într-un lichid izolator.

Liniile de cîmp dau o imagine plastică a modului în care $\vec{E}$ variază într-o regiune dată din spaţiu. Totuşi ecuaţiile din electromagnetism (vezi tabela 38-3) sînt scrise în funcţie de intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ şi de alţi vectori de

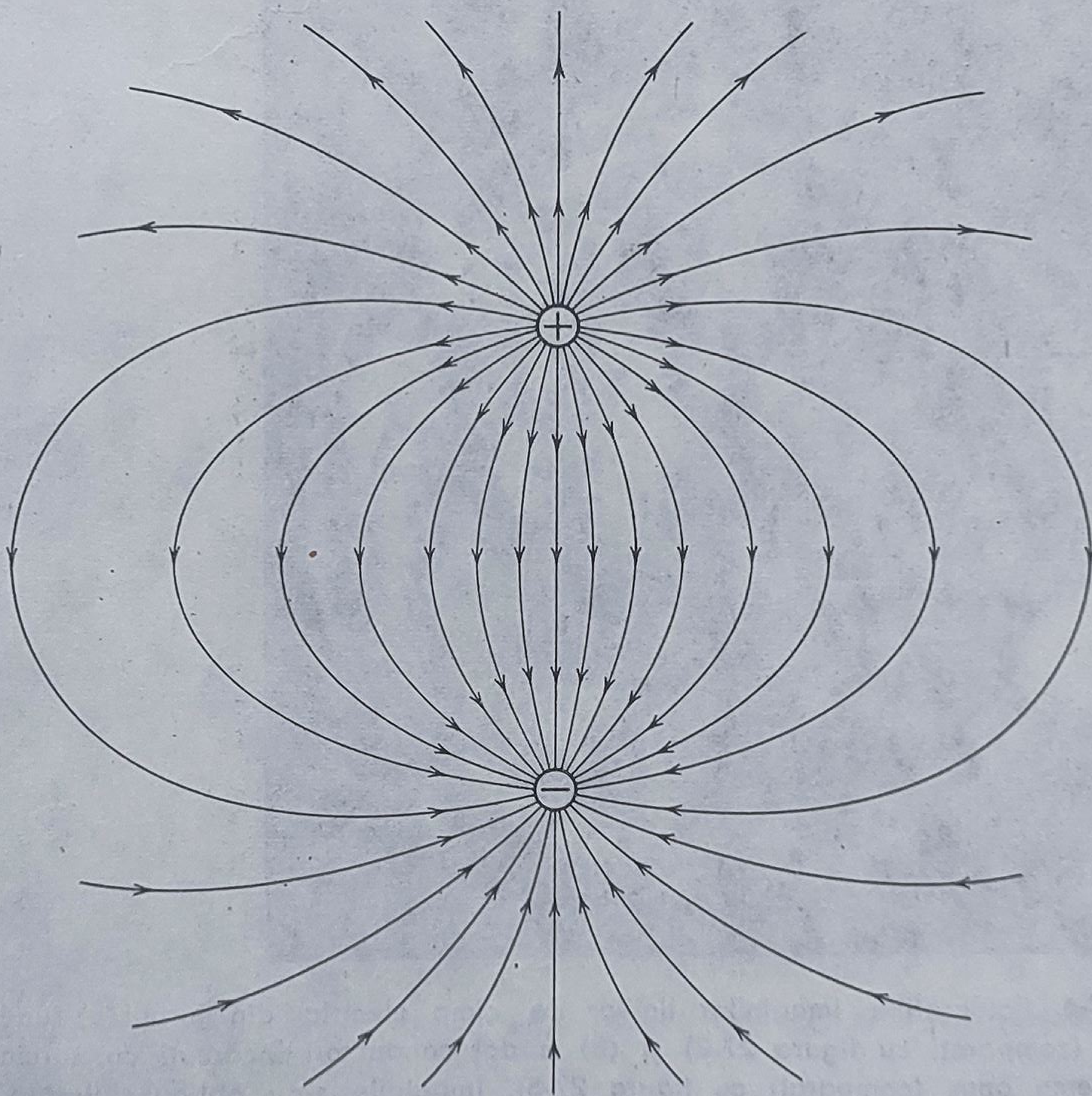


Figura 27-5. Liniile de cîmp pentru două sarcini egale dar de semn opus.

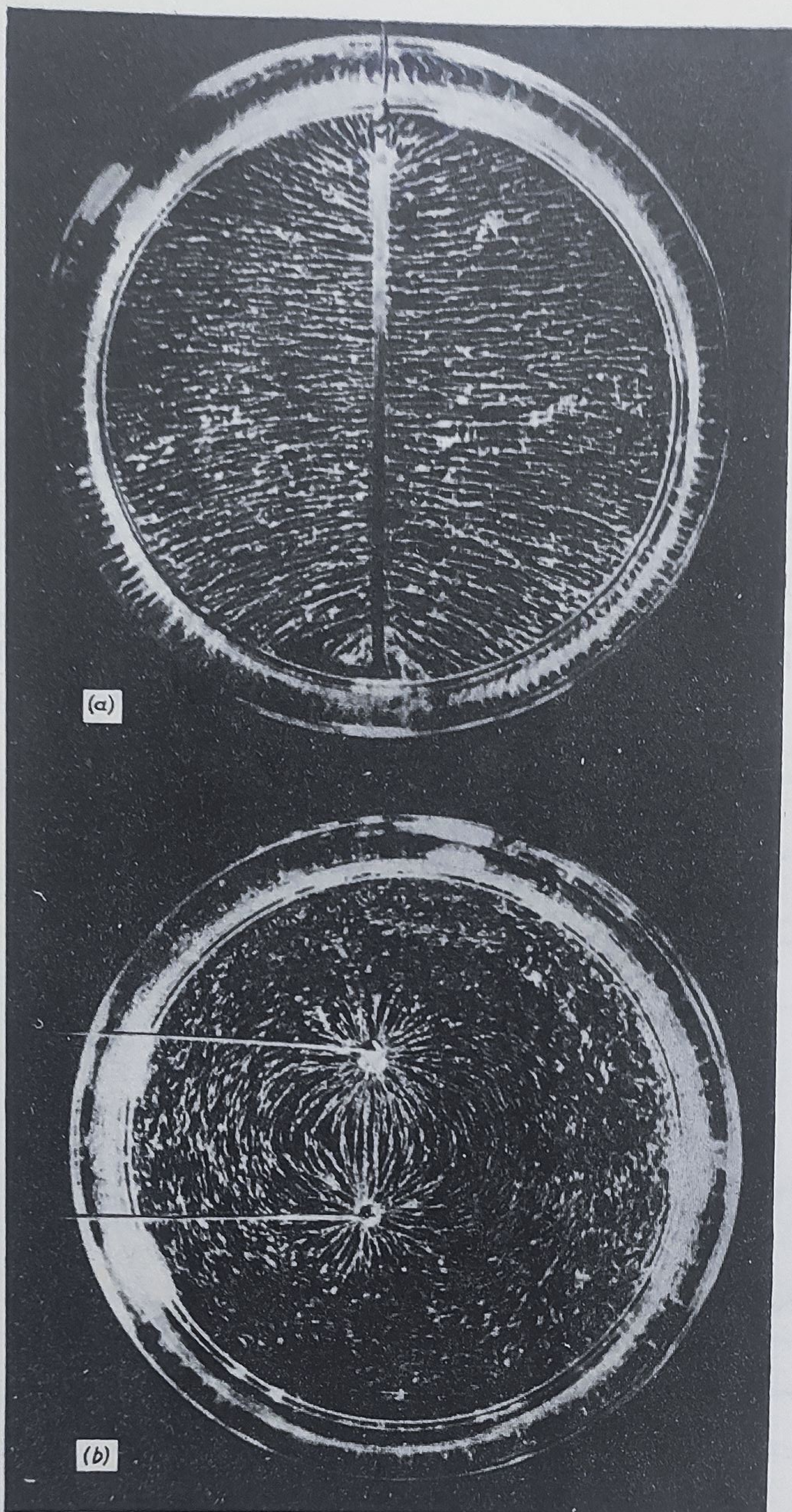


Figura 27-6. Fotografiile imaginilor liniilor de cîmp electric din jurul (a) unei plăci încărcate (comparați cu figura 27-2) și (b) a doi conductori încărcați cu sarcini egale dar de semn opus (comparați cu figura 27-5). Imaginile s-au obținut folosind o suspensie de semințe de iarbă într-un lichid izolator. (Prin amabilitatea Serviciului de Educație, Watertown, Mass.).

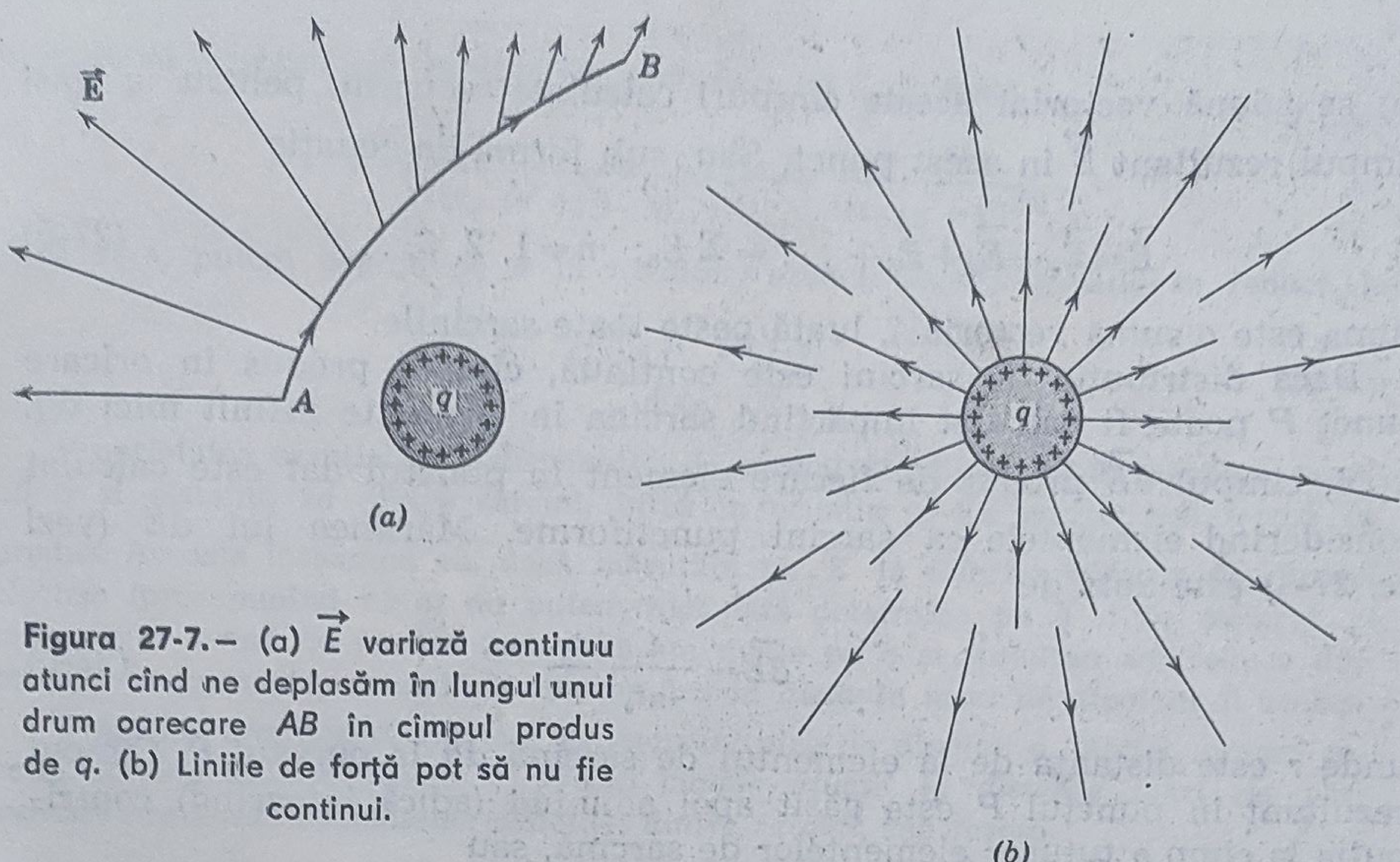


Figura 27-7. – (a) $\vec{E}$ variază continuu atunci cînd ne deplasăm în lungul unui drum oarecare AB în cîmpul produs de q. (b) Liniile de forță pot să nu fie continui.

cîmp și nu în funcție de liniile de cîmp. Atunci cînd o sarcină parcurge un drum oarecare într-un cîmp electric, cîmpul are o variație perfect continuă (vezi fig. 27-7 a). Acest mod de continuitate fizică este totuşi diferit de modul de continuitate a liniilor de cîmp, ce nu au o semnificație fizică reală. Aceasta se vede din faptul că nu este necesar ca liniile de forță să fie continue și pot fi reprezentate ca în figura 27-7 b. Aceste reprezentări respectă cele două proprietăți ale liniilor de forță enunțate la începutul acestui paragraf. Acest punct de vedere a fost subliniat în mod special de către Joseph Slepian.*

27-4 Calculul lui $\vec{E}$

Considerăm o sarcină de probă q_0 plasată la distanța r de o sarcină punctiformă q. Mărimea forței ce acționează asupra lui q_0 este dată de legea lui Coulomb

$$F=\frac{1}{4\pi\Sigma_0}\,\frac{qq_0}{r^2}.$$

Intensitatea cîmpului electric în punctul în care se află sarcina de probă este dată de ecuația 27-2

$$E=\frac{F}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}. \qquad (27\text{-}4)$$

Direcția lui $\vec{E}$ este radială, pornind de la q, cu sensul către exterior dacă q este pozitiv și către interior dacă q este negativ.

Calculul lui $\vec{E}$ pentru un grup de sarcini punctiforme: a) se calculează $\vec{E}_n$ produs de fiecare sarcină într-un punct dat *ca și cum aceasta ar fi singura sarcină prezentă.*

---

* American Journal of Physics, *19*, 87 (1951)

(b) se adună vectorial aceste cîmpuri calculate separat pentru a găsi cîmpul rezultant $\vec{E}$ în acest punct. Sau, sub formă de ecuaţie

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\ldots=\Sigma\,\vec{E}_n;\quad n=1,\,2,\,3,\,\ldots \tag{27-5}$$

Suma este o sumă vectorială, luată peste toate sarcinile.

Dacă distribuţia de sarcini este continuă, cîmpul produs în oricare punct P poate fi calculat împărţind sarcina în elemente infinit mici dq. Apoi, cîmpul $d\vec{E}$ produs de fiecare element în punctul dat este calculat considerînd elementele ca sarcini punctiforme. Mărimea lui $d\vec{E}$ (vezi ec. 27-4) este dată de

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dq}{r^2} \tag{27-6}$$

unde r este distanţa de la elementul de sarcină dq la punctul P. Cîmpul rezultant în punctul P este găsit apoi adunînd (adică integrînd) contribuţia la cîmp a tuturor elementelor de sarcină, sau

$$\vec{E}=\int d\vec{E}. \tag{27-7}$$

Integrarea, ca şi sumarea din ecuaţia 27-5, este o operaţie vectorială; în exemplul 5 vom vedea cum se poate rezolva o astfel de integrală într-un caz simplu.

Exemplul 3. *Un dipol electric.* În figura 27-8 sînt arătate două sarcini de mărime egală q dar de semne opuse, situate la distanţa $2a$ una de cealaltă. O astfel de configuraţie poartă numele de dipol electric. Imaginea liniilor de forţă corespunzătoare este cea din figura 27-5. Care este intensitatea cîmpului $\vec{E}$, produs de aceste sarcini în punctul P, la distanţa r în lungul perpendicularei dusă la jumătatea distanţei ce uneşte cele două sarcini? Presupunem $r \geqslant a$.

Ecuaţia 27-5 dă ecuaţia vectorială

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

unde, din ec. 27-4,*

$$E_1=E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{a^2+r^2}$$

Suma vectorială a lui $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ are direcţie verticală, sensul este în jos, iar mărimea

$$E=2E_1\cos\theta$$

Din figură vedem că

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

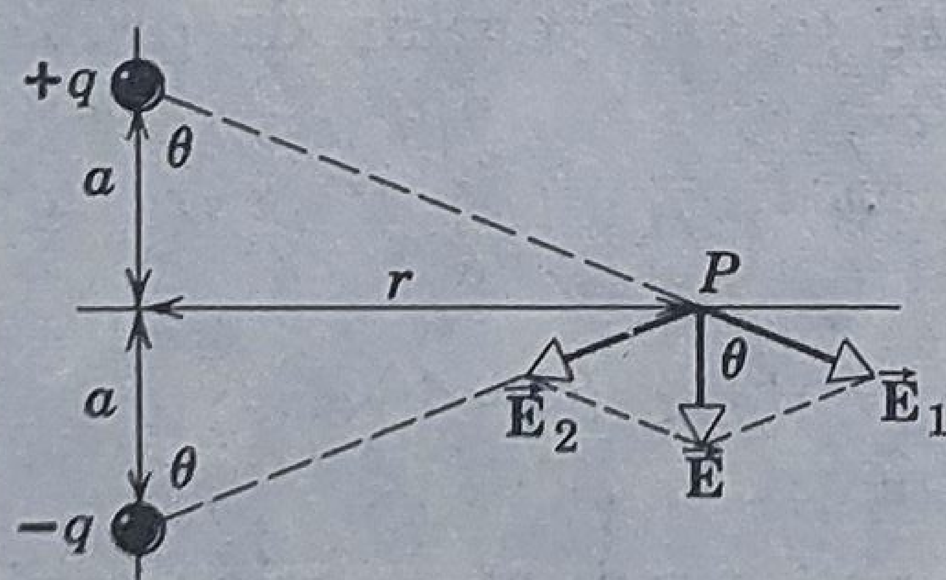


Figura 27-8. Exemplul 3.

---

* De observat că r din ec. 27-4 şi din această ecuaţie nu reprezintă acelaşi lucru.

Substituind expresiile lui E_1 şi cos θ în aceea a lui E obţinem

$$E=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(a^2+r^2)}\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

Dacă $r\gg a$, putem neglija pe a la numitor; atunci, această ecuaţie se reduce la

$$E\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2a)(q)}{r^3} \tag{27-8 a}$$

Proprietatea esenţială ale distribuţiei de sarcini din figura 27-8: mărimea sarcinii q şi distanţa $2a$ dintre sarcini, intră în ecuaţia 27-8 a numai sub formă de produs. Aceasta înseamnă că, dacă măsurăm pe $\vec{E}$ la diferite distanţe de dipolul electric (presupunînd $r\gg a$) nu putem niciodată determina pe q şi $2a$ separat ci numai sub formă de produs $2aq$; dacă am dubla pe q şi simultan am reduce distanţa a la jumătate, cîmpul electric produs *la distanţe mari de dipol* ar fi acelaşi.

Produsul $2aq$ poartă numele de *moment electric dipolar p*. Astfel, putem rescrie această ecuaţie pentru E, *pentru puncte situate la distanţe mari pe perpendiculara dusă la jumătatea distanţei dintre sarcini*, sub forma

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \tag{27-8 b}$$

Atît rezultatul pentru puncte depărtate *în lungul axei dipolului* (vezi problema 10) cît şi rezultatul general pentru orice punct depărtat (vezi problema 23) conţine mărimile $2a$ şi q numai sub formă de produs $2aq\,(=p)$. În rezultatul general pentru puncte depărtate E variază cu r ca $1/r^3$ analog cu ecuaţia 27-8 b.

Dipolul din figura 27-8 este format din două sarcini egale şi de semn opus situate una în apropierea celeilalte, astfel că, la distanţe mari cîmpurile lor separate aproape se anulează dar nu complet. În acest fel, este uşor de înţeles că $E\ (r)$ pentru un dipol variază ca $1/r^3$ (ec. 27-8 b), pe cînd pentru o sarcină punctiformă $E\ (r)$ scade mai lent, adică ca $1/r^2$ (ec. 27-4).

Exemplul 4. Două sarcini $q_1\,(=+1{,}0\times10^{-6}\text{ C})$ şi $q_2\,(=+2{,}0\times10^{-6}\text{ C})$ sînt situate la 10 cm una de alta (fig. 27-9). În ce punct de pe linia ce numeşte cele două sarcini intensitatea cîmpului electric este egală cu zero?

Punctul trebuie să fie situat între sarcini deoarece numai astfel forţele exercitate de q_1 şi q_2 asupra sarcinii de probă sînt opuse una alteia. Dacă $\vec{E}_1$ este intensitatea cîmpului electric produs de q_1 iar $\vec{E}_2$ produs de q_2, trebuie să avem

$$E_1=E_2$$

sau (vezi ec. 27-4)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{(l-x)^2}$$

unde x este distanţa de la q_1 şi $l=10$ cm. Rezolvînd în funcţie de x obţinem:

$$x=\frac{l}{1+\sqrt{q_1/q_2}}=\frac{10\text{cm}}{1+\sqrt{2}}=4{,}1\text{ cm.}$$

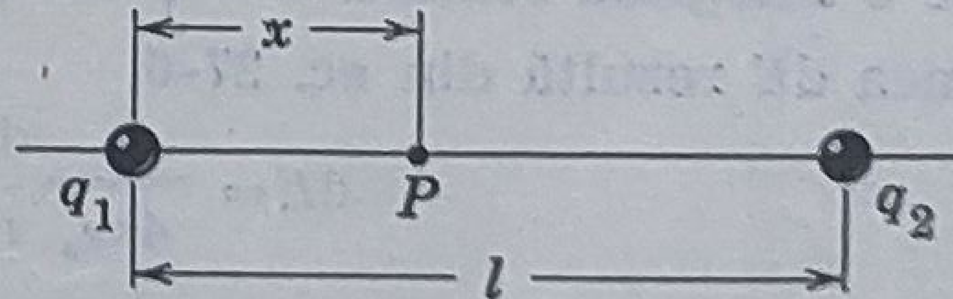


Figura 27-9. Exemplul 4.

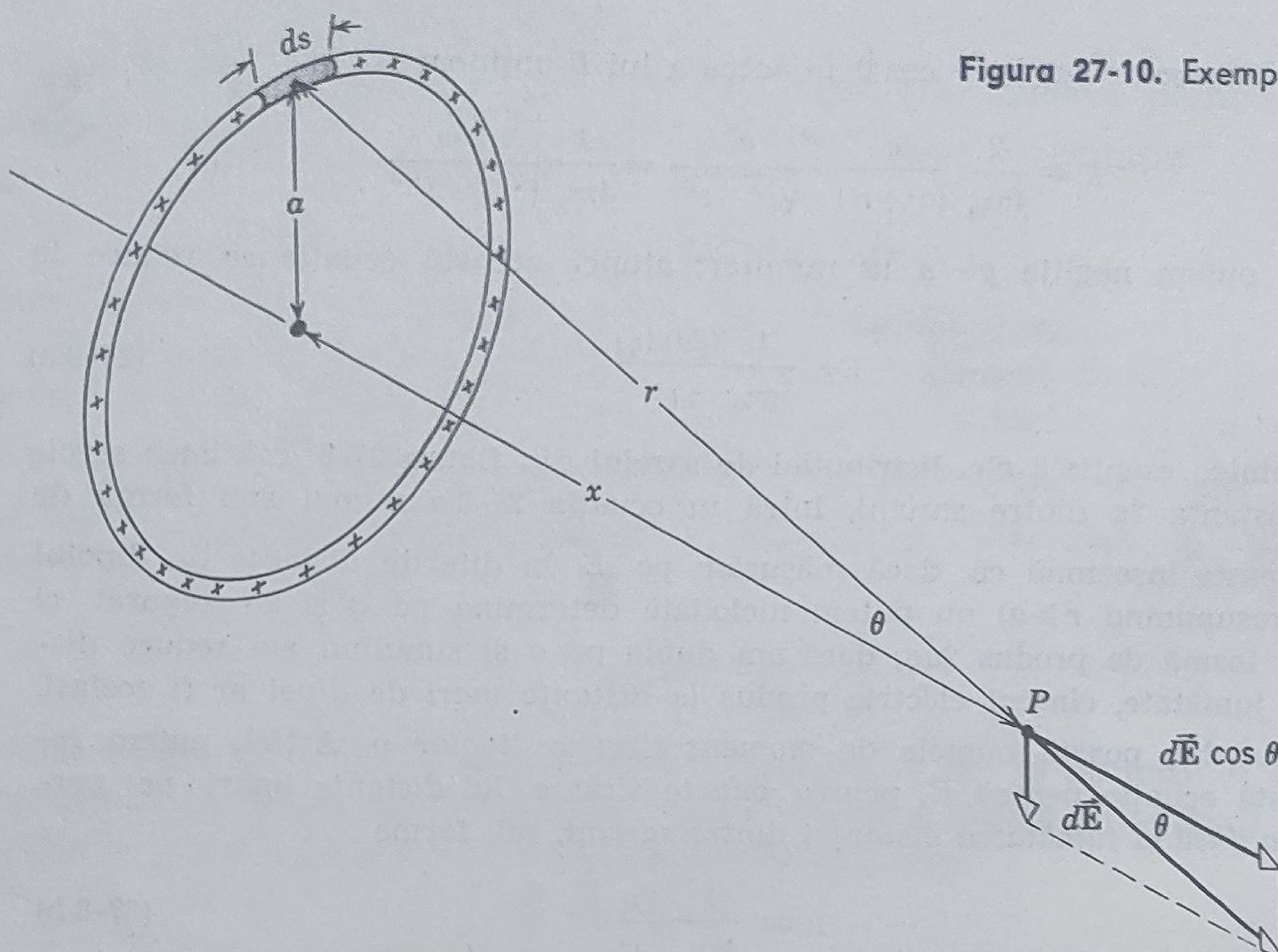


Figura 27-10. Exemplul 5.

Studentul va completa etapele intermediare care lipsesc. De ce a doua rădăcină a ecuației de gradul doi poate fi lăsată deoparte?

Exemplul 5. Se dă un inel de sarcină q și de rază a (fig. 27-10). Să se calculeze $\vec{E}$ pentru punctele de pe axa inelului la distanța x de centrul său.

Considerăm un element infinit mic din inel de lungime ds, situat în porțiunea superioară a inelului din fig. 27-10. El conține un element de sarcină dat de

$$dq = q\frac{ds}{2\pi a}$$

unde $2\pi a$ este circumferința inelului. Acest element produce un cîmp electric $d\vec{E}$ în punctul P.

Intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului rezultant în punctul P se obține integrînd efectele tuturor elementelor infinit mici ce formează inelul. Din considerente de simetrie acest cîmp rezultant trebuie să fie în lungul axei inelului. Astfel numai componenta lui $d\vec{E}$ paralelă cu axa contribuie la rezultatul final. Componenta perpendiculară pe axă este anulată de componenta egală și de semn contrar produsă de elementul de sarcină din partea opusă a inelului.

Astfel, integrala vectorială generală (ec. 27-7)

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

devine o integrală scalară $E = \int dE \cos\theta$.

Mărimea dE rezultă din ec. 27-6,

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\,ds}{2\pi a}\right)\frac{1}{a^2+x^2}.$$

Din figura 27-10 avem $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Observînd faptul că, pentru un punct P dat, x are aceeaşi valoare pentru toate elementele de sarcină şi nu este o variabilă, obţinem

$$E=\int dE\cos\theta=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,ds}{(2\pi a)\,(a^2+x^2)}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(2\pi a)(a^2+x^2)^{3/2}}\int ds$$

Integrala este circumferinţa inelului ($=2\pi a$), astfel că

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

Pentru $x=0$, se reduce această expresie pentru E la un rezultat aşteptat? Pentru $x\ll a$ putem neglija pe a de la numitorul acestei ecuaţii, obţinînd

$$E\simeq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

Acest rezultat era de aşteptat (comparaţi cu ec. 27-4) deoarece la distanţe suficient de mari, inelul se comportă ca o sarcină punctiformă q.

Exemplul 6. *Distribuţie liniară de sarcină.* În figura 27-11 se dă o secţiune într-o linie infinită de sarcină, a cărei densitate liniară de sarcină (adică, sarcina pe unitatea de lungime, măsurată în C/m) are valoarea constantă λ. Calculaţi cîmpul $\vec{E}$ la distanţa y de linie.

Mărimea cîmpului dE produs de elementul de sarcină dq ($=\lambda\,dx$) este dată de, folosind ec. 27-6;

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{y^2+x^2}.$$

Vectorul $d\vec{E}$, după cum se vede din figura 27-11, are componentele

$$dE_x=-\sin\theta \qquad \text{şi} \qquad dE_y=dE\cos\theta$$

Semnul minus din faţa lui dE_x arată că dE_x este antiparalel cu axa x. Componentele după x şi după y ale vectorului rezultant $\vec{E}$ în punctul P sînt date de

$$E_x=\int dE_x=-\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\sin\theta\,dE \qquad \text{şi} \qquad E_y=\int dE_y=\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\cos\theta\,dE$$

E_x trebuie să fie egal cu zero, deoarece fiecărui element de sarcină din partea dreaptă îi corespunde un element de sarcină în partea stîngă, astfel încît contribuţiile lor la cîmp în direcţia x se anulează. Astfel $\vec{E}$ are numai componentă după direcţia y. Deoarece contribuţiile E_y ale jumătăţii drepte şi stîngi a distribuţiei liniare sînt egale, putem scrie

$$E=E_y=2\int_{x=0}^{x=\infty}\cos\theta\,dE$$

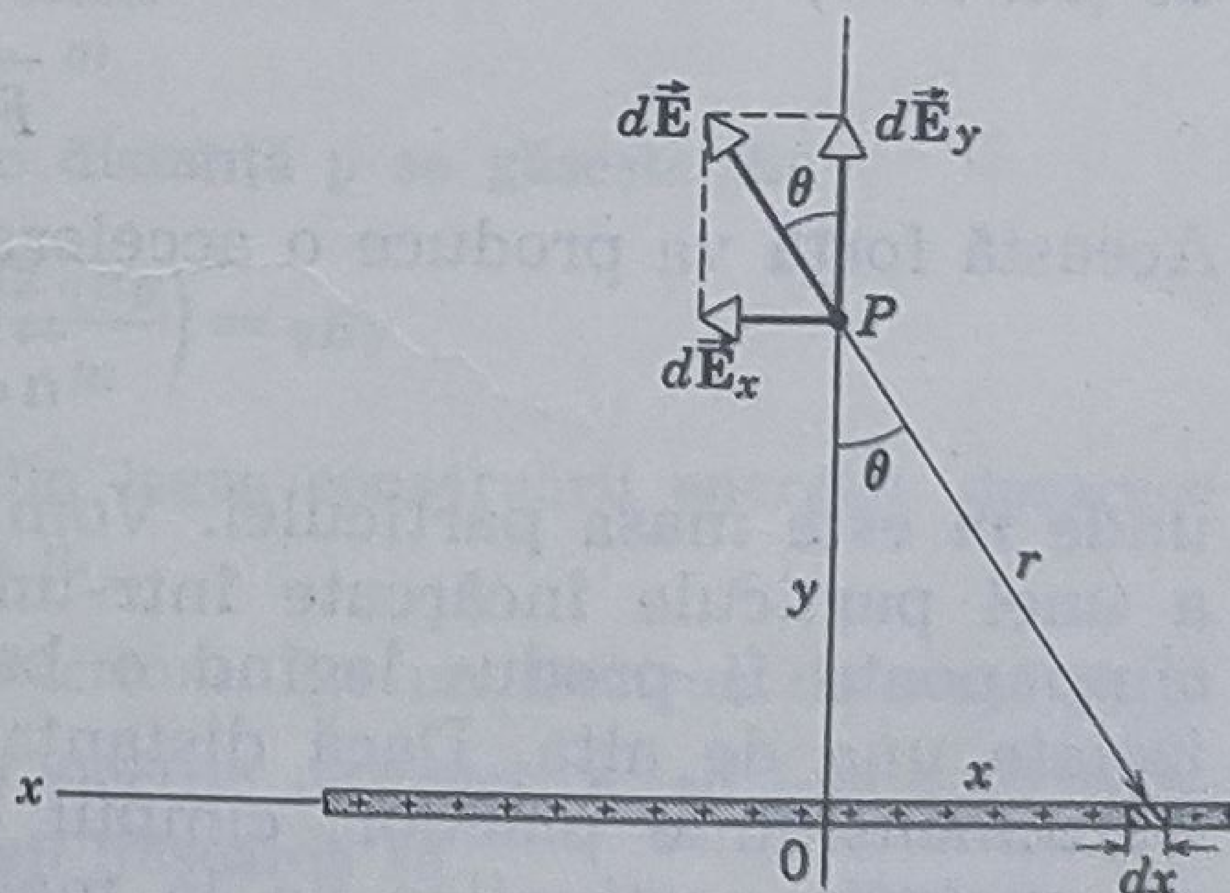


Figura 27-11. Exemplul 6. O porţiune dintr-o distribuţie liniară infinită de sarcină.

Observați că am modificat limita inferioară a integralei și am introdus un factor doi.

Introducînd expresia lui dE în această ecuație obținem

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x=\infty}\cos\theta\frac{dx}{y^2+x^2}$$

Din figura 27-11 vedem că mărimile θ și x nu sînt independente. Trebuie să eliminăm una din ele, de exemplu x. Relația dintre x și θ este (vezi figura):

$$x=y\operatorname{tg}\theta$$

Diferențiind, obținem $dx=y\sec^2\theta\, d\theta$
Substituind aceste două expresii, în final obținem

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\cos\theta d\theta$$

Studentul trebuie să verifice atent această etapă de calcul, deoarece acum limitele de integrare sînt pentru Θ și nu pentru x. De exemplu, după cum se vede din figura 27-11, cînd $x\to+\infty$, $\theta\to\pi/2$. Această ecuație se integrează ușor

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\left|\sin\theta\right|_0^{\pi/2}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

Studentul se poate întreba ce sens are rezolvarea unei probleme despre o distribuție liniară infinită de sarcină cînd orice distribuție reală are lungime finită? (vezi problema 15). Totuși pentru puncte suficient de apropiate de distribuții liniare finite și suficient de depărtate de extremitățile lor, ecuația pe care am dedus-o dă valori atît de apropiate de cele corecte încît diferența poate fi neglijată în multe situații practice. În mod obișnuit nu este necesar să se rezolve exact fiecare tip de distribuție particulară întîlnit în problemele practice. În adevăr, dacă nu s-ar face idealizări și aproximații, marea majoritate a problemelor importante din fizică și tehnică nu ar putea fi rezolvate deloc.

27-5 O sarcină punctiformă într-un cîmp electric

Un cîmp electric exercită asupra unei particule încărcate o forță dată de (ec. 27-2)

$$\vec{F}=\vec{E}q$$

Această forță va produce o accelerație

$$\vec{a}=\vec{F}/m$$

unde m este masa particulei. Vom considera două exemple de accelerare a unei particule încărcate într-un cîmp electric uniform. Un astfel de cîmp poate fi produs legînd o baterie la două plăci metalice paralele, izolate una de alta. Dacă distanța dintre plăci este mică în comparație cu dimensiunile plăcilor, cîmpul dintre ele va fi suficient de uniform cu excepția porțiunilor de la margini. De notat că la calculul mișcării

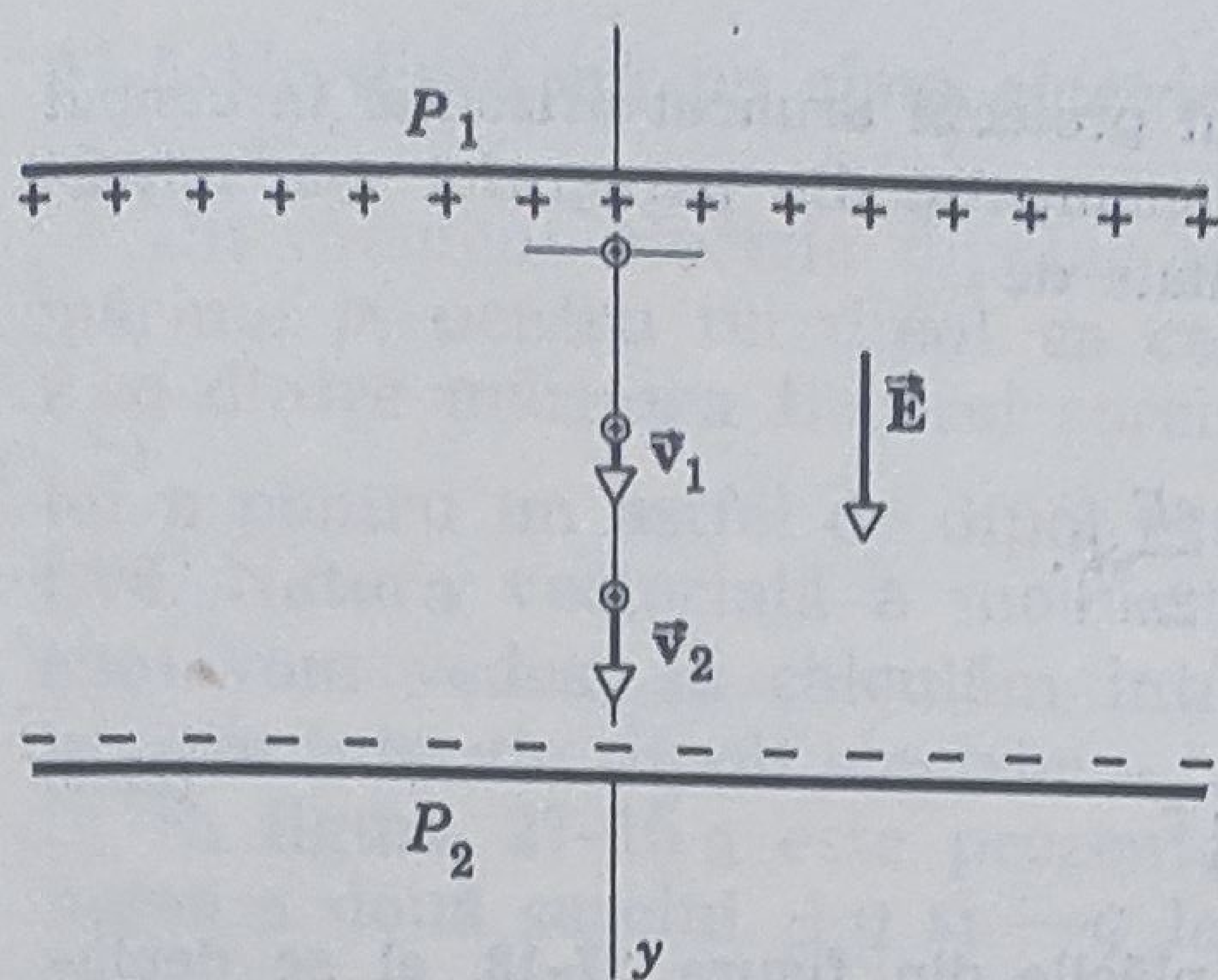


Figura 27-12. O sarcină în repaus este lăsată să se mişte în cîmpul electric uniform produs între două plăci de metal P_1 şi P_2 încărcate cu sarcini de semn opus.

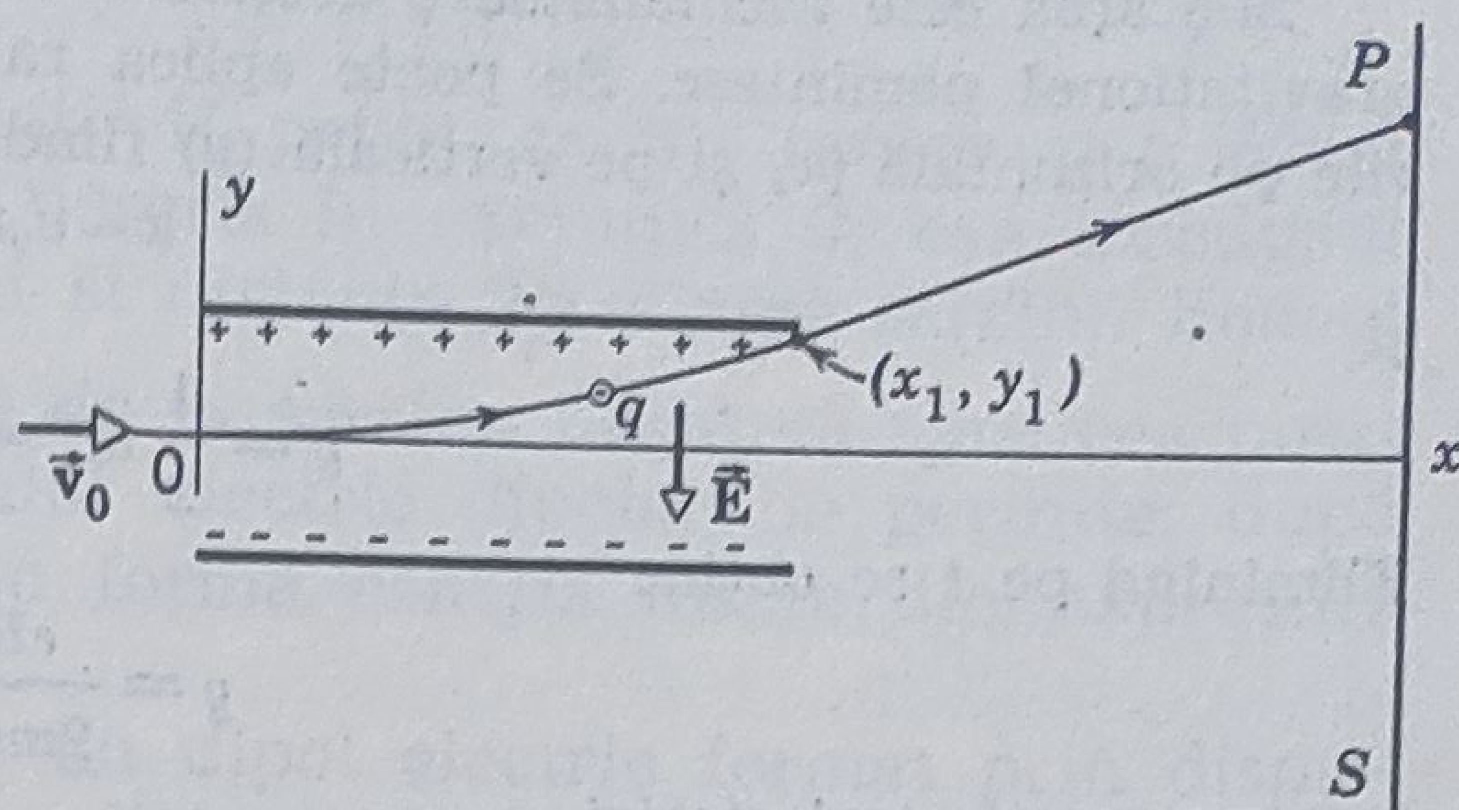


Figura 27-13. Exemplul 8. Un electron este introdus într-un cîmp electric uniform.

unei particule într-un cîmp produs de sarcini exterioare, cîmpul produs de particula însăşi (adică *cîmpul propriu*) este neglijat. De exemplu, cîmpul gravitaţional pămîntesc nu are nici o acţiune asupra lui însăşi, ci numai asupra unui alt obiect, să zicem o piatră, plasată în acest cîmp.

Exemplul 7. O particulă de masă m şi sarcină q se găseşte în repaus într-un cîmp electric uniform (fig. 27-12) şi apoi este lăsată liberă. Descrieţi mişcarea sa.

Mişcarea este asemănătoare aceleia a unui corp în cădere în cîmpul gravitaţional pămîntesc. Acceleraţia (constantă) este dată de

$$a=\frac{F}{m}=\frac{qE}{m}$$

Se aplică ecuaţiile mişcării uniform accelerate (tabelul 3-1). Cu $v_0=0$, ele sînt

$$v=at=\frac{qEt}{m}$$

$$y=\frac{1}{2}at^2=\frac{qEt^2}{2m}$$

şi

$$v^2=2ay=\frac{2qEy}{m}$$

Energia cinetică atinsă după deplasarea pe o distanţă y se găseşte din

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{2qEy}{m}\right)=qEy$$

Acest rezultat de asemenea rezultă direct din legea conservării energiei, deoarece o forţă constantă qE acţionează pe o distanţă y.

Exemplul 8. *Devierea unui fascicul de electroni.* Fie un electron de masă m şi de sarcină e ce intră într-o regiune de cîmp electric uniform $\vec{E}$ cu viteza v_0, normală la cîmpul electric (figura 27-13). Descrieţi mişcarea sa.

Mişcarea este asemănătoare aceleia a unui proiectil aruncat orizontal în cîmpul gravitaţional pămîntesc. Se poate aplica raţionamentul din paragraful 4-3; mişcările pe orizontală (x) şi pe verticală (y) fiind date de

$$x = v_0 t$$

şi

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{eE}{2m} t^2.$$

Eliminînd pe t se obţine

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 \qquad (27\text{-}9)$$

pentru ecuaţia traiectoriei.

Cînd electronul iese din spaţiul dintre plăcile din figura 27-13, el se deplasează în continuare (neglijînd gravitaţia) pe o traiectorie în linie dreaptă tangentă la parabolă în punctul de ieşire. Putem face ca electronul să cadă pe un ecran fluorescent S situat la o oarecare distanţă de plăci. El va fi vizibil, împreună cu alţi electroni ce urmează acelaşi parcurs, sub forma unui mic punct luminos; acesta este principiul *tubului catodic cu deviaţie electrostatică*.

Exemplul 9. Cîmpul electric dintre plăcile unui tub catodic cu deviaţie electrostatică este de $1{,}2 \cdot 10^4$ N/C. Ce deviere va suferi un electron care intră perpendicular pe cîmp cu o energie cinetică de 2 000 eV ($=3{,}2 \cdot 10^{-16}$J), valoare des întîlnită în dispozitivele experimentale? Lungimea plăcilor de deflexie este de 1,5 cm.

Amintindu-ne că $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$, putem rescrie ec. 27-9 sub forma

$$y = \frac{eEx^2}{4E_c}$$

Dacă x_1 este poziţia pe orizontală a extremităţii plăcii, y_1 va fi devierea corespunzătoare (vezi fig. 27-13) sau

$$y_1 = \frac{eEx_1^2}{4E_c} = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{C})\,(1{,}2 \cdot 10^4\text{N/C})\,(1{,}5 \cdot 10^{-2}\text{m})^2}{(4)\,(3{,}2 \cdot 10^{-16}\text{ J})} = 3{,}4 \cdot 10^{-4}\text{ m} = 0{,}34\text{ mm}$$

Devierea măsurată pe ecranul fluorescent şi nu pe plăcile de deflexie va fi mult mai mare.

Exemplul 10. O sarcină de probă pozitivă punctiformă q_0 este situată la jumătatea distanţei dintre două sarcini pozitive egale q. Ce forţă acţionează asupra ei sau în apropierea acestui punct P?

Din considerente de simetrie, forţa în acest punct este zero, astfel că particula este în echilibru; rămîne de determinat tipul de echilibru. În figura 27-14 (comparaţi-o cu figura 27-4) sînt arătaţi vectorii $\vec{E}$ în patru puncte din jurul lui P. Dacă sarcina de probă se deplasează în lungul axei z, intervine o forţă de *readucere*. Cu toate acestea echilibrul este nestabil pentru mişcarea în planul x—y. În acest fel avem aci un echivalent tridimensional al unui *punct de echilibru nestabil* (vezi fig. 14-8). Care va fi tipul de echilibru pentru o sarcină de probă negativă?

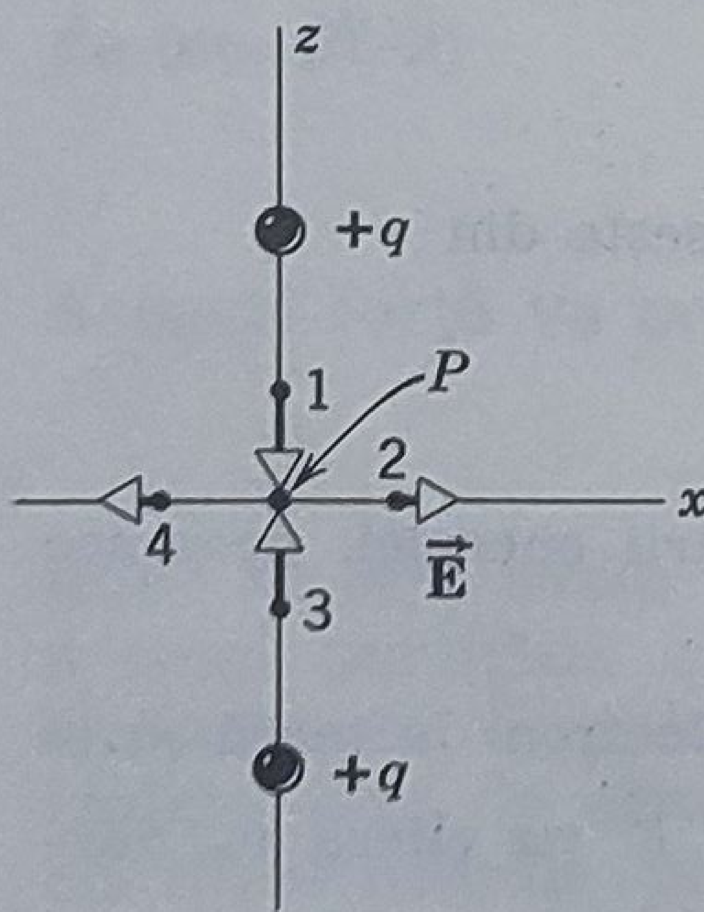


Figura 27-14. Exemplul 10. Cîmpul electric în patru puncte din jurul punctului P situat la jumătatea distanţei dintre două sarcini pozitive egale.

27-6 Un dipol într-un cîmp electric

Un moment electric dipolar poate fi privit ca un vector $\vec{p}$ a cărui mărime p, pentru un dipol ca cel descris în exemplul 3, este produsul $2\,aq$ dintre mărimea fiecărei sarcini și distanța $2\,a$ dintre sarcini. Sensul lui $\vec{p}$ pentru un astfel de dipol este de la sarcina negativă spre cea pozitivă. Natura vectorială a momentului electric dipolar ne permite, după cum vom vedea, să calculăm într-o formă concisă multe din expresiile în care intervin dipoli electrici.

În figura 27-15 a este prezentat un dipol electric format prin dispunerea a două sarcini $+q$ și $-q$ la o distanță fixă $2\,a$ una de alta. Sistemul este plasat într-un cîmp electric *exterior* uniform $\vec{E}$, în care momentul dipolar $\vec{p}$ face unghiul θ cu cîmpul. După cum este arătat, asupra sarcinilor acționează două forțe egale și de semn opus $\vec{F}$ și $-\vec{F}$, unde

$$F=q\,E.$$

Forța netă este evident egală cu zero, dar există un cuplu diferit de zero în jurul unei axe ce trece prin 0 (vezi ec. 12-2) dat de

$$M=2\,F\,(a\sin\theta)=2\,a\,F\sin\theta.$$

Combinînd aceste două ecuații și amintindu-ne că $p=(2\,a)\,(q)$, obținem

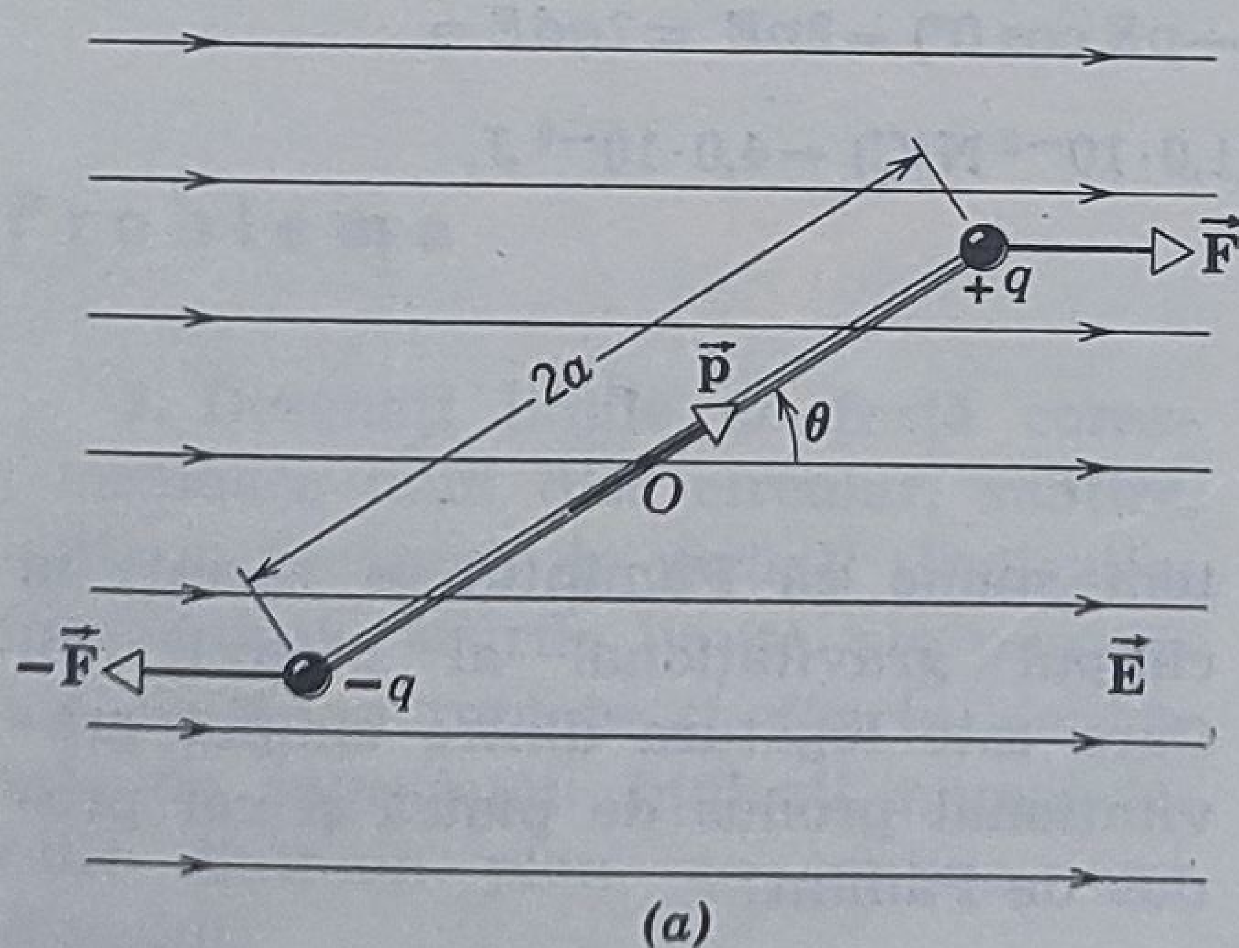
$$M=2\,a\,q\,E\sin\theta=p\,E\sin\theta. \qquad (27\text{-}10)$$

Astfel, un dipol electric plasat într-un cîmp electric exterior $\vec{E}$ este supus unui cuplu ce tinde să-l alinieze cu direcția cîmpului. Ecuația 27-10 poate fi scrisă sub formă vectorială

$$\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}, \qquad (27\text{-}11)$$

vectorii fiind arătați în figura 27-15 b.

Pentru modificarea orientării unui dipol electric situat într-un cîmp exterior trebuie efectuat un lucru mecanic (pozitiv sau negativ) de către un agent exterior. Acest lucru mecanic este înmagazinat sub formă de



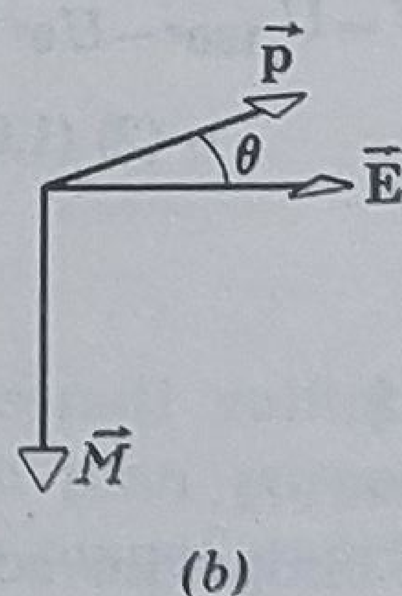


Figura 27-15. (a) Un dipol electric într-un cîmp exterior uniform. (b) O privire laterală ilustrînd $\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}$.

energie potenţială U în sistemul format din dipol şi dispozitivul folosit pentru a produce cîmpul exterior. Dacă θ din figura 27-15 a are valoarea iniţială θ_0, lucrul mecanic necesar pentru a roti axa dipolului cu unghiul θ, se obţine din (vezi tabela 12-2)

$$W=\int dW=\int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta=U$$

unde M este cuplul exercitat de agentul care efectuează lucrul mecanic. Combinînd această ecuaţie cu ecuaţia 27-10 obţinem

$$U=\int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin\theta\, d\theta=pE\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$=pE\left|-\cos\theta\right|_{\theta_0}^{\theta}$$

Deoarece ne interesează numai *variaţii* ale energiei potenţiale, putem alege pentru orientarea de referinţă θ_0, orice valoare convenabilă, în acest caz 90°. Aceasta dă

$$U=-pE\cos\theta \tag{27-12}$$

sau, sub formă vectorială,

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}. \tag{27-13}$$

Exemplul 11. Un dipol electric este format din două sarcini de semn opus de mărime $q=1{,}0\times10^{-6}$ C, la distanţa $d=2{,}0$ cm. Dipolul este situat într-un cîmp electric de $1{,}0\times10^{5}$ N/C.

(a) Care este cuplul maxim pe care cîmpul îl exercită asupra dipolului? Cuplul maxim se găseşte punînd $\theta=90°$, în ec. 27-10

$$M=pE\sin\theta=kdE\sin\theta=(1{,}0\cdot10^{-6}\text{ C})\,(0{,}020\text{ m})\,(1{,}0\cdot10^{5}\text{ N/C})\,(\sin 90°)$$

$$=2{,}0\cdot10^{-3}\text{ N}\cdot\text{m}$$

(b) Care este lucrul mecanic necesar pentru a inversa poziţia dipolului, presupunînd că iniţial era paralel cu cîmpul ($\theta=0$)? Lucrul mecanic este diferenţa dintre energia potenţială U în poziţiile $\theta=180°$ şi $\theta=0$. Din ec. 27-12

$$W=U_{180°}-U_{0°}=(-pE\cos 180°)-(-pE\cos 0°)=2pE=2qdE=$$

$$=(2)\,(1{,}0\cdot10^{-6}\text{ C})\,(0{,}020\text{ m})\,(1{,}0\cdot10^{-5}\text{ N/C})=4{,}0\cdot10^{-3}\text{ J}.$$

Întrebări

1. Numiţi cîmpurile scalare şi vectoriale pe care le cunoaşteţi.

2. (a) Considerînd atracţia gravitaţională dintre Pămînt şi o piatră, putem spune că Pămîntul se găseşte în cîmpul gravitaţional al pietrei? (b) Care este legătura dintre cîmpul gravitaţional produs de piatră şi cel produs de Pămînt?

3. O bilă încărcată pozitiv este atîrnată de un fir lung de mătase. Dorim să măsurăm pe $\vec{E}$ într-un punct situat în planul orizontal al sarcinii atîrnate. Pentru aceasta aducem o sarcină de probă q_0 în punctul dat și măsurăm $\vec{F}/q_0 \cdot F/q_0$ va fi mai mic, egal sau mai mare decît E în acel punct?

4. Luînd în considerare cuantificarea sarcinii electrice (sarcina unui electron reprezintă unitatea fundamentală de sarcină), cum putem justifica procedeul sugerat în ecuația 27-3?

5. Forța asupra sarcinii din partea inferioară a figurii 27-5 este îndreptată în sus și este finită. Totuși, îngrămădirea liniilor de forță, sugerează că E este infinit de mare în punctul în care se află această sarcină. Dar cînd o sarcină se găsește într-un cîmp infinit de mare, asupra ei trebuie să acționeze o forță infinit de mare. Care este soluția acestei dileme?

6. Liniile de forță electrice nu se intersectează niciodată. De ce?

7. De ce liniile de forță la mare distanță de cele două sarcini din figura 27-4 atunci cînd sînt prelungite înspre sarcini se întîlnesc într-un punct din centrul figurii (ca și cum ar porni din centrul ei)?

8. În figura 27-2 se vede că $\vec{E}$ are aceeași valoare pentru toate punctele din fața unei pături infinite uniform încărcate cu sarcini. Este corect acest lucru? S-ar putea crede că în apropierea păturii cîmpul ar trebui să fie mai intens deoarece sarcinile sînt mai apropiate.

9. Două sarcini punctiforme a căror mărime și semn nu le cunoaștem sînt situate la distanța d una de alta. Intensitatea cîmpului electric este zero într-un punct situat între ele, pe linia ce le unește. Ce puteți spune despre aceste sarcini?

10. Comparați modul de variație al lui E cu r pentru: (a) o sarcină punctiformă (ec. 27-4), (b) un dipol (ec. 27-8 a) și (c) un cuadrupol (problema 18).

11. Dacă o sarcină punctiformă q de masă m este lăsată liberă din poziția de echilibru într-un cîmp neuniform, ea se va deplasa în lungul unei linii de forță?

12. Un dipol electric este plasat într-un cîmp electric *neuniform*. Este diferită de zero forța totală asupra sa?

13. Un dipol electric este plasat în repaos într-un cîmp electric exterior uniform, ca în figura 27-15 a, și lăsat apoi liber. Discutați mișcarea sa.

14. Momentul dipolar $\vec{p}$ al unui dipol electric este paralel cu un cîmp electric extrior $\vec{E}$. (a) Echilibrul său este stabil sau instabil? (b) Discutați natura echilibrului dacă $\vec{p}$ și $\vec{E}$ sînt antiparaleli.

Probleme

1. Desenați liniile de forță corespunzătoare unui disc circular, subțire, uniform încărcat, de rază R (Indicație: Considerați cazurile limită ale punctelor foarte apropiate și foarte depărtate de suprafață). Indicați numai liniile dintr-un plan ce conține axa discului.

2. (a) Desenați calitativ liniile de forță dintr-un plan parpendicular, corespunzătoare unor distribuții liniare de sarcină, paralele și lungi. Presupunem că intersecțiile liniilor de forță cu un astfel de plan formează un triunghi echilateral și că fiecare distribuție liniară de sarcină are aceeași

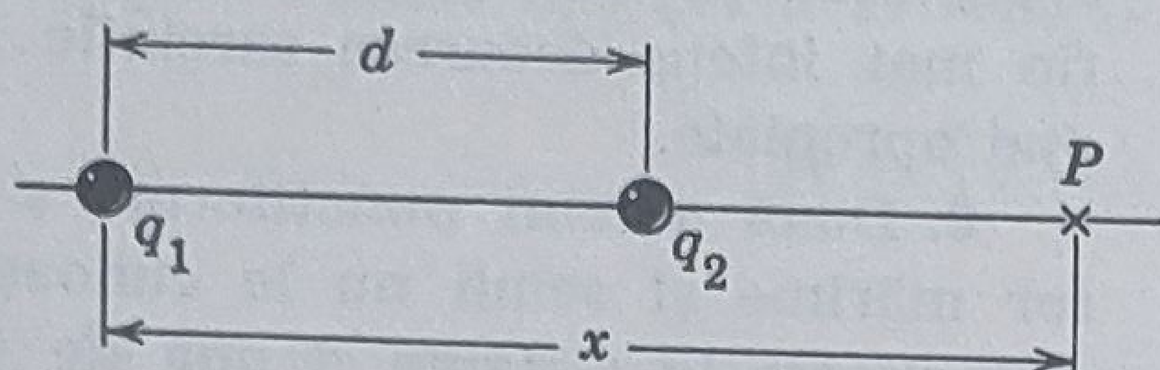


Figura 27-16.

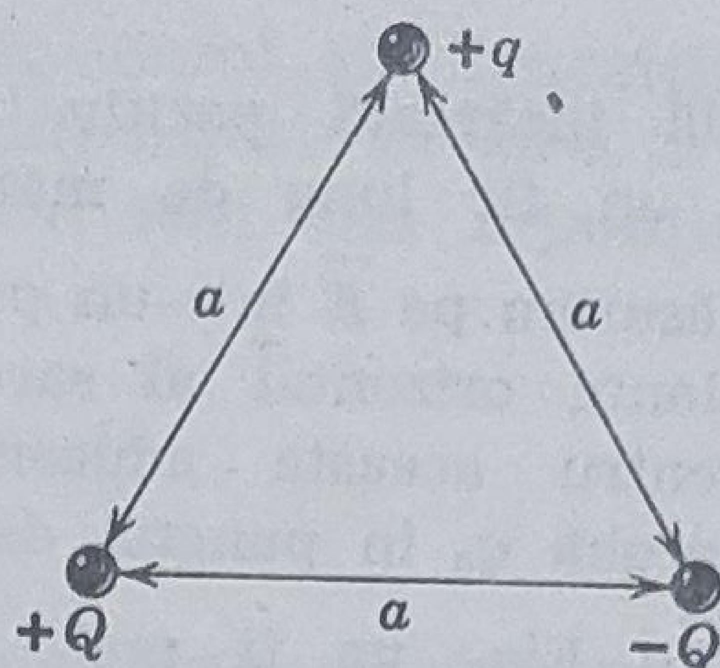


Figura 27-17.

densitate lineară de sarcină λ (C/m).

(b) Discutați natura echilibrului unei sarcini de probă situată pe axa centrală a ansamblului de sarcini.

3. Considerăm două linii de forță ce pleacă de la sarcina din partea superioară a figurii 27-4. Dacă unghiul dintre tangentele lor, pentru puncte apropiate de sarcină, este θ, el devine $\theta/2$ la distanță mare. Verificați această afirmație și explicați-o. (Indicație: Analizați cum trebuie să se comporte liniile de forță atît în apropierea fiecărei sarcini cît și la distanțe mari de ele).

4. Să presupunem că puterea din legea lui Coulomb nu este „doi" ci n. Arătați că pentru $n \neq 2$ este imposibil să se construiască linii care să aibe proprietățile enunțate în paragraful 27-3 pentru liniile de forță. Pentru simplitate, considerați cazul unei sarcini punctiforme izolate.

5. Care este mărimea unei sarcini punctiforme care produce un cîmp electric de 2,0 N/C la distanța de 50 cm?

6. Considerăm două sarcini egale și de semne opuse de mărime $2{,}0 \cdot 10^{-7}$ C la distanța de 15 cm una de alta. (a) Care este mărimea, direcția și sensul lui $\vec{E}$ într-un punct situat la jumătatea distanței dintre sarcini? (b) Ce forță (mărimea, direcția și sensul) ar acționa asupra unui electron situat în acest punct?

7. Două sarcini punctiforme se găsesc la distanța d una de alta (fig. 27-16). Reprezentați $E(x)$ presupunînd că $x=0$ pentru sarcina din stînga. Luați pentru x atît valorile pozitive cît și pe cele negative. Considerăm pe $\vec{E}$ pozitiv dacă $\vec{E}$ este îndreptat spre dreapta și negativ dacă $\vec{E}$ este îndreptat spre stînga. Presupunem $q_1=+1{,}0\times10^{-6}$ C, $q_2=+3{,}0\cdot10^{-6}$ C și $d=10$ cm.

8. Trei sarcini sînt distribuite în vîrfurile unui triunghi echilateral ca în fig. 27-17. Care este direcția și sensul forței asupra lui $+q$?

9. Două sarcini punctiforme de mărime $+2{,}0\cdot10^{-7}$ C și $+8{,}5\cdot10^{-8}$ C se găsesc la distanța de 12 cm una de alta. (a) Care este cîmpul electric produs de una în punctul în care se găsește cealaltă? (b) Ce forță acționează asupra fiecăreia din ele?

10. *Cîmpul axial produs de un dipol electric.* Considerăm un punct la distanța r de centrul unui dipol, *în lungul axei sale* (fig. 27-8). (a) Arătați că pentru valori mari ale lui r, cîmpul electric este

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{P}{r^3}$$

adică dublu față de valoarea corespunzătoare condițiilor din exemplul 3. (b) Care este direcția și sensul lui $\vec{E}$?

11. Presupunem că ambele sarcini din figura 27-8 sînt pozitive. (a) Arătați că E în punctul P din figură, presupunînd $r \gg a$, este dat de

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q}{r^2}$$

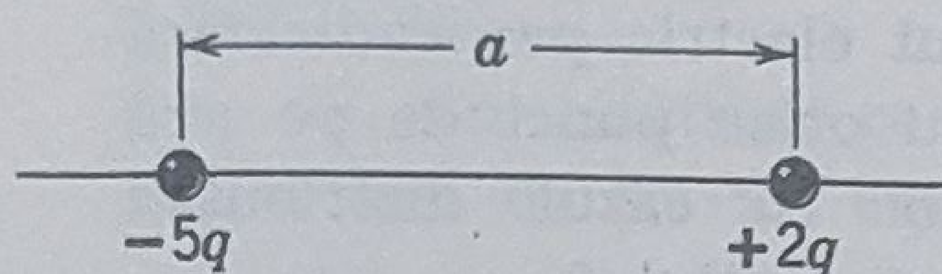


Figura 27-18.

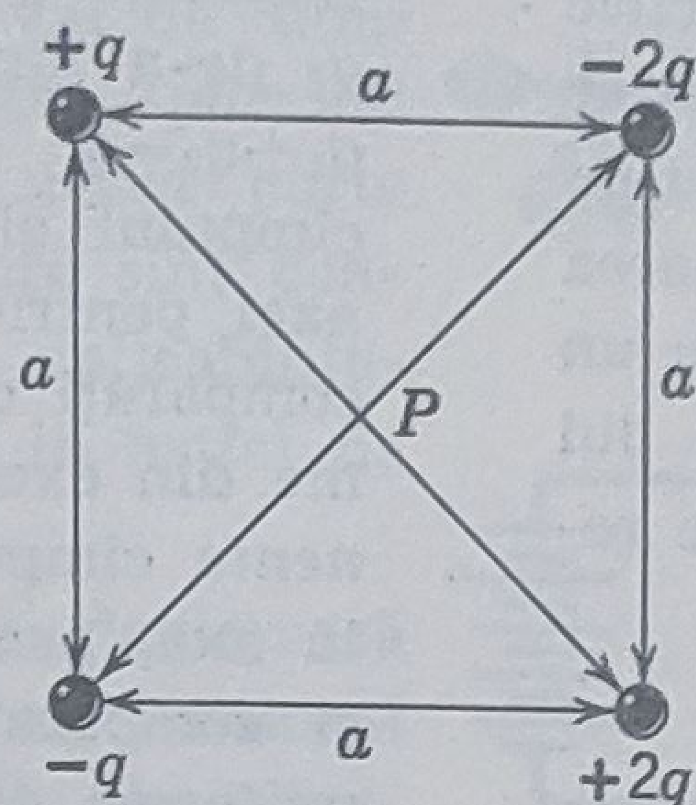


Figura 27-19.

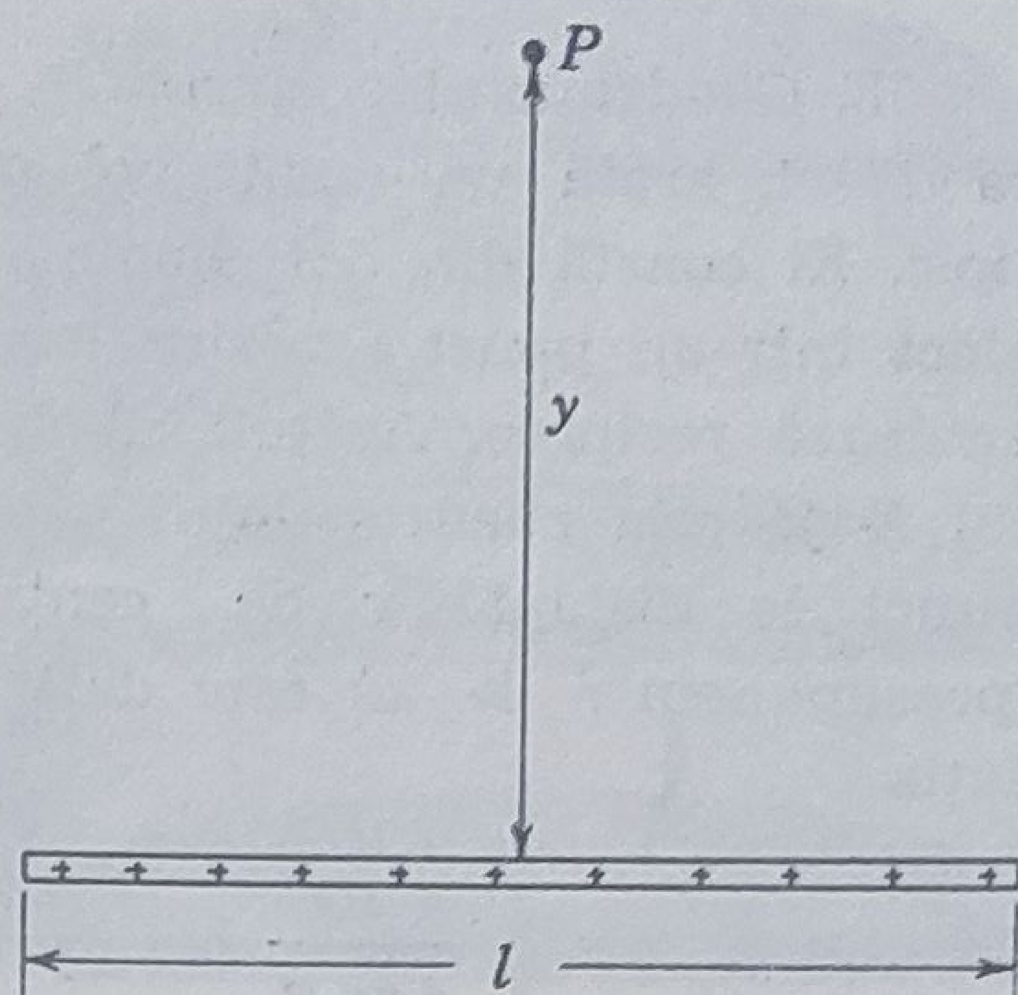


Figura 27-20.

(b) Care este direcţia şi sensul lui $\vec{E}$? (c) Este oare corect ca aici E să varieze ca r^{-2} iar pentru dipolul din figura 27-8, ca r^{-3}.

12. Indicaţi punctul (sau punctele) în care intensitatea cîmpului electric din figura 27-18 este zero. (b) Desenaţi calitativ liniile de forţă. Luaţi $a=50$ cm.

13. Care este mărimea, direcţia şi sensul cîmpului $\vec{E}$ în centrul pătratului din fig. 27-19? Considerăm $q=1{,}0\cdot10^{-8}$ C şi $a=5{,}0$ cm.

14. Două sarcini punctiforme a căror mărime şi semn nu le cunoaştem sînt situate la distanţa d una de cealaltă. Este posibil să avem $\vec{E}=0$ într-un punct oarecare de pe linia ce le uneşte dar *nu* între ele? În ce condiţii şi unde este situat punctul? (b) Este posibil să se găsească, pentru orice configuraţie a două sarcini punctiforme, două puncte (dar nu la infinit) în care $\vec{E}=0$? Dacă da, în ce condiţii?

15. O tije subţire izolatoare de lungime finită l poartă o sarcină totală q, distribuită uniform în lungul ei. Arătaţi că într-un punct P aflat în planul median al tijei (fig. 27-20) cîmpul E este dat de formula

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y}\,\frac{1}{\sqrt{l^2+4y^2}}.$$

Arătaţi că pentru $l\to\infty$ acest rezultat tinde către cel din exemplul 6.

16. O tije subţire izolatoare este încovoiată astfel încît să formeze un arc de cerc de rază a cu un unghi la centru θ_0. O sarcină totală q este uniform răspîndită de-a lungul tijei. Găsiţi intensitatea cîmpului electric în centrul cercului în funcţie a, q şi θ_0.

17. O cupă emisferică izolatoare are o rază interioară a. O sarcină totală q este uniform răspîndită pe suprafaţa interioară a emisferei. Aflaţi intensitatea cîmpului electric în centrul de curbură.

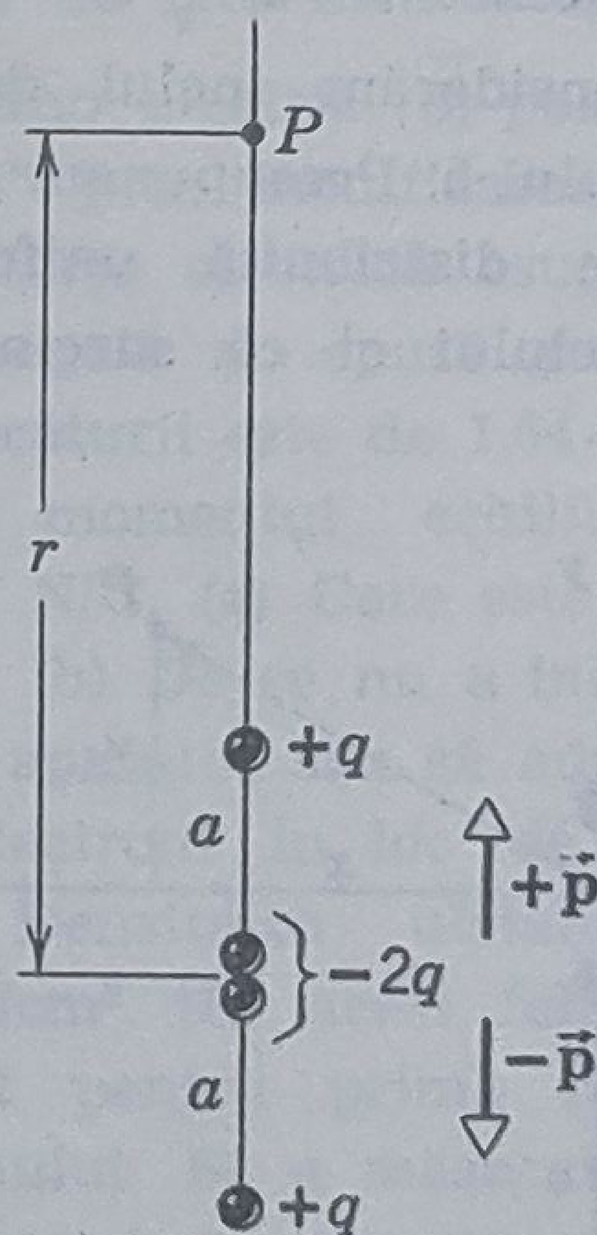


Figura 27-21.

18. *Cuadrupolul electric.* Figura 27-21 arată un cuadrupol electric tipic. El constă din doi dipoli a căror efect într-un punct exterior lor nu se anulează reciproc. Arătați că valoarea lui E pe axa cuadrupolului pentru un punct la distanță r de centrul lui (presupunem $r \gg a$) este dată de relația

$$E = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

unde Q $(=2qa^2)$ se numește *moment cuadrupolar* al distribuției de sarcină.

19. Un electron este constrîns să se deplaseze în lungul axei inelului de sarcină din exemplul 5. Arătați că electronul va efectua oscilații de frecvență

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}}$$

Această formulă este valabilă numai pentru oscilații mici, adică pentru $x \ll a$ (în fig. 27-10). (Indicație: Arătați că mișcarea este armonică și folosiți ec. 15-11).

20. Arătați că în cazul inelului de sarcină din exemplul 5, E are valoare maximă pentru $x = a/\sqrt{2}$.

21. Considerăm inelul de sarcină din exemplul 5. Presupunem că sarcina q nu este distribuită uniform de-a lungul inelului ci că sarcina q_1 este distribuită uniform de-a lungul unei jumătăți a circumferinței iar sarcina q_2 de-a lungul celeilalte jumătăți. Fie $q_1 + q_2 = q$. (a) Găsiți *componenta* cîmpului electric îndreptată *în lungul* axei pentru orice punct de pe axă și comparați cu cazul distribuției uniforme din exemplul 5. (b) Găsiți *componenta* cîmpului electric *perpendiculară* la axă, pentru orice punct de pe axă și comparați-o cu cazul distribuției uniforme din exemplul 5.

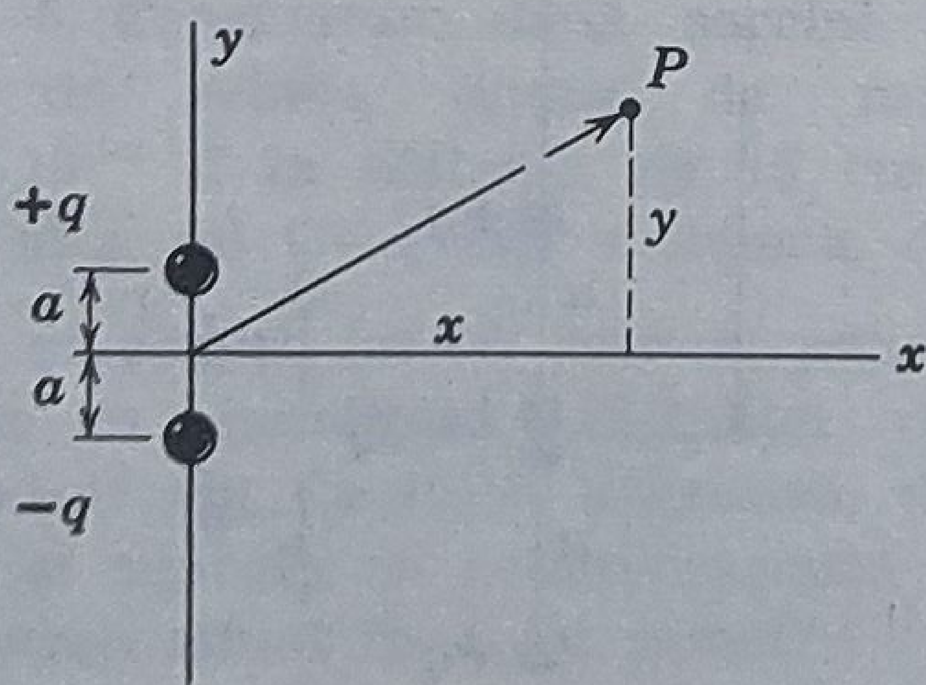


Figura 27-22.

22. Un disc circular subțire de rază a este încărcat uniform, cu sarcina σ pe unitatea de suprafață. Găsiți cîmpul electric pe axa discului la distanța r de disc.

23. *Cîmpul produs de un dipol electric.* Arătați că la distanță mare, componentele lui $\vec{E}$ produs de un dipol sînt:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

unde x și y sînt coordonatele unui punct (fig. 27-22). Arătați că acest rezultat general include și rezultatele particulare din ecuația 27-8 b și din problema 10.

24. Care este mărimea, direcția și sensul cîmpului electric care poate echilibra greutatea (a) unui electron și (b) a unei particule alfa?

25. Asupra unei particule de sarcină $-2{,}0 \cdot 10^{-9}$ C situată într-un cîmp electric uniform acționează o forță electrică de $3{,}0 \cdot 10^{-6}$ N, îndreptată în jos. (a) Care este intensitatea cîmpului electric? (b) Care este mărimea, direcția și sensul forței *electrice* ce ar acționa asupra unui proton plasat în acest cîmp? (c) Care este forța *gravitațională* asupra protonului? (d) Care este raportul, în acest caz, dintre forța electrică și cea gravitațională?

26. (a) Care este accelerația unui electron într-un cîmp electric uniform de 10^6 N/C? (b) Ce interval de timp ar fi necesar ca un electron, pornind din repaos, să atingă a zecea parte din viteza luminii? (c) Care sînt considerațiile care limitează aplicabilitatea mecanicii lui Newton la astfel de probleme?

27. Un electron ce se deplasează cu viteza de $5{,}0\cdot10^8$ cm/s este aruncat paralel cu un cîmp electric de intensitate $1{,}0\cdot10^3$ N/C dispus astfel încît să-i încetinească mișcarea. (a) Ce distanță va parcurge electronul în cîmp înainte de a ajunge în repaus (momentan)? și (b) care va fi intervalul de timp necesar? (c) Ce fracțiune din energia sa cinetică va pierde electronul în timpul traversării dacă cîmpul electric se termină brusc după 0,8 cm?

28. Un electron este proiectat (vezi figura 27-23) cu o viteză de $6{,}0\cdot10^6$ m/s sub un unghi de 45°; $E=2{,}0\cdot10^3$ N/C (sensul este în sus), $d=2{,}0$ cm și $l=10{,}0$ cm. (a) Va întîlni electronul vreuna dintre plăci? (b) Dacă da, în ce punct?

29. *Dipolul într-un cîmp neuniform.* Deduceți o expresie pentru dE/dz într-un punct situat la jumătatea distanței dintre două sarcini pozitive egale, unde z este distanța de la una din sarcini, măsurată în lungul liniei lor de unire. Dacă în acest punct este așezat un mic dipol, cu axa în lungul axei z, asupra lui va exista o forță? Reamintim că $\vec{E}=0$ în acest punct.

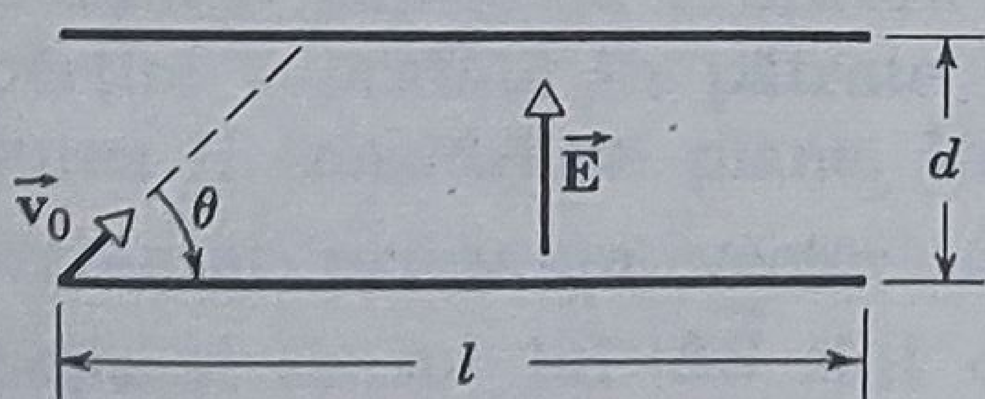


Figura 27-23.

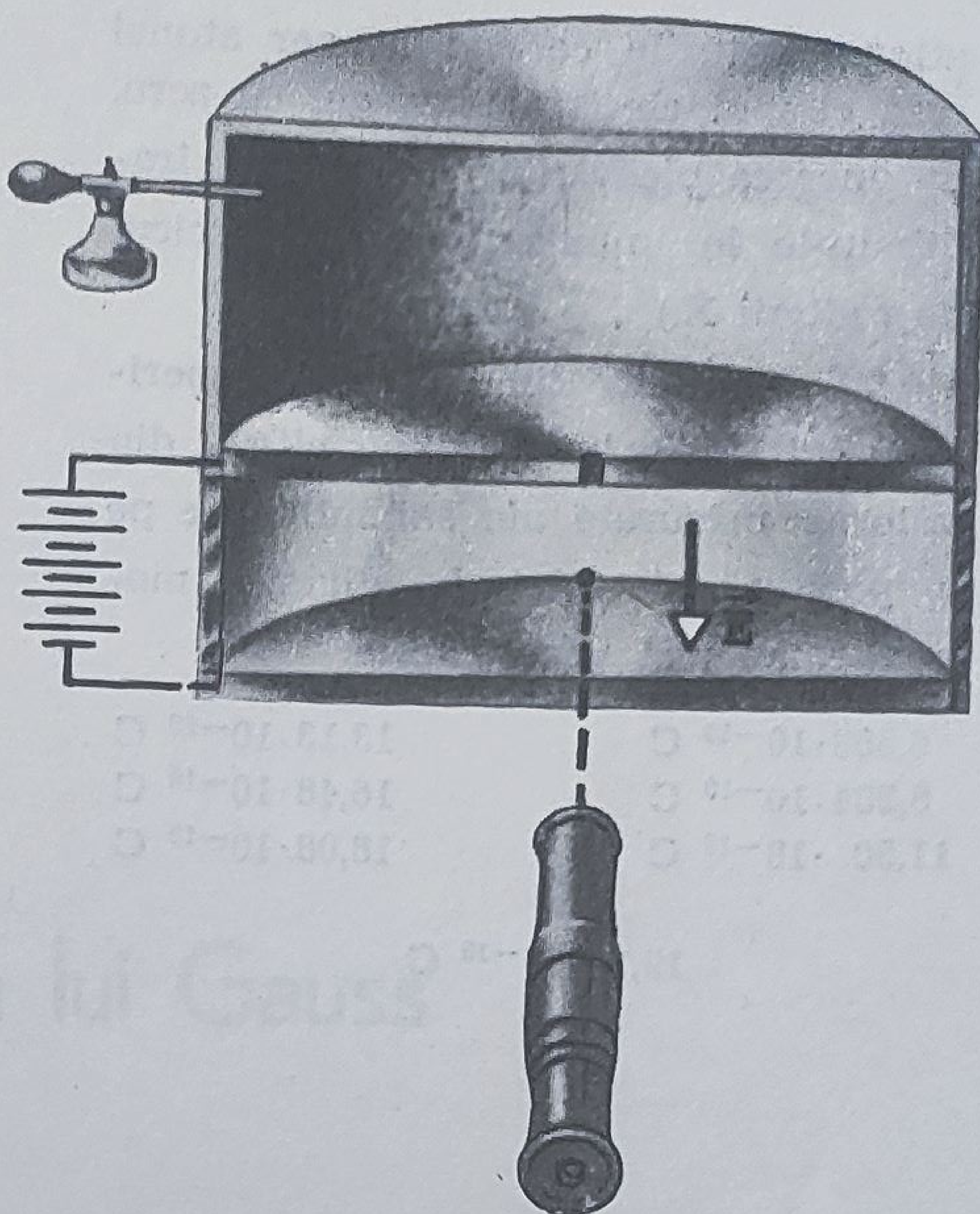


Figura 27-24. Aparatul lui Millikan pentru determinarea sarcinii electronului. Picăturile de ulei încărcate electric cad prin orificiul din placa centrală.

30. *Experiența cu picăturile de ulei.* R. A. Millikan a construit un aparat (fig. 27-24) în care o minusculă picătură de ulei încărcată, situată într-un cîmp electric $\vec{E}$, poate fi „suspendată" prin modificarea lui E astfel ca forța electrică asupra picăturii să fie egală și opusă greutății sale. Raza picăturii este de $1{,}64\cdot10^{-4}$ cm iar E în momentul echilibrului este $1{,}92\cdot10^5$ N/C. (a) Care este sarcina picăturii? (b) De ce nu a încercat Millikan în aparatul său să aducă în echilibru electroni în loc de picături de ulei? Densitatea uleiului este de 0,851 g/cm³. (În acest fel, Millikan a măsurat pentru prima dată sarcina electronului. El a măsurat raza picăturii măsurînd viteza limită pe care o

ating picăturile ce cad în aer atunci cînd cîmpul electric este egal cu zero. El încărca picăturile cu sarcină iradiindu-le în impulsuri cu un fascicul de radiații X.)

31. Într-una din primele experiențe (1911) ale lui Millikan cîteva din valorile măsurate ale sarcinilor de pe o picătură de ulei, la diverse momente, au fost următoarele:

$6{,}563 \cdot 10^{-19}$ C
$8{,}204 \cdot 10^{-19}$ C
$11{,}50 \cdot 10^{-19}$ C
$13{,}13 \cdot 10^{-19}$ C
$16{,}48 \cdot 10^{-19}$ C
$18{,}08 \cdot 10^{-19}$ C
$19{,}71 \cdot 10^{-19}$ C
$22{,}89 \cdot 10^{-19}$ C
$26{,}13 \cdot 10^{-19}$ C

Care este mărimea sarcinii elementare *e* care poate fi dedusă din aceste date?

32. Un cîmp electric $\vec{E}$ de valoare medie de 150 N/C este îndreptat în sus în atmosfera Pămîntului. Dorim să „suspendăm" în acest cîmp o sferă de sulf ce cîntărește 453,59 g, încărcînd-o. (a) Ce sarcină (semn și mărime) este necesară? (b) De ce nu este practică această soluție? Dați o explicație calitativă bazată pe un calcul numeric aproximativ pentru a vă argumenta punctul de vedere.

Capitolul 28

Teorema lui Gauss

28-1 Fluxul cîmpului electric

Fluxul (notat Φ) este o proprietate a oricărui cîmp vectorial; el se ia pe o suprafață ipotetică din cîmp, suprafață ce poate fi închisă sau deschisă. Fluxul (Φ_v) al unui *cîmp de curgere* se măsoară prin numărul de linii de curent ce intersectează o astfel de suprafață. În cazul *cîmpului electric*, fluxul (Φ_E) se măsoară prin numărul de linii de cîmp ce intersectează o astfel de suprafață.

În cazul surafețelor închise vom vedea că Φ_E este pozitiv dacă liniile de forță sînt îndreptate, în orice punct, spre exterior și negativ dacă sînt îndreptate spre interior. În figura 28-1 sînt arătate două sarcini egale și de semn opus și liniile de cîmp corespunzătoare. Curbele S_1, S_2, S_3 și S_4 sînt intersecțiile cu planul figurii a patru suprafețe închise ipotetice. Conform celor spuse mai înainte, Φ_E este pozitiv pentru suprafața S_1 și negativ pentru S_2. Ne interesează fluxul cîmpului electric deoarece teorema lui Gauss, una din cele patru ecuații fundamentale din electromagnetism (vezi tabela 38-3) este exprimată în funcție de flux. Deși noțiunea de flux poate părea puțin abstractă la început, studentul își va da curînd seama de valoarea sa în rezolvarea problemelor.

Pentru definirea corectă a lui Φ_E să considerăm figura 28-2 în care este dată o suprafață arbitrară închisă, situată într-un cîmp electric. Să împărțim suprafața în pătrate elementare ΔS, suficient de mici pentru a putea fi considerate plane. Un astfel de element de suprafață poate fi reprezentat printr-un vector $\Delta\vec{S}$, a cărui mărime este suprafața ΔS; direcția și sensul lui $\Delta\vec{S}$ sînt cele ale *normalei exterioare* la suprafață.

Fiecărui pătrat elementar din figura 28-2 îi putem atașa vectorul cîmp electric corespunzător $\vec{E}$. Deoarece pătratele au fost alese arbitrar

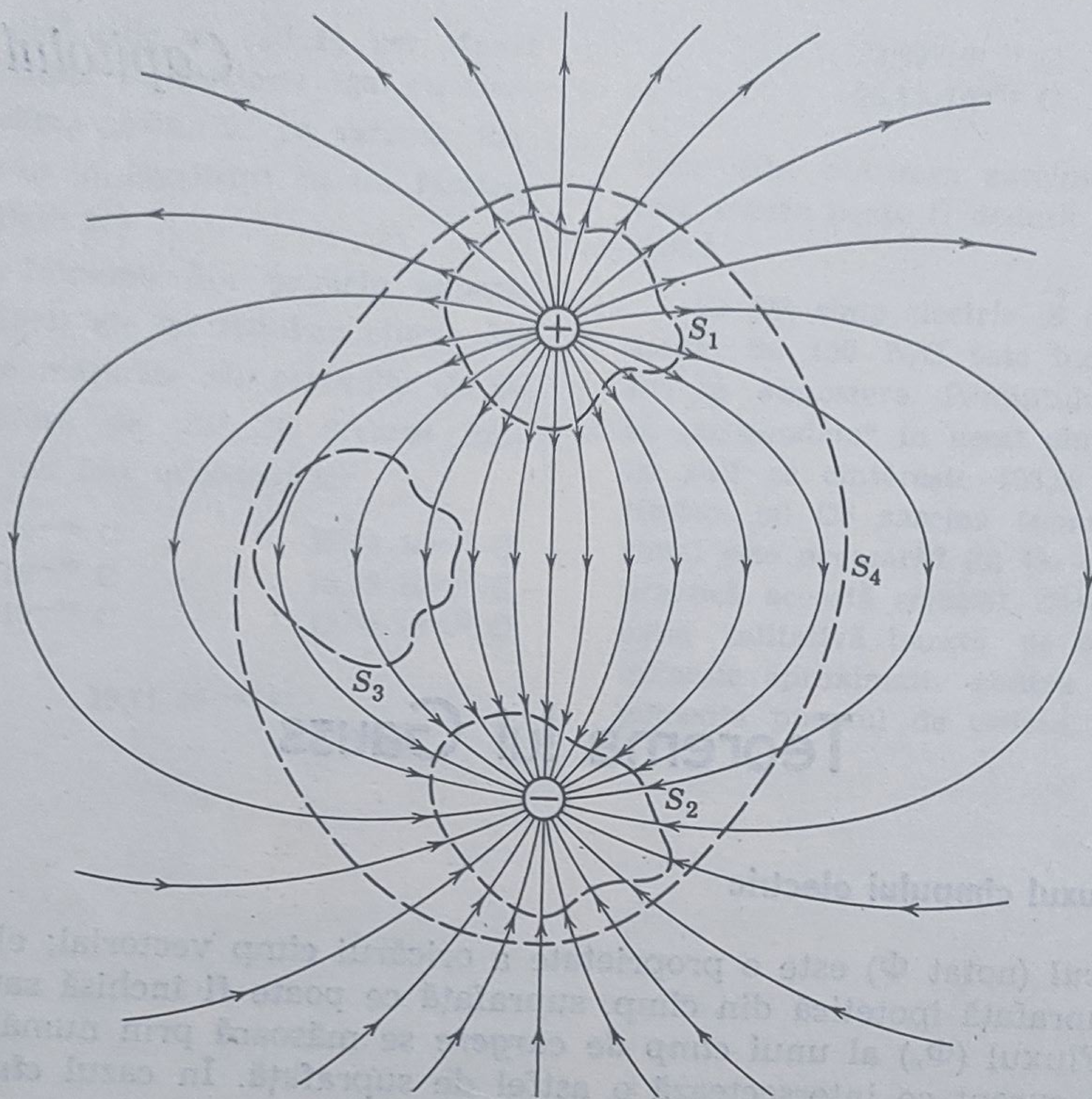


Figura 28-1. Două sarcini egale și de semne contrare. Liniile întrerupte reprezintă suprafețe ipotetice închise.

de mici, $\vec{E}$ poate fi considerat constant în toate punctele dintr-un pătrat dat.

Vectorii $\vec{E}$ și $\Delta\vec{S}$ ce caracterizează fiecare pătrat fac între ei unghiul θ. În figura 28-2 b este dată imaginea mărită a celor trei pătrate de pe suprafața din figura 28-2 a, notate x, y și z. De observat că pentru x, $\theta > 90°$; pentru y, $\theta = 90°$; iar pentru z, $\theta < 90°$.

O definiție semicantitativă a fluxului este

$$\Phi_E \approx \Sigma \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} \tag{28-1}$$

care ne indică că fiecărui element în care a fost împărțită suprafața i se poate atașa o mărime scalară $\vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$. Contribuția la flux a punctului x, din figura 28-2, este negativă; a punctului y este zero, iar a lui z este pozitivă. Astfel, dacă pentru toate punctele $\vec{E}$ este îndreptat spre exterior, $\theta < 90°$, $\vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$ va fi pozitiv iar Φ_E va fi pozitiv pentru întreaga suprafață; vezi figura 28-1, suprafața S_1. Dacă $\vec{E}$ este în toate punctele, îndreptat spre interior, $\theta > 90°$, $\vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$ va fi negativ iar Φ_E corespunzător suprafeței va

fi negativ; vezi figura 28-1, suprafaţa S_2. Din ecuaţia 28-1 se vede că unităţile SI pentru Φ_E sînt $N \cdot m^2/C$.

Definiţia exactă a fluxului electric se găseşte trecînd la limită în partea doua a relaţiei (28-1). Sumarea pe suprafaţă se înlocuieşte astfel prin integrala de suprafaţă, obţinem

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}. \tag{28-2}$$

Această *integrală de suprafaţă* indică că suprafaţa considerată trebuie împărţită în elemente infinit mici de arie $d\vec{S}$ şi că mărimea scalară $\vec{E} \cdot d\vec{S}$

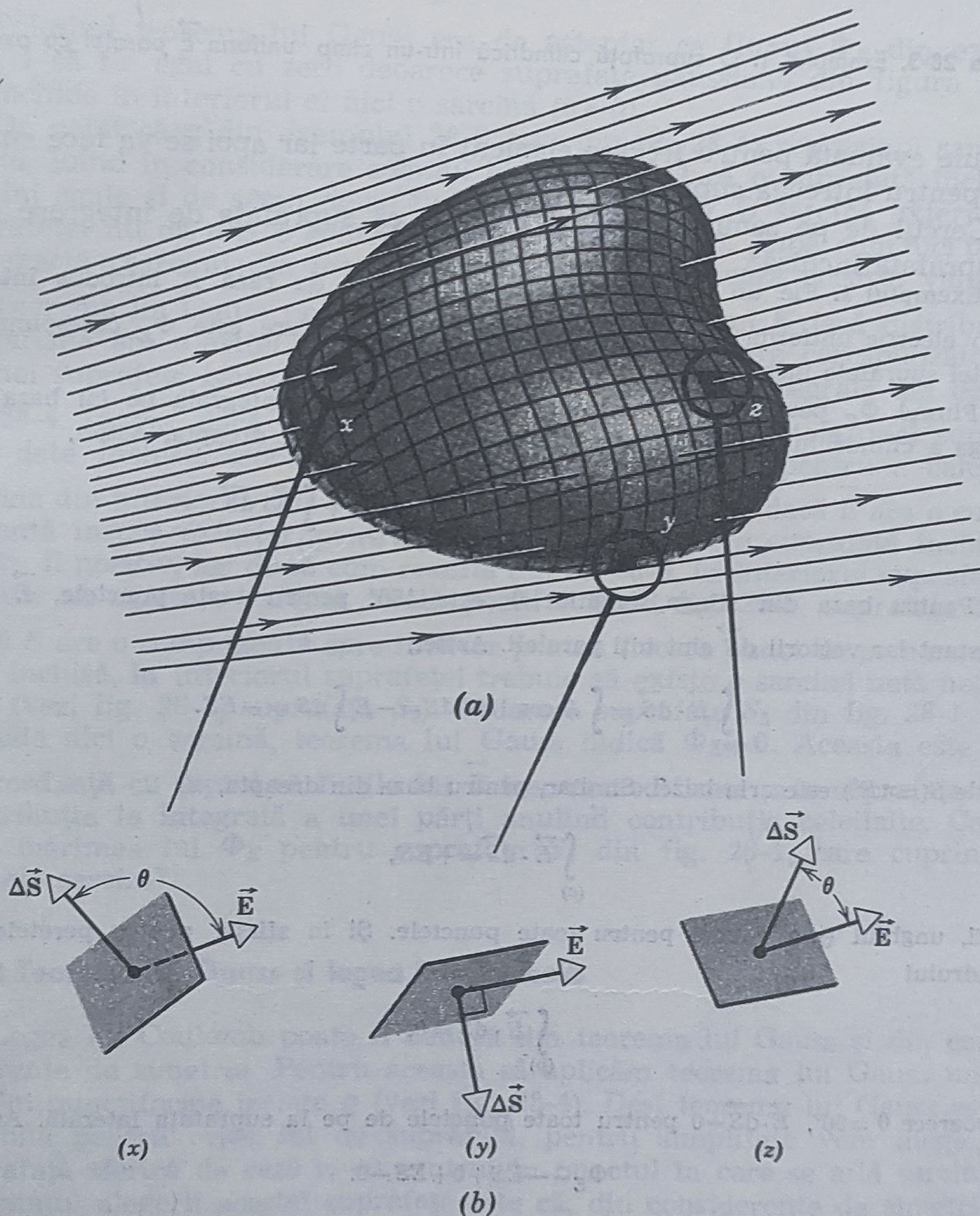


Figura 28-2. (a) O suprafaţă ipotetică situată într-un cîmp electric. (b) Trei elemente de pe această suprafaţă (mărite).

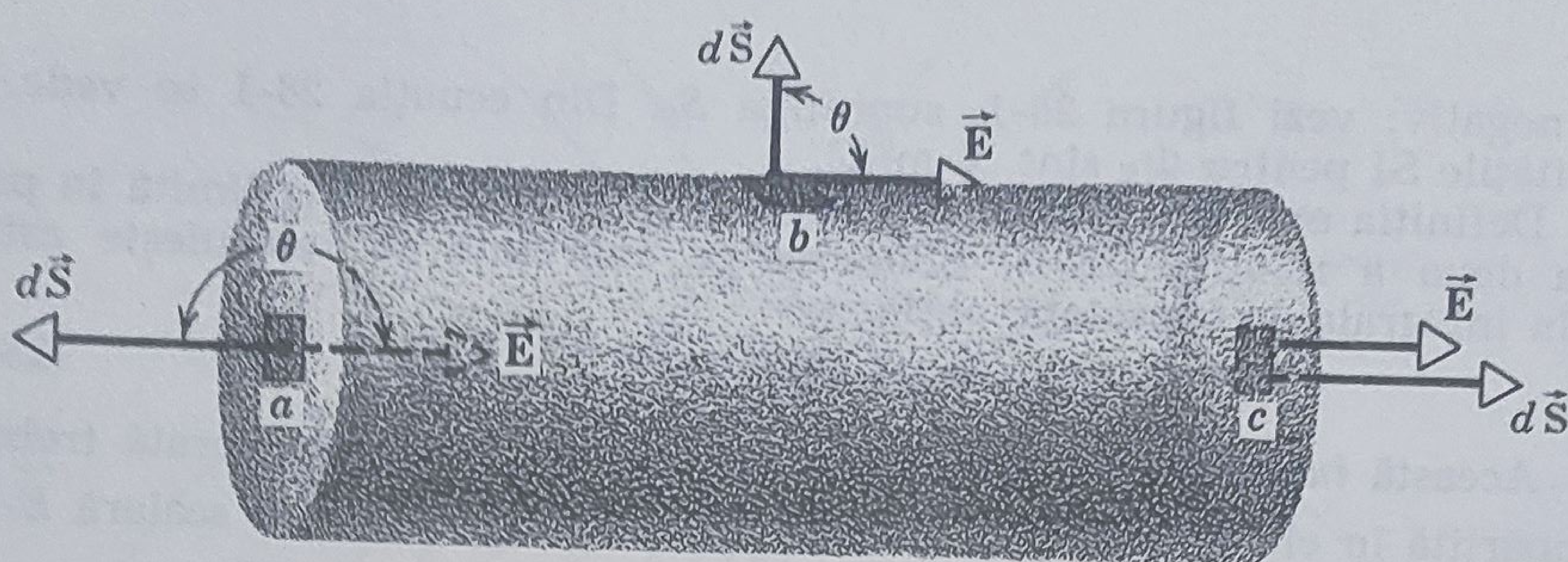


Figura 28-3. Exemplul 1. O suprafață cilindrică într-un cîmp uniform $\vec{E}$ paralel cu axa sa.

trebuie evaluată pentru frecare element în parte iar apoi se va face sumarea pentru întreaga suprafață.

Cercul de pe semnul integralei indică că suprafața de integrare este o suprafață închisă*.

Exemplul 1. Fie un cilindru ipotetic (fig. 28—3) de rază R introdus într-un cîmp electric uniform $\vec{E}$, cu axa paralelă cu cîmpul. Care este Φ_E corespunzător acestei suprafețe închise?

Fluxul Φ_E poate fi scris ca suma a trei integrale: integrala pe (a) baza din stînga a cilindrului, (b) suprafața laterală și (c) baza din dreapta. Astfel,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{(a)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Pentru baza din stînga, unghiul θ este 180° pentru toate punctele, $\vec{E}$ este constant iar vectorii $d\vec{S}$ sînt toți paraleli. Astfel,

$$\int_{(a)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E \cos 180^\circ \, dS = -E \int dS = -ES.$$

unde $S(=\pi R^2)$ este aria bazei. Similar, pentru baza din dreapta,

$$\int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = +ES,$$

aici, unghiul θ este zero pentru toate punctele. Și în sfîrșit, pentru peretele cilindrului

$$\int_{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

deoarece $\theta = 90^\circ$, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ pentru toate punctele de pe la suprafața laterală. Astfel,

$$\Phi_E = -ES + 0 + ES = 0.$$

---

* Similar, un cerc pe semnul unei integrale *curbilinii* indică un *contur* închis. Din context și din elementul diferențial (dS în acest caz) va reieși clar dacă avem de a face cu o integrală de suprafață sau cu o integrală curbilinie.

28-2 Teorema lui Gauss

Teorema lui Gauss, care se aplică oricărei suprafeţe ipotetice închise (numită *suprafaţă gaussiană*) exprimă legătura dintre fluxul Φ_E prin suprafaţă şi sarcina totală q din interiorul suprafeţei

$$\varepsilon_0 \Phi_E = q \tag{28-3}$$

sau, folosind ec. 28-2,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \tag{28-4}$$

Folosind teorema lui Gauss era de aşteptat ca fluxul Φ_E din exemplul 1 să fie egal cu zero deoarece suprafaţa gaussiană din figura 28-3 nu închide în interiorul ei nici o sarcină ($q=0$).

De notat că q din exemplul 28-3 (sau din ec. 28-4) reprezintă sarcina *totală*, luînd în considerare semnul ei algebric. Dacă o suprafaţă închide sarcini egale şi de semn opus, fluxul Φ_E va fi zero. O sarcină exterioară suprafeţei nu dă nici o contribuţie la valoarea lui q, după cum nici poziţia exactă a sarcinii din interiorul suprafeţei nu afectează această valoare.

Teorema lui Gauss poate fi folosită la evaluarea lui $\vec{E}$ dacă distribuţia de sarcină are o astfel de simetrie încît printr-o alegere corespunzătoare a unei suprafeţe gaussiene putem evalua cu uşurinţă integrala din ecuaţia 28-4. Invers, dacă $\vec{E}$ este cunoscut pentru toate punctele unei suprafeţe date închise, teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a calcula sarcina din interiorul său. După cum arată ecuaţia 28-2, dacă $\vec{E}$ are o componentă înspre exterior pentru fiecare punct de pe o suprafaţă închisă, Φ_E va fi pozitiv, iar după cum rezultă din ec. 28-4, în interiorul suprafeţei trebuie să existe o sarcină totală pozitivă (vezi fig. 28-1, suprafaţa S_1). Dacă $\vec{E}$ are o componentă spre interior pentru fiecare punct de pe o suprafaţă închisă, în interiorul suprafeţei trebuie să existe o sarcină netă negativă (vezi fig. 28-1, suprafaţa S_2). Deoarece suprafaţa S_3 din fig. 28-1 nu include nici o sarcină, teorema lui Gauss indică $\Phi_E=0$. Aceasta este în concordanţă cu faptul că liniile lui $\vec{E}$ trec nemodificate prin suprafaţa S_3, contribuţia la integrală a unei părţi anulînd contribuţia celeilalte. Care este mărimea lui Φ_E pentru suprafaţa S_4 din fig. 28-1, care cuprinde ambele sarcini?

28-3 Teorema lui Gauss şi legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb poate fi dedusă din teorema lui Gauss şi din considerente de simetrie. Pentru aceasta să aplicăm teorema lui Gauss unei sarcini punctiforme izolate q (vezi fig. 28-4). Deşi teorema lui Gauss este valabilă pentru orice fel de suprafaţă, pentru simplitate vom alege o suprafaţă sferică de rază r, cu centrul în punctul în care se află sarcina. Avantajul alegerii acestei suprafeţe este că, din considerente de simetrie, $\vec{E}$ trebuie să fie normal pe ea şi trebuie să aibă aceeaşi mărime (încă necunoscută) pentru toate punctele de pe suprafaţă.

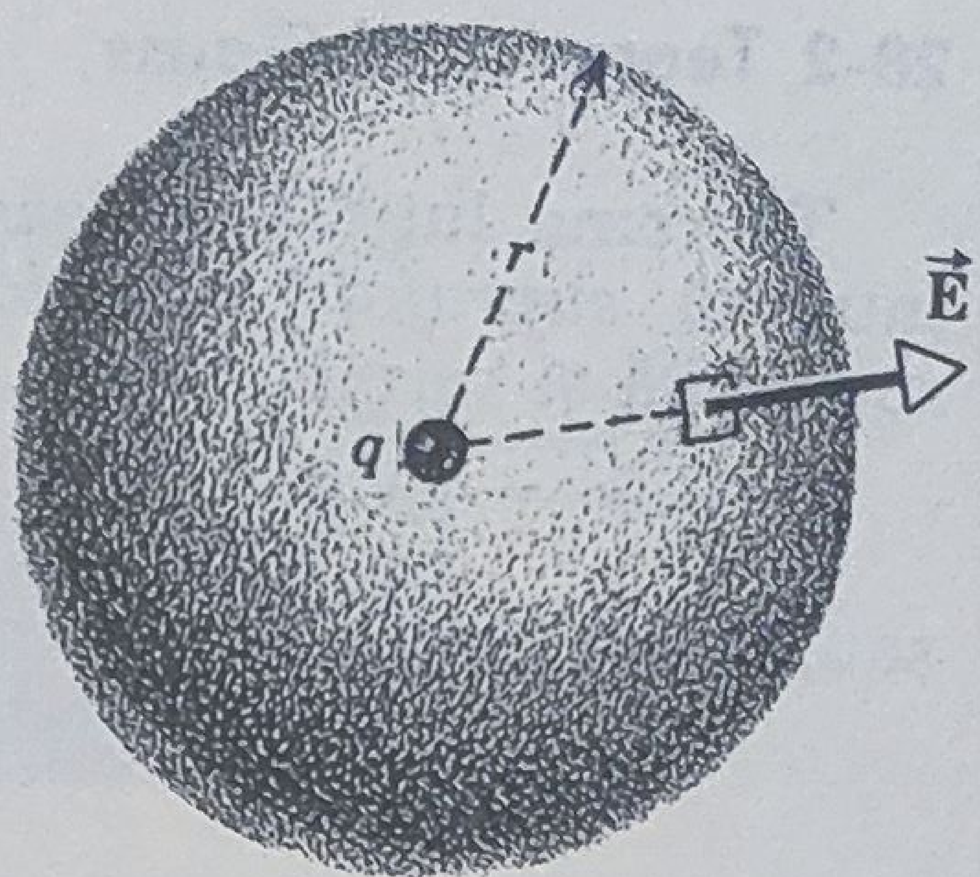


Figura 28-4. O suprafață Gauss sferică de rază r în jurul unei sarcini punctiforme q.

În figura 28-4, $\vec{E}$ și $d\vec{S}$ sînt îndreptate radial spre exterior în orice punct de pe suprafața gaussiană. Unghiul dintre ele fiind zero, mărimea $\vec{E}\cdot d\vec{S}$ devine $E\cdot dS$. Astfel, teorema lui Gauss (ec. 28-4) se reduce la

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E\, dS = q.$$

Deoarece E este constant pentru toate punctele de pe sferă, poate fi scos de sub integrală

$$\varepsilon_0 E \oint dS = q,$$

unde integrala este chiar aria sferei*. Această ecuație dă

$$\varepsilon_0 E (4\pi r^2) = q$$

sau

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (28\text{-}5)$$

Ecuația 25-5 dă mărimea intensității cîmpului electric $\vec{E}$ în orice punct la distanța r de o sarcină punctiformă izolată q. Direcția și sensul lui $\vec{E}$ sînt cunoscute din considerații de simetrie.

Să punem o a doua sarcină punctiformă q_0 în punctul în care am calculat pe $\vec{E}$. Mărimea forței ce acționează asupra ei (vezi ec. 27-2) este

$$F = Eq_0.$$

Combinînd cu ecuația 28-5 obținem

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

care este chiar legea lui Coulomb. Astfel, am dedus legea lui Coulomb din teorema lui Gauss și din considerații de simetrie.

Teorema lui Gauss este una din ecuațiile fundamentale ale teoriei electromagnetice și este dată în tabela 38-3 ca una din ecuațiile lui

---

* Utilitatea teoremei lui Gauss depinde de abilitatea noastră de a găsi o suprafață pe care, din considerente de simetrie, atît E cît și θ (vezi fig. 28—2) să aibe valori constante. Atunci $E \cos\theta$ poate fi scos de sub integrală și E poate fi găsit simplu, ca în acest exemplu.

Maxwell. Legea lui Coulomb nu este trecută în această tabelă deoarece, după cum tocmai am arătat, ea poate fi dedusă din teorema lui Gauss și din considerații simple asupra simetriei lui $\vec{E}$ produs de o sarcină punctiformă.

Este interesant de notat că teorema lui Gauss (ec. 28—3) poate fi scrisă sub o formă deosebit de simplă dacă constanta de proporționalitate din legea lui Coulomb o luăm egală cu $1/4\ \pi \cdot \varepsilon_0$ (vezi ec. 26—3). Dacă constanta din legea lui Coulomb, ar fi egală cu k, teorema lui Gauss ar trebui scrisă sub forma $(1/4\ \pi k)\ \Phi_E = q$. Preferăm să lăsăm factorul 4π în legea lui Coulomb pentru ca el să nu apară în teorema lui Gauss sau în alte relații folosite mai frecvent ce vor fi deduse ulterior.

28-4 Un conductor izolat

Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a prezice unele fenomene importante cum ar fi: *o sarcină suplimentară pusă pe un conductor izolat se distribuie în întregime pe suprafața lui exterioară.* Această ipoteză a fost verificată experimental (vezi paragraful 28-5) înaintea enunțării legii lui Coulomb sau a teoremei lui Gauss. Într-adevăr, demonstrarea experimentală a acestei ipoteze reprezintă fundamentul experimental pe care se bazează ambele legi. Am arătat anterior că experiențele cu balanța de torsiune a lui Coulomb, cu toate că sînt directe și convingătoare, nu permit măsurători precise. Arătînd că ipoteza mai sus enunțată rezultă din teorema lui Gauss, am inversat pur și simplu faptele istorice.

În figura 28-5 este arătată o secțiune printr-un conductor izolat, de formă arbitrară, încărcat cu sarcina q. Linia întreruptă indică o suprafață gaussiană situată la o mică distanță sub suprafața conductorului. Deși suprafața gaussiană poate fi oricît de aproape de suprafața conductorului, este important să ne reamintim că ea se află în *interiorul* conductorului.

Cînd o sarcină suplimentară este pusă pe un conductor izolat într-un punct oarecare, ea va da naștere unui cîmp electric în interiorul conductorului. Acest cîmp va acționa asupra purtătorilor de sarcină din conductor, producînd deplasarea lor, dînd astfel naștere unor curenți interni. Acești curenți redistribuie sarcina suplimentară, astfel încît cîmpul electric intern va slăbi automat în intensitate. Dacă cîmpul electric din interiorul conductorului devine zero peste tot, curenții încetează automat și predomină condițiile electrostatice. Această redistribuire a sarcinilor are loc în mod normal într-un interval de timp neglijabil în majoritatea cazurilor. Ce putem spune despre distribuția de sarcină suplimentară cînd sînt îndeplinite condițiile electrostatice?

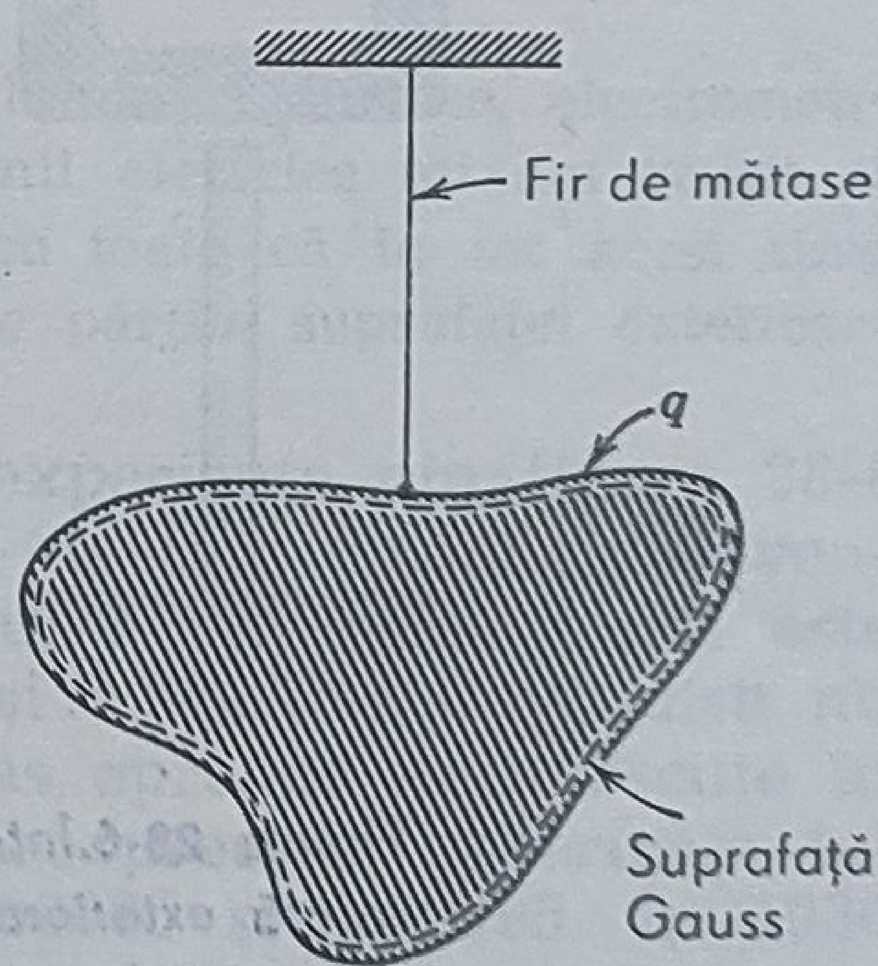


Figura 28-5. Un conductor izolat.

Dacă la echilibru electrostatic $\vec{E}$ este zero peste tot în interiorul conductorului, el trebuie să fie zero și în orice punct de pe su-

prafaţa gaussiană. Aceasta înseamnă cu fluxul ϕ_E trebuie să fie zero pentru această suprafaţă. Teorema lui Gauss ne spune că (vezi ec. 28-3) în acest caz sarcina totală din interiorul suprafeţei gaussiene trebuie să fie zero. Dacă sarcina suplimentară q nu se află în *interiorul* acestei suprafeţe, ea nu poate fi decît în *exteriorul* ei, adică *trebuie să se găsească pe suprafaţa exterioară a conductorului.*

28-5 Verificarea experimentală a teoremei lui Gauss şi a legii lui Coulomb

Să ne oprim asupra experienţelor care au dovedit că ipoteza expusă în paragraful 28-4 se confirmă. Să încărcăm o sferă de metal şi să o coborîm, atîrnată de un fir de mătase, în interiorul unei cutii de metal, ca în figura 28-6. Să atingem sfera de interiorul cutiei; cînd îndepărtăm sfera, pe ea nu mai există nici o sarcină. Cînd sfera de metal atinge cutia, sfera şi cutia formează împreună un „conductor izolat" căreia i se aplică ipoteza din paragraful 28-4. Se poate arăta că întreaga sarcină se deplasează pe suprafaţa exterioară a cutiei, dacă atingem de cutie un mic obiect de metal, izolat; doar atingînd *exteriorul* cutiei vom putea lua sarcini de pe ea.

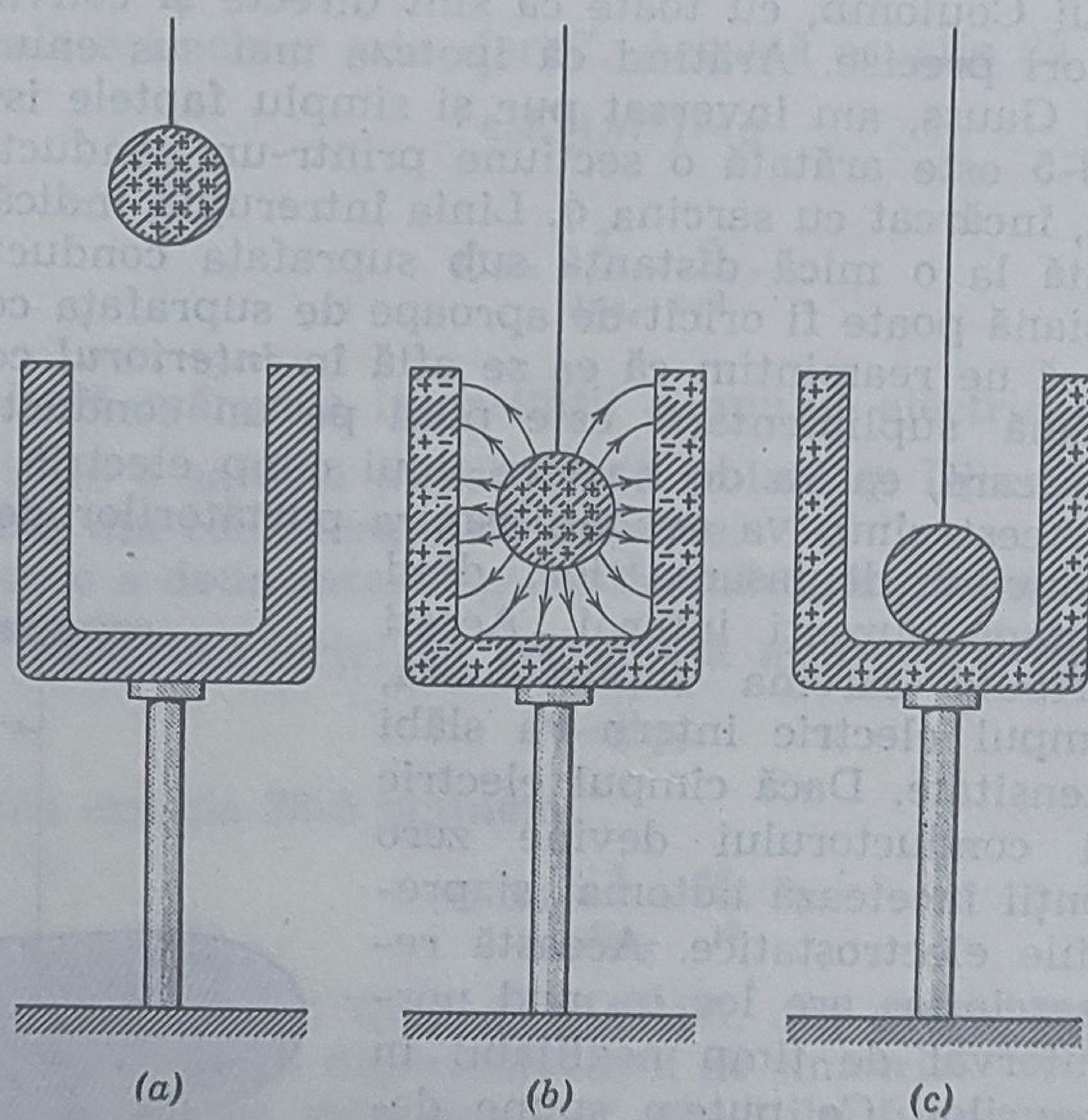


Figura 28-6. *Întreaga* sarcină de pe sferă este transferată *exteriorului* cutiei. Această afirmaţie şi discuţia din prima parte a paragrafului 28-5, sînt corecte numai dacă cutia are şi un capac conductor ce poate fi pus după introducerea sferei.

Se pare că Benjamin Franklin a fost primul care a observat că în interiorul unei cutii metalice izolate nu poate exista sarcină. În anul 1755 el scria unui prieten:

„Am încărcat cu electricitate un vas cilindric de argint de 1 pint* izolat și apoi am introdus în cilindru o sferă de plută cu diametrul de aproximativ 1 inch**, suspendat de un fir de mătase, pînă ce pluta a atins fundul vasului. Spre deosebire de cazul cînd apropiam pluta de exteriorul vasului, pluta nu a fost atrasă de interiorul său și deși ea a atins fundul vasului, totuși, cînd am scos-o afară am constatat că după atingere ea nu era încărcată cu electricitate, așa cum ar fi fost dacă ar fi atins partea exterioară a vasului. Faptul este ciudat. Și dacă m-ai întreba care este cauza ți-aș răspunde că nu știu..."

Aproximativ 10 ani mai tîrziu, Franklin a recomandat acest „fapt ciudat" atenției prietenului său Joseph Priestley (1733—1804). În 1767 (cu aproximativ 20 de ani înaintea experiențelor lui Coulomb) Priestley a verificat observația lui Franklin și cu o intuiție remarcabilă, a ajuns, pornind de aici, la legea conform căreia forța variază invers proporțional cu pătratul distanței. Astfel, înțelegerea acestui fapt prin această cale indirectă, nu numai că este mai exactă decît cea directă prezentată în paragraful 26-4 dar este și anterioară.

Priestley, raționînd prin analogie cu gravitația, a considerat că, faptul că forțele electrice ce acționează asupra sferei de plută a lui Franklin sînt nule atunci cînd ea este introdusă în cilindrul metalic, este similar cu faptul (vezi paragraful 16—6) că forțele gravitaționale ce acționează asupra unei mase din interiorul unei pături sferice de materie sînt zero; dacă gravitația urmează legea invers proporțională cu pătratul distanței este probabil că și forțele electrice urmează o astfel de lege. Sau, după cum a spus Priestley:

„Oare nu putem deduce din aceasta (adică din experiența lui Franklin) că atracția electrostatică este supusă acelorași legi ca și gravitația și deci este invers proporțională cu pătratul distanței? Aceasta deoarece este ușor de demonstrat că dacă Pămîntul ar fi în formă de pătură sferică, un corp din interiorul său nu ar fi atras dintr-o parte mai mult decît din cealaltă."

Michael Faraday a efectuat și el experiențe pentru a demonstra că sarcina suplimentară se distribuie pe suprafața exterioară a unui conductor. El a construit o mare cutie acoperită cu metal, montată pe suporți izolatori și a încărcat-o cu sarcină cu ajutorul unui puternic generator electrostatic. După spusele lui Faraday:

„Am intrat în cub și am stat în el și folosind lumînări aprinse, electrometre și alte aparate pentru punerea în evidență a sarcinii electrice nu am reușit să observ nici cea mai mică influență asupra lor... cu toate că în tot acest timp cubul era puternic încărcat din exterior și din toate părțile suprafeței exterioare porneau scîntei și efluvii."

Henry Cavendish (1731—1810) a efectuat experiența din figura 28-6 într-o versiune îmbunătățită. Cu instrumentele de care dispunea, Cavendish a demonstrat experimental că puterea lui r din legea forței este cuprinsă, cu o mare probabilitate, între 2,02 și 1,98. Dar Cavendish nu și-a publicat rezultatele astfel că ele au rămas aproape necunoscute în acea vreme. Maxwell a repetat cu o mai mare precizie experiența lui Cavendish și a stabilit aceste limite între 2,00005 și 1,99995. În 1936

---

* 1 pint $= 5{,}68261 \cdot 10^{-4}$ m^3, unitate veche anglo-saxonă de măsură pentru volum. (N. T.)

** 1 inch $= 2{,}540 \cdot 10^{-2}$ m, unitate anglo-saxonă de lungime. (N.T.)

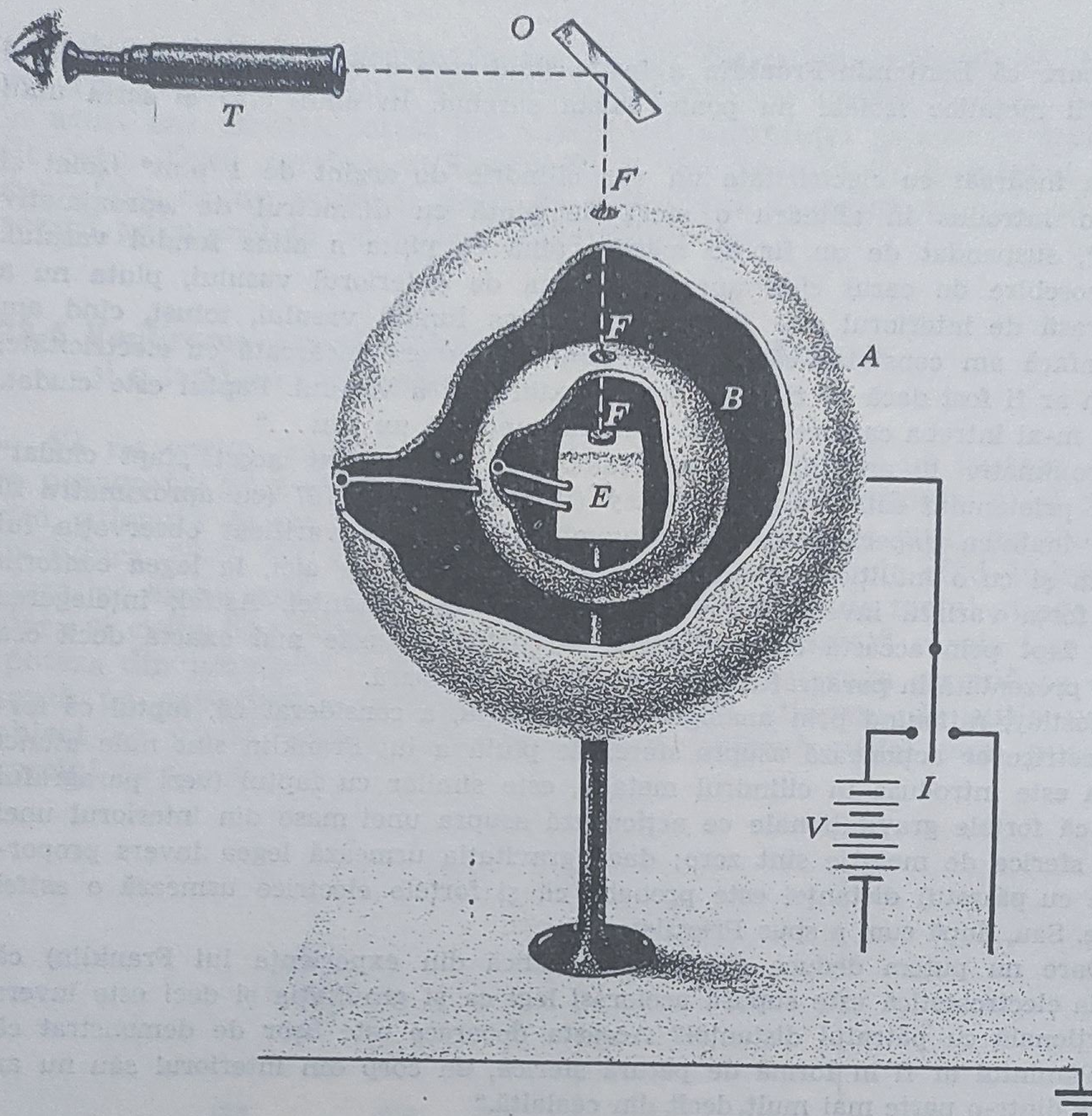


Figura 28-7. Dispozitivul lui Plimpton și Lawton.

Plimpton și Lawton au repetat experiența; ei au stabilit limitele între 2,000000002 și 1,999999998. În 1971 Williams, Faller și Hill au stabilit limitele 2,0000000000000003 și 1,9999999999999997.

Figura 28-7 este o schiță idealizată a aparatului lui Plimpton și Lawton. El este format în principiu din două sfere metalice concentrice, A și B, prima avînd diametrul de 1,524 m. Sfera interioară conține un electrometru sensibil E legat astfel încît să indice dacă există o deplasare de sarcini între cele două sfere.

Comutînd spre stînga întrerupătorul I, sistemul de sfere poate fi încărcat cu o sarcină mare. Dacă o parte din această sarcină s-ar deplasa către sfera B, ea ar trebui să treacă prin electrometru producînd astfel o deplasare ce poate fi observată optic cu ajutorul telescopului T, al oglinzii O și al ferestrei F.

Totuși, cînd întrerupătorul I a fost comutat alternativ spre stînga sau spre dreapta, legînd astfel sistemul de sfere cînd la baterie cînd la pămînt, galvanometrul nu a înregistrat nici un efect. Aceasta este cea mai importantă dovadă experimentală de pînă acum că ipoteza din paragraful 28-4

este corectă. Cunoscînd sensibilitatea electrometrului, Plimpton și Lawton au calculat că puterea din legea lui Coulomb este situată, cu mare probabilitate, între limitele date mai sus.

28-6 Teorema lui Gauss ● Aplicații

Teorema lui Gauss poate fi folosită la calculul lui $\vec{E}$ atunci cînd simetria distribuției de sarcini este ridicată. Un exemplu a fost deja discutat; calculul lui $\vec{E}$ pentru cazul unei sarcini punctiforme (ec. 28-5). Vom da alte cîteva exemple.

Exemplul 2. *Distribuție de sarcini cu simetrie sferică.* În fig. 28-8 este dată o distribuție sferică de sarcină, de rază R. În orice punct, *densitatea de sarcină* ρ (adică, sarcina pe unitatea de volum, măsurată în C/m^3) depinde numai de distanța punctului față de centru și nu de direcție, condiție numită *simetrie sferică.* Găsiți o expresie pentru E pentru puncte (a) în exteriorul (b) în interiorul distribuției de sarcini. Observați că obiectul din fig. 28-8 nu poate fi un conductor deoarece, în acest caz, sarcina suplimentară s-ar găsi pe suprafața sa.

Aplicînd teorema lui Gauss unei suprafețe gaussiene sferice de rază r în figura 28-8 a (vezi paragraful 28-3) se obține chiar ecuația 28-5.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{28-5}$$

unde q este sarcina totală. Astfel, pentru puncte din exteriorul unei distribuții de sarcini cu simetrie sferică, cîmpul electric are valoarea pe care ar avea-o dacă sarcina ar fi concentrată în centrul său. Aceasta ne reamintește faptul că o sferă de masă m se comportă din punct gravitațional, pentru puncte exterioare ei, ca și cum masa ar fi concentrată în centrul său. La baza acestei similarități stă faptul că atît legea lui Coulomb cît și legea gravitației sînt legi ce variază cu inversul pătratului distanței. Cazul gravitațional a fost demonstrat în detaliu în paragraful 16-6; în cazul electrostatic demonstrația folosind teorema lui Gauss este evident mai simplă.

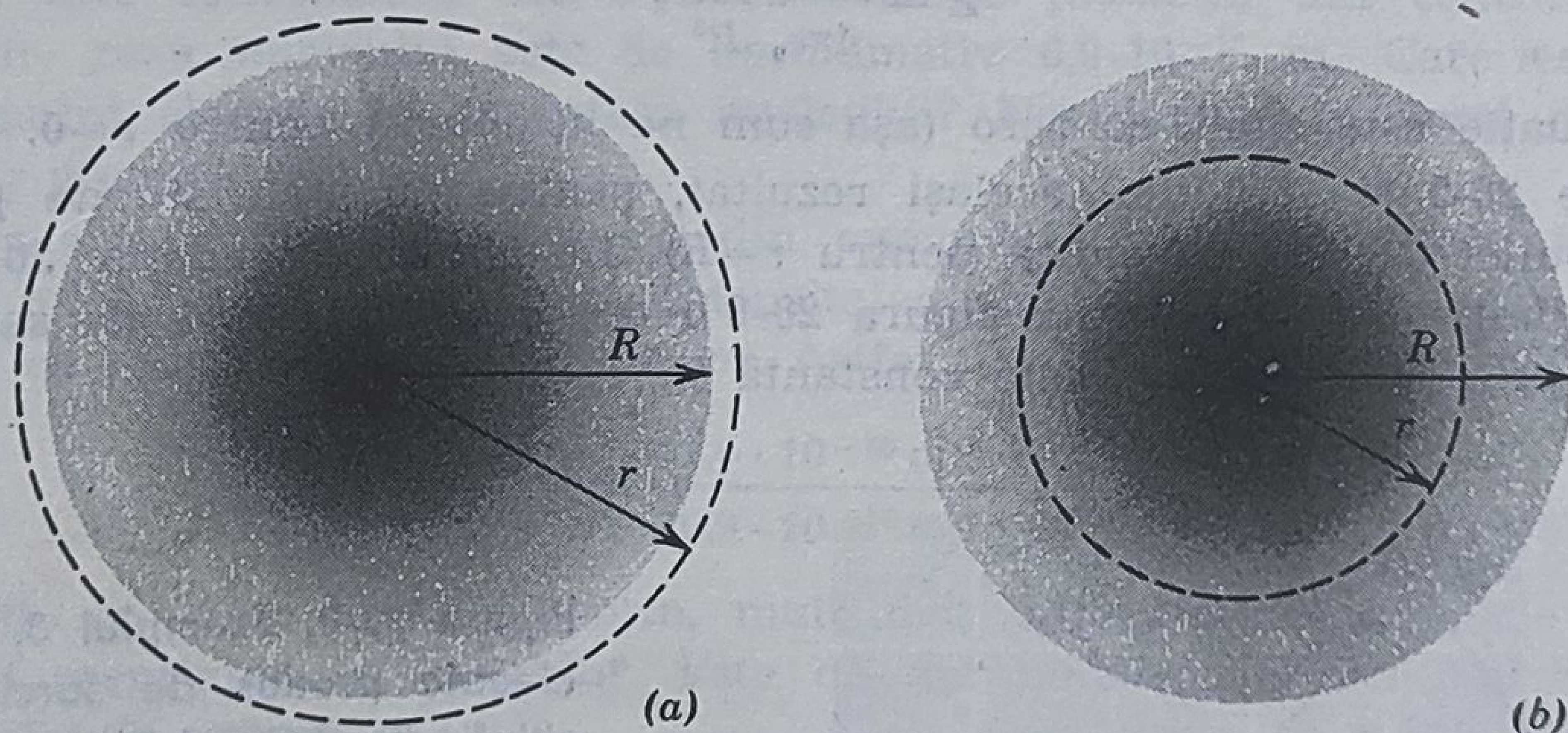


Figura 28-8. Exemplul 2. Două suprafețe Gauss pentru cazul unei distribuții de sarcină cu simetrie sferică. După cum sugerează înnegrirea, densitatea de sarcină variază cu distanța de la centru dar nu cu direcția.

În figura 28-8 b este reprezentată o suprafață gaussiană, de rază r, în *interiorul* distribuției de sarcini. Teorema lui Gauss (ec. 28-4) dă

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E (4\pi r^2) = q'$$

sau

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{r^2}$$

în care q' reprezintă acea parte din q cuprinsă în sfera de rază r. Partea din q situată în afara acestei sfere, nu dă nici o contribuție la $\vec{E}$ pentru raza r. Aceasta corespunde, în cazul gravitațional (paragraful 16-6), faptului că o pătură sferică de materie nu exercită nici o forță asupra unui corp din interiorul său.

Un interesant caz special al distribuției de sarcină cu simetrie sferică este cazul unei sfere cu sarcina distribuită uniform. În cazul unei astfel de sfere, care ar fi reprezentată în figura 28-8 printr-o înnegrire uniformă, densitatea de sarcină are o valoare constantă pentru toate punctele din interiorul unei sfere de rază R și este zero pentru toate punctele din exteriorul ei. Pentru punctele din interiorul unei astfel de sfere cu sarcina distribuită uniform, putem scrie

$$q' = q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

sau

$$q' = q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

unde $\frac{4}{3}\pi R^3$ este volumul distribuției sferice de sarcină. Expresia lui E devine deci

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{R^3}. \qquad (28\text{-}6)$$

Această ecuație este egală cu zero (așa cum ne așteptam) pentru $r=0$. Observați că ecuațiile 28-5 și 28-6 dau același rezultat, pentru punctele situate pe suprafața distribuției de sarcină (adică pentru $r=R$). De notat că ecuația 28-6 nu se aplică distribuției de sarcină din figura 28-8 b deoarece densitatea de sarcină, reprezentată prin înnegrire, *nu* este constantă în acest caz.

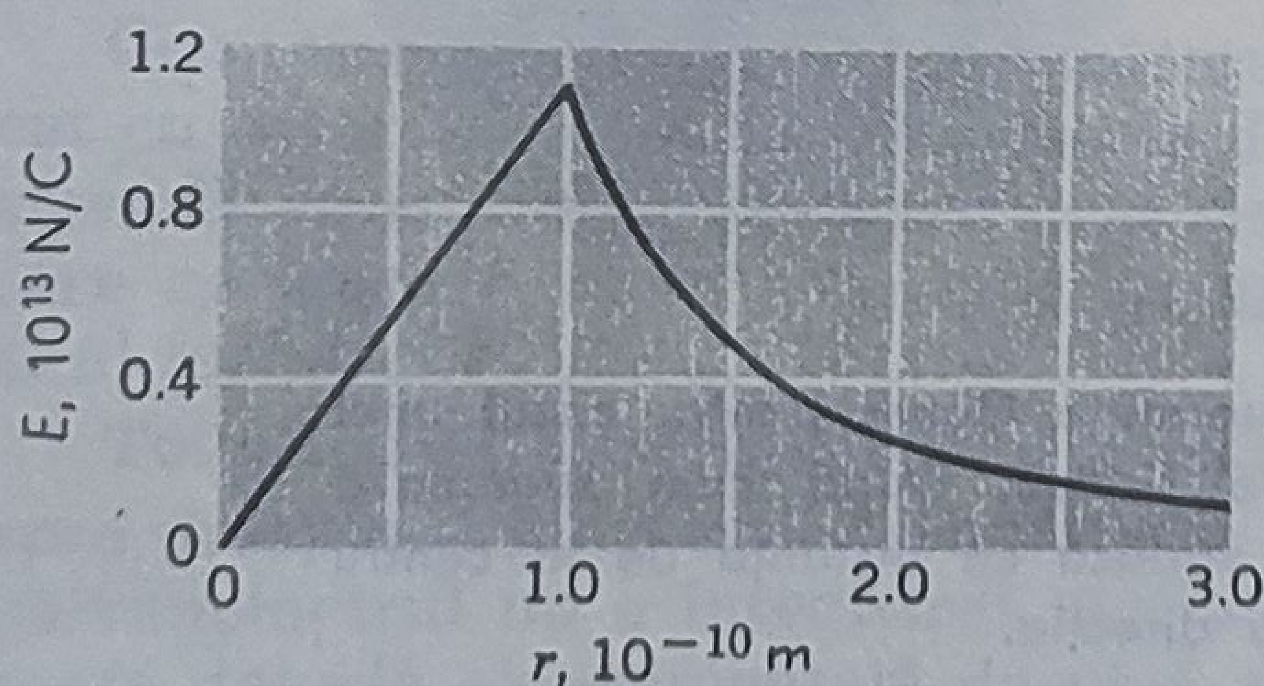


Figura 28-9. Exemplul 3. Cîmpul electric produs de sarcina pozitivă din atomul de aur, conform modelului (eronat) al lui Thomson.

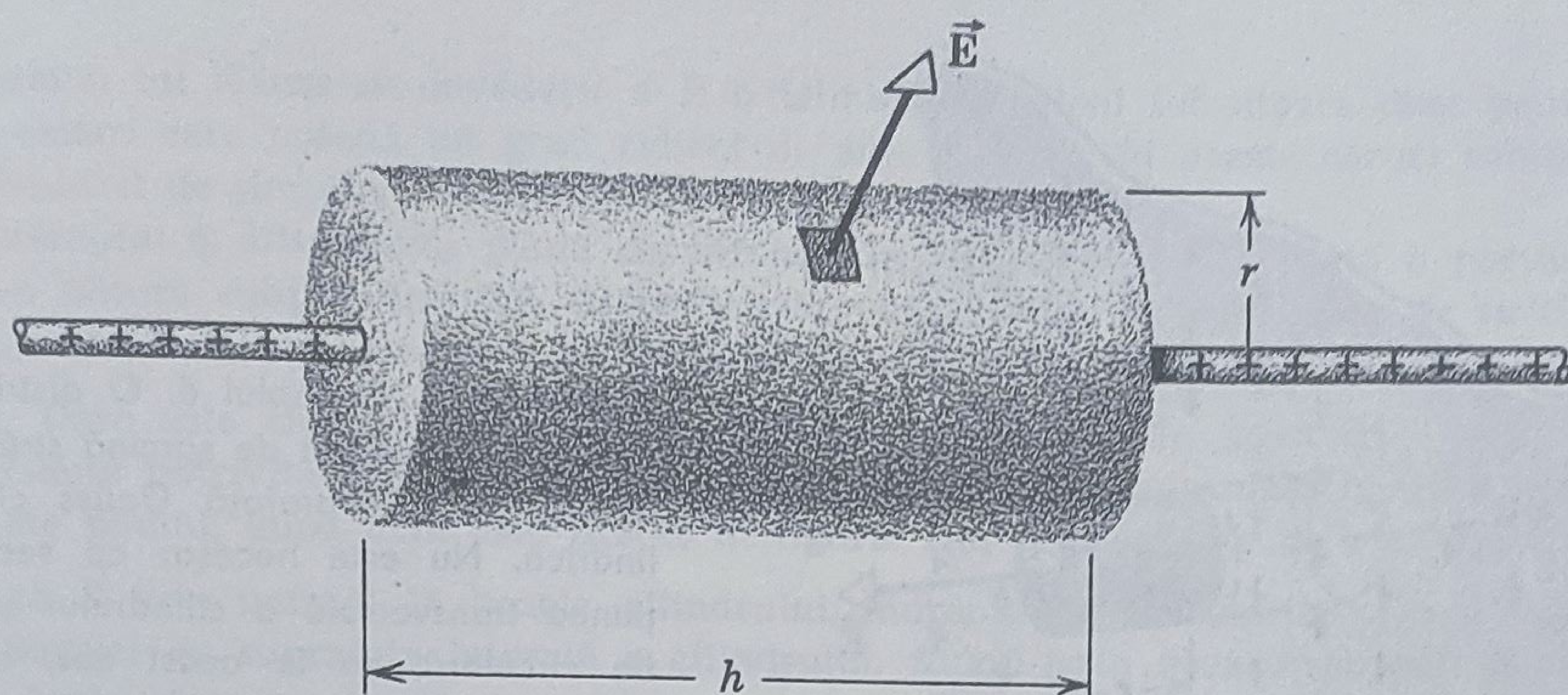


Figura 28-10. Exemplul 5. O suprafață Gauss cilindrică corespunzătoare unei distribuții liniare infinite de sarcini.

Exemplul 3. *Modelul atomic Thomson.* La începuturile fizicii atomice se considera că sarcina pozitivă din atom este distribuită uniform în interiorul unei sfere de rază aproximativ $1,0 \cdot 10^{-10}$ m, adică în interiorul întregului atom. Calculați intensitatea cîmpului electric la suprafața unui atom de aur (Z=79) pornind de la această presupunere (eronată). Neglijați efectul electronilor.

Sarcina pozitivă din atom este *Ze* sau (79) $(1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Ecuația 28—5 dă pe *E* la suprafață,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ N/C}$$

În figura 28-9 este reprezentat *E* funcție de distanța de la centrul atomului, folosind ecuațiile 28-5 și 28-6. Se vede că *E* are valoarea maximă la suprafață și scade linear spre zero la centru (vezi ec. 28-6). În exteriorul sferei *E* descrește cu inversul pătratului distanței (vezi ec. 28-5).

Exemplul 4. *Modelul atomic al lui Rutherford.* Vom vedea în paragraful 28—7 că sarcina pozitivă din atom *nu* este distribuită uniform în tot atomul (vezi exemplul 3) ci este concentrată într-o mică regiune *(nucleul)* din centrul atomului. Pentru aur, raza nucleului este de aproximativ $6,9 \cdot 10^{-15}$ m. Care este intensitatea cîmpului electric la suprafața nucleului? Neglijați și în acest caz efectele electronilor atomici.

Problema este aceeași ca aceea din exemplul 3, cu deosebire că raza este mult mai mică. În acest caz deci, intensitatea cîmpului electric la suprafață este mai mare, cu raportul pătratelor razelor. Astfel,

$$E = (1,1 \cdot 10^{13} \text{ N/C}) \frac{(1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2}{(6,9 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 2,3 \cdot 10^{21} \text{ N/C}.$$

Acesta este un cîmp electric enorm, mult mai intens decît cîmpurile ce pot fi produse și menținute în laborator. Este de aproximativ 10^8 ori mai mare decît acela calculat în exemplul 3.

Exemplul 5. *Distribuția liniară de sarcină.* În fig. 28-10 este dată o porțiune într-o distribuție liniară infinită de sarcină, a cărei *densitate liniară de sarcină* λ (adică sarcina pe unitatea de lungime, măsurată în C/m) este constantă pentru toate punctele liniei. Găsiți o expresie pentru *E* la distanța *r* de linie.

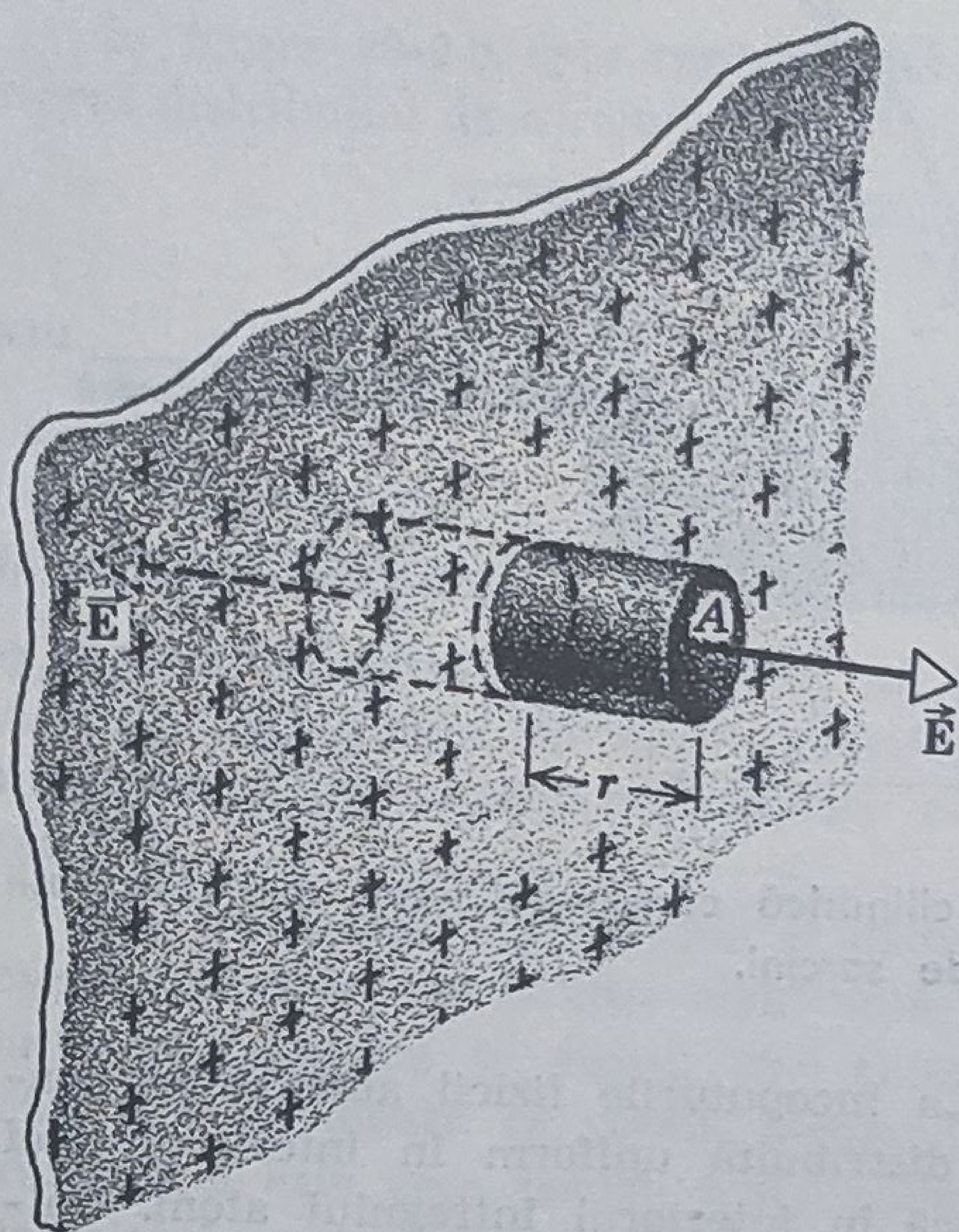


Figura 28-11. Exemplul 6. O distribuție plană infinită de sarcină străbătută de o suprafață Gauss cilindrică. Nu este necesar ca secțiunea transversală a cilindrului să fie circulară, ca în acest caz, ci poate fi de formă arbitrară.

Din considerente de simetrie se vede că direcția cîmpului $\vec{E}$ produs de o sarcină lineară uniformă nu poate fi decît radială. Ca suprafață Gauss alegem un cilindru circular de rază r și lungime h, cu bazele plane, normale la axa cilindrului. E este constant pe întreaga suprafață laterală a cilindrului iar fluxul lui $\vec{E}$ prin această suprafață este $E\ (2\pi\ rh)$ unde $2\pi\ rh$ este mărimea acestei suprafețe. Fluxul prin bazele circulare ale cilindrului este zero deoarece vectorul $\vec{E}$ este situat în aceste suprafețe în fiecare punct.

Sarcina închisă de suprafața gaussiană din figura 28-10 este λh. Teorema lui Gauss (ec. 28-4):

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

devine deci

$$\varepsilon_0 E\ (2\pi\ rh) = \lambda h$$

deci

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (28\text{-}7)$$

Direcția lui $\vec{E}$ este radială, înspre exterior în cazul unei distribuții liniare de sarcină pozitivă.

Observați cît de simplă este rezolvarea folosind teorema lui Gauss în comparație cu folosirea metodelor de integrare, ca în exemplul 6, capitolul 27. Observați, de asemenea, că rezolvarea folosind teorema lui Gauss este posibilă numai dacă suprafața Gauss se alege în așa fel încît să folosim simetria radială a cîmpului electric produs de distribuția liniară de sarcină. Drept suprafață gaussiană putem alege orice suprafață: cub, sferă. Dar chiar dacă teorema lui Gauss se poate aplica tuturor acestor suprafețe, nu toate sînt convenabile pentru problema dată. În acest caz, numai suprafața cilindrică din figura 28-10 este cea adecvată.

Teorema lui Gauss se dovedeşte a fi o tehnică de calcul folositoare doar pentru acele cazuri care posedă un grad ridicat de simetrie, dar în aceste cazuri soluţiile sînt deosebit de simple.

Exemplul 6. *Distribuţia plană de sarcină.* În figura 28-11 este dată o porţiune dintr-o pătură subţire, infinită, *neconductoare* de sarcină, cu *densitatea de sarcină de suprafaţă* σ (adică sarcina pe unitatea de suprafaţă, măsurată în C/m^2) constantă. Care este cîmpul electric $\vec{E}$ la distanţa r de plan? În acest caz, o suprafaţă Gauss potrivită este cea cilindrică, de înălţime $2r$, cu suprafaţa bazei A, care străbate planul, după cum este arătat în figură. Din considerente de simetrie, este clar că $\vec{E}$ este normal la bazele cilindrului, îndreptat spre exterior. Deoarece $\vec{E}$ este paralel cu suprafaţa laterală a cilindrului, fluxul prin această suprafaţă este zero. Astfel, teorema lui Gauss

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

devine

$$\varepsilon_0(EA+EA)=\sigma A$$

unde σA este sarcina din interiorul suprafeţei. Aceasta dă:

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (28\text{-}8)$$

Observaţi că E este constant în toate punctele, în ambele părţi ale planului; comparaţi cu fig. 27-2. Deşi în practică, nu există distribuţii plane de sarcină, acest calcul este folositor deoarece ecuaţia 28-8 dă rezultate suficient de corecte pentru cazul distribuţiilor reale (nu infinite) dacă se consideră numai punctele depărtate de extremităţi şi a căror distanţă de la pătură este mică în comparaţie cu dimensiunile păturii.

Exemplul 7. *Conductorul încărcat.* În figura 28-12 este dat un conductor pe a cărui suprafaţă există o sarcină cu densitatea de suprafaţă σ. În general σ variază de la un punct la altul. Care este $\vec{E}$ pentru puncte situate în imediata vecinătate a suprafeţei?

Pentru *puncte apropiate de suprafaţă* $\vec{E}$ iese din suprafaţă, normal la ea, dacă sarcina este pozitivă. Dacă $\vec{E}$ *nu* ar fi normal la suprafaţă el ar avea o componentă în suprafaţă. O astfel de componentă ar acţiona asupra purtătorilor de sarcină din conductor dînd naştere unor curenţi de suprafaţă. Am presupus însă că sîntem în caz electrostatic, situaţie în care astfel de curenţi sînt egali cu zero. Deci $\vec{E}$ nu poate fi decît normal de suprafaţă.

Mărimea lui $\vec{E}$ poate fi găsită aplicînd teorema lui Gauss unei suprafeţe cilindrice de bază A. Deoarece $\vec{E}$ este egal cu zero în orice punct din interiorul

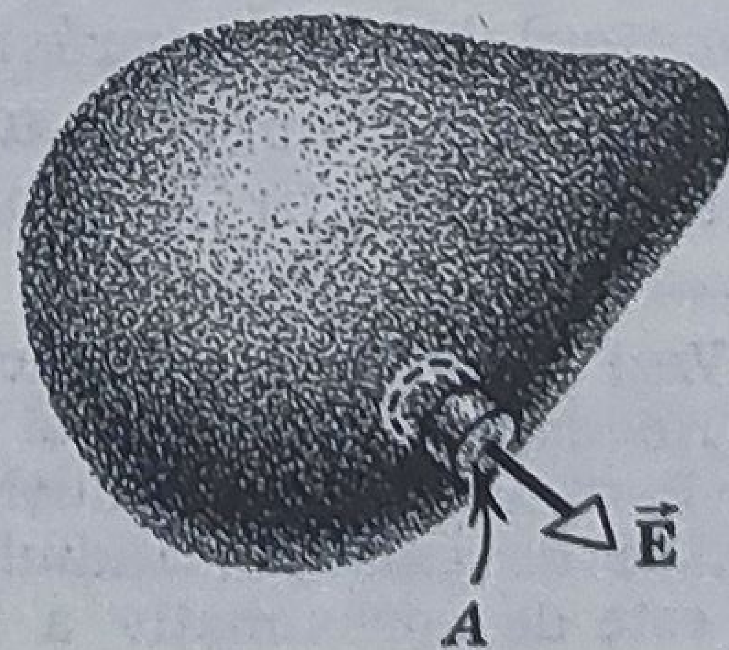


Figura 28-12. Exemplul 7. O suprafaţă Gauss corespunzătoare unui conductor încărcat izolat. Secţiunea transversală a suprafeţei poate să nu fie circulară ci poate avea o formă arbitrară.

conductorului (vezi paragraful 28-4) singura contribuţie la Φ_E este cea prin baza de suprafaţă A din exteriorul conductorului. Teorema lui Gauss:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

devine

$$\varepsilon_0 (EA) = \sigma A$$

unde σA este sarcina totală din interiorul suprafeţei Gauss. Aceasta dă

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (28-9)$$

Comparînd cu ecuaţia 28-8 se vede că în apropierea unui conductor ce posedă o sarcină de densitate de suprafaţă σ cîmpul electric este de *două ori mai mare* decît cel din apropierea unei pături neconductoare cu aceeaşi densitate de suprafaţă. Comparaţi cu atenţie suprafeţele Gauss din figurile 28-11 şi 28-12. În figura 28-11 liniile de cîmp părăsesc suprafaţa prin *fiecare* din cele două baze, deoarece există cîmp electric de *ambele* feţe ale păturii de sarcini. În fig. 28-12 liniile de cîmp ies din suprafaţă doar prin baza exterioară, baza interioară a cilindrului găsindu-se în interiorul conductorului unde cîmpul electric este zero. Presupunînd că densitatea de sarcină de suprafaţă şi că suprafaţa bazei cilindrului A este aceeaşi pentru ambele suprafeţe Gauss, sarcina din interiorul suprafeţelor $(=\delta A)$ este aceeaşi. Cum, din teorema lui Gauss, fluxul Φ_E trebuie să fie acelaşi în ambele cazuri, rezultă că E $(=\Phi_E/A)$ trebuie să fie de două ori mai mare în figura 28-12 faţă de figura 28-11. Este util de observat că în figura 28-11 jumătate din flux iese printr-o parte a suprafeţei şi jumătate prin cealaltă parte, pe cînd în figura 28-12 întregul flux iese prin suprafaţa exterioară.

28-7 Modelul nucleului atomului

Ernest Rutherford (1871—1937) a fost primul (1911) care încercînd să interpreteze unele experienţe efectuate la Universitatea din Manchester de colaboratorii săi H. Geiger şi E. Marsden*, a presupus existenţa nucleului atomic. Rezultatele din exemplele 3 şi 4 au jucat un rol important în analiza făcută de Rutherford asupra acestor experienţe.

Experienţa efectuată de aceşti cercetători la sugestia lui Rutherford, era următoarea: un fascicul de particule α** era trimis asupra unui strat subţire dintr-un element greu, de exemplu aur. Ei au numărat, numărul de particule α deviate sub diferite unghiuri φ. În figura 28-13 este redată schematic experienţa. În figura 28-14 sînt date parcursurile tipice ale particulelor α împrăştiate de atomii de aur; unghiurile φ sub care sînt deviate particulele α variază între 0 şi 180° după cum ciocnirile sînt „tangente“ sau „frontale“.

---

* Vezi „The Birth of Nuclear Atom“ de E. N. da C. Andrade, Scientific American, November 1956, Vezi şi exemplul 5, capitolul 10.

** Particulele α sînt nuclee de heliu emise spontan de unele substanţe radioactive, ca de exemplu radiul. În momentul în care sînt emise, viteza particulelor α este de aproximativ a treizecea parte din viteza luminii.

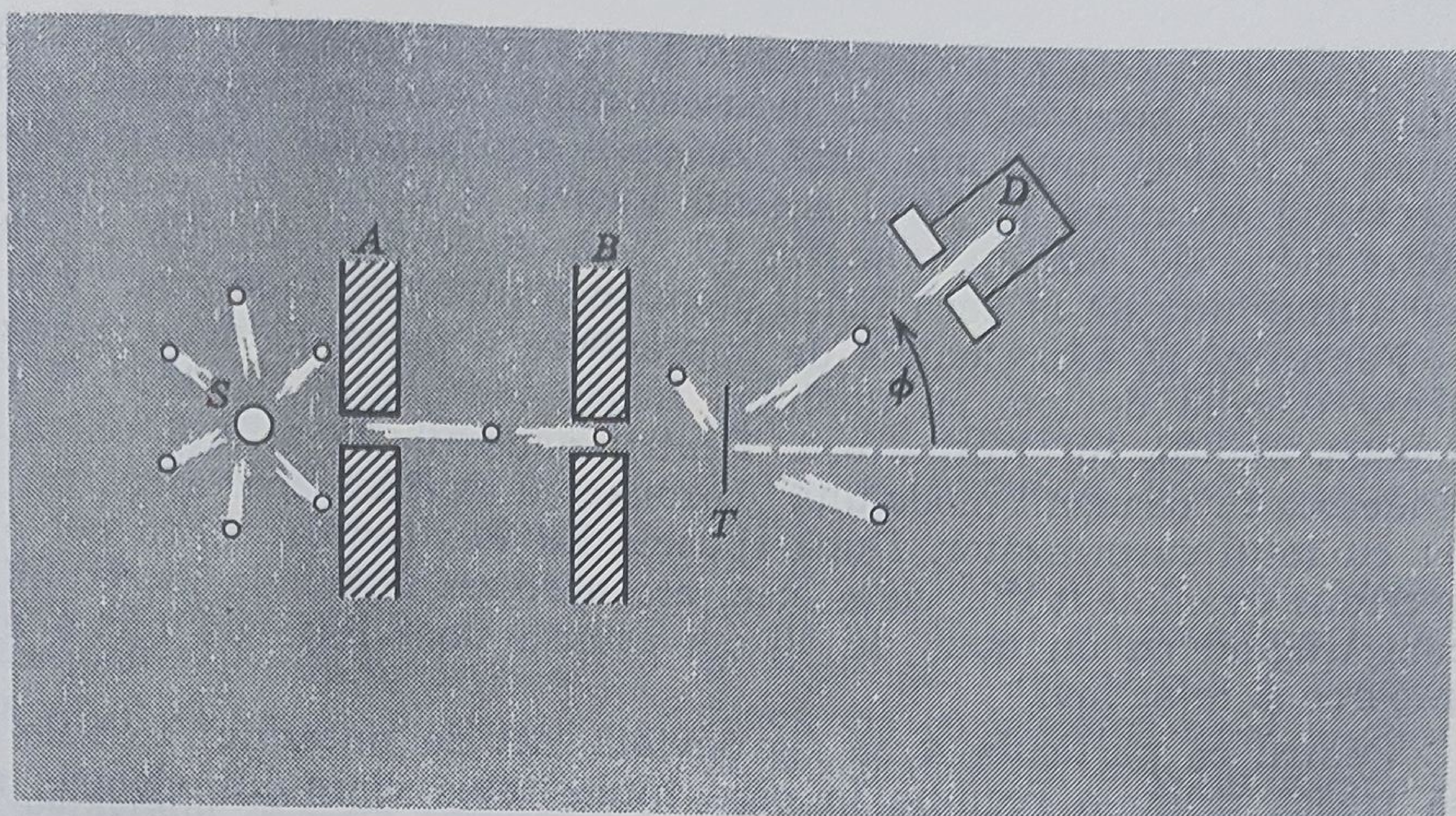


Figura 28-13. Schema experienței de studiu a împrăștierii particulelor α. Particulele emise de sursa radioactivă S cad pe o „țintă" metalică subțire *T*; particulele α împrăștiate de țintă sînt numărate de detectorul *D* la diferite unghiuri Φ.

Electronii atomilor ciocniți de către particula α incidentă fiind foarte ușori, aproape că nu influențează mișcarea particulei α incidente; dar electronii sînt puternic deviați așa cum ar fi un roi de insecte de către o piatră aruncată prin el. Devierea particulelor α trebuie să fie produsă de acțiunea repulsivă a sarcinii pozitive din atomul de aur, care se știe că trebuie să posede partea cea mai însemnată din masa atomului.

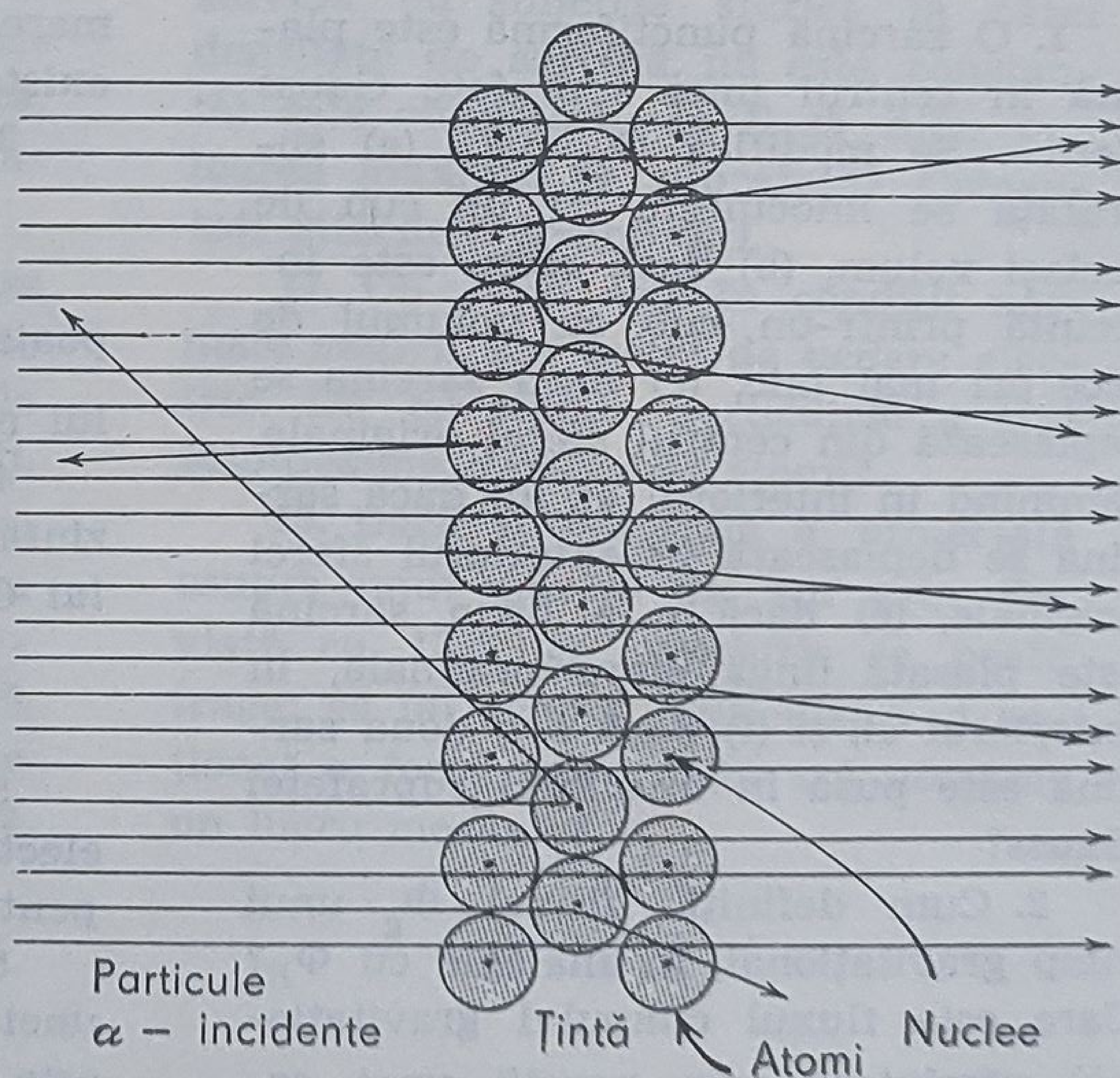


Figura 28-14. Devierea particulelor α incidente depinde de natura ciocnirii nucleare. (Din Andrade, Scientific American, noiembrie 1956).

În perioada cînd au fost efectuate aceste experiențe majoritatea fizicienilor credeau în așa numitul „cozonac cu stafide", model al atomului, model propus de J. J. Thomson (1856—1940). În acest model (vezi exemplul 3) se presupunea că sarcina pozitivă a atomului este distribuită în întreg atomul, adică într-un volum sferic de rază aproximativ 10^{-10} m. Se considera că electronii vibrează în jurul unor centre fixe din interiorul acestei sfere.

Rutherford a arătat că acest model atomic nu este în concordanță cu experien-

țele de împrăștiere a particulelor α și a propus modelul nuclear al atomului, model acceptat și azi. În acest model sarcina nucleară este restrînsă la o sferă mult mai mică, de rază aproximativ 10^{-14} m *(nucleul)*. Electronii se mișcă în jurul acestui nucleu și ocupă un volum aproximativ sferic de rază aproximativ 10^{-10} m. Această strălucită concluzie a lui Rutherford stă la baza fizicii atomice și nucleare moderne.

Faptul că în experiențele de împrăștiere a particulelor α, unele particule α erau deviate cu unghiuri foarte mari, pînă la 180°, i-a atras imediat atenția lui Rutherford. Pentru oamenii de știință obișnuiți să gîndească în termenii modelului „cozonac cu stafide" acesta era un rezultat cu totul surprinzător. După spusele lui Rutherford: „Era cel mai de necrezut eveniment din viața mea, era aproape la fel de incredibil ca și cum trăgînd cu un obuz de 40 cm asupra unei foițe de hîrtie el s-ar întoarce și te-ar lovi."

Pentru ca particula α să fie deviată atît de puternic* trebuie ca ea să treacă printr-o regiune în care intensitatea cîmpului electric să fie foarte mare. În exemplul 3 se arată că în modelul Thomson, intensitatea maximă a cîmpului electric este $1{,}1 \cdot 10^{13}$ N/C. Comparați-o cu valoarea calculată în exemplul 4 pentru un punct de pe suprafața nucleului de aur ($2{,}3 \cdot 10^{21}$ N/C). Astfel, forța ce produce devierea unei particule α poate fi chiar de 10^8 ori mai mare dacă sarcina pozitivă a atomului este comprimată într-o regiune suficient de mică (nucleul) din centrul atomului. Rutherford și-a bazat ipoteza sa asupra existenței nucleului atomic pe o analiză matematică mult mai detaliată decît cea dată aici.

Întrebări

1. O sarcină punctiformă este plasată în centrul unei suprafețe Gauss sferice. Se modifică Φ_E dacă (a) suprafața se înlocuiește cu un cub de același volum, (b) dacă sfera este înlocuită printr-un cub cu volumul de zece ori mai mic, (c) dacă sarcina se deplasează din centrul sferei originale, rămînînd în interiorul ei, (d) dacă sarcina se deplasează în exteriorul sferei originale, (e) dacă o a doua sarcină este plasată lîngă sfera originală, în exteriorul ei, și (f) dacă o a doua sarcină este pusă în interiorul suprafeței Gauss?

2. Cum definiți fluxul Φ_g unui cîmp gravitațional, în analogie cu Φ_E? Care este fluxul cîmpului gravitațional pămîntesc prin pereții unei camere, presupunînd că în cameră nu există obiecte?

3. În teorema lui Gauss,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

poate fi atribuită intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$, sarcinii q?

4. Arătați că ecuația 18-3 reprezintă ceea ce am putea numi *teorema lui Gauss pentru fluide incompresibile*

$$\Phi_v = \oint \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

5. O suprafață închide un dipol electric. Ce puteți spune despre Φ_E pentru această suprafață?

6. Să presupunem că în interiorul unei suprafețe Gauss sarcina totală este zero. În acest caz teorema lui

---

* Se poate arăta că probabilitatea ca o particulă α să fie deviată foarte mult, ca urmare a efectului combinat a multor devieri mici, este foarte mică.

Gauss cere ca $\vec{E}$ să fie egal cu zero pentru toate punctele suprafeţei? Este corect inversul acestei afirmaţii, adică, dacă $\vec{E}$ este egal cu zero în orice punct al suprafeţei, teorema lui Gauss cere ca sarcina totală din interiorul ei să fie egală cu zero?

7. Dacă exponentul din legea lui Coulomb nu ar fi exact egal cu doi, ar mai fi valabilă teorema lui Gauss?

8. Teorema lui Gauss, aşa cum este aplicată în paragraful 28-4, cere ca toţi electronii de conducţie dintr-un conductor izolat să fie situaţi pe suprafaţă?

9. În paragraful 28-4 am presupus că $\vec{E}$ este egal cu zero în toate punctele din interiorul unui conductor. Totuşi, în interiorul conductorului există cîmpuri electrice extrem de mari, în vecinătatea electronilor sau ale nucleelor. Contrazice aceasta concluzia paragrafului 28-4?

10. Se spune uneori că sarcinile suplimentare se distribuie numai pe suprafaţa exterioară a unui conductor deoarece sarcinile de acelaşi semn se resping tinzînd să se situeze la distanţă cît mai mare una de cealaltă. Comentaţi corectitudinea acestui raţionament.

11. Folosirea teoremei lui Gauss simplifică calculul cîmpului produs de trei sarcini egale plasate în vîrfurile unui triunghi echilateral? Explicaţi.

12. Folosirea densităţii de sarcină lineară, de suprafaţă sau de volum la calculul sarcinii conţinute într-un element dintr-un obiect încărcat implică existenţa unei distribuţii continue de sarcină, pe cînd în realitate, la scară microscopică sarcina este discontinuă. Cum se justifică folosirea acestui procedeu?

13. Este obligatoriu ca $\vec{E}$ să fie zero în interiorul unui balon de cauciuc încărcat cu sarcină, dacă balonul este (a) sferic (b) de formă cilindrică? Sarcina se presupune uniform distribuită pe suprafaţă pentru ambele forme.

14. Un balon de cauciuc sferic poartă o sarcină distribuită uniform pe suprafaţă. Cum variază E pentru puncte din (a) interiorul balonului, (b) de pe suprafaţa lui, şi (c) din exteriorul balonului, cînd balonul este umflat?

15. Pe măsură ce pătrunzi într-o sferă încărcată uniform cu sarcină, E ar trebui să descrească deoarece sarcina conţinută în interiorul sferei dusă prin punctul de observaţie este mai mică. Pe de altă parte, E ar trebui să crească deoarece te apropii de centrul acestei sarcini. Care efect predomină şi de ce?

16. Fiind dată o distribuţie de sarcină cu simetrie sferică (a cărei densitate de sarcină nu este constantă) este obligatoriu ca E să aibe valoarea maximă pe suprafaţă? Comentaţi diferitele posibilităţi.

17. Un atom este în condiţii normale *neutru din punct de vedere electric*. De ce atunci particulele α sînt întotdeauna deviate de atomi?

18. Dacă o particulă α proiectată asupra unui nucleu de aur este deviată cu 135°, ce concluzie se poate trage: că (a) asupra particulei α a acţionat o forţă sau că (b) s-a efectuat un lucru mecanic?

Probleme

1. Calculaţi Φ_E printr-o emisferă de rază R. Cîmpul $\vec{E}$ este uniform şi paralel cu axa emisferei.

2. În exemplul 1 calculaţi pe Φ_E pentru cazul în care axa cilindrului este perpendiculară pe cîmpul electric.

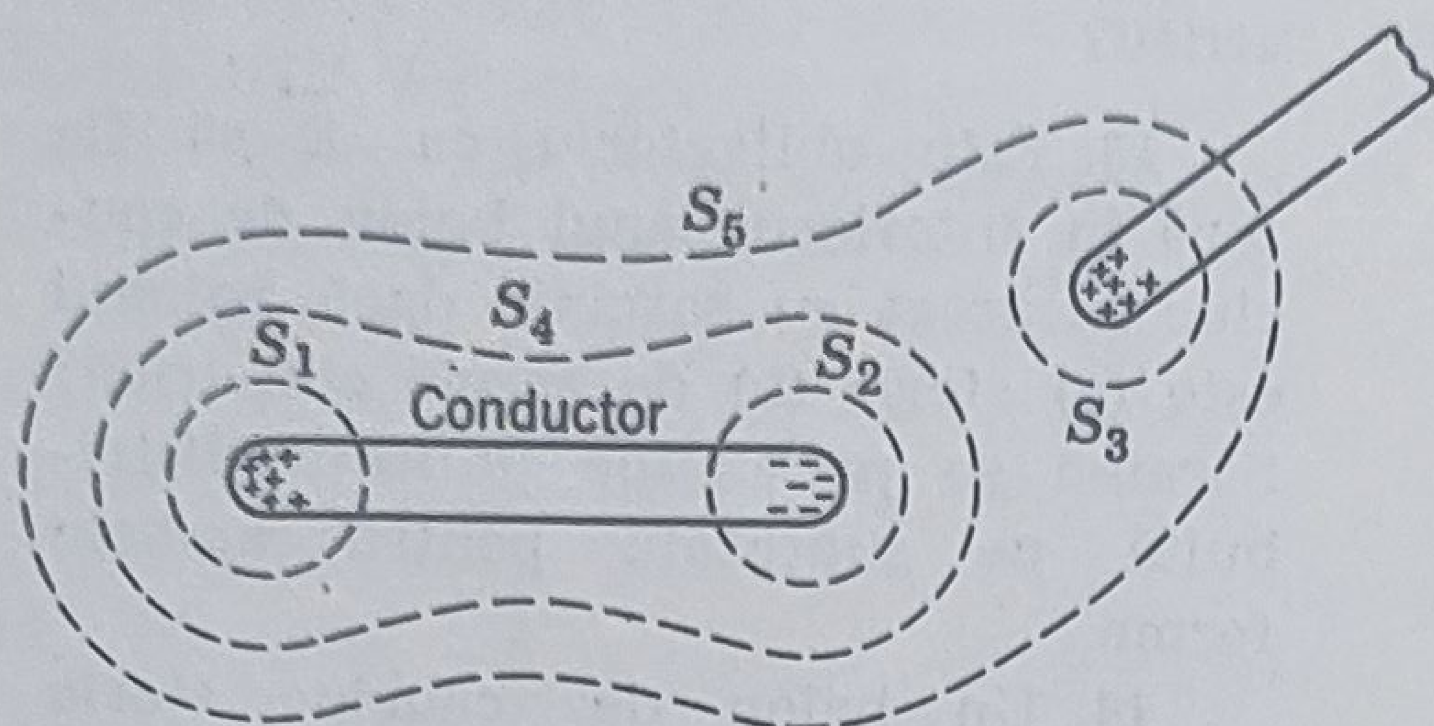


Figura 28-15.



Figura 28-16.

Nu folosiţi teorema lui Gauss.

3. O suprafaţă plană de arie A este înclinată astfel încît normala sa să facă unghiul θ cu un cîmp uniform $\vec{E}$. Calculaţi Φ_E pentru această suprafaţă.

4. O sarcină punctiformă de $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C se găseşte în centrul unei suprafeţe Gauss cubice cu latura de 0,5 m. Care este Φ_E corespunzător acestei suprafeţe?

5. Sarcina de pe un conductor izolat iniţial neîncărcat este separată aducînd în vecinătatea sa un baston încărcat pozitiv, ca în figura 28-15. Ce puteţi spune, folosind teorema lui Gauss, despre fluxul prin cele cinci suprafeţe? Sarcina negativă indusă pe conductor este egală cu sarcina pozitivă de pe baston.

6. „Teorema lui Gauss pentru cazul cîmpului gravitaţional" este

$$\frac{1}{4\pi G}\,\Phi_g = \frac{1}{4\pi G} \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -m$$

unde m este masa conţinută şi G este constanta atracţiei universale (paragraful 16-3). Deduceţi din aceasta legea atracţiei universale a lui Newton.

7. O sarcină punctiformă de $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ C (vezi fig. 28-16) se găseşte în centrul unei cavităţi sferice de rază 3,0 cm din interiorul unei piese de metal. Găsiţi cîmpul electric în punctul a, situat la jumătatea distanţei dintre centru şi suprafaţă şi în punctul b.

8. O foiţă metalică sferică subţire neîncărcată are în centrul său o sarcină punctiformă q. Găsiţi expresia cîmpului electric (a) în interiorul foiţei, (b) în exteriorul ei, folosind teorema lui Gauss. (c) Are foiţa vreun efect asupra cîmpului produs de q? (d) Prezenţa sarcinii q are vreun efect asupra foiţei? (e) Dacă o a doua sarcină punctiformă este plasată în exteriorul foiţei, asupra sarcinii exterioare acţionează vreo forţă? (f) Acţionează vreo forţă asupra sarcinii interioare? (g) Există vreo contradicţie cu legea a treia a lui Newton?

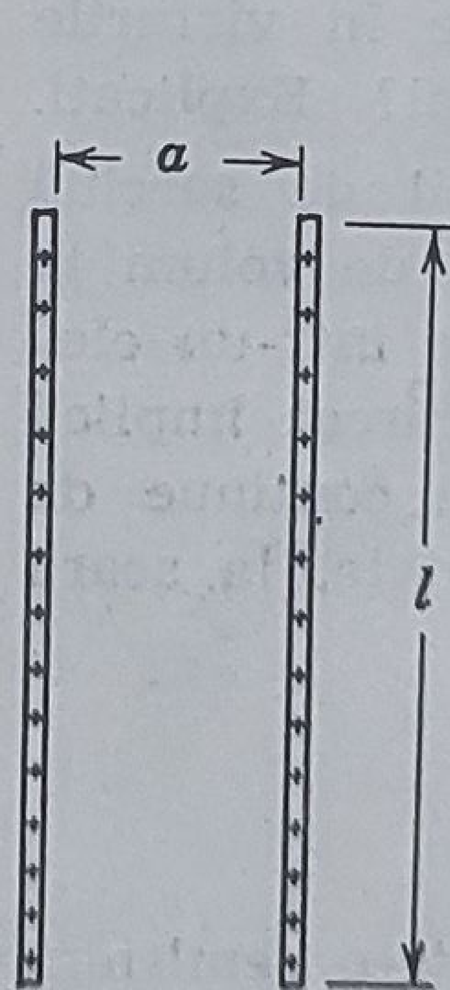


Figura 28-17.

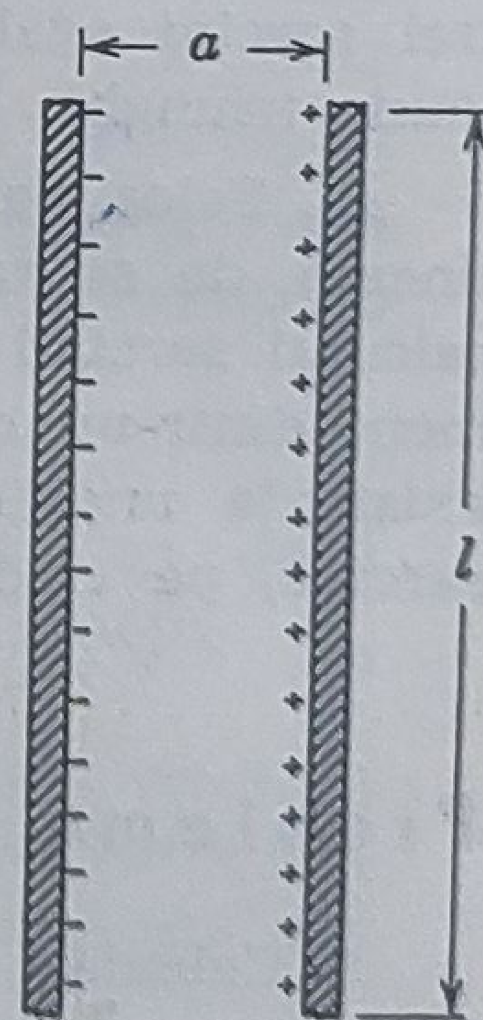


Figura 28-18.

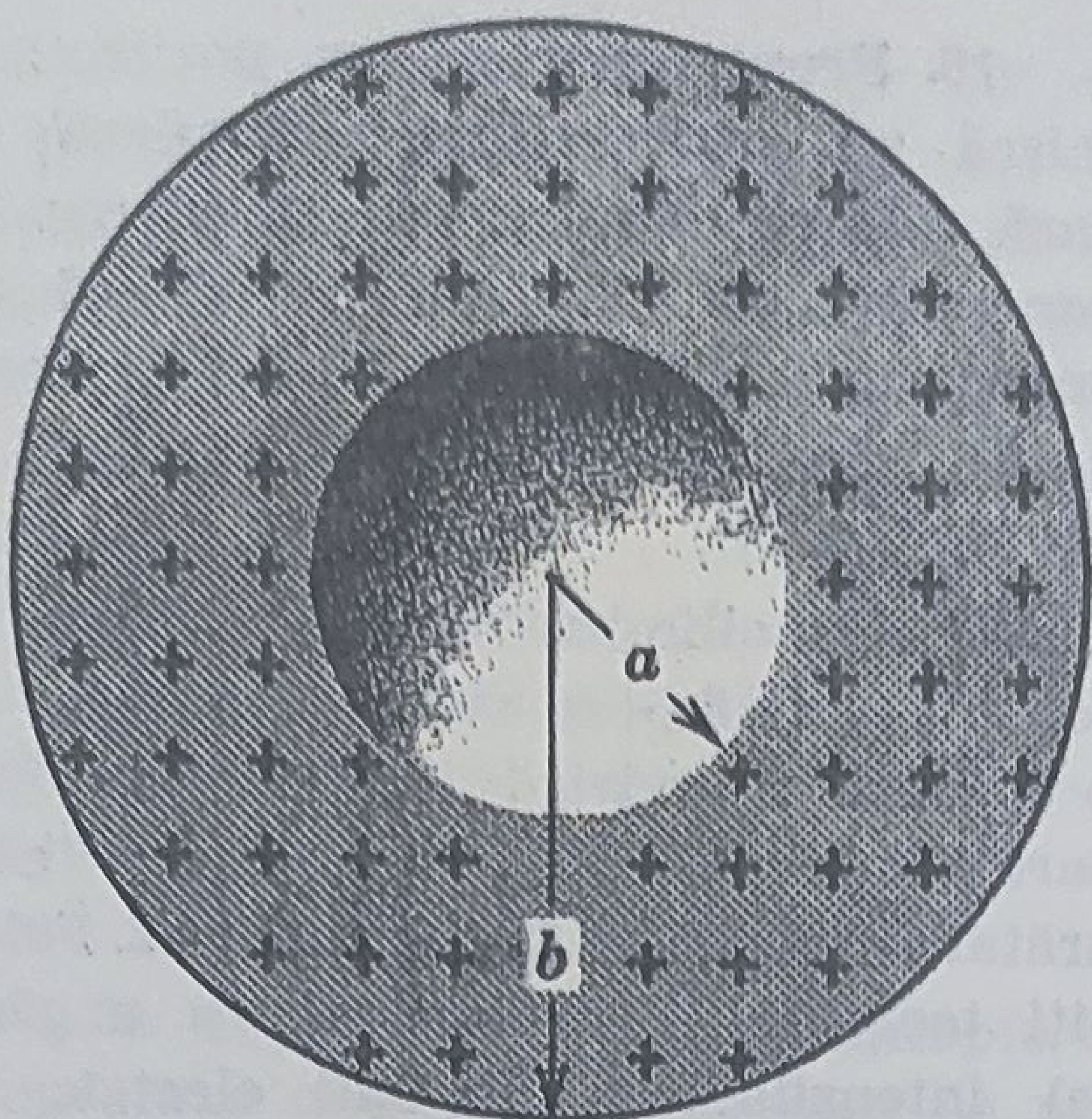


Figura 28-19.

9. Două foițe neconductoare, de dimensiuni mari, încărcate cu sarcină pozitivă sînt așezate față în față ca în figura 28-17. Care este $\vec{E}$ pentru puncte situate (a) la stînga foițelor, (b) între ele și (c) la dreapta lor? Presupunem că densitatea sarcinii de suprafață σ este aceeași pentru ambele foițe. Presupunem $a \ll l$ și nu luăm în considerare punctele din apropierea marginilor. (Indicație: $\vec{E}$ este în orice punct suma vectorială a intensității cîmpului electric produs de fiecare foiță separat).

10. Două plăci mari de metal sînt așezate față în față ca în figura 28-18. Sarcina de pe suprafețele lor interioare are densitatea de suprafață $+\sigma$ și $-\sigma$, respectiv. Care este $\vec{E}$ pentru puncte situate (a) la stînga plăcilor, (b) între ele și (c) la dreapta lor? Presupunem $a \ll l$ și nu luăm în considerare punctele din vecinătatea marginilor.

11. Două plăci mari de metal, cu suprafața de 1,0 m^2 sînt așezate față în față. Distanța dintre ele este de 5,0 cm iar pe suprafețele lor interioare poartă sarcini egale și de semn contrar. Care este sarcina de pe plăci, dacă cîmpul E dintre ele este de 55 N/C? Se neglijează efectele marginilor. Vezi problema 10.

12. O sferă de metal cu pereți subțiri cu raza de 25 cm, poartă o sarcină de $2{,}0 \cdot 10^{-7}$ C. Găsiți pe E într-un punct (a) din interiorul sferei, (b) din exteriorul sferei dar foarte aproape de ea și (c) la 3,0 m de centrul sferei.

13. Un electron de 100 eV este proiectat direct către o placă metalică mare cu densitatea de sarcină de suprafață de $-2{,}0 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. De la ce distanță trebuie aruncat electronul pentru ca ajuns în fața plăcii să nu o poată totuși atinge?

14. Un cilindru infinit lung de rază R are sarcina distribuită uniform

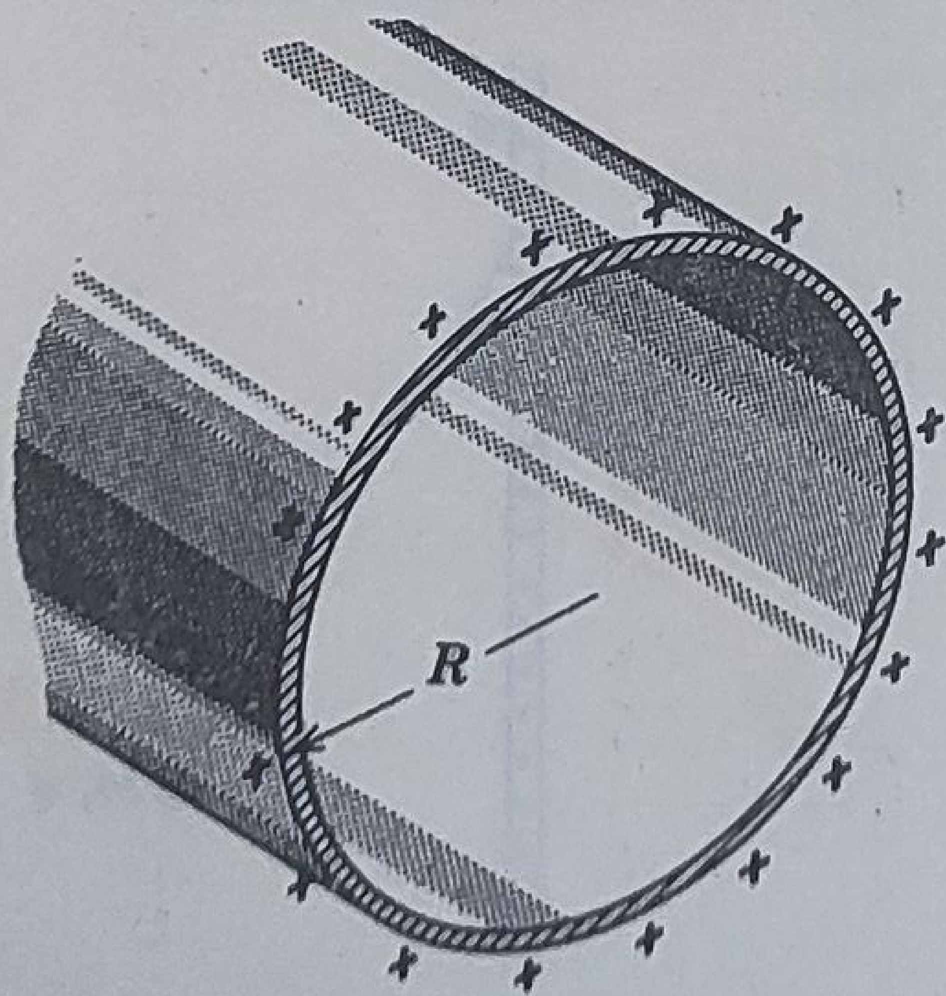


Figura 28-20.

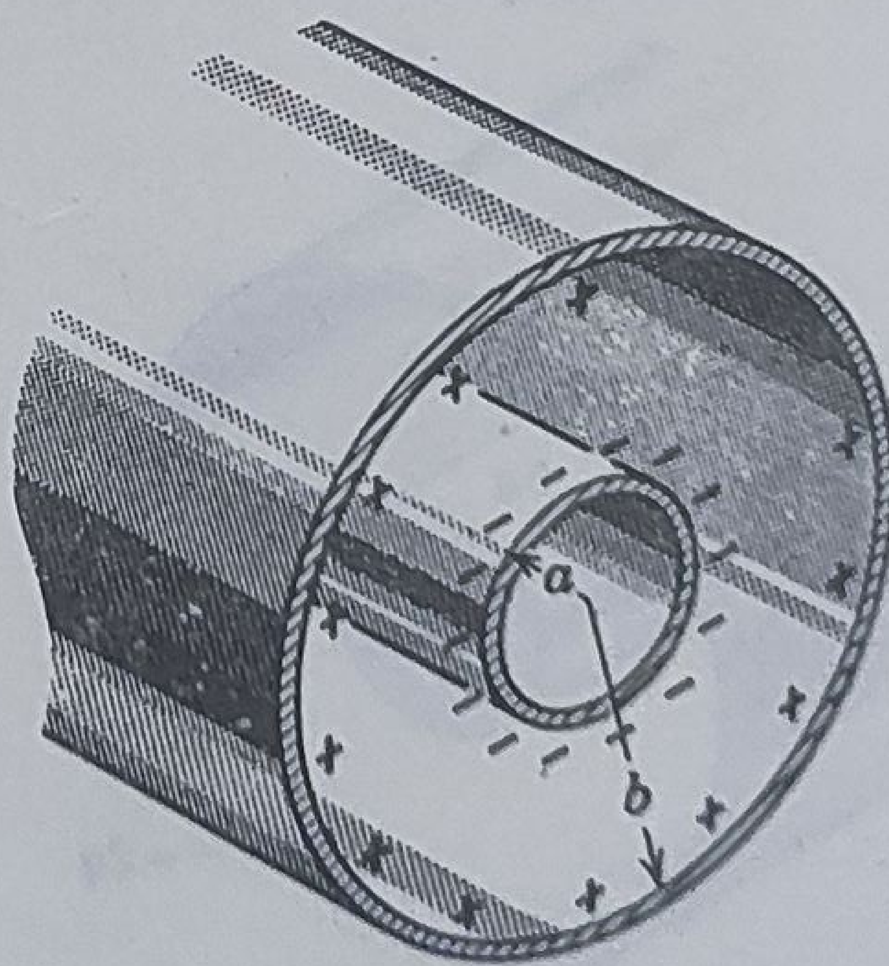


Figura 28-21.

Arătaţi că E la distanţa r de axa cilindrului ($r < R$) este

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

unde ρ este densitatea de sarcină (C/m³). La ce vă aşteptaţi pentru $r > R$?

15. În figura 28-19 este dată o pătură sferică neconductoare de densitate uniformă de sarcină ρ (C/m³). Reprezentaţi pe E funcţie de distanţa r de la centrul păturii, cînd r variază de la zero la 30 cm. Presupunem că $\rho = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C/m³, $a = 10$ cm şi $b = 20$ cm.

16. Figura 28-20 dă o secţiune printr-un tub lung de metal cu pereţi subţiri, de rază R, pe a cărui suprafaţă se găseşte sarcina λ pe unitatea de lungime. Găsiţi expresia lui E pentru diferite distanţe r de la axa tubului, considerînd ambele posibilităţi: $r > R$ şi $r < R$. Reprezentaţi rezultatul pentru r variind de la $r = 0$ la $r = 5$ cm, presupunînd că $\lambda = 2{,}0 \cdot 10^{-8}$ C/m şi $R = 3{,}0$ cm.

17. În fig. 28-21 este dată o secţiune prin doi cilindri lungi, concentrici de raze a şi b. Cilindrii poartă sarcini egale şi de semne contrare λ pe unitatea de lungime. Folosind teorema lui Gauss, arătaţi că (a) $E = 0$ pentru $r > b$ şi pentru $r < a$ şi că (b) între cilindrii E este

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

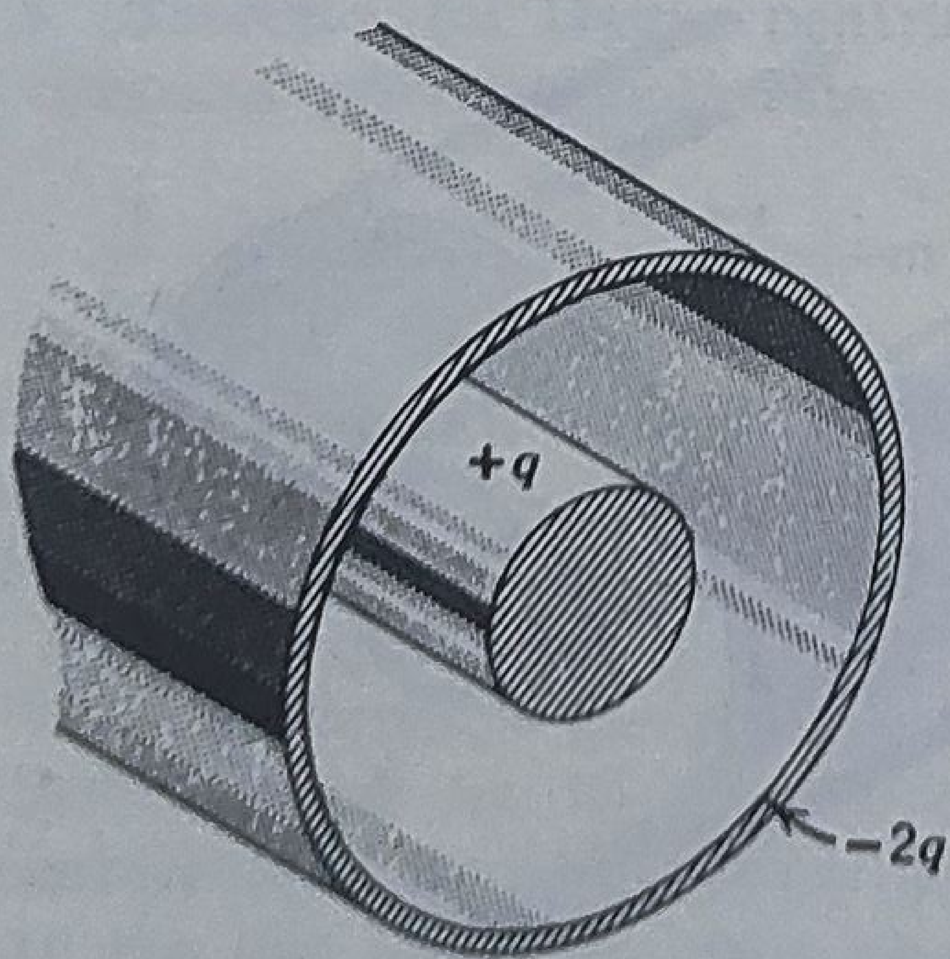


Figura 28-22.

18. Presupunem că un pozitron se mişcă pe o traiectorie circulară de rază r între cilindrii din problema 17, concentric cu ei. Care trebuie să fie energia sa cinetică E_c? Presupunem $a = 2{,}0$ cm, $b = 3{,}0$ cm şi $\lambda = 3{,}0 \cdot 10^{-8}$ C/m.

19. Un cilindru conductor lung, de sarcină totală $+q$ este înconjurat de o pătură cilindrică conductoare de sarcină totală $-2q$, după cum este arătat în secţiune în figura 28-22. Folosiţi teorema lui Gauss pentru a găsi: (a) intensitatea cîmpului electric în exteriorul păturii conductoare, (b) distribuţia de sarcină pe pătura conductoare şi (c) intensitatea cîmpului electric în regiunea dintre cilindrii. Enumeraţi ipotezele de care v-aţi folosit pe parcurs.

20. O foiţă subţire metalică sferică de rază a, posedă o sarcină q_a. Concentrică cu ea se află o a doua foiţă subţire metalică sferică de rază b ($b > a$) ce poartă sarcina q_b. Folosind teorema lui Gauss găsiţi intensitatea cîmpului electric în diferite puncte la distanţa r de centrul sferelor pentru (a) $r < a$; (b) $a < r < b$; (c) $r > b$. (d) Cum este distribuită sarcina de pe fiecare pătură între suprafaţa interioară şi cea exterioară a păturii?

21. O mică sferă de masă $m = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ g poartă o sarcină $q = 2{,}0 \cdot 10^{-8}$ C. Ea este atîrnată de un fir de

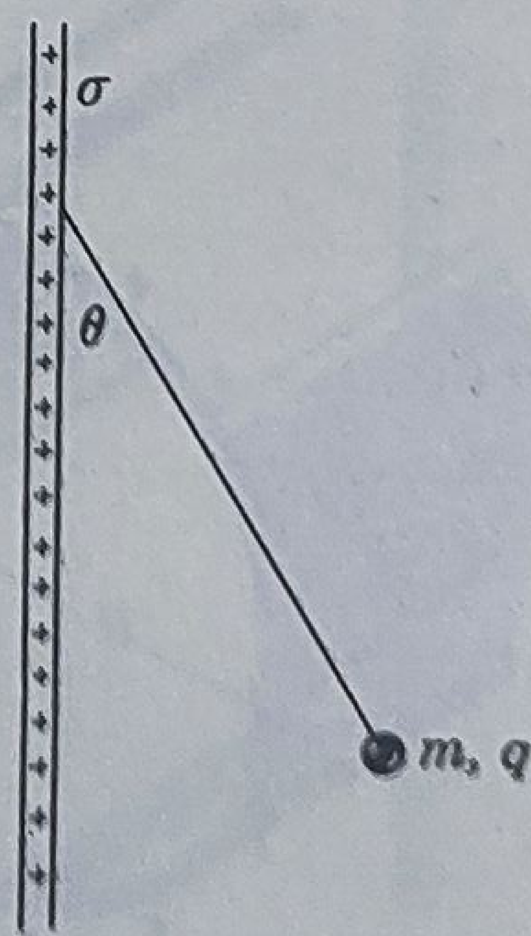


Figura 28-23.

mătase ce face un unghi de 30° cu o pătură uniform încărcată, de dimensiuni mari, ca în figura 28-23. Calculaţi densitatea de sarcină de suprafaţă σ a păturii de sarcină.

22. Ecuaţia 28-9 ($E=\sigma/\varepsilon_0$) dă cîmpul electric în punctele din apropierea unei suprafeţe conductoare încărcate. Arătaţi că această ecuaţie duce la un rezultat cunoscut atunci cînd este aplicată unei sfere conductoare de rază r, ce poartă sarcina q.

23. O particulă α, ce se apropie de suprafaţa unui nucleu de aur, se află la o distanţă egală cu raza nucleului ($6{,}9\cdot10^{-15}$ m) de suprafaţa sa. Care este forţa electrostatică ce acţionează asupra particulei α şi acceleraţia sa în acest punct? Masa particulei α, ce poate fi considerată ca punctiformă, este $6{,}7\cdot10^{-27}$ kg.

24. O foiţă de aur folosită pentru experienţele de împrăştiere Rutherford are grosimea de $3\cdot10^{-5}$ cm. (a) Care este fracţiunea din suprafaţa sa care este „opacă" datorită nucleelor de aur, presupunînd că raza nucleului este $6{,}9\cdot10^{-15}$ m? Presupunem că nucleele nu se obturează reciproc. (b) Care este fracţiunea din volumul foiţei ce este ocupată de nuclee? (c) Cu ce este plin restul volumului foiţei?

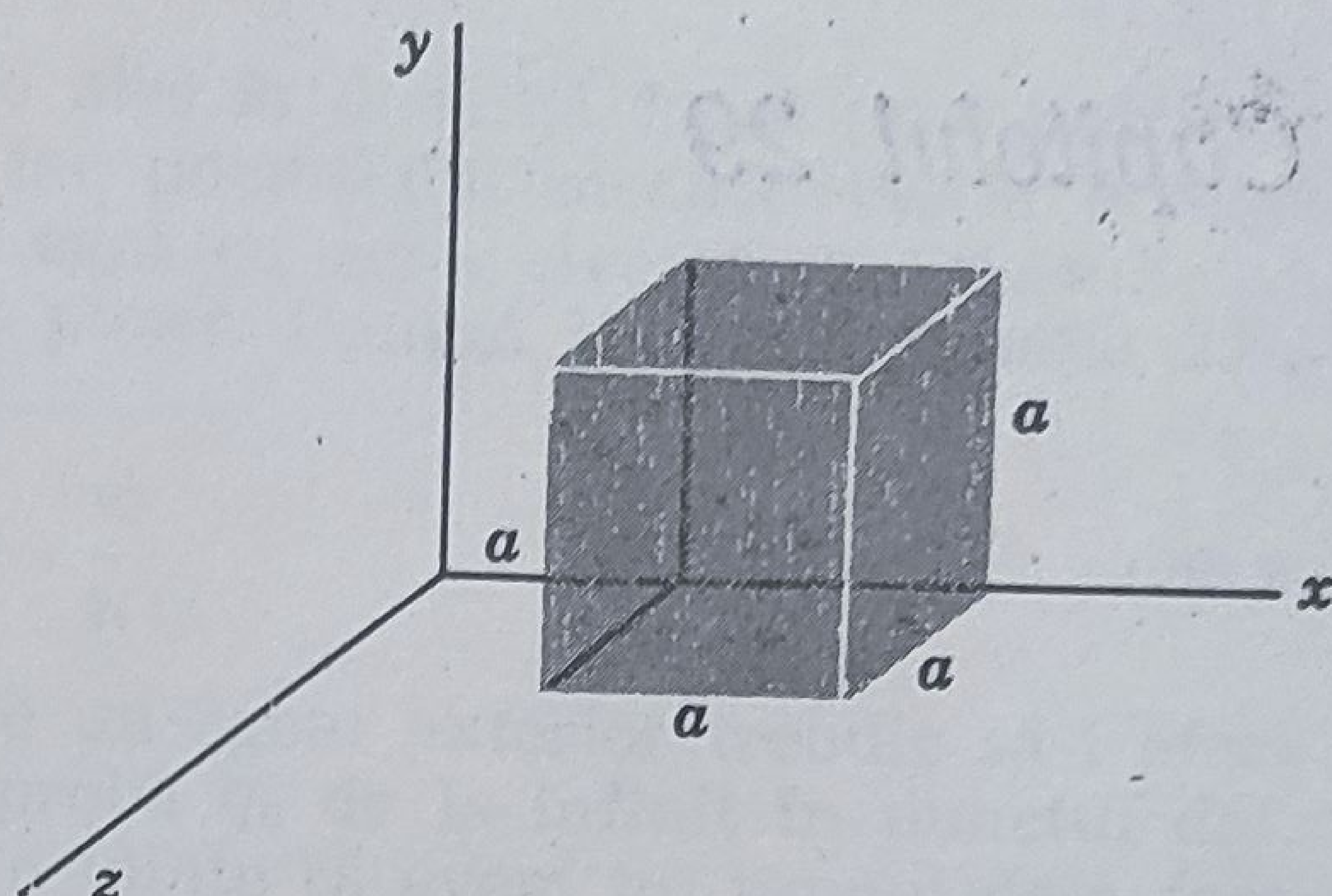


Figura 28-24.

25. Componentele cîmpului electric din figura 28-24 sînt $E_x=bx^{1/2}$, $E_y=E_z=0$, unde $b=800$ N/C m$^{1/2}$. Calculaţi: (a) fluxul Φ_E prin cub şi (b) sarcina din interiorul cubului. Presupunem că $a=10$ cm.

Capitolul 29

Potenţialul electric

29-1 Potenţialul electric

Cîmpul electric din jurul unei vergele încărcate poate fi descris nu numai cu ajutorul (vectorului) intensităţii cîmpului electric $\vec{E}$ ci şi cu ajutorul unei mărimi scalare, *potenţialul electric* V. Aceste mărimi sînt foarte strîns legate şi adesea folosirea uneia sau a alteia într-o problemă dată este doar o chestiune de comoditate.

Pentru a găsi *diferenţa de potenţial electric* între două puncte A şi B situate într-un cîmp electric, deplasăm o sarcină de probă q_0 de la A la B, ţinînd-o mereu în echilibru, şi măsurăm lucrul mecanic W_{AB} ce trebuie efectuat de către agentul ce deplasează sarcina. Diferenţa de potenţial electric* este definită din

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \tag{29-1}$$

Lucrul mecanic W_{AB} poate fi (a) pozitiv, (b) negativ sau (c) zero. În aceste cazuri, potenţialul electric în punctul B este (a) mai mare, (b) mai mic sau (c) egal cu potenţialul electric din punctul A.

În unităţi SI, diferenţa de potenţial ce rezultă din ecuaţia 29-1 este în J/C. Datorită largii ei folosiri, s-a ales o unitate specială, *voltul*, care s-o reprezinte:

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule}/1 \text{ coulomb}$$

---

* Această definiţie a diferenţei de potenţial, deşi corectă şi adecvată scopului nostru prezent, este rareori folosită în practică din cauza dificultăţilor tehnice. În general se adoptă metode echivalente şi mai uşor de realizat din punct de vedere tehnic.

În mod obișnuit, punctul A este ales la distanță mare (mai precis la infinit) de toate celelalte sarcini, iar potențialul electric V_A la această distanță infinită este luat arbitrar egal cu zero. Aceasta ne permite să definim *potențialul electric într-un punct*. Punînd $V_A=0$ în ecuația 29-1 și lăsînd de o parte indicii, obținem

$$V=\frac{W}{q_0} \tag{29-2}$$

unde W este lucrul mecanic pe care un agent exterior trebuie să-l efectueze pentru a deplasa sarcina de probă q_0 de la infinit în punctul dat. Studentul va trebui să aibă mereu în minte că avem tot timpul de-a face cu *diferențe de potențial* și că în ecuația 29-2 am ales arbitrar egal cu zero potențialul V_A în poziția de referință (infinit); acest potențial de referință ar fi putut fi ales tot atît de bine egal cu orice altă valoare, să zicem —100 V. Similar, puteam alege ca poziție de referință orice alt punct. În multe probleme legate de circuite, ca potențial de referință este luat potențialul *Pămîntului* și considerat ca avînd valoare zero.

Păstrînd în minte presupunerile asupra poziției de referință, din ecuația 29-2 se vede că V este pozitiv în vecinătatea unei sarcini pozitive izolate deoarece lucrul mecanic ce trebuie efectuat de agentul exterior pentru a aduce o sarcină de probă (pozitivă) de la infinit este pozitiv. Similar, potențialul în vecinătatea unei sarcini negative izolate este negativ deoarece un agent exterior trebuie să exercite o forță de frînare (adică, trebuie să execute un lucru mecanic negativ) asupra unei sarcini de probă (pozitive) ce este adusă de la infinit. Potențialul electric definit în ecuația 29-2 este scalar deoarece W și q_0 sînt scalari.

Atît W_{AB} cît și $V_B—V_A$ din ecuația 29-1 sînt independente de drumul urmat de sarcina ce se deplasează de la A la B. Dacă nu ar fi așa, punctul B nu ar avea un potențial electric unic (față de punctul A definit ca punct de referință) iar noțiunea de potențial ar avea o valoare limitată.

Se poate arăta simplu folosind cazul special din figura 29-1 că diferențele de potențial sînt independente de drum. În figură este dat cazul în care cele două puncte A și B se găsesc în cîmpul produs de sarcina sferică q; pentru simplitate, cele două puncte sînt alese în lungul unei direcții radiale. Deși demonstrația noastră se aplică numai acestui caz special, ea ilustrează principiul general.

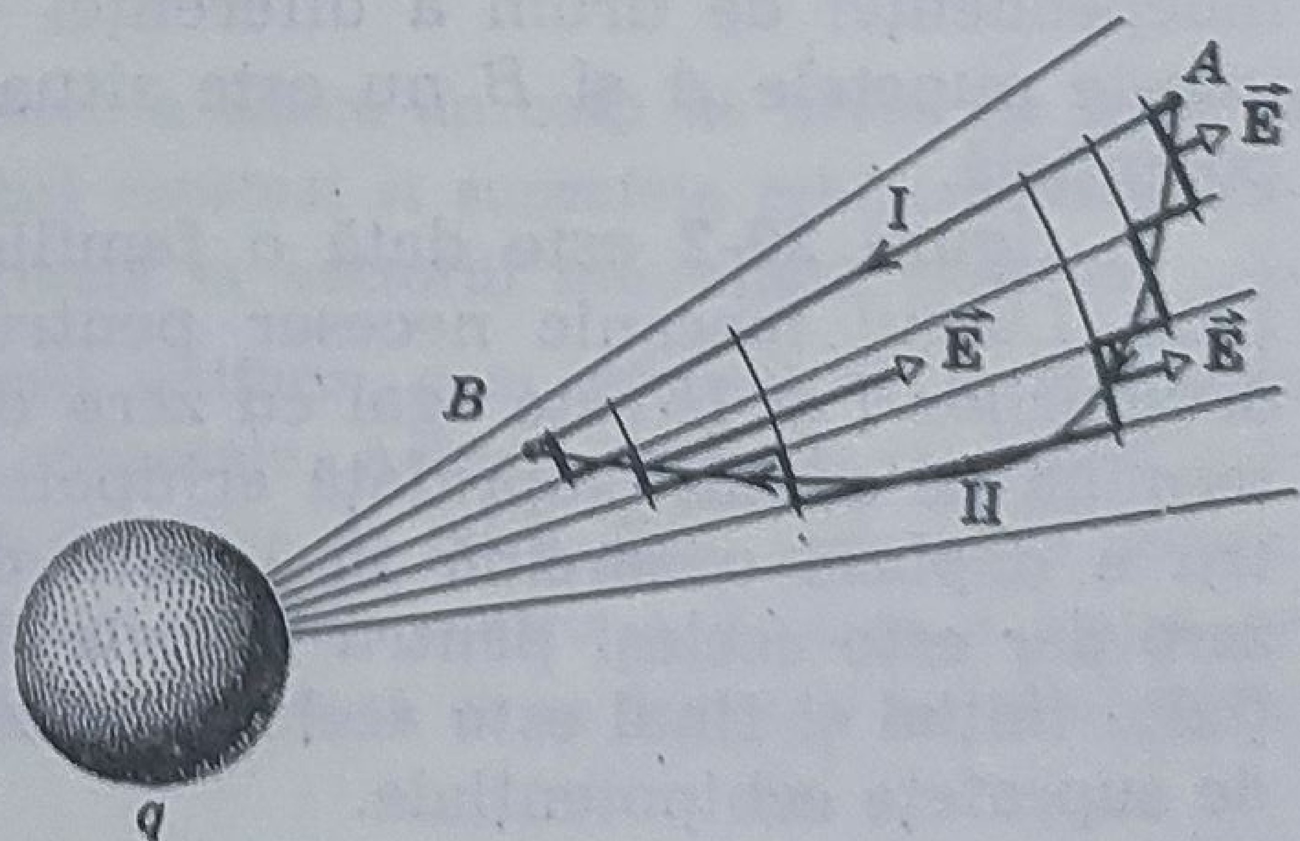


Figura 29-1. O sarcină de probă q_0 este deplasată de la A la B în cîmpul sarcinii q de-a lungul unuia din cele două drumuri. Prin săgeată albă este indicat $\vec{E}$ în trei puncte ale drumului II.

Alegem punctul A din figura 29-1 ca punct de referință și presupunem că o sarcină de probă pozitivă q_0 se deplasează sub acțiunea unui agent exterior din A și B. Să considerăm două drumuri: drumul I situat pe o direcție radială între A și B și drumul II, un drum complet arbitrar între cele două puncte. Săgețile albe de pe drumul al II-lea indică forța electrică pe unitatea de sarcină ce acționează asupra sarcinii de probă q_0 în diferite puncte.

Drumul II poate fi aproximat printr-o linie frîntă formată din elemente de arc și radiale. Deoarece aceste elemente pot fi luate arbitrar de mici, drumul format din linii frînte poate fi luat arbitrar de apropiat de drumul real. În lungul drumului II, agentul exterior efectuează un lucru mecanic *numai în lungul segmentelor radiale* deoarece în lungul arcurilor de cerc forța $\vec{F}$ și deplasarea $d\vec{l}$ sînt perpendiculare una pe cealaltă, $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ fiind deci zero. Suma lucrurilor mecanice efectuate pe segmentele radiale din care este format drumul II este egală cu lucrul mecanic efectuat pe drumul I deoarece ambele drumuri sînt formate din același număr de segmente radiale. Deoarece drumul II este arbitrar, am demonstrat că lucrul mecanic este același pentru *orice* drum între A și B. Deși această demonstrație este valabilă numai pentru cazul special din figurii 29-1, diferența de potențial este independentă de drumul parcurs pentru *oricare* două puncte în *orice* cîmp electrostatic. În pragraful 8-2 am discutat independența de drum pentru clasa generală de *forțe conservative;* forțele electrostatice sînt conservative ca și cele gravitaționale.

Locul geometric al punctelor ce au același potențial electric se numește *suprafață echipotențială*. Pentru descrierea cîmpului electric într-o anumită regiune a spațiului poate fi folosită o familie de suprafețe echipotențiale, fiecare suprafață corespunzînd unei alte valori a potențialului. Am văzut (paragraful 27-3) că și liniile de forță electrică pot fi folosite în acest scop; mai tîrziu (vezi de exemplu fig. 29-15) vom analiza legătura ce există între aceste două moduri de a descrie cîmpul electric.

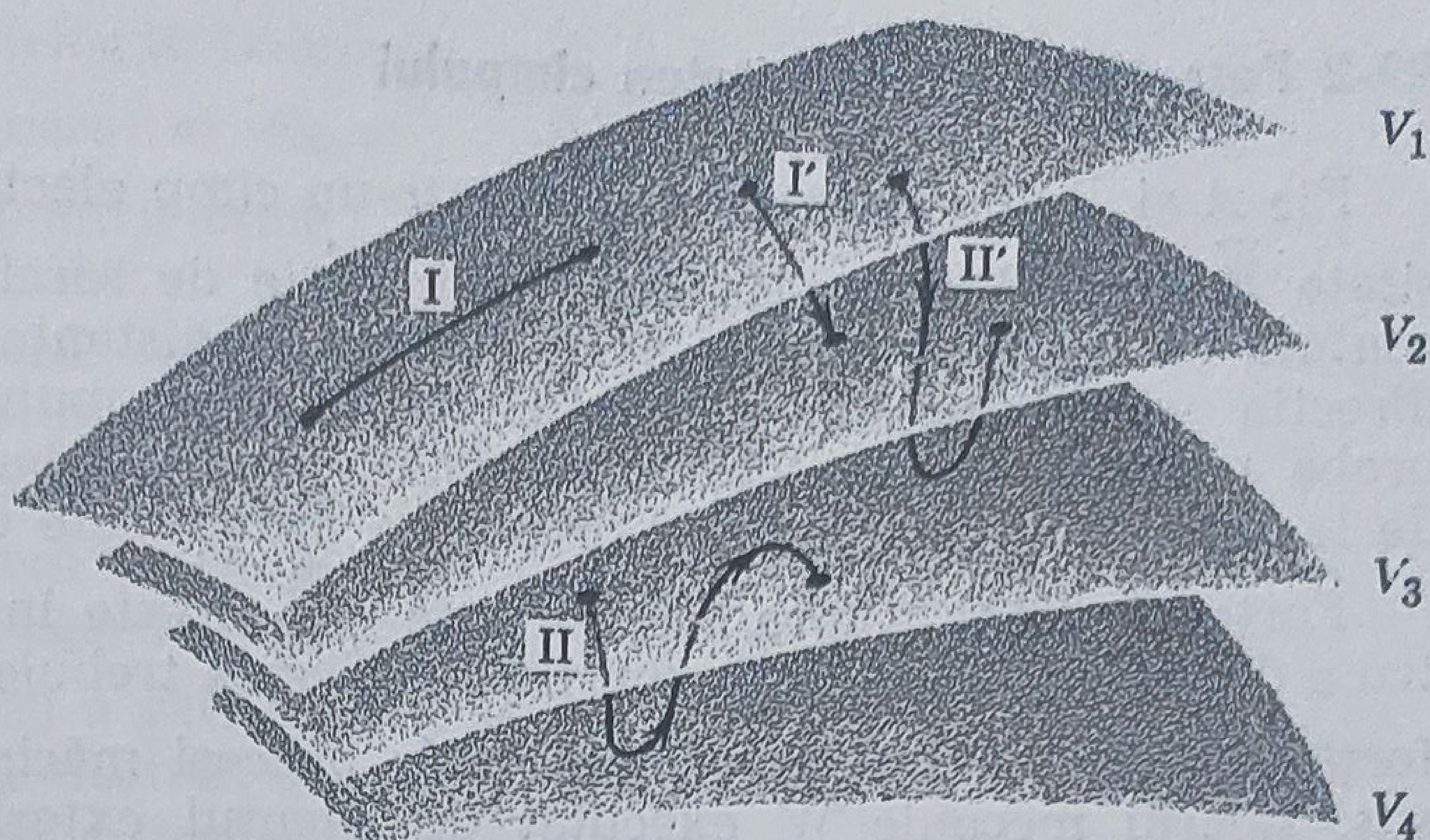
Lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o sarcină de probă între două puncte oarecare de pe o suprafață echipotențială este nul. Aceasta rezultă din ecuația 29-1

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

deoarece W_{AB} trebuie să fie egal cu zero dacă $V_A = V_B$. Aceasta, datorită independenței de drum a diferenței de potențial, chiar dacă drumul ce unește punctele A și B nu este situat în întregime pe o suprafață echipotențială.

În figura 29-2 este dată o familie arbitrară de suprafețe echipotențiale. Lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o sarcină de-a lungul drumurilor I și II este egal cu zero deoarece ambele drumuri încep și se termină pe aceeași suprafață echipotențială. Lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o sarcină în lungul drumurilor I′ și II′ este diferit de zero dar este același pentru ambele deoarece pentru fiecare drum potențialul inițial și final este același; drumurile I′ și II′ unesc aceeași pereche de suprafețe echipotențiale.

Figura 29-2. Porțiuni din patru suprafețe echipotențiale. Prin liniile îngroșate sînt indicate cele patru drumuri pe care s-a deplasat sarcina de probă.



Suprafețele echipotențiale corespunzătoare unei sarcini sferice sînt, din considerente de simetrie, o familie de sfere concentrice. Pentru cazul unui cîmp uniform ele formează o familie de plane perpendiculare pe cîmp. În toate cazurile (inclusiv aceste două exemple) suprafețele echipotențiale sînt normale pe liniile de forță și deci și pe $\vec{E}$ (vezi fig. 29-15). Dacă $\vec{E}$ *nu* ar fi normal la suprafața echipotențială, el ar trebui să aibe o componentă în această suprafață. În acest caz, ar trebui cheltuit un lucru mecanic la deplasarea unei sarcini de probă pe această suprafață. Dar, suprafața fiind o suprafață echipotențială, lucrul mecanic cheltuit este egal cu zero, deci $\vec{E}$ trebuie să fie normal pe suprafață.

Există o foarte mare asemănare între forțele electrostatice și cele gravitaționale, bazată pe faptul că legile lor fundamentale variază invers proporțional cu pătratul distanței (vezi ecuațiile 26-3 și 16-1):

$$F_E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \quad \text{și} \quad F_g=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Astfel, putem defini *potențialul gravitațional* V_g (comparați cu ec. 29-2) din

$$V_g=\frac{W}{m}$$

unde W este lucrul mecanic necesar pentru a aduce un corp de probă de masă m de la infinit în punctul dat. Analog se pot construi și suprafețe echipotențiale gravitaționale; ele sînt, în orice punct, normale la vectorul intensității cîmpului gravitațional $\vec{g}$. Pentru un cîmp gravitațional uniform, cum este cel de la suprafața pămîntului, aceste suprafețe sînt plane orizontale. Aceasta face ca: (a) lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o piatră de masă m între două puncte de aceeași altitudine să fie zero și (b) lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o piatră pe un parcurs ce începe pe o suprafață orizontală dată și se termină pe alta să fie același indiferent de parcursul ales.

29-2 Potențialul și intensitatea cîmpului

Fie A și B două puncte situate într-un cîmp electric uniform de intensitate $\vec{E}$ (fig. 29-3) produs de o distribuție de sarcini ce nu este reprezentată în figură; punctul A se găsește la distanța d de punctul B, în direcția vectorului intensitatea cîmpului. Presupunem că o sarcină de probă pozitivă q_0 este deplasată de un agent exterior, fără accelerație, de la A la B în lungul liniei drepte ce unește cele două puncte.

Forța *electrică* asupra sarcinii este $q_0\vec{E}$ și este îndreptată în jos. Pentru a deplasa sarcina după cum ne-am propus trebuie să învingem această forță aplicînd o forță exterioară $\vec{F}$ de aceeași mărime dar îndreptată în sus. Lucrul mecanic W executat de agentul exterior ce acționează cu această forță este

$$W_{AB}=Fd=q_0Ed. \tag{29-3}$$

Introducînd în ecuația (29-1)

$$V_B-V_A=\frac{W_{AB}}{q_0}=Ed. \tag{29-4}$$

Această ecuație arată legătura ce există între diferența de potențial și intensitatea cîmpului pentru un caz special simplu. De observat că o altă unitate SI pentru $\vec{E}$ este volt/metru. Studentul poate verifica că un V/m este identic cu un N/C; N/C este prima unitate pentru $\vec{E}$ prezentată în paragraful 27-2.

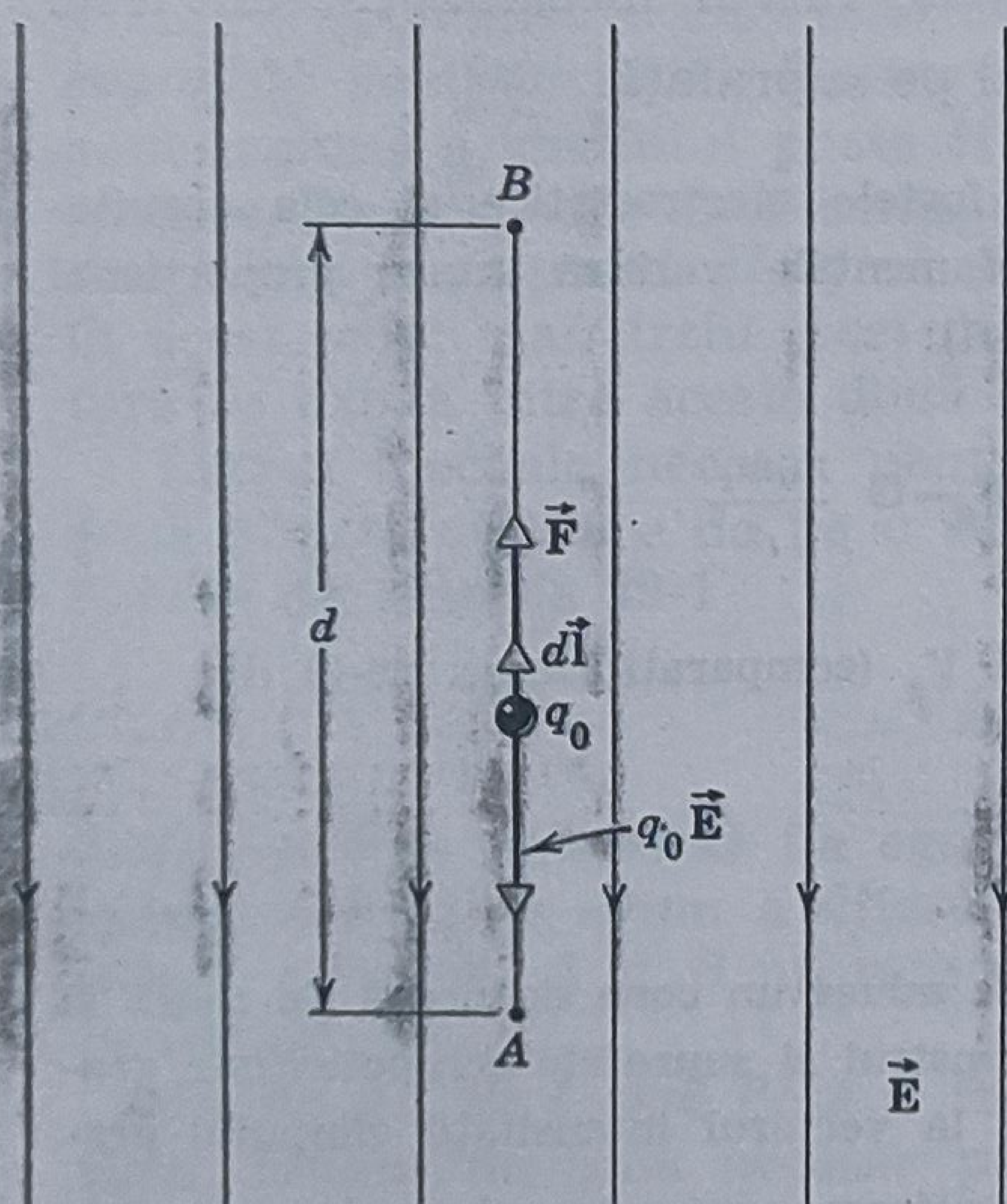


Figura 29-3. O sarcină de probă q_0 este deplasată de la A la B într-un cîmp electric uniform $\vec{E}$ de către un agent exterior ce exercită asupra ei o forță $\vec{F}$.

În figura 29-3, potențialul în punctul B este mai mare decît în punctul A, rezultat normal, deoarece un agent exterior trebuie să efectueze un lucru mecanic pozitiv pentru a deplasa o sarcină de probă pozitivă de la A la B. Figura 29-3 poate fi folosită exact așa cum este pentru a ilustra acțiunea de ridicare a unei pietre din A în B în cîmpul gravitațional uniform de la suprafața Pămîntului. Care este legătura dintre V și $\vec{E}$, în cazul mai general în care cîmpul *nu* este uniform și în care corpul de probă se deplasează de-a lungul unui drum ce *nu* este în linie dreaptă, ca în figura 29-4? După cum este arătat, cîmpul electric exercită o forță $q_0\vec{E}$ asupra sarcinii de probă. Pentru a împiedica sarcina de probă să capete o mișcare

accelerată, agentul exterior trebuie să aplice o forță $\vec{F}$ care să fie exact egală cu $-q_0\vec{E}$ pentru orice poziție a corpului de probă.

Dacă corpul de probă, sub influența agentului exterior, se deplasează cu $\vec{dl}$ de-a lungul drumului de la A la B, lucrul mecanic elementar efectuat de agentul exterior este $\vec{F}\cdot\vec{dl}$. Pentru a găsi lucrul mecanic total W_{AB} efectuat de agentul exterior pentru a deplasa sarcina de probă de la A la B, adunăm (adică integrăm) contribuțiile la lucrul mecanic a tuturor segmentelor infinit de mici în care este împărțit drumul. Aceasta duce la

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}=-q_0\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}.$$

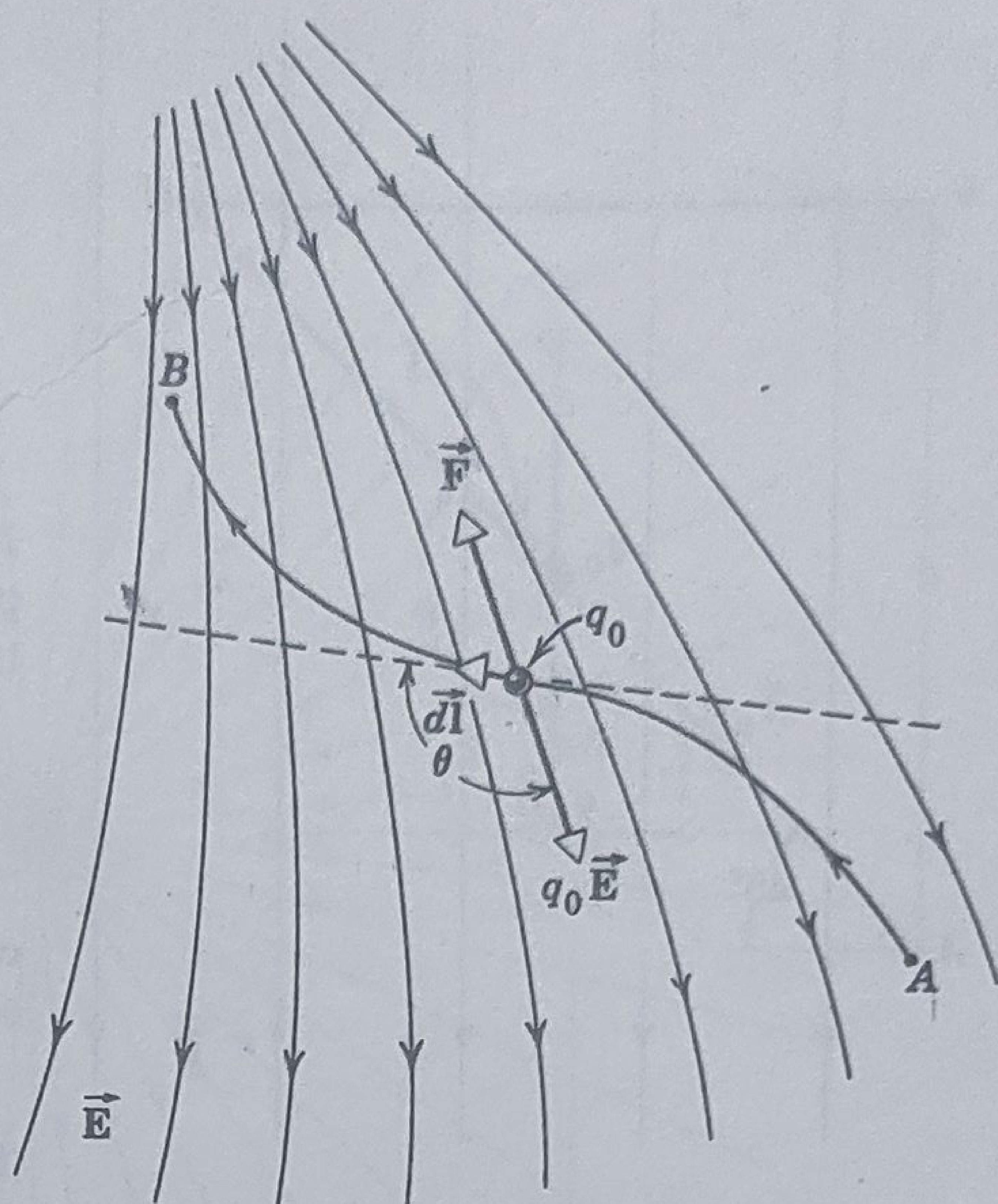


Figura 29-4. O sarcină de probă q_0 este deplasată de la A la B într-un cîmp electric neuniform de către un agent exterior ce exercită o forță $\vec{E}$ asupra sa.

O astfel de integrală poartă numele de *integrală curbilinie*. Observați că am înlocuit $\vec{F}$ cu $-q_0\vec{E}$.

Înlocuind această expresie pentru W_{AB} în ex. 29-1 obținem

$$V_B-V_A=\frac{W_{AB}}{q_0}=-\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}. \qquad (29\text{-}5)$$

Dacă considerăm că punctul A se găsește la infinit și că potențialul V_A la infinit este egal cu zero, această ecuație dă potențialul V în punctul B, sau, lăsînd la o parte indicele B,

$$V=-\int_\infty^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (29\text{-}6)$$

Aceste două relații permit calculul diferenței de potențial dintre două puncte oarecare (sau potențialul în orice punct) dacă se cunoaște $\vec{E}$ în diferitele puncte ale cîmpului.

Exemplul 1. Calculați V_B-V_A, din figura 29-3, folosind relația 29-5. Comparați rezultatul cu cel obținut prin analiza directă a acestui caz particular (relația 29-4).

Elementul de drum $\vec{dl}$ al sarcinii de probă are întotdeauna sensul identic cu cel al direcției de deplasare, care este în sus în figura 29-3. În această figură cîmpul electric $\vec{E}$ este în jos, așa că unghiul θ dintre $\vec{E}$ și $\vec{dl}$ este 180°.

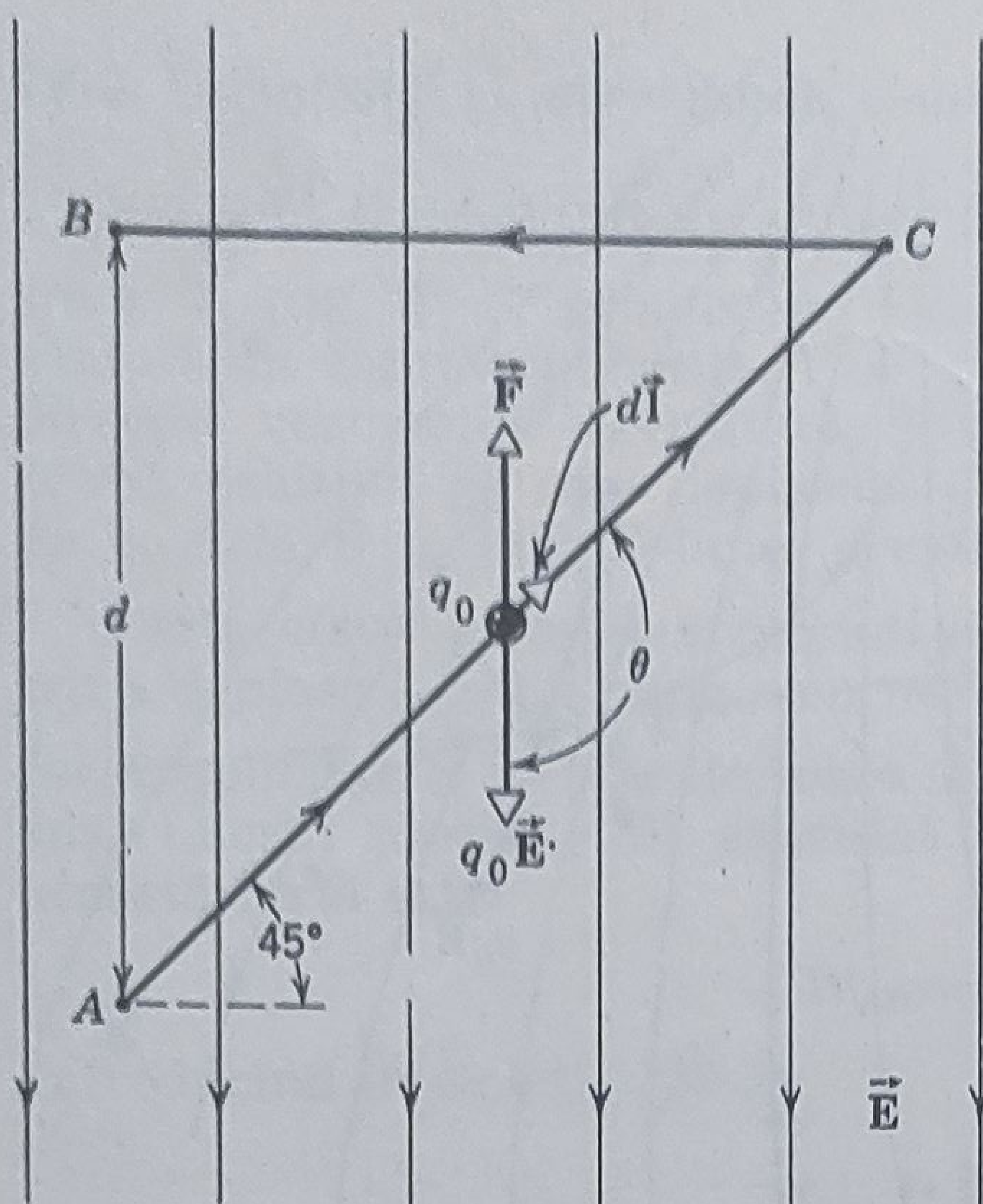


Figura 29-5. Exemplul 2. O sarcină de probă q_0 este deplasată de către un agent exterior într-un cîmp electric uniform în lungul drumului *ACB*.

Relația 29-5 devine deci

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B E \cos 180^\circ \, dl =$$

$$= \int_A^B E dl$$

E este constant pentru toate porțiunile parcursului astfel că poate fi scos de sub integrală

$$V_B - V_A = E \int_A^B dl = Ed$$

care concordă cu relația 29-4, așa cum și trebuie.

Exemplul 2. Fie o sarcină de probă q_0 (fig. 29-5) care se deplasează fără accelerație de la *A* la *B*, după drumul indicat. Calculați diferența de potențial dintre *A* și *B*.

Pentru drumul *AC*, $\theta = 135^\circ$ și din ecuația 29-5

$$V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^C E \cos 135^\circ \, dl = \frac{E}{\sqrt{2}} \int_A^C dl$$

Integrala este egală cu lungimea liniei *AC* care este $\sqrt{2}d$. Astfel

$$V_C - V_A = \frac{E}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} d) = Ed$$

Punctele *B* și *C* au același potențial deoarece lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unei sarcini între ele este egal cu zero, $\vec{E}$ și $d\vec{l}$ fiind normale unul pe celălalt pentru toate punctele de pe linia *CB*. Cu alte cuvinte *B* și *C* sînt situate pe aceeași suprafață echipotențială, normală la liniile de forță. Astfel

$$V_B - V_A = V_C - V_A = Ed$$

Valoarea identică cu cea obținută pentru drumul ce unește direct pe *A* cu *B*, rezultat ce era de așteptat deoarece diferența de potențial dintre două puncte este independentă de drum.

29-3 Potențialul produs de o sarcină punctiformă

În figura 29-6 sînt reprezentate două puncte *A* și *B* în vecinătatea unei sarcini punctiforme izolate *q*. Pentru a nu complica lucrurile, presupunem că *A*, *B* și *q* sînt coliniare. Să calculăm diferența de potențial

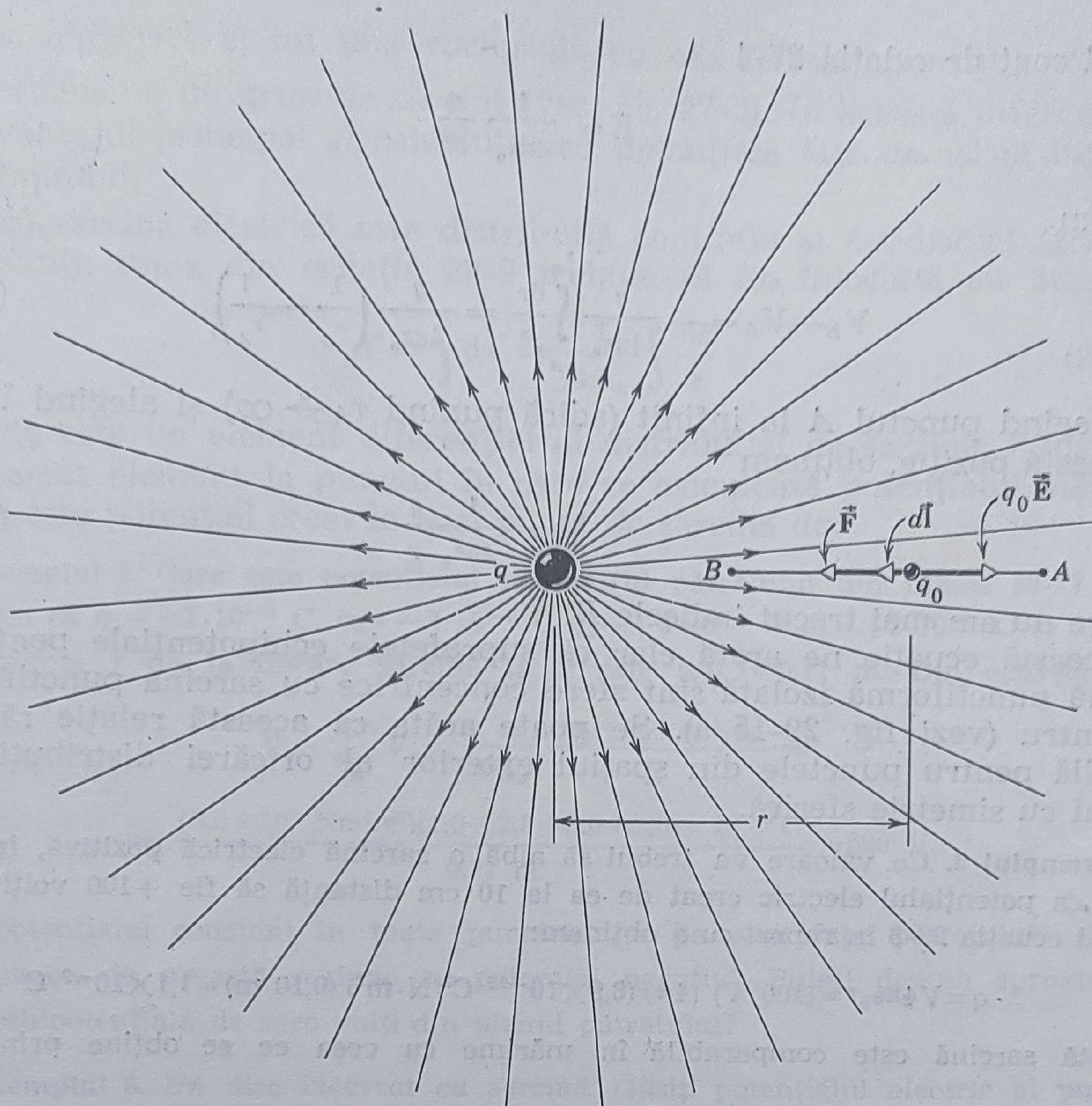


Figura 29-6. O sarcină de probă q_0 este deplasată din A în B de către un agent exterior în cîmpul produs de o sarcină punctiformă q.

dintre punctele A și B, presupunînd că o sarcină de probă q_0 se mișcă fără accelerație în lungul unei linii de cîmp de la A la B.

În figura 29-6, $\vec{E}$ este spre dreapta iar $\vec{dl}$ spre stînga deoarece el este totdeauna îndreptat în direcția mișcării. Astfel că în relația 29-5

$$\vec{E}\,\vec{dl}=E\,dl\ \cos\ 180°=-E\,dl$$

Pe de altă parte, deoarece prin mișcarea spre stînga cu distanța dl, r scade deoarece se măsoară față de q care este luat ca origine. Astfel că:

$$dl=-dr$$

și deci, în final,

$$\vec{E}\,dl=\vec{E}\,dr$$

Substituind aceasta în ecuația 29-5 obținem

$$V_B-V_A=-\int_B^A \vec{E}\,\vec{dl}=-\int_{r_A}^{r_B} E\,dr$$

Ținînd cont de relația 27-4

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

obținem

$$V_B-V_A=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \qquad (29\text{-}7)$$

Alegînd punctul A la infinit (adică punînd $r_A \to \infty$) și alegînd $V_A=0$ în această poziție, obținem

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (29\text{-}8)$$

în care nu am mai trecut indicele B.

Această ecuație ne arată clar că suprafețele echipotențiale pentru o sarcină punctiformă izolată sînt sfere concentrice cu sarcina punctiformă în centru (vezi fig. 29-15, a). Se poate arăta că această relație rămîne valabilă pentru punctele din spațiul exterior al oricărei distribuții de sarcini cu simetrie sferică.

Exemplul 3. Ce valoare va trebui să aibă o sarcină electrică pozitivă, izolată, astfel ca potențialul electric creat de ea la 10 cm distanță să fie +100 volți? Rezolvînd ecuația 29-8 în raport cu q obținem:

$$q=V4\pi\varepsilon_0 r=(100\ \text{V})\ (4\pi)\ (8{,}9\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)\ (0{,}10\ \text{m})=1{,}1\times10^{-9}\ \text{C}$$

Această sarcină este comparabilă în mărime cu ceea ce se obține prin frecare.

Exemplul 4. Care este potențialul electric la suprafața nucleului de aur? Raza nucleului este de $6{,}6\cdot10^{-15}$ m iar numărul atomic $Z=79$.

Presupunînd că nucleul posedă o simetrie sferică, se va comporta, pentru orice punct exterior, ca și cum ar fi o sarcină punctiformă. Astfel că vom putea utiliza ecuație 29-8, în care vom pune $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ C, sarcina electrică a protonului:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{(9{,}0\cdot10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1{,}6\cdot10^{-19}\text{C})}{6{,}6\cdot10^{-15}\text{m}}=1{,}7\cdot10^7\ \text{V}$$

29-4 Un grup de sarcini punctiforme

Potențialul produs într-un punct de un grup de sarcini punctiforme se obțin (a) calculînd potențialul V_n determinat de fiecare sarcină ca și cum celelalte nu ar fi prezente și (b) însumînd cantitățile obținute, adică (vezi ec. 29-8)

$$V=\sum_n V_n=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n\frac{q_n}{r_n} \qquad (29\text{-}9)$$

unde q_n este mărimea sarcinii a n-a, iar r_n fiind distanța de la această sarcină la punctul considerat. Suma folosită pentru a obține pe V este

o *sumă algebrică* și nu una vectorială ca cea folosită pentru a calcula pe $\vec{E}$ produs de un grup de sarcini (vezi ec. 27-5). În această diferență se află avantajul principal al calculului cu potențiale față de cel al intensității cîmpului.

Dacă sarcina electrică este distribuită continuu și nu discret (grupuri de sarcini), suma din ecuația 29-9 trebuie să fie înlocuită cu integrala

$$V=\int dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \qquad (29\text{-}10)$$

unde dq este un element diferențial al distribuției de sarcină, r distanța de la acest element la punctul în care se calculează potențialul electric, iar dV este potențial creat în acel punct de sarcina dq.

Exemplul 5. Care este potențialul în centrul pătratului din figura 29-7? Presupunem că $q_1=+1\cdot10^{-8}$ C, $q_2=-2\cdot10^{-8}$ C, $q_3=+3\cdot10^{-8}$ C, $q_4=+2\cdot10^{-8}$ C și $a=1$ m.

Distanța r de la fiecare sarcină la P este $a/\sqrt{2}=0{,}71$ m. Din ecuația 29-9

$$V=\sum_n V_n=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{r}=$$

$$=\frac{(9{,}0\times10^9\ \text{Nm}^2/\text{c}^2)(1{,}0-2{,}0+3{,}0+2{,}0)\times10^{-8}\ \text{C}}{0{,}71\ \text{m}}=500\ \text{V}.$$

Este potențialul constant în toate punctele de pe suprafața pătratului? Există oare puncte în această regiune cu potențial negativ? Puteți desena aproximativ linia echipotențială de zero volți din planul pătratului?

Exemplul 6. *Un disc încărcat cu sarcină.* Găsiți potențialul electric al punctelor ce se găsesc pe axa unui disc circular uniform încărcat a cărui densitate superficială de sarcină este σ (vezi fig. 29-8).

Considerăm un element dq de sarcină de forma unei fîșii circulare de rază y și de lărgime dy. Avem

$$dq=\sigma(2\pi y)dy$$

unde $(2\pi y)dy$ este aria fîșiei circulare. Toate sarcinile ce se găsesc pe această fîșie se găsesc la aceeași distanță r' $(=\sqrt{y^2+r^2})$ de punctul P de pe axă astfel că ele contribuie în mod egal la potențialul dV și deci din ecuația 29-8

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi y\,dy}{\sqrt{y^2+r^2}}.$$

Potențialul V se obține integrînd pe toate fîșiile circulare în care discul a fost împărțit (ec. 29-10).

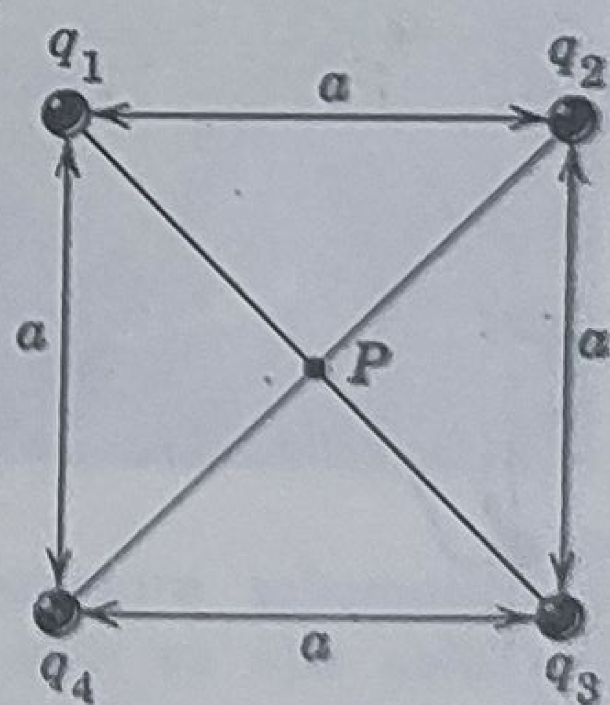


Figura 29-7. Exemplul 5.

$$V=\int dV=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a(y^2+r^2)^{-1/2}\,y\,dy=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+r^2}-r\right)$$

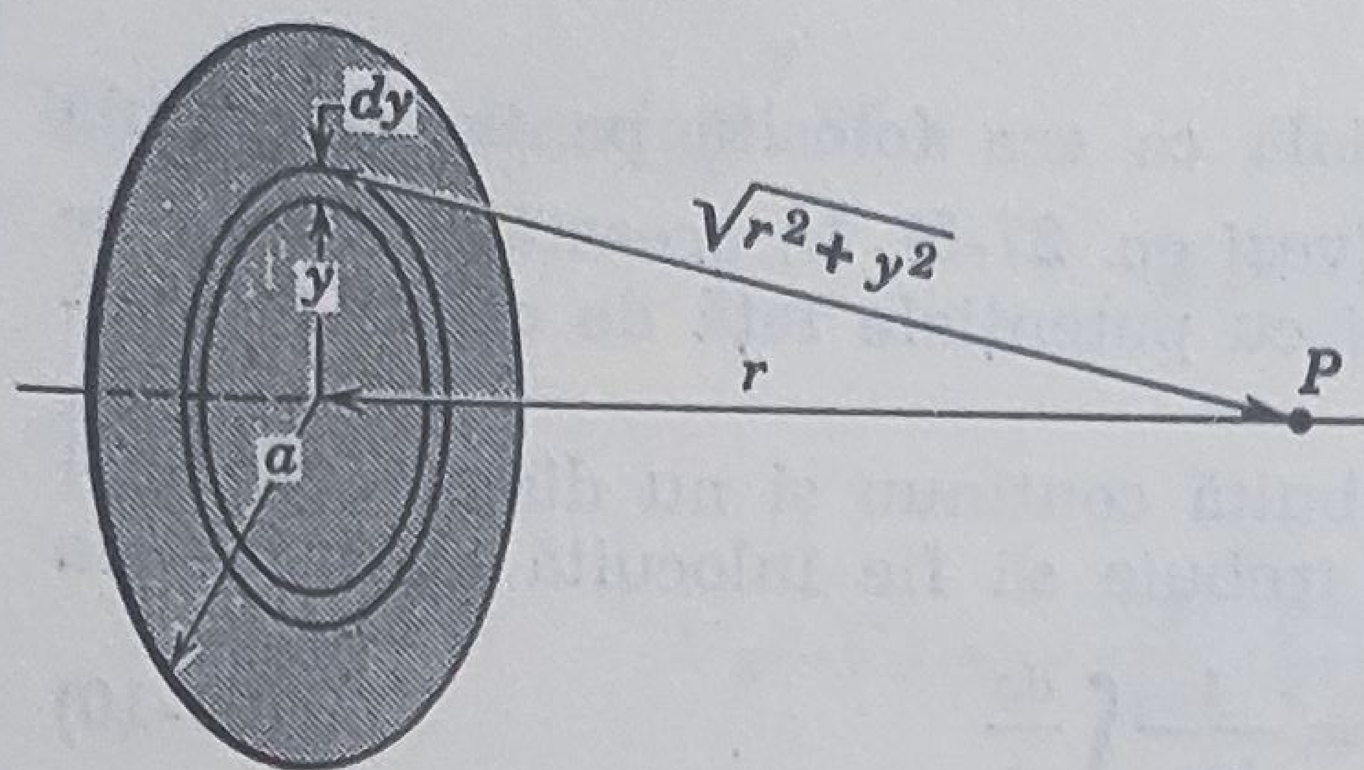


Figura 29-8. Exemplul 6. Un punct P pe axa de simetrie a unui disc circular de rază a, uniform încărcat.

Acest rezultat general este valabil pentru orice r. În cazul limită $r \ll a$, radicalul $\sqrt{a^2+r^2}$ poate fi aproximat astfel

$$\sqrt{a^2+r^2}=r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}=r\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\cdots\right)\cong r+\frac{a^2}{2r},$$

obţinut folosind dezvoltarea binomială (anexa F, vol. I). Această dezvoltare ne conduce la

$$V\cong\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r+\frac{a^2}{2r}-r\right)=\frac{\sigma\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

unde q $(=\sigma\pi a^2)$ este sarcina totală de pe disc. Acest rezultat era de aşteptat deoarece pentru $r \gg a$, discul se comportă ca o sarcină punctiformă.

29-5 Potenţialul unui dipol

Două sarcini egale q, de semne opuse, aflate la distanţa $2a$ unul de altul, formează un dipol electric; vezi exemplul 3, capitolul 27. Momentul dipolar electric $\vec{p}$ are mărimea $2aq$ şi este îndreptat de la sarcina negativă spre cea pozitivă. În continuare vom deduce o expresie pentru potenţialul electric V produs de un dipol într-un punct oarecare din spaţiu, cu restricţia ca punctul să nu fie prea aproape de dipol.

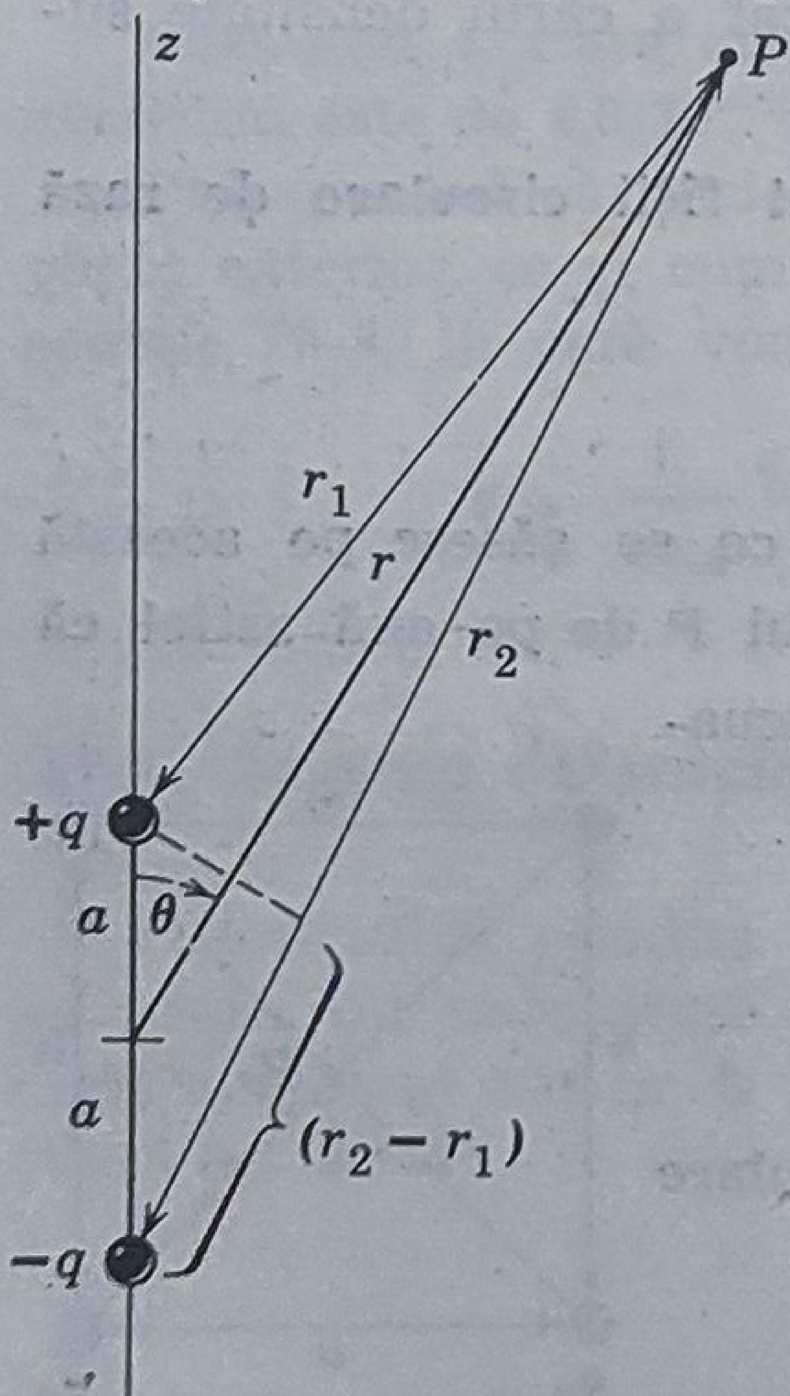


Figura 29-9. Un punct P în cîmpul unui dipol electric.

Un punct P este definit dacă cunoaştem coordonatele lui r şi θ (fig. 29-9). Din considerente de simetrie este clar că potenţialul nu se va modifica dacă punctul P se va roti în jurul axei z, r şi θ fiind constante. Astfel va trebui să găsim doar V (r, θ) pentru un plan oarecare ce conţine axa z; planul foii în figura 29-9 este unul din aceste plane. Folosind relaţia 29-9 obţinem

$$V=\sum_n V_n=V_1+V_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2},$$

relaţie exactă (fără nici o aproximaţie).

Să ne concentrăm acum atenţia asupra punctelor pentru care $r \gg 2a$. Din figura 29-9 obţinem aproximaţia

$$r_2 - r_1 \simeq 2a \cos \theta \qquad \text{şi} \qquad r_1 r_2 \simeq r^2,$$

iar expresia potenţialului devine

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \tag{29-11}$$

în care p ($=2aq$) este momentul dipolului. Se poate observa că V se anulează în orice punct din planul ecuatorial ($\theta = 90°$). Acest rezultat reflectă faptul fizic că nu se cheltuieşte lucru mecanic dacă o sarcină de probă se aduce de la ∞ spre dipol în planul median al dipolului. Pentru o distanţă r dată, potenţialul V va fi pozitiv şi maxim pentru $\theta = 0$ şi negativ şi maxim pentru $\theta = 180°$. De observat că potenţialul electric nu depinde separat de q şi de $2a$ ci doar de produsul lor, p.

Este convenabil ca orice sistem de sarcini, pentru care V la distanţă mare este dat de relaţia 29-11, să fie numit *dipol electric*. Două sarcini punctiforme apropiate, se comportă în acest fel, după cum am demonstrat anterior. Cu toate acestea şi alte distribuţii de sarcini pot să satisfacă relaţia 29-11. Să presupunem că măsurînd potenţialele în diverse puncte exterioare unei cutii imaginare (fig. 29-10) obţinem linii de cîmp care pot fi descrise prin relaţia 29-11. Spunem în acest caz că în interiorul cutiei se află un *dipol electric* a cărui axă este paralelă cu zz' şi al cărui moment $\vec{p}$ este îndreptat vertical, în sus.

Multe molecule posedă momente dipolare. Momentul dipol al moleculelor vaporilor de apă este de $6{,}1 \cdot 10^{-30}$ C.m. Fig. 29-11 este o reprezentare a acestei molecule în care se pot vedea cele trei nuclee şi norul electronic corespunzător. Momentul dipolar $\overleftarrow{p}$ este reprezentat printr-o săgeată pe axa de simetrie a moleculei. În moleculă „centrul de greutate" al sarcinilor electrice pozitive nu coincide cu „centrul de

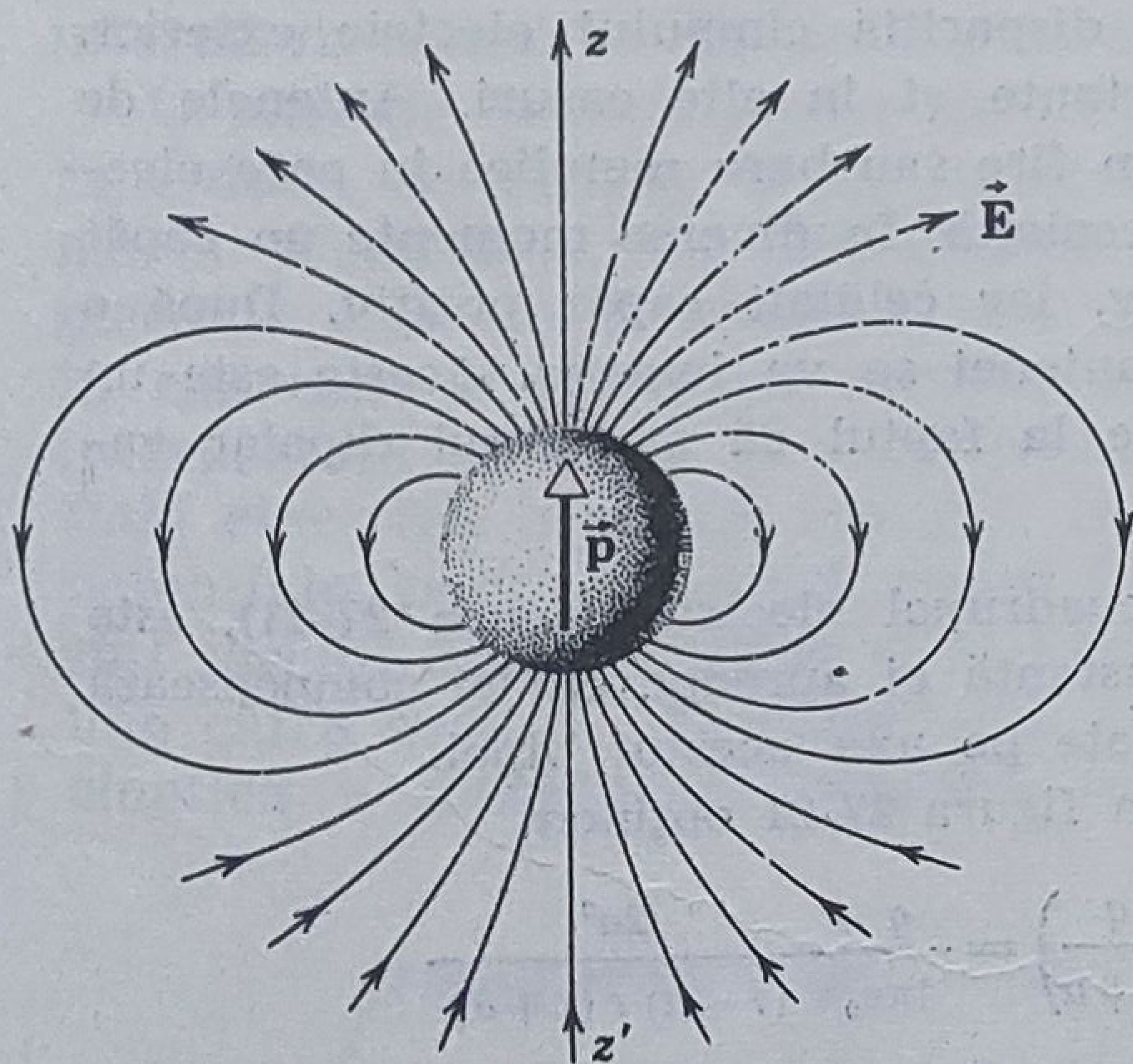


Figura 29-10. Dacă un obiect ce se găseşte într-o cutie sferică produce un cîmp electric cu distribuţia prezentată (descrisă cantitativ de ec. 29-11) atunci ele este un dipol electric.

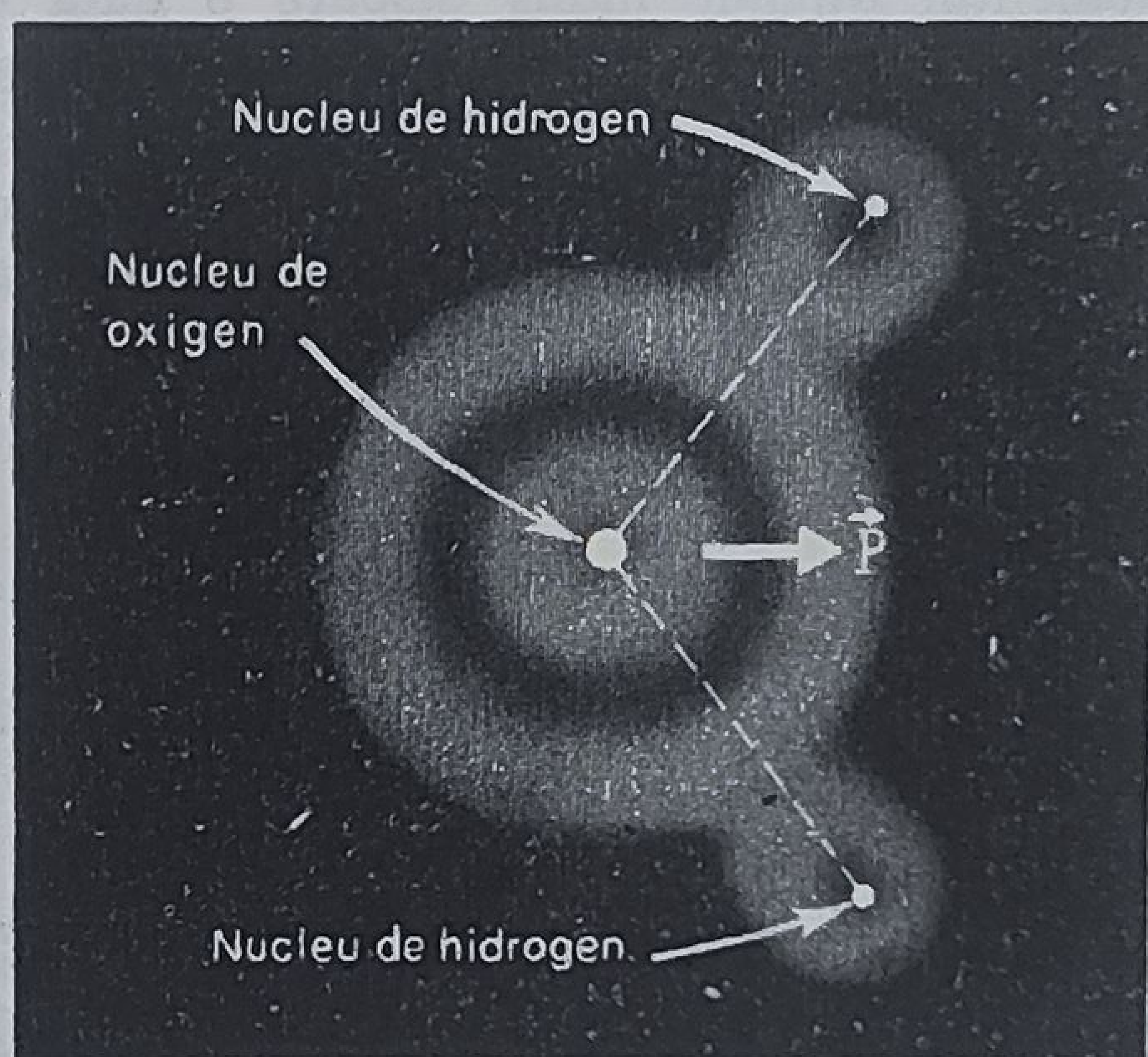


Figura 29-11. O reprezentare schematică a moleculei de apă, în care se văd cele trei nuclee, norul electronic şi orientarea momentului dipolar.

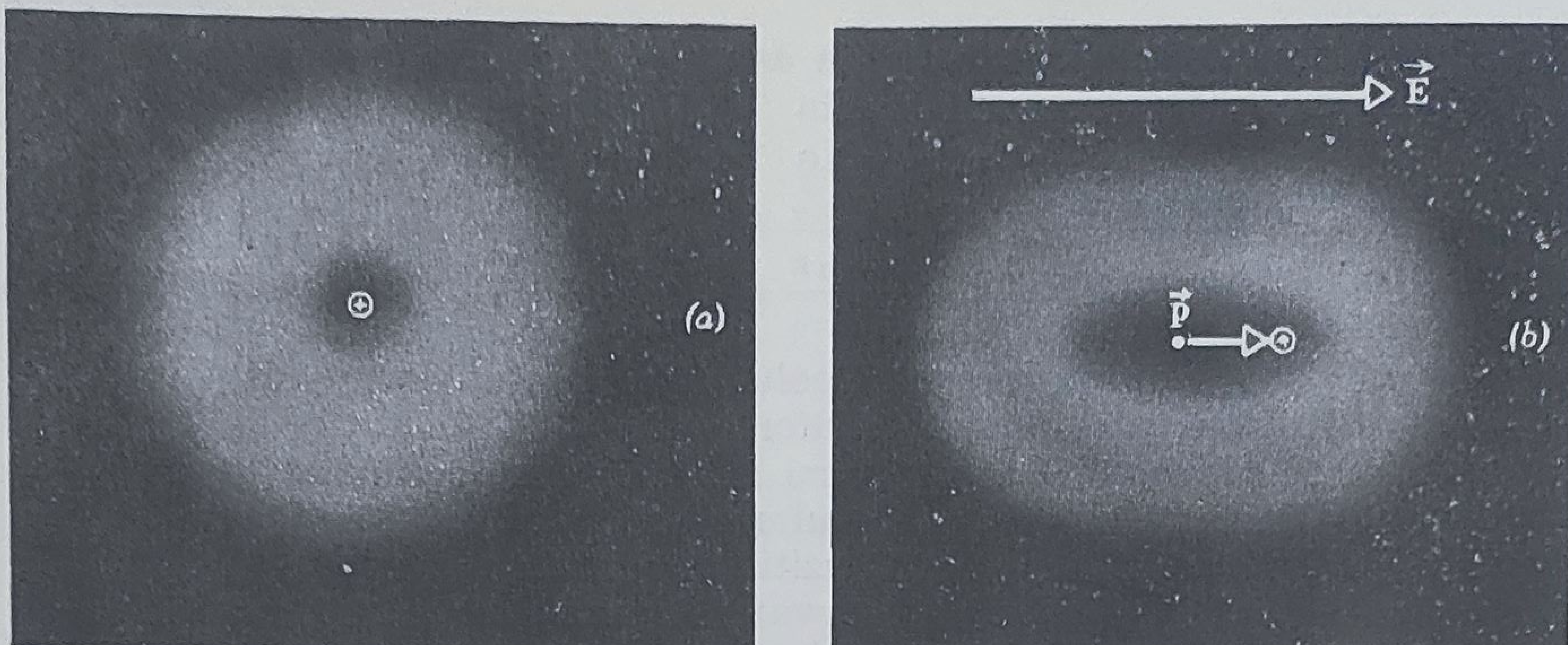


Figura 29-12. (a) Un atom în care este reprezentat nucleul și norul electronic. Centrul sarcinilor negative coincide cu centrul sarcinilor pozitive (nucleul). (b) Dacă se aplică un cîmp electric extern $\vec{E}$, norul electronic este distorsionat astfel încît centrul sarcinilor negative marcat printr-un punct, nu mai se suprapune cu centrul sarcinilor pozitive. Apare un dipol electric.

greutate" al sarcinilor negative. Aceasta este cauza existenței momentului dipolar electric.

Atomii și unele molecule *nu* posedă momente dipolare permanente. Cu toate acestea în ele se pot induce momente dipolare electrice așezîndu-le în cîmpuri electrice exterioare. Ca rezultat al acțiunii cîmpului electric, centrul sarcinilor pozitive nu va mai coincide cu centrul sarcinilor negative (fig. 29-12). Spunem în acest caz că atomul s-a *polarizat* și a primit un *moment dipolar electric indus*. Momentul dipolar indus dispare o dată cu dispariția cîmpului electric exterior.

Momentele electrice dipolare sînt importante și în alte cazuri. Antenele de radio și de radar sînt de obicei construite din fire sau bare metalice în care electronii se mișcă periodic într-o direcție și în cealaltă. În diverse momente un capăt sau altul al antenei va fi încărcată negativ, iar celălalt capăt pozitiv. După o jumătate de perioadă, polaritatea capetelor antenei se va inversa. Acesta este un dipol electric *oscilant*. Denumirea provine de la faptul că momentul dipolar variază periodic în timp.

Exemplul 7. *Un cuadrupol electric.* Un cuadrupol electric (figura 27-21), este format din doi dipoli astfel încît la mare distanță ei aproape că își compensează efectele*. Calculați $V(r)$ pentru punctele situate pe axa acestui dipol.

Folosind ecuația 29-9 pentru condițiile din figura 27-21 obținem

$$V=\sum_n V_n=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-a}-\frac{2q}{r}+\frac{q}{r+a}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2a^2}{(r-a)\,r\,(r+a)}$$

Presupunînd că $r \gg a$, putem lua $a=0$ în termenii sumă și diferență de la numitor, ceea ce conduce la

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^3}$$

* Vezi problema 18, cap. 27.

unde $Q(=2qa^2)$ este *momentul electric cuadrupolar* al ansamblului de sarcini din figura 27-21. Observați că V variază (a) ca $1/r$ pentru o sarcină punctiformă (vezi ec. 29-8), (b) ca $1/r^2$ pentru un dipol (vezi ec. 29-11) și (c) ca $1/r^3$ pentru un cuadrupol.

Observați de asemenea că (a) un dipol este format din două sarcini egale și de semn opus ce nu ocupă același loc în spațiu astfel că efectele celor două sarcini la distanțe mari nu se compensează perfect și (b) un caudrupol este format din doi dipoli egali aranjați în opoziție care însă se găsesc în două regiuni diferite din spațiu astfel încît efectele lor electrice la distanță mare nu se compensează perfect. Acest raționament se poate continua pentru a defini ordine mai mari de distribuții de dipoli cum ar fi *octupolii.*

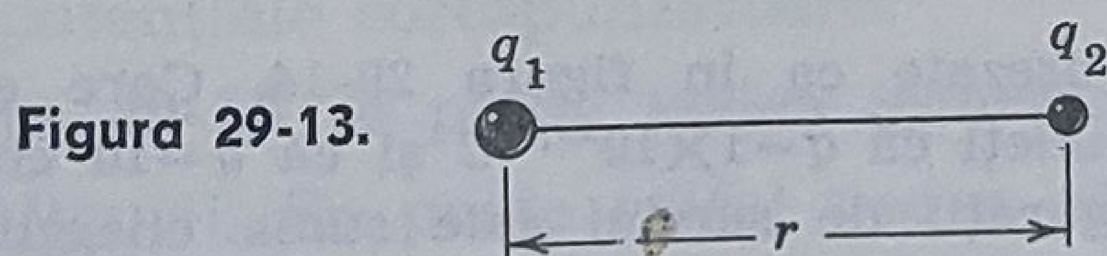
Potențialul într-un punct oarecare, la mare distanță de o distribuție *arbitrară* de sarcini (continue sau discontinue) poate fi totdeauna scrisă ca o sumă de potențiale care sînt produse de (a) o sarcină — uneori denumită în acest cantext un *monopol* — (b) un dipol, (c) un cuadrupol etc. Acest procedeu se numește *dezvoltare după multipoli* și este un procedeu deosebit de folositor în rezolvarea problemelor.

29-6 Energia potențială electrică*

Dacă vom ridica o piatră de pe pămînt, lucrul mecanic efectuat împotriva atracției gravitaționale a Pămîntului se va regăsi sub formă de *energie potențială* a sistemului pămînt+piatră. Dacă lăsăm piatra liberă, energia potențială înmagazinată în energia potențială se transformă treptat în energie cinetică și piatra cade. După ce piatra revine pe pămînt și trece în stare de repaus, energia ei cinetică maximă, egală în mărime cu energia potențială pe care a avut-o inițial, se transformă în energie internă în sistemul Pămînt+piatră.

O situație asemănătoare se întîlnește și în electrostatică. Să considerăm două sarcini q_1 și q_2 la distanța r una de alta (fig. 29-13). Dacă mărim distanța dintre ele, trebuie ca o forță exterioară să producă lucrul mecanic care va fi pozitiv dacă sarcinile sînt opuse ca semn și negativ în caz contrar. Energia corespunzătoare acestui lucru mecanic poate fi interpretată ca fiind înmagazinată în sistemul q_1+q_2 ca *energie potențială electrică*. Această energie, la fel ca toate celelalte tipuri de energii potențiale, poate fi transformată în alte forme. Dacă de exemplu q_1 și q_2, sînt sarcini de semn opus și le vom lăsa libere, ele se vor mișca accelerat una către cealaltă, transformînd energia potențială acumulată în energie cinetică a maselor în mișcare accelerată. Analogia cu sistemul Pă-

Figura 29-13.



* În mecanică noțiunea de *energie potențială* (a unui arc comprimat, a unei mase în cădere etc..., este mult mai des folosită ca noțiunea de potențial. În electrostatică situația este inversă, potențialul electric fiind noțiunea mai des folosită. În ceea ce urmează, studentul trebuie să fie atent să nu confunde aceste două noțiuni total diferite: potențialul și energia potențială.

mînt+piatră este exact, cu deosebirea că forțele electrice pot fi atractive sau repulsive pe cînd cele gravitaționale sînt numai atractive.

Definim energia potențială a sistemului de sarcini ca lucrul mecanic necesar pentru a construi sistemul de sarcini aducîndu-le treptat de la infinit. Presupunem că ele aveau toate energie cinetică zero din cauza lipsei interacțiunilor reciproce.

Să presupunem că sarcina q_2 (din fig. 29-13) se găsește la distanță infinită în repaus. *Potențialul electric* determinat de q_1, în poziția în care q_2 se află la început, este dat de relația 29-8:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}.$$

Dacă q_2 este adus de la infinit, la distanța r de q_1, lucrul mecanic necesar este, din definiția potențialului electric (ec. 29-2)

$$W=Vq_2. \qquad (29\text{-}12)$$

Combinînd aceste două ecuații și amintindu-ne că acest lucru mecanic W este tocmai *energia potențială electrică* U a sistemului q_1+q_2, obținem

$$U(=W)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}. \qquad (29\text{-}13)$$

Indicii lui r scot în evidență faptul că ne referim la distanța dintre sarcinile q_1 și q_2.

Pentru sisteme ce conțin mai mult de două sarcini, se procedează în același fel pentru fiecare pereche de sarcini separat și se adună apoi algebric. Acest procedeu corespunde fizic procesului în care (a) sarcina q_1 este în repaus în poziția inițială (b) q_2 este adus de la infinit pînă în poziția necesară de lîngă q_1, (c) q_3 este adus de la infinit pînă în poziția ei de lîngă q_1 și q_2 etc.

Energia potențială a unei distribuții continue de sarcini (o distribuție elipsoidală de sarcini, de exemplu) se poate obține împărțind distribuția în elemente infinitesimale dq, considerîndu-le pe acestea ca sarcini punctiforme și folosind același procedeu ca cel din paragraful precedent în care sumarea se înlocuiește cu integrarea. Nu am tratat astfel de situații în text.

Exemplul 8. Doi protoni ce se află în nucleul de ^{238}U se găsesc la distanța de 6×10^{-15} m. Care va fi energia lor potențială, de interacție reciprocă?

Din ec. 29-13

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}=\frac{(9{,}0\cdot10^9\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1{,}6\cdot10^{-19}\mathrm{C})^2}{6{,}0\cdot10^{-15}\,\mathrm{m}}=3{,}8\times10^{-14}\ \mathrm{J}=2{,}4\times10^5\ \mathrm{eV}$$

Exemplul 9. Trei sarcini sînt așezate ca în figura 29-14. Care este energia lor de interacție reciprocă? Presupuneți că $q=1\times10^{-7}$ C și că $a=10$ cm.

Energia totală a acestei configurații de sarcini este suma energiilor fiecărei perechi de particule. Din relația 29-13.

$$U=U_{12}+U_{13}+U_{23}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=\left[\frac{(+q)(-4q)}{a}+\frac{(+q)(+2q)}{a}+\frac{(-4q)(+2q)}{a}\right]=-\frac{10}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}=$$

$$=-\frac{(9{,}0\times10^9\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(10)(1{,}0\times10^{-7}\mathrm{C})^2}{0{,}10\,\mathrm{m}}=-9{,}0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

Faptul că energia totală este negativă înseamnă că pentru a construi această structură de sarcini este necesar un lucru mecanic negativ, pornind de la situația inițială în care cele trei sarcini se găseau la distanțe infinite una de alta. Cu alte cuvinte, este necesar un lucru mecanic de $9 \cdot 10^{-2}$ J pentru a descompune această structură, ducînd sarcinile la infinit.

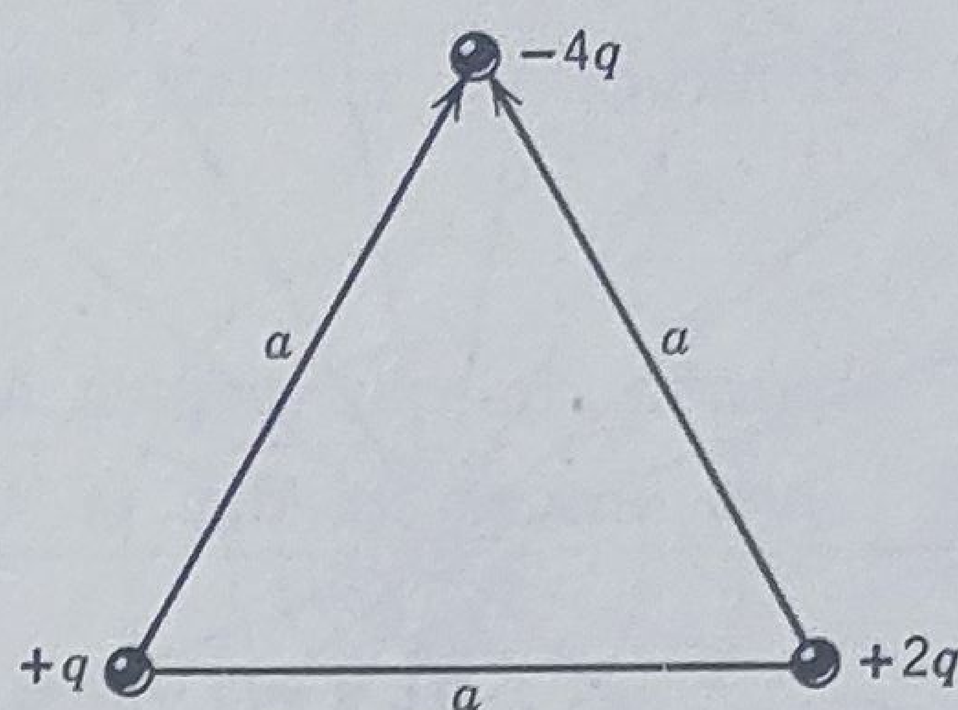


Figura 29-14. Exemplul 9. Trei sarcini fixate rigid, datorită unei forțe externe, în modul reprezentat.

Dacă facem convenția uzuală ca energia potențială a sarcinilor la distanță infinită să fie nulă, atunci o energie potențială pozitivă (ca în exemplul 8) corespunde la forțe electrice repulsive, iar o energie potențială negativă (ca în acest exemplu) corespunde la forțe electrice atractive. Dacă protonii din exemplul 8 nu ar fi ținuți în loc de forțe atractive (neelectrice) — forțe nucleare — ele s-ar îndepărta unele de altele. Dacă cele trei particule din exemplul de față ar fi lăsate libere, eliminînd forțele externe necesare pentru ținerea lor în poziții fixe, ele s-ar deplasa unele către celelalte.

29-7 Calculul lui $\vec{E}$ cînd îl cunoaștem pe V

Am afirmat anterior că V și $\vec{E}$ sînt mărimi care descriu echivalent cîmpul și am văzut (relația 29-6) cum se poate calcula V din $\vec{E}$. Să vedem acum cum putem să calculăm pe $\vec{E}$ cînd îl cunoaștem pe V într-o regiune dată.

Această problemă a fost deja rezolvată grafic. Dacă cunoaștem pe $\overleftarrow{E}$ în fiecare punct al spațiului, putem desena liniile de cîmp; apoi putem afla familia de suprafețe echipotențiale desenîndu-le perpendicular pe liniile de forță. Aceste suprafețe echipotențiale vor descrie comportarea lui V. Și invers, dacă dăm pe V ca funcție de poziție, putem desena familia de suprafețe echipotențiale. Liniile de forță pot fi apoi obținute desenînd linii care să fie încontinuu perpendiculare la aceste suprafețe, obținînd astfel comportarea lui $\vec{E}$ în regiunea dată. Vom căuta să găsim în continuare, echivalentul matematic al procedeului grafic descris anterior. Figura 29-15 prezintă cîteva exemple de linii de cîmp și suprafețele echipotențiale corespunzătoare.

În figura 29-16 se poate vedea intersecția suprafețelor echipotențiale cu planul figurii. Se poate astfel vedea că $\vec{E}$, într-un punct oarecare P, este perpendicular pe suprafața echipotențială ce trece prin P, așa cum trebuia să fie.

Să deplasăm o sarcină de probă q_0 din punctul P de-a lungul unui drum însemnat prin $\vec{\Delta l}$, către suprafața echipotențială $V + \Delta V$. Lucrul mecanic necesar pentru această operație (vezi relația 29-1) este $q_0 \Delta V$.

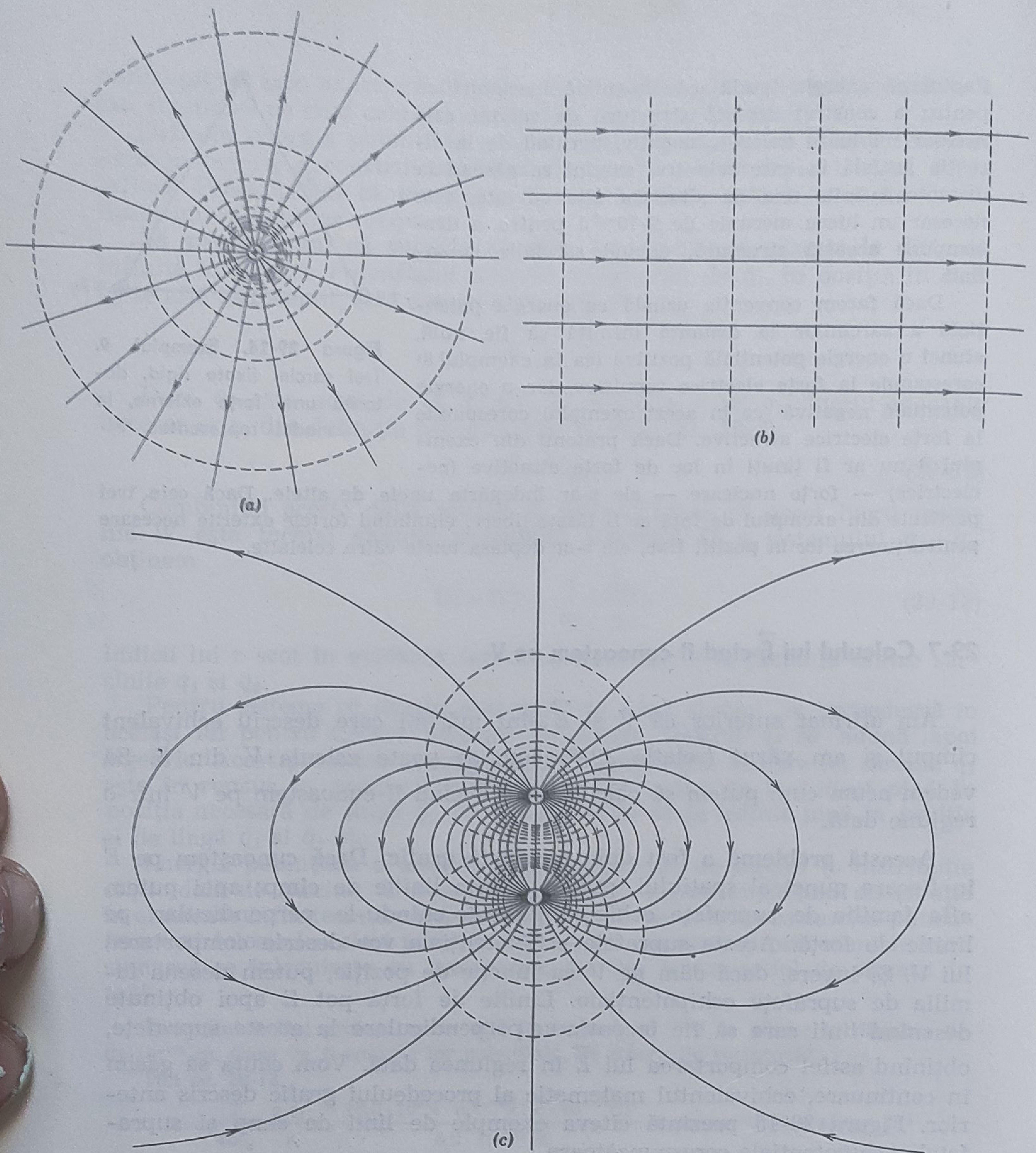


Figura 29-15. Suprafețe echipotențiale (linii intrerupte) și linii de forță (linii pline) pentru (a) o sarcină ponctiformă, (b) un cîmp electric uniform și (c) pentru un dipol electric. Pentru toate figurile s-a păstrat o diferență de potențial ΔV constantă între două suprafețe echipotențiale adiacente. Astfel din Ec. 29-14, scrisă pentru cazul $\theta = 180°$, $\Delta l = -\Delta V/E$, suprafețele vor fi relativ apropiate între ele acolo unde E este mare și relativ distanțate acolo unde E este mic. Similar (vezi paragraful 27-3) liniile de forță sînt mai dese acolo unde E este mare și mai puțin dese acolo unde E este mic. Vezi pentru un alt exemplu discuția și figurile din paragraful 18-7.

Pe de altă parte acest lucru mecanic se poate calcula cu ajutorul relației*

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l},$$

unde $\vec{F}$ este forța exterioară care trebuie aplicată asupra sarcinii pentru a compensa exact forța electrică $q_0\vec{E}$. Deoarece $\vec{F}$ și $q_0\vec{E}$ au semne contrarii dar au mărimi egale

$$\Delta W = -q_0\vec{E}\Delta\vec{l} = -q_0 E \cos(\pi - \theta)\Delta l = q_0 E \cos\theta \, \Delta l.$$

Aceste două expresii pentru lucru mecanic trebuie să fie egale, ceea ce dă

$$q_0 \Delta V = q_0 E \cos\theta \, \Delta l$$

sau

$$E \cos\theta = \frac{\Delta V}{\Delta l} \tag{29-14}$$

Dar $E \cos\theta$ este componenta lui $\vec{E}$ pe direcția $-\vec{l}$ (fig. 29-16); mărimea $-E\cos\theta$, pe care o vom nota cu E_l, va fi atunci componenta lui $\vec{E}$ pe direcția $+\vec{l}$. La limită, relația 29-14 se va scrie

$$E_l = -\frac{dV}{dl} \tag{29-15}$$

În cuvinte, această relație exprimă următoarele: dacă străbatem în linie dreaptă, un cîmp electric și măsurăm pe V în cursul deplasării, atunci viteza de variație a lui V cu deplasarea, luată cu semn schimbat, va fi componenta lui $\vec{E}$ pe direcția respectivă. Semnul negativ arată că $\vec{E}$ este îndreptat în direcția descreșterii lui V, ca în figura 29-16. Este astfel clar (din 29-15) că unitatea de măsură corespunzătoare lui $\vec{E}$ este volt/metru.

Va exista o direcție $\vec{l}$ de deplasare, pentru care mărimea $\frac{dV}{dl}$ va lua valoare maximă. Din relația 29-15, E_l va fi de asemenea maxim în această direcție, fiind tocmai E. Astfel

$$E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{max} \tag{29-16}$$

Valoarea maximă a lui dV/dl într-un punct dat se numește *gradient de potențial* în acel punct. Direcția $\vec{l}$ pentru care dV/dl are valoare maximă este totdeauna perpendiculară pe suprafața echipotențială, corespunzînd cu $\theta = 0$ din figura 29-16.

Dacă vom lua ca direcții pentru $\vec{l}$, respectiv axele x, y și z, vom găsi din relația 29-15 trei componente pentru $\vec{E}$ în fiecare punct

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{29-17}$$

Astfel, dacă V este cunoscut în fiecare punct al spațiului, adică se cunoaște

* Presupunem, pentru aceasta, că suprafețele echipotențiale sînt atît de aproape una de alta, încît $\vec{F}$ este constant în orice punct al drumului $\Delta\vec{l}$. Cînd vom trece la limită ($d\vec{l}$) această afirmație va fi corectă.

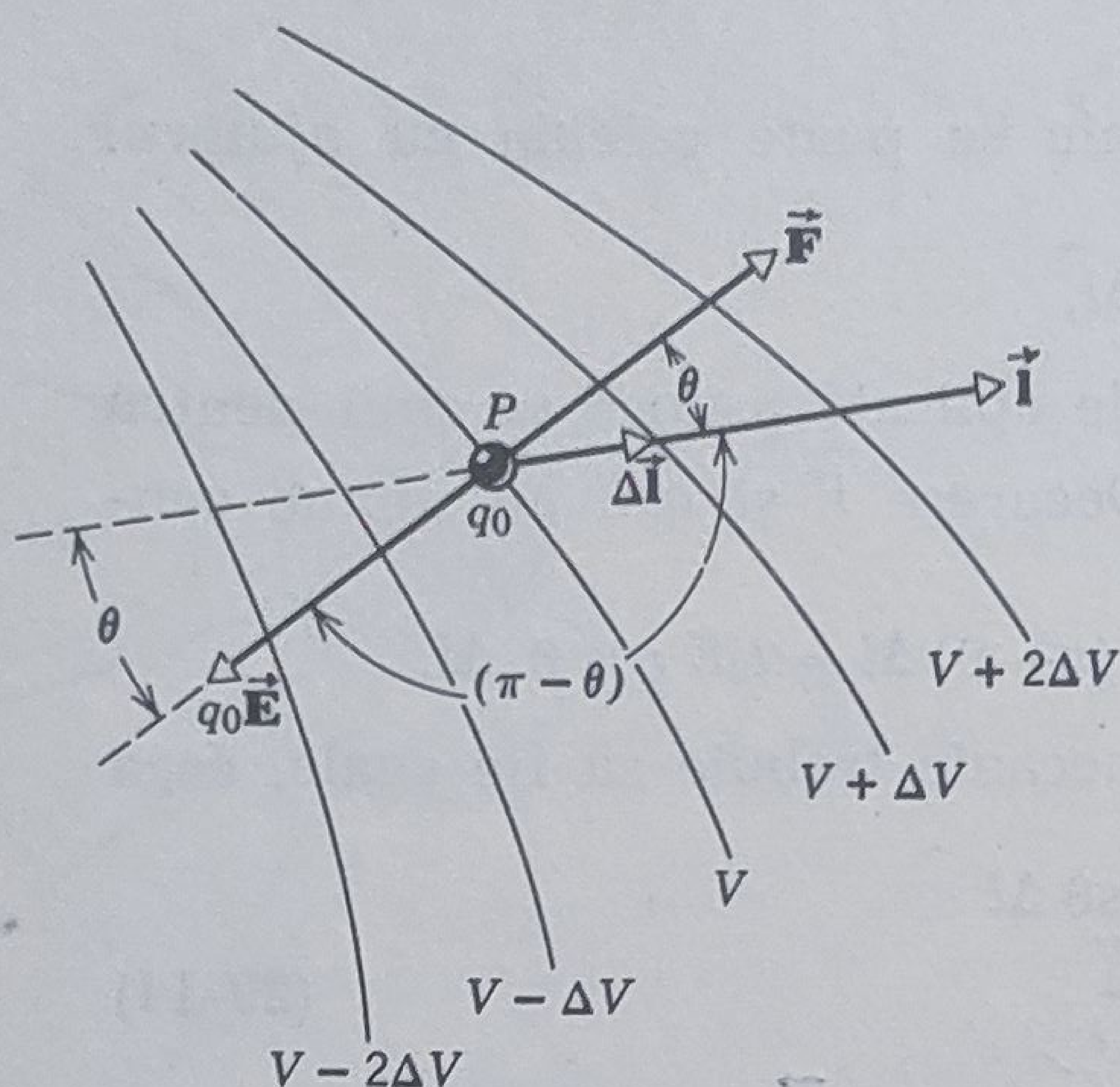


Figura 29-16. O sarcină de probă q_0 este deplasată de pe o suprafață de potențial pe alta de-a lungul unei direcții arbitrare $\vec{l}$.

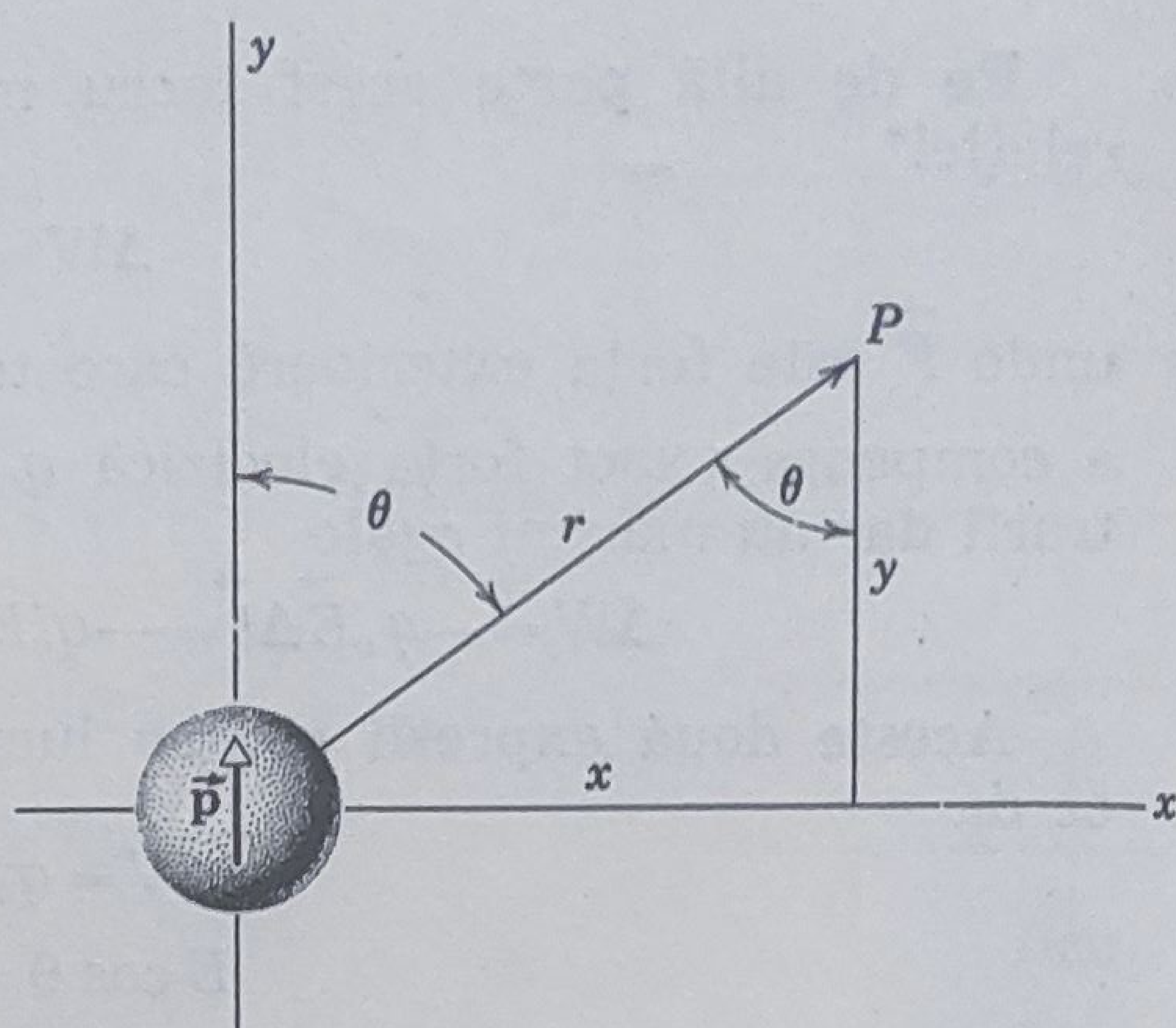


Figura 29-17. Un punct P în cîmpul dipolului electric $\vec{p}$.

funcția $V(x,y,z)$, componentele lui $\vec{E}$ și deci $\vec{E}$ pot fi cunoscute derivînd pe V*.

Exemplul 10. Calculați $E(r)$ pentru o sarcină punctiformă q, folosind ecuația 29-16 și presupunînd că $V(r)$ este dat de (ec. 29-8)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Din considerente de simetrie, $\vec{E}$ trebuie să pornească radial de la o sursă punctiformă (pozitivă). Să considerăm un punct P în cîmp la distanța r de sarcină. Este clar că dV/dl în P, are valoare maximă dacă direcția l se confundă cu r. Astfel din ecuația 29-16

$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

Acest rezultat corespunde cu ecuația 27-4 așa cum trebuia să fie.

Exemplul 11. *Cîmpul unui dipol.* În cîmpul unui dipol așezat în originea coordonatelor xy, se află un punct P (la distanță mare) (fig. 29-17). V este dat de ecuația 29-11 sau

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

Calculați $\vec{E}$ ca funcție de poziție.

Din considerente de simetrie, $\vec{E}$, pentru punctele din planul figurii 29-17, se află în acel plan. El poate fi exprimat în funcție de componentele E_x și E_y. Să expri-

---

* Simbolul $\partial V/\partial x$ poartă numele de *derivată parțială*. Ea arată că atunci cînd facem derivata, x se consideră variabilă, iar y și z constante. Aceleași considerente le putem aplica pentru $\partial V/\partial y$ și $\partial V/\partial z$.

măm funcţia de potenţial în coordonate rectangulare în loc de coordonate polare, folosind relaţiile de transformare

$$r=(x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{şi } \cos\theta = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

Rezultatul este

$$V=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Îl vom găsi pe E_y folosind ec. 29-17, şi ţinînd cont că în calcule x trebuie considerat constant:

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2)^{3/2}-y^{3/2}(x^2+y^2)^{1/2}(2y)}{(x^2+y^2)^3}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

Punînd x=0 în această relaţie obţinem cîmpul în punctele de pe axa dipolului (adică axa y) iar expresia lui E_y devine

$$E_y=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^3}.$$

Acest rezultat coincide cu cel găsit în cap. 27 (vezi problema 10).

Punînd $y=0$ în expresia lui E_y obţinem cîmpul în punctele din planul median al dipolului

$$E_y=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3},$$

care coincide cu rezultatul găsit în cap. 27 (vezi exemplul 3) unde la fel, din motive de simetrie E_x este nul în planul median. Semnul minus în această ecuaţie indică că $\vec{E}$ este îndreptat în direcţia lui y negativ (vezi fig. 29-10).

Componenta E_x se poate găsi de asemenea din ec. 29-17, considerînd pe y constant în calcule

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{py}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-5/2}(2x)=\frac{3p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

După cum ne-am aşteptat E_x se anulează atît pe axa dipolului ($x=0$) cît şi în planul median ($y=0$; vezi fig. 29-10).

29-8 Un conductor izolat

Am demonstrat în paragraful 28-4, folosind teorema lui Gauss, că după ce se atinge starea staţionară, o sarcină suplimentară q pusă pe un conductor izolat se va deplasa spre suprafaţa acestuia. Afirmăm în continuare că această sarcină q se va distribui pe suprafaţă astfel încît toate punctele de pe suprafaţă sau din volumul conductorului să aibe acelaşi potenţial.

Să considerăm două puncte oarecari A şi B de pe sau din conductor. Dacă ele nu ar fi la acelaşi potenţial, purtătorii de sarcină din conductor de lîngă punctul de potenţial mai scăzut vor căuta să se deplaseze spre punctul de potenţial mai ridicat. Am presupus însă, că starea sta-

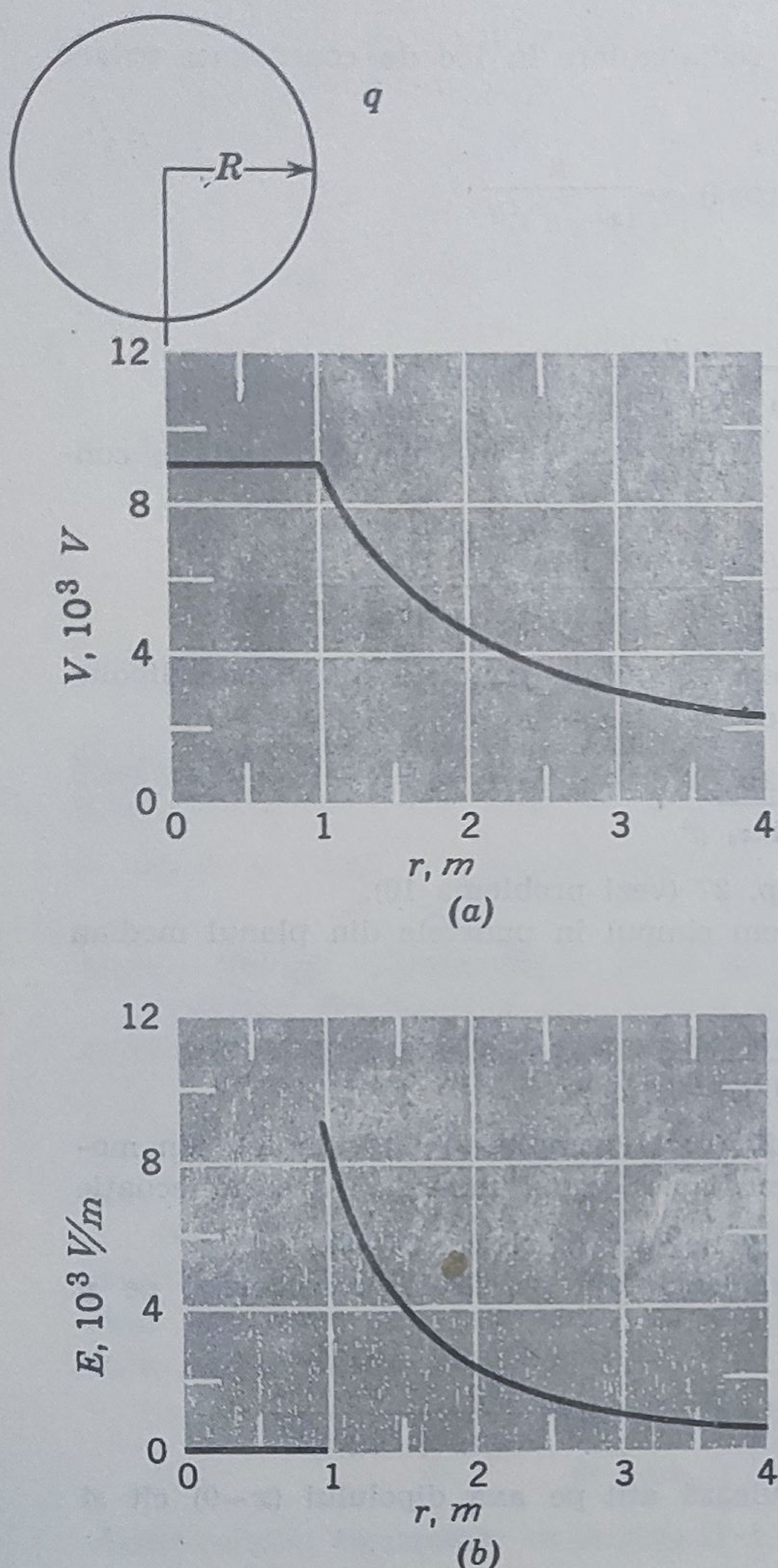


Figura 29-18. (a) Potențialul și (b) intensitatea cîmpului electric în jurul unei pături sferice conducătoare de rază 1,0 m ce este încărcată cu sarcina $+1{,}0\times10^{-6}$C.

ționară este atinsă și că deci astfel de curenți nu există; astfel atît punctele din volum cît și cele de pe suprafață vor avea același potențial. Deoarece suprafața conductorului este o suprafață echipotențială, $\vec{E}$ în punctele de pe suprafața conductorului trebuie să fie perpendicular pe suprafață.

Am văzut în paragraful 28-4 că o sarcină pusă pe un conductor izolat se va răspîndi pe suprafață pînă ce $\vec{E}$ va fi zero în toate punctele din interior. Putem spune același lucru însă în alt fel: sarcinile se vor deplasa pînă în clipa în care toate punctele de pe suprafață sau din volum vor ajunge la același potențial, adică V este constant dacă $\vec{E}$ este zero în orice punct din interiorul conductorului ($E_l=-dV/dl$).

Figura 29-18 a este o reprezentare a potențialului funcție de distanță, pentru o suprafață sferică conductoare cu raza de 1 m, a cărui sarcină electrică este de $1\cdot10^{-6}$ C. Pentru orice punct din afara sferei $V(r)$ se poate calcula din relația 29-8 deoarece sarcina q se comportă, pentru toate aceste puncte, ca și cum ar fi concentrată în centrul sferei. Ecuația 29-8 este corectă pînă la suprafața sferei. Să mergem acum mai departe și să intrăm cu sarcina de probă în interiorul sferei. Nu vom efectua nici un lucru mecanic pentru deplasarea ulterioară a probei deoarece cîmpul electric în interior este nul. Astfel, potențialul în interior va fi același ca pe suprafața conductorului (vezi fig. 29-18 a).

Dependența intensității cîmpului electric de distanță pentru aceeași sferă este dată în figura 29-18 b. De observat că E este zero în interior. Graficul (b) poate fi dedus din (a) prin derivarea lui în raport cu r, folosind relația 29-16; și reciproc, (a) poate fi dedus din (b) prin integrare în raport cu r, folosind relația 29-6.

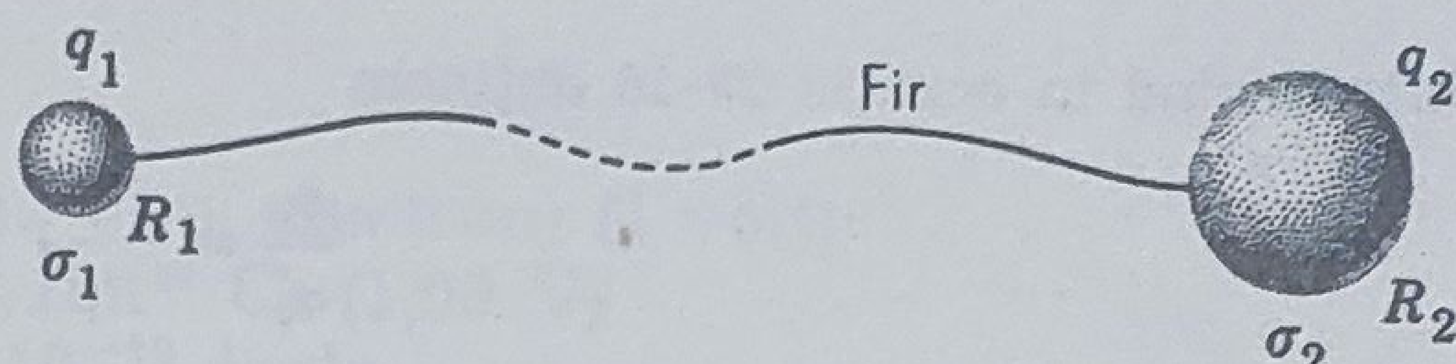


Figura 29-19. Două sfere conectate printr-un fir lung subțire.

Dacă în locul sferei goale ne referim la o sferă plină, atunci concluziile reprezentate în figura 29-18 rămîn valabile. Este instructiv să se compare figura 29-18 b (sferă conductoare) cu fig. 28-9 pentru o sferă *neconductoare*. Studentul este îndemnat să caute să înțeleagă diferența dintre aceste două figuri, ținînd cont de faptul că în primul caz sarcinile se află pe suprafață pe cînd în al doilea caz sarcinile sînt răspîndite uniform în întregul volum al sferei.

În fine să notăm ca o regulă generală că densitatea de sarcină de pe o sferă conductoare izolată va fi mai mare în regiunile cu rază de curbură mică și invers. De exemplu, densitatea de sarcină va fi relativ mare în vîrfuri și relativ mică în regiunile plane ale suprafeței conductorului. Cîmpul electric E în apropierea suprafeței conductorului este proporțional cu densitatea de sarcină σ astfel că E poate atinge valori foarte mari în apropierea vîrfurilor ascuțite. Descărcările luminoase ce apar în jurul vîrfurilor ascuțite pe vreme de furtună sînt exemple care confirmă afirmația anterioară. Paratrăznetele funcționează pe acest principiu, neutralizînd sarcina electrică a norilor prevenind astfel trăsnetele.

Putem examina calitativ relația ce există între σ și curbura suprafeței pentru cazul particular a două sfere de raze diferite legate între ele printr-un conductor foarte lung (vezi fig. 29-19). Să presupunem că întregul ansamblu este pus la potențialul V. Potențialul (egal) al celor două sfere, calculat din ecuația 29-8*:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

ceea ce conduce la

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{R_1}{R_2} \qquad (29\text{-}18)$$

unde q_1 este sarcina sferei de rază R_1 iar q_2 sarcina sferei de rază R_2.

Densitatea superficială de sarcină pentru fiecare sferă este

$$\sigma_1=\frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad \text{și} \quad \sigma_2=\frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

împărțindu-le obținem

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{q_1 R_2^2}{q_1 R_1^2}.$$

---

* Ec. 29-8 este valabilă doar pentru sarcini punctiforme *izolate* sau distribuțiilor sferice de sarcini. Sferele trebuie să fie suficient de departe una de alta pentru ca sarcina de pe una din ele să nu influențeze sensibil distribuția de sarcină de pe a doua sferă.

Introducînd în ecuaţia 29-18 obţinem

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

ceea ce confirmă afirmaţia calitativă făcută anterior. De notat că sfera de rază mai mare posedă o sarcină totală mai mare, dar o densitate mai mică de sarcină.

Faptul că σ, şi astfel $\vec{E}$, devin foarte mari în preajma vîrfurilor ascuţite este important atunci cînd se proiectează echipamentele destinate să lucreze la înaltă tensiune. În preajma vîrfurilor ascuţite ale conductorilor puşi la înaltă tensiune şi aflaţi în aer apare o *descărcare Corona.* În mod normal aerul este neconductor. Totuşi el conţine un număr (mic) de ioni produşi, de exemplu de către radiaţiile cosmice. Un conductor încărcat pozitiv va atrage ionii negativi din aerul înconjurător şi astfel cu încetul se va neutraliza.

Dacă conductorii au vîrfuri ascuţite valoarea lui $\vec{E}$, în aer, în vecinătatea lor poate fi foarte mare. Pentru valori suficient de mari, ionii atraşi spre conductor vor fi atît de puternic acceleraţi încît prin ciocniri repetate cu moleculele de aer, vor produce un număr foarte mare de ioni suplimentari. Aerul devine astfel mult mai conductor, iar descărcarea conductorului prin acest efect Corona poate să devină foarte rapidă. Aerul din preajma acestor vîrfuri poate chiar deveni luminescent datorită luminii emise de moleculele de aer în cursul ciocnirilor.

29-9 Generatorul electrostatic

Generatorul electrostatic a fost imaginat de către Lord Kelvin în 1890 şi a fost construit practic sub forma lui modernă de către R. J. Van de Graaff în 1931. El este un dispozitiv pentru producerea diferenţelor de potenţial de ordinul a cîteva milioane de volţi. Principala aplicaţie practică în fizică, a acestui dispozitiv este utilizarea acestei diferenţe de potenţial pentru a accelera particule la mari energii. Fascicule de particule de mare energie obţinute în acest fel sînt folosite în diverse experienţe de „spargere" a nucleelor. Tehnica constă în a lăsa ca o particulă încărcată să „cadă" prin această diferenţă de potenţial V, şi să obţină astfel energie cinetică.

Să considerăm mişcarea unei particule de sarcină pozitivă q în vid sub influenţa unui cîmp electric, din punctul A în punctul B între care există diferenţa de potenţial V. Energia potenţială, electrică, a sistemului se micşorează cu qV, deoarece aceasta este lucrul mecanic necesar ca să aducem sistemul în situaţia iniţială. Această scădere a energiei potenţiale se regăseşte sub formă de energie cinetică a particulei

$$E_c = qV$$

E_c fiind în jouli dacă q se măsoară în coulombi şi V în volţi. Dacă particula este un electron sau un proton, q va fi cuanta de sarcină e.

Dacă alegem ca unitate de sarcină, cuanta de sarcină e şi nu coulombul, vom obţine o nouă unitate pentru energie, numită *electron-volt*, unitate ce se foloseşte foarte des în fizica atomică şi nucleară.

Introducînd în relația 29-19

$$1\ eV = (\text{sarcina unui electron})\ (1\ \text{volt})$$
$$= (1{,}60 \times 10^{-19}\ C)\ (1{,}00\ V)$$
$$= 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{joule}$$

Electronvoltul poate fi folosit concomitent cu alte unități de energie. Astfel un obiect de 10 g care se mișcă cu 1 000 cm/s are o energie de $3{,}1 \cdot 10^{18}$ eV. Majoritatea fizicienilor preferă să exprime acest rezultat ca 0,5 J, electronvoltul fiind o unitate prea mică. În schimb, în problemele de fizică atomică și nucleară, electronvoltul (eV) și multipli lui MeV ($=10^6$ eV), GeV ($=10^9$ eV) și TeV ($=10^{12}$ eV) sînt unitățile preferate.

Exemplul 12. *Generatorul electrostatic.* În figura 29-20 este arătată o sferă mică de rază r așezată în interiorul unei sfere mari goale de rază R și care ilustrează principiul de lucru al generatorului electrostatic. Cele două sfere au sarcinile q, respectiv Q. Calculați diferența de potențial dintre ele.

Potențialul sferei mari este determinat atît de sarcina proprie P cît și de cîmpul creat de sarcina q din interiorul ei. Din acuația 29-8.

$$V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{q}{R}\right).$$

Potențialul sferei mici este determinat atît de sarcina proprie q cît și de condiția de a se afla în interiorul sferei mari; vezi figură 29-18 a. Din ecuația 29-8

$$V_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{q}{r}\right).$$

Diferența de potențial este

$$V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Astfel, presupunînd că q este pozitiv, sfera interioară va fi întotdeauna la un potențial mai înalt ca sfera exterioară. Dacă sferele se vor uni printr-un fir conductor, purtătorii sarcinii q se vor duce *în totalitate* pe sfera exterioară, indiferent de sarcina Q prezentă pe suprafață. Putem raționa și altfel: unind cele două sfere printr-un fir conductor, ele vor ajunge la echilibru la același potențial. Acest lucru cere ca $V_r - V_R = 0$ ceea ce se poate realiza doar dacă $q = 0$.

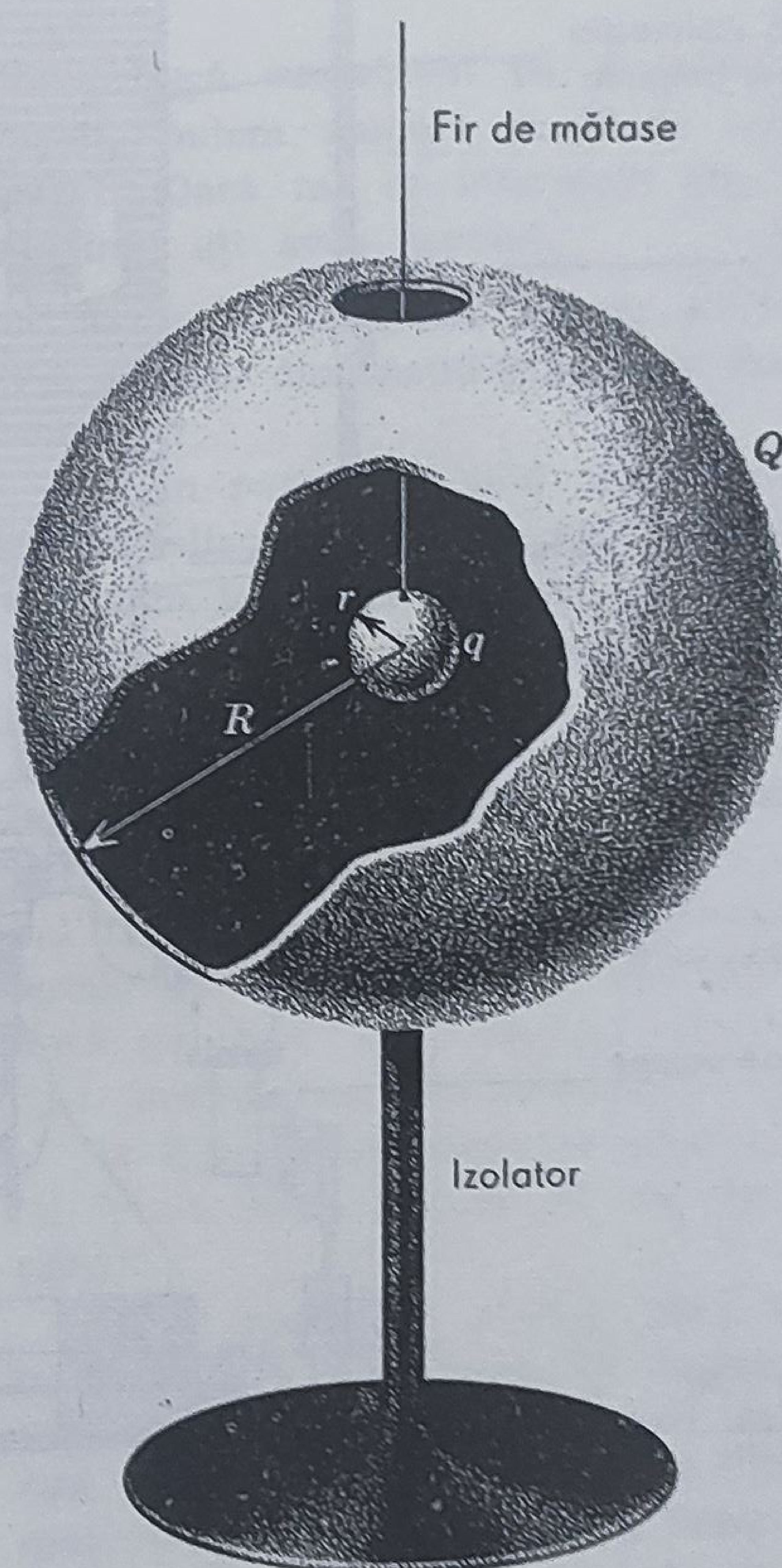


Figura 29-20. Exemplul 12. O sferă mică de rază r este suspendată în interiorul unei sfere goale de rază exterioară R.

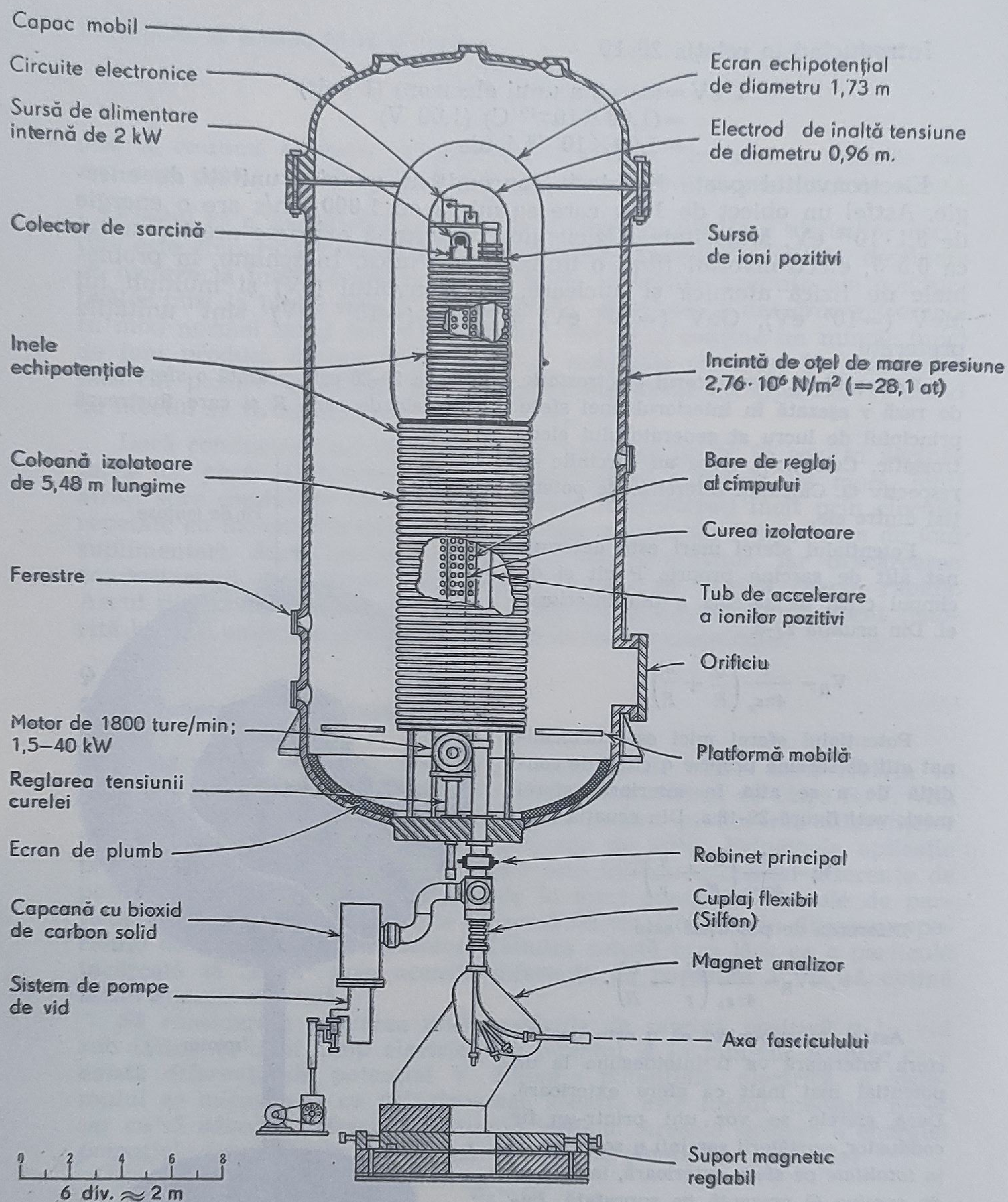


Figura 29-21. Unul dintre generatoarele electrostatice de la MIT care poate produce protoni de 9 MeV. Fasciculul de protoni este accelerat vertical în jos, apoi este deflectat într-un plan orizontal cu ajutorul unui magnet analizor aflat la partea inferioară. (Prin amabilitatea lui J. G. Trump).

În generatoarele electrostatice reale, sarcina este adusă în interiorul sferei goale cu ajutorul unei curele din material izolant ce se mişcă rapid. Sarcinile sînt colectate de pe curea în afara sferei goale, cu ajutorul unei descărcări corona produsă de o serie de vîrfuri ascuţite puse la un potenţial electric nu prea înalt. În interiorul sferei goale, sarcinile de pe curea sînt luate cu ajutorul unui sistem analog de vîrfuri ascuţite legate de sferă. Generatoarele electrostatice ce se construiesc curent pot accelera protonii cu energii pînă la 10 MeV, folosind o singură treaptă de accelerare. Schema de principiu a generatorului electrostatic de la MIT* care poate produce protoni de 9 MeV este dată în figura 29-21.

Se pot construi şi generatoare în care particulele să fie accelerate de mai multe ori. De exemplu, în acceleratorul Universităţii din Pittsburgh, particula suferă trei accelerări succesive.

Întrebări

1. Avem voie să spunem că potenţialul pămîntului este de +100 volţi în loc de zero? Ce efect ar avea o astfel de presupunere asupra valorilor măsurate ale (a) potenţialelor şi (b) diferenţelor de potenţial?

2. Ce s-ar întîmpla cu o persoană care se află pe o placă metalică izolată dacă potenţialul plăcii ar creşte cu 10 000 V?

3. Încotro au tendinţa să se mişte electronii: spre potenţial mai mic sau mai mare?

4. Să presupunem că pămîntul posedă o sarcină electrică totală *nenulă*. Este posibil ca şi în acest caz să luăm pămîntul ca punct de referinţă pentru potenţial şi să-l luăm ca potenţial $V=0$?

5. Este posibil ca potenţialul unui conductor izolat, pozitiv încărcat, să fie pozitiv? Daţi un exemplu care să sprijine afirmaţia făcută.

6. Se poate ca două suprafeţe echipotenţiale diferite să se intersecteze?

7. Dacă $\vec{E}$ este nul într-un punct, trebuie ca V să fie nul în acel punct? Daţi exemple în sprijinul afirmaţiei făcute.

8. Dacă cunoaştem pe $\vec{E}$ într-un punct, putem calcula pe V în acel punct? Dacă nu, ce informaţii suplimentare aţi avea nevoie?

9. Ce puteţi spune despre $\vec{E}$ într-o regiune din spaţiu în care V este constant?

10. În paragraful 16-6 am văzut că intensitatea cîmpului gravitaţional este zero în interiorul unei suprafeţe sferice materiale. Cîmpul electric este nul nu numai în interiorul unei sfere conductoare, ci şi în interiorul *oricărei* suprafeţe conductoare izolate, închise. Este oare cîmpul gravitaţional nul în interiorul unei suprafeţe materiale de formă cubică, de exemplu? Dacă nu, care este motivul pentru care analogia nu este completă?

11. Cum puteţi face ca potenţialul într-o regiune dată să fie constant?

12. O suprafaţă sferică conductoare, izolată, este încărcată negativ. Ce se va întîmpla dacă un obiect metalic pozitiv încărcată, se va pune în contact cu suprafaţa intensă a sferei? Presupuneţi că sarcina pozitivă este

---

* MIT — Massachusetts Institute of Technology — Institutul de Tehnologie din Massachusetts — S.U.A. (N.T.).

(a) mai mică, (b) egală, (c) mai mare ca sarcina negativă (în mărime).

13. O sferă metalică neîncărcată este suspendată de un fir de mătase într-un cîmp electric uniform $\vec{E}$, extern. Care ar fi intensitatea cîmpului electric în interiorul sferei? Se modifică răspunsul dacă sfera este încărcată?

14. Un cub conductor izolat este încărcat cu sarcină. Cum va fi densitatea de sarcină relativă în diverse puncte ale cubului (suprafețe, laturi, colțuri); ce se va întîmpla cu sarcina dacă cubul se află în aer?

Probleme

1. O suprafață plană infinită este încărcată cu densitatea superficială de $1 \cdot 10^{-7}$ C/m². La ce distanță de aceasta se află suprafața echipotențială ce diferă cu 5 volți de suprafața încărcată?

2. O sarcină q este distribuită uniform într-o sferă neconductoare de rază R. (a) Arătați că potențialul la distanța a de la centru, unde $a<R$, este dat de

$$V=\frac{q\,(3\,R^2-a^2)}{8\pi\varepsilon_0\,R^3}.$$

(b) este oare corect ceea ce afirmă această expresie și anume că V nu este zero în centrul sferei?

3. Prin simplă frecare se poate obține o sarcină de 10^{-8} C. La ce potențial electric se va ridica o sferă conductoare izolată de 10 cm rază, dacă se va încărca cu această sarcină?

4. Să considerăm o sarcină punctiformă $q=1{,}5 \cdot 10^{-8}$ C. (a) Care este raza suprafeței echipotențiale de 30 volți? (b) Suprafețele echipotențiale ce diferă printr-o diferență de potențial constantă (să zicem 1 V) sînt sau nu echidistante?

5. Găsiți punctele din figura 29-22 în care (a) $V=0$ și (b) $\vec{E}=0$. Luați în considerație numai punctele de pe axă și alegeți $d=1$ m.

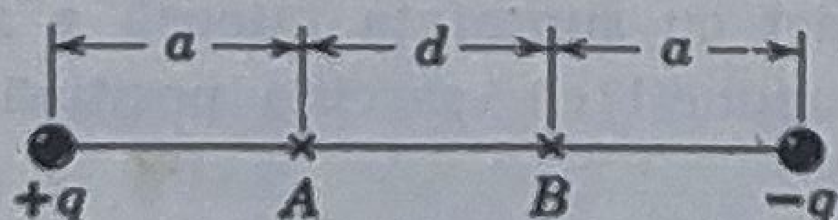


Figura 29-22.

6. Desenați calitativ pentru figura 29-22 (vezi problema 5), (a) liniile de forță și (b) intersecția suprafețelor echipotențiale cu planul figurii. (Indicație: luați în considerație comportarea liniilor de forță în apropiere de sarcini și la distanță mare de ele).

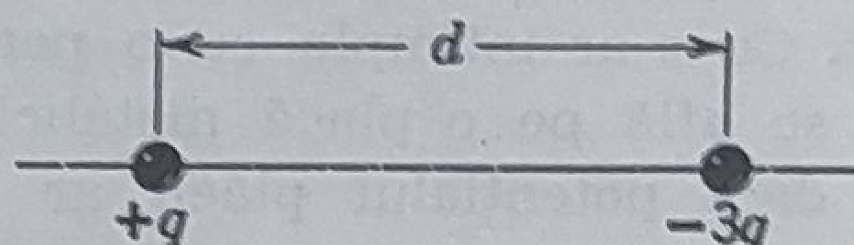
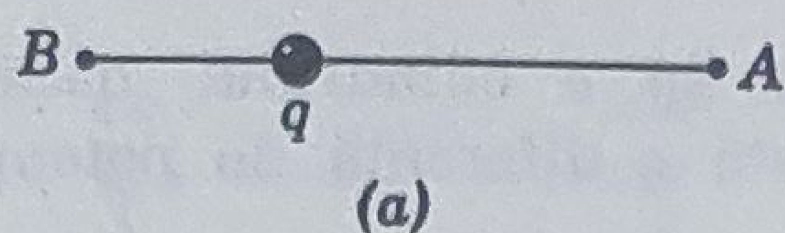


Figura 29-23.

7. Căutați expresia lui $V_A - V_B$ pentru situația din figura 29-23. Se reduce rezultatul obținut la cel așteptat, atunci cînd $d=0$? Dar cînd $q=0$?

8. Presupunem o sarcină punctiformă $q=+1 \cdot 10^{-6}$ C. Considerați punctele A și B la distanțele 2 m respectiv 1 m de sarcină pe aceeași dreaptă, de o parte și de alta a sarcinii (ca în fig. 29-24 a), (a) Cît este diferența de potențial $V_A - V_B$? (b) Calculați diferența de potențial pentru situația din figura 29-24 b.

9. Calculați momentul dipolar al moleculei de apă presupunînd că toți cei zece electroni din moleculă circulă simetric în jurul atomului de oxigen, că distanța O—H este de $0{,}96 \cdot 10^{-8}$ cm și că unghiul dintre cele două legături O—H este de 104°. Comparați valoarea obținută cu cea dată la pagina 81 (vezi fig. 29-11).



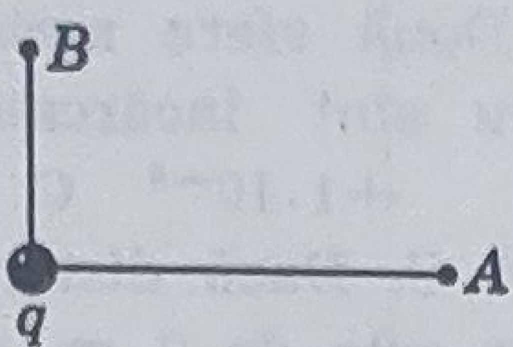


Figura 29-24.

10. Arătaţi că potenţialul $V(r)$ în punctele de pe axa verticală a distribuţiei de sarcină din figura 29-25, pentru $r \gg a$, este dat de relaţia

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{2qa}{r^2}\right).$$

Este acesta un rezultat care putea fi prevăzut? (Indicaţie: sistemul de sarcini poate fi considerat a fi format dintr-un dipol plus o sarcină pozitivă).

11. Un fulger obişnuit corespunde unui curent electric de aproximativ 30 C şi e determinat de o diferenţă de potenţial de aproximativ 10^9 V. Cîtă gheaţă s-ar putea topi la 0°C, cu ajutorul fulgerului dacă întreaga energie ar fi consumată în acest scop?

12. Calculaţi (a) potenţialul electric produs de nucleul de hidrogen la distanţa medie la care se găseşte electronul în atom ($r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m); (b) energia potenţială electrică a atomului în această situaţie şi (c) energia cinetică a electronului presupunînd că se mişcă pe o orbită circulară cu nucleul în centru, de rază dată anterior. (d) Ce energie este necesară pentru ionizarea atomului de hidrogen? Exprimaţi energia în electroni volţi.

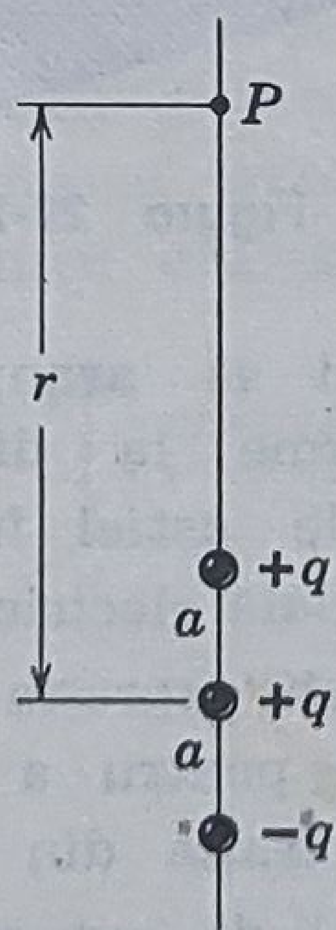


Figura 29-25.

13. Care este energia potenţială electrică a distribuţiei de sarcină din figura 29-7? Folosiţi pentru calcule numerice datele din exemplul 5.

14. (a) O picătură sferică de apă este încărcată cu $3 \cdot 10^{-11}$ C şi are potenţialul de 500 V la suprafaţa ei. Care este raza picăturii? (b) Cînd două astfel de picături identice se contopesc spre a forma o singură picătură, care va fi potenţialul la suprafaţa picăturii nou formate?

15. Presupunînd că pămîntul are densitate de sarcină superficială netă echivalentă cu 1 electron/m², (a) care va fi potenţialul pămîntului? (b) care ar fi cîmpul electric pe care l-ar produce pămîntul în imediata vecinătate a suprafeţei lui?

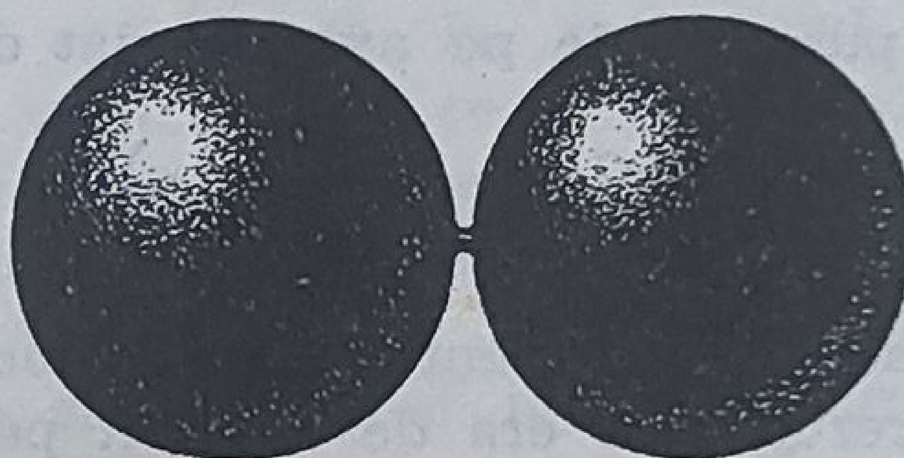


Figura 29-26.

16. În figura 29-26 se vede o imagine idealizată a nucleului de ^{238}U (Z=92) într-un moment final al fisiunii. Calculaţi (a) forţa repulsivă ce acţionează asupra celor două fragmente şi (b) energia potenţială de interacţiune electrică a celor două fragmente. Presupunem că fragmentele de fisiune sînt două sfere identice, egal încărcate cu electricitate, tangente reciproc. Raza iniţială a nucleul ^{238}U (sferic) este de $8 \cdot 10^{-15}$ m. Presupunem de asemenea că materia nucleară din care sînt constituite nucleele au densitate constantă.

17. În experienţa lui Millikan (vezi figura 27-24) un cîmp electric de $1{,}92 \cdot 10^5$ N/C produs de plăcile unui condensator la distanţă de 1,5 cm una de alta ţine în echilibru o picătură de ulei. Calculaţi diferenţa de potenţial dintre plăci.

18. (a) Arătaţi că potenţialul electric creat de un inel de sarcini de rază a, într-un punct de pe axa inelului, calculată cu ajutorul ecuaţiei 29-10 este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(b) Din acest rezultat, calculaţi expresia lui E pentru punctele de pe ax; comparaţi rezultatul cu cel calculat direct în exemplul 5, cap. 27.

19. În exemplul 6 potenţialul într-un punct de pe axa de simetrie a unui disc încărcat este

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + r^2} - r\right).$$

Din acest rezultat, arătaţi că E pentru punctele de pe ax este dat de

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right).$$

Această relaţie pentru E se reduce la un rezultat ce era de aşteptat pentru (a) $r \ll a$ şi (b) pentru $r = 0$?

20. (a) Găsiţi mărimea componentei radiale E_r a cîmpului electric dat de un dipol, pornind de la ecuaţia 29-11; (b) pentru ce valoare a lui θ, E_r este nul?

21. Este posibil ca o sferă conductoare de rază 10 cm să fie încărcată cu sarcina $4 \cdot 10^{-6}$ C în aer, fără străpungere? Cîmpul de străpungere al aerului la 1 atm este de $3 \cdot 10^6$ V/m.

22. Un contor Geiger este construit dintr-un cilindru metalic de 2 cm diametru şi dintr-un fir metalic de 0,125 mm diametru întins pe axa cilindrului. Care vor fi intensităţile cîmpului electric la suprafaţa (a) firului şi (b) a cilindrului, dacă între ele există o diferenţă de potenţial de 850 V?

23. Două sfere metalice de 3 cm diametru sînt încărcate uniform cu sarcina $+1 \cdot 10^{-8}$ C şi respectiv $-3 \cdot 10^{-8}$ C. Dacă distanţa dintre centrele lor este de 2 m, să se calculeze (a) potenţialul produs la jumătatea distanţei dintre cele două sfere şi (b) potenţialul fiecărei sfere.

24. Să presupunem că sferele din figura 29-19 au razele $R_1 = 1$ cm şi $R_2 = 2$ cm. Înainte ca sferele să fie legate prin firul conductor, sfera mare era neîncărcată iar sfera mică avea sarcina $2 \cdot 10^{-7}$ C. Calculaţi ca sarcina, (b) densitatea de sarcină şi (c) potenţialul fiecărei sfere după ce ele au fost legate.

25. Să considerăm un obiect metalic cu simetrie de revoluţie în jurul unei axe orizontale (fig. 29-27). Presupunînd că obiectul este încărcat negativ, desenaţi cîteva suprafeţe echipotenţiale şi linii de forţă. În acest scop folosiţi raţionamente fizice şi mai puţin matematice.

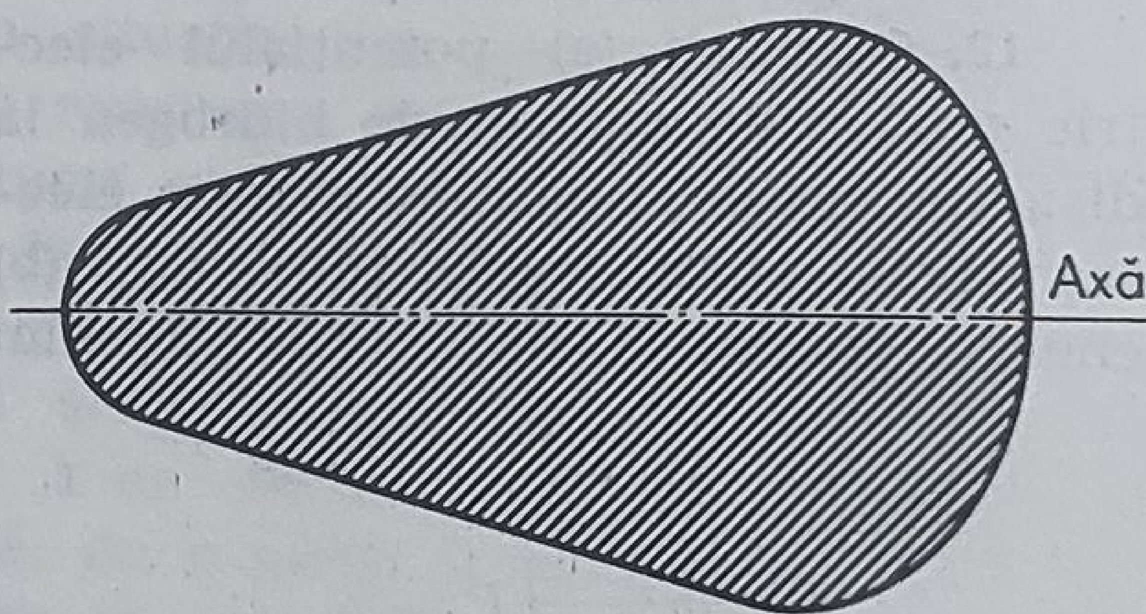


Figura 29-27.

26. Căutaţi să aranjaţi trei sarcini punctiforme la distanţă finită unele de altele astfel încît să aibă energie potenţială electrică nulă.

27. Deduceţi expresia lucrului mecanic necesar pentru a construi din sarcini configuraţia din figura 29-28.

28. Nucleul de aur conţine o sarcină electrică egală cu cea a 79 pro-

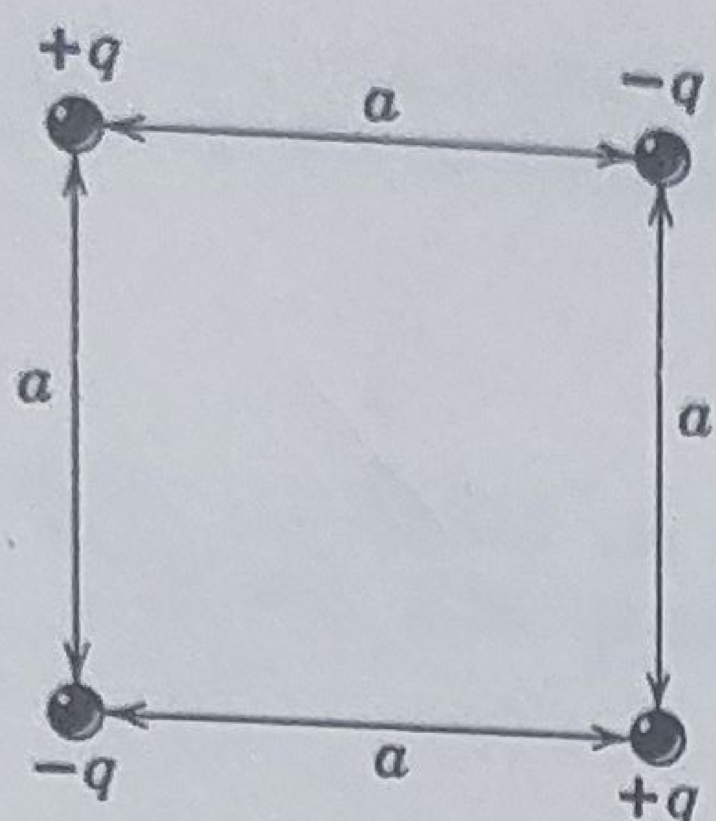


Figura 29-28.

toni. O particulă α (Z=2) ce se îndreaptă spre nucleu posedă o energie cinetică E_c la distanță mare de nucleu. În urma ciocnirii particula α doar atinge suprafața (presupusă sferică) a nucleului și se reîntoarce pe același drum. Calculați E_c, presupunînd că raza nucleului este $5 \cdot 10^{-15}$ m. Energia particulei α, în experineța originală a lui Rutherford a fost de 5 MeV. Ce concluzii puteți trage de aci?

29. Care este gradientul de potențial, în V/m, la distanța de 10^{-12} m de la centrul nucleului de aur? Care este gradientul la suprafața nucleului?

30. Care este raportul intensităților cîmpurilor electrice la suprafața sferelor din fig. 29-19?

31. (a) Care este diferența de potențial pe care un electron trebuie să o parcurgă, conform mecanicii Newtoniene, pentru a ajunge la viteza c a luminii? (b) Mecanica Newtoniană nu este însă valabilă pentru $v \to c$. În consecință, folosind expresia corectă, relativistă, pentru energia cinetică

$$E_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right]$$

în locul expresiei Newtoniene $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$, calculați viteza reală a electronului ce se mișcă cu energia calculată în (a). Exprimați această viteză în funcție de viteza luminii.

32. Două sfere concentrice, subțiri, de raze R_1 și R_2 au sarcinile q_1 și q_2. Deduceți formulele pentru $E(r)$ și $V(r)$ unde r este distanța de la centrul sferelor. Reprezentați $E(r)$ și $V(r)$ pentru r cuprins între 0 și 4 m cînd $R_1 = 0{,}5$ m, $R_2 = 1$ m, $q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ C și $q_2 = 1 \cdot 10^{-6}$ C. Comparați rezultatul cu figura 29-18.

33. Diferența de potențial dintre sfera unui generator electrostatic și locul de încărcare a benzii mobile este $3 \cdot 10^6$ volți. Dacă cureaua transferă sarcina la sferă, cu viteza de $3 \cdot 10^{-3}$ C/s, care ar fi puterea necesară pentru punerea în funcțiune a benzii, considerînd doar forțele electrice?

34. (a) Care va fi cantitatea de sarcină necesară ca o sferă de rază 1 m să ajungă la potențialul de $1 \cdot 10^6$ volți? (b) De ce la generatoarele electrostatice se folosesc sfere mari și nu mici cu toate că același potențial se poate obține pe o sferă mai mică cu o cantitate mai mică de sarcină electrică?

35. O particulă α este accelerată cu ajutorul unui generator electrostatic la o diferență de potențial de 1 MV. (a) Ce energie cinetică va primi particula α? (b) Care va fi energia cinetică pe care o va obține un proton în aceleași condiții? (c) Care dintre ele vor ajunge la o viteză mai mare, pornind din repaus?

Capitolul 30

Capacități și dielectrici

30-1 Capacitatea

După cum am văzut în paragraful 29-3 potențialul unei sfere metalice, încărcate, complet izolate de orice obiect (conductor sau neconductor) este dat de

$$V'_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}, \tag{30-1}$$

în care q este sarcina sferei iar R raza ei. Indicele + de la potențial ne arată că sarcina sferei este pozitivă. Reprezentăm acest potențial V'_+ printr-o linie, în figura 30-1. Linia însemnată cu V_∞, reprezintă potențialul de referință a unui punct infinit depărtat de sferă; îl vom lua cu valoare zero, conformîndu-ne convențiilor uzuale.

Să ne imaginăm o a doua sferă de rază R, încărcată negativ cu aceeași sarcină $-q$, așezată la o mare distanță ($\gg R$) de prima sferă, astfel că fiecare din ele pot fi considerate a fi tot izolate electric. Potențialul celei de a doua sfere este dat de relația

$$V'_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \tag{30-2}$$

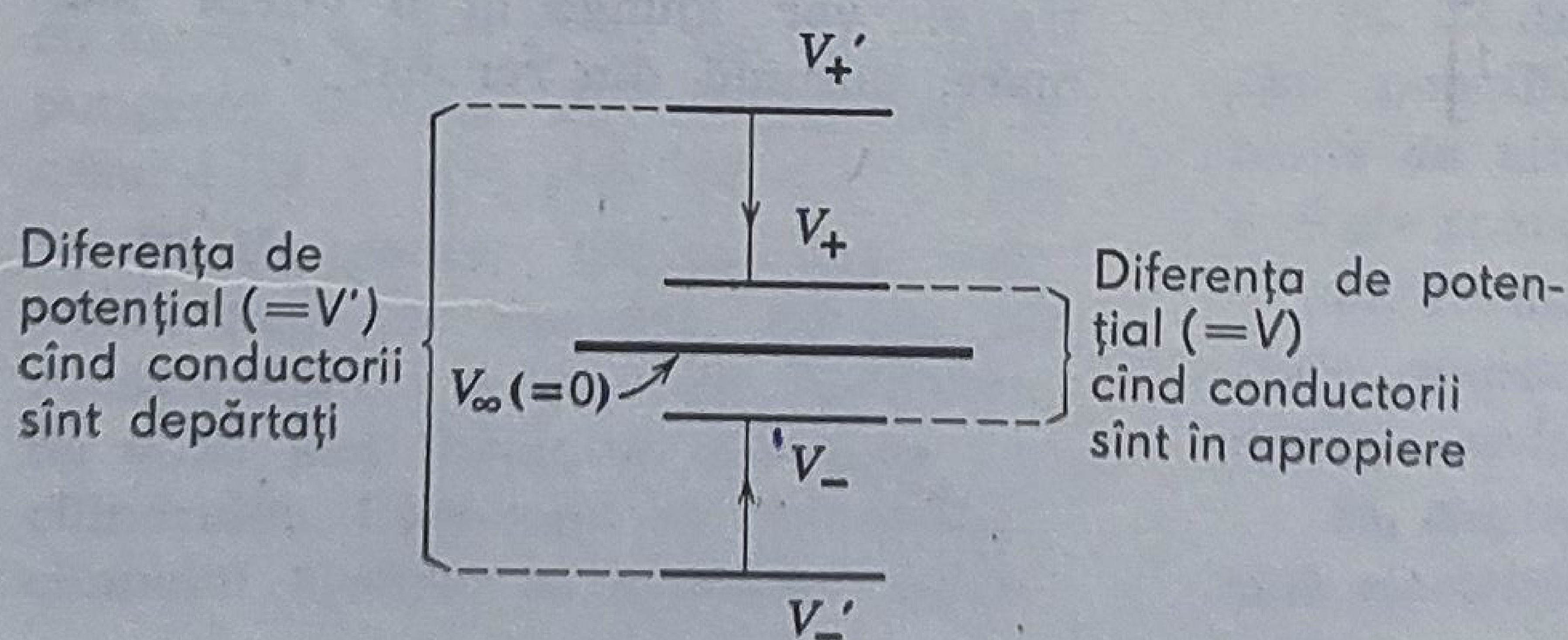


Figura 30-1. Diferența de potențial ce există între doi conductori încărcați cu sarcină egală dar de semn contrar și constantă, scade dacă conductorii sînt apropiați unul de celălalt.

potențial de asemenea reprezentat în figura 30-1.

Diferența de potențial V' dintre cele două sfere este

$$V' = V'_{+} - V'_{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{R}.$$

Aceasta ne arată că diferența de potențial V' și sarcina q de pe fiecare din sfere sînt proporționale între ele. Putem rescrie relația astfel

$$q = (2\pi\varepsilon_0 R)\ V' = C'V' \qquad (30\text{-}3)$$

în care constanta de proporționalitate din paranteză se numește *capacitate* a celor două sfere și este notată cu C'.

Să deplasăm sferele una către cealaltă. Prezența celei de a doua sarcini va strica simetria sferică a liniilor de cîmp care proveneau de la cele două sfere. Liniile de cîmp, care în cazul distanței mari dintre sfere erau simetrice, radiale și se întindeau pînă la infinit, se vor termina acum, în parte, pe cealaltă sferă. În aceste condiții formulele 30-1 și 30-2 nu se mai aplică, deoarece ele au fost deduse (vezi paragraful 29-2) presupunînd existența simetriei sferice și deci folosirea cu succes a teoremei Gauss.

Un corp cu sarcină pozitivă adus în preajma unui obiect izolat va crește potențialul obiectului, iar unul cu sarcină negativă o va micșora, afirmații pe care studentul le poate demonstra dacă ia în considerație lucrul mecanic necesar pentru a aduce o sarcină pozitivă de la infinit lîngă astfel de sarcini. Astfel, potențialul sferei încărcate pozitiv se va micșora prin prezența în apropiere a unei sfere încărcate negativ, trecînd de la V'_{+} la o valoare V_{+} ceva mai mică. Similar, potențialul sferei negative va crește de la V'_{-} la V_{-}. Noile potențiale sînt arătate în figura 30-1, iar variația potențialului fiecărei sfere este indicată prin săgeți verticale.

După cum se vede din figura 30-1, cu toate că *sarcinile* sferelor nu au fost modificate, este clar că *diferența de potențial* dintre ele a fost redusă considerabil. Exprimată altfel, *capacitatea* sistemului de sfere (vezi relația 30-3) definită prin

$$C = \frac{q}{V} \qquad (30\text{-}4)$$

a crescut sensibil față de valoarea ei inițială C', prin aducerea în apropiere a celor două sfere.

Este de asemenea posibil să folosim ecuația 30-4 pentru a defini capacitatea unui conductor izolat, singur, cum ar fi o sferă. În acest caz ne putem imagina că cea de a doua „placă", încărcată cu sarcină egală și de semn contrar este o sferă conductoare de rază foarte mare (— practic infinită) centrată pe conductor. Potențialul unei astfel de sfere de rază infinită este conform convenției, zero. Capacitatea unei sfere izolate de rază R este atunci dată de relația 30-4 și 30-1.

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

Unitatea SI de capacitate după cum rezultă din ecuația 30-4 este C/V. Este folosită o denumire specială, *faradul* pentru a o denumi. Denumirea este dată în onoarea lui Michael Faraday care printre alte contribuții la studiul electricității, a introdus noțiunea de capacitate. Astfel

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb}/1 \text{ volt}.$$

În practică se folosesc unități mai convenabile, submultipli ai faradului, *microfaradul* ($1 \text{ F} = 10^{-6}$ F), *nanofaradul* ($1 \text{ nF} = 10^{-9}$ F) și *picofaradul* ($1 \text{ pF} = 10^{-12}$ F).

Se poate face o analogie între o capacitate ce acumulează sarcina q și o incintă de volum v ce conține μ moli de gaz ideal.

Presiunea gazului, p, este direct proporțională cu μ pentru o temperatură dată conform legii generale a gazelor (relația 23-2)

$$\mu = \left(\frac{v}{RT}\right) p.$$

Pentru un condensator

$$q = (C)\ V$$

Comparîndu-le ajungem la concluzia că capacitatea C este analoagă cu volumul v al incintei, pentru o temperatură fixată.

De notat că orice cantitate de sarcină poate fi acumulată de o capacitate și că orice masă de gaz poate fi pusă într-o incintă, pînă la anumite limite. Aceasta corespunde la străpungerea electrică a condensatorului respectiv la spargerea incintei.

În figura 30-2 se arată un caz mult mai general a doi conductori apropiați, care pot fi acum de orice formă, încărcați cu sarcini egale dar de semne contrare. Un astfel de sistem se numește *condensator*, iar conductorii se numesc *armături*. Pentru a încărca armăturile cu sarcini egale și de semn opus, ele se conectează pentru un moment la bornele unei baterii. Capacitatea C, a oricărui condensator se definește folosind ec. 30-4, în care reamintim că V este *diferența de potențial dintre armături*, iar q este mărimea *sarcinii de pe fiecare din armături;* q nu este sarcina totală a condensatorului, care este zero. Capacitatea unui condensator depinde de geometria fiecărei armături, distanța dintre ele și mediul în care sînt cufundate. Pentru moment considerăm că acest mediu este vidul.

Condensatoarele sînt dispozitive ce prezintă un mare interes pentru fizicieni și ingineri. De exemplu:

1. În această carte am accentuat importanța *cîmpului* la înțelegerea fenomenelor naturale. Condensatorul poate fi folosit la producerea cîmpurilor electrice de diferite configurații necesare în diverse scopuri. În paragraful 27-5 am descris devierea unui fascicul de electroni în cîmpul uniform produs de un condensator, deși atunci nu am folosit acest termen. În paragrafele următoare vom discuta comportarea materialelor dielectrice situate într-un cîmp elecric (produs convenabil de un condensator) și vom vedea cum pot fi generalizate legile electromagnetis-

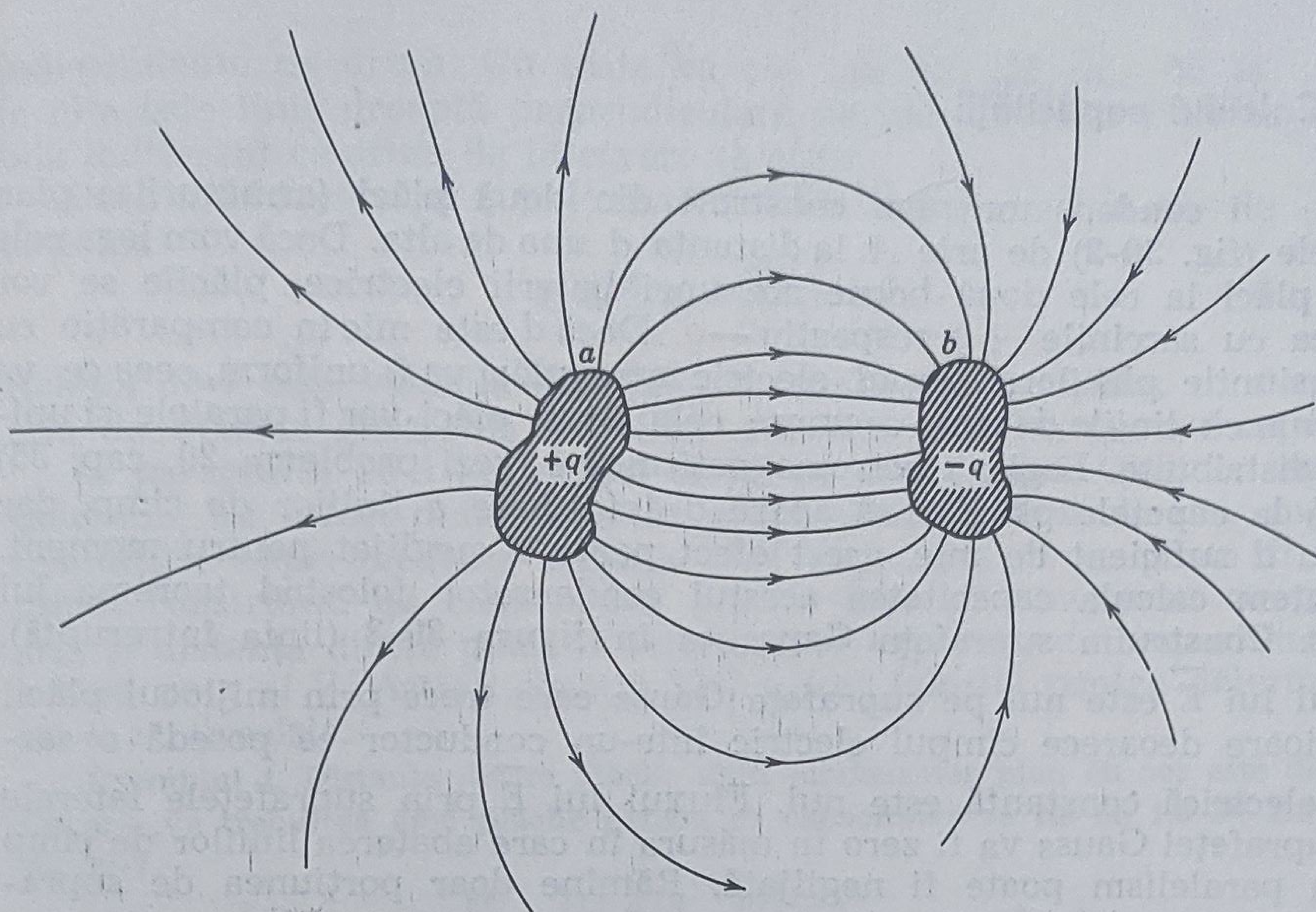


Figura 30-2. Doi conductori izolați încărcați cu sarcini de semne contrarii formează un condensator.

mului pentru a lua în considerare mai ușor, prezența corpurilor dielectrice.

2. O altă noțiune importantă pe care am pus accentul în această carte este *energia*. Analizînd condensatoarele încărcate vom arăta că energia electrică se poate considera că este acumulată în cîmpul electric dintre armăturile condensatorului ca de altfel în orice cîmp electric, indiferent de modul în care a fost produs. Deoarece condensatoarele pot produce cîmpuri intense în regiuni mici din spațiu, ele pot fi folosite în calitate de dispozitive de acumulare a energiei. În multe sincrotroane de electroni, care sînt dispozitive de accelerare de tip ciclotron pentru electroni, energia acumulată în mari baterii de condensatoare într-un timp relativ lung este folosit ulterior prin descărcarea lor intermitentă pe intervale scurte de timp. Multe cercetări și dispozitive folosite în fizica plasmei folosesc astfel de metode de acumulare a energiei pentru a o putea utiliza pe intervale foarte scurte de timp sub forma unor impulsuri gigante de energie.

3. Epoca electronică nu ar fi putut să existe fără condensatoare. Ele sînt folosite împreună cu alte dispozitive pentru a micșora fluctuațiile de energie în alimentatoarele electronice de tensiune, pentru a transmite semnale sub formă de impulsuri, pentru generarea sau detectarea oscilațiilor electromagnetice de radiofrecvență și pentru a produce întîrzierea în timp a semnalelor electrice. În majoritatea acestor aplicații, diferența de potențial dintre armături nu rămîne constantă, așa cum am presupus în acest capitol, ci va varia în timp de cele mai multe ori sinusoidal sau în impulsuri. În ultimele capitole se vor considera unele aspecte legate de condensator ca element de circuit.

30-2 Calculul capacității

Fie un condensator plan construit din două plăci (armăturile) plan paralele (fig. 30-2) de arie A, la distanța d una de alta. Dacă vom lega cele două plăci la cele două borne ale unei baterii electrice, plăcile se vor încărca cu sarcinile $+q$, respectiv $-q$. Dacă d este mic în comparație cu dimensiunile plăcilor, cîmpul electric între plăci va fi uniform, ceea ce va însemna că liniile de cîmp ce unesc cele două plăci vor fi paralele și uniform distribuite. Legile electromagnetismului (vezi problema 20, cap. 35) cer ca la capetele plăcilor să apară o deformare a liniilor de cîmp, dar pentru d suficient de mic, acest efect poate fi neglijat pentru moment.

Putem calcula capacitatea acestui condensator folosind teorema lui Gauss. Construim suprafața Gauss ca în figura 30-3 (linia întreruptă). Fluxul lui $\vec{E}$ este nul pe suprafața Gauss care trece prin mijlocul plăcii superioare deoarece cîmpul electric într-un conductor ce posedă o sarcină electrică constantă este nul. Fluxul lui $\vec{E}$ prin suprafețele laterale ale suprafeței Gauss va fi zero în măsura în care abaterea liniilor de cîmp de la paralelism poate fi neglijată. Rămîne doar porțiunea de suprafață Gauss dintre cele două plăci. Aci $\vec{E}$ este constant, iar fluxul Φ_E va fi EA, unde A este aria plăcii condensatorului. Teorema lui Gauss ne dă

$$\varepsilon_0 \Phi_E = \varepsilon_0 EA = q \tag{30-5}$$

Lucrul mecanic necesar pentru a duce o sarcină de probă q_0 de la o placă la alta poate fi exprimat fie ca $q_0 V$ (vezi ec. 29-1) fie ca produsul dintre forță $q_0 E$ și distanța d, $q_0 Ed$. Cele două exprimări trebuie să dea același lucru, adică

$$V = Ed \tag{30-6}$$

Relația 30-6 este de fapt un caz particular exprimat de o relație mai generală (ecuația 29-5, vezi de asemenea exemplul 1, capitolul 29)

$$V = -\int \vec{E}\, d\vec{l}$$

unde V este diferența de potențial dintre plăci. Integrala poate fi luată pe orice drum care începe pe o placă și sfîrșește pe cealaltă deoarece fiecare placă este o suprafață echipotențială, iar forțele electrostatice sînt

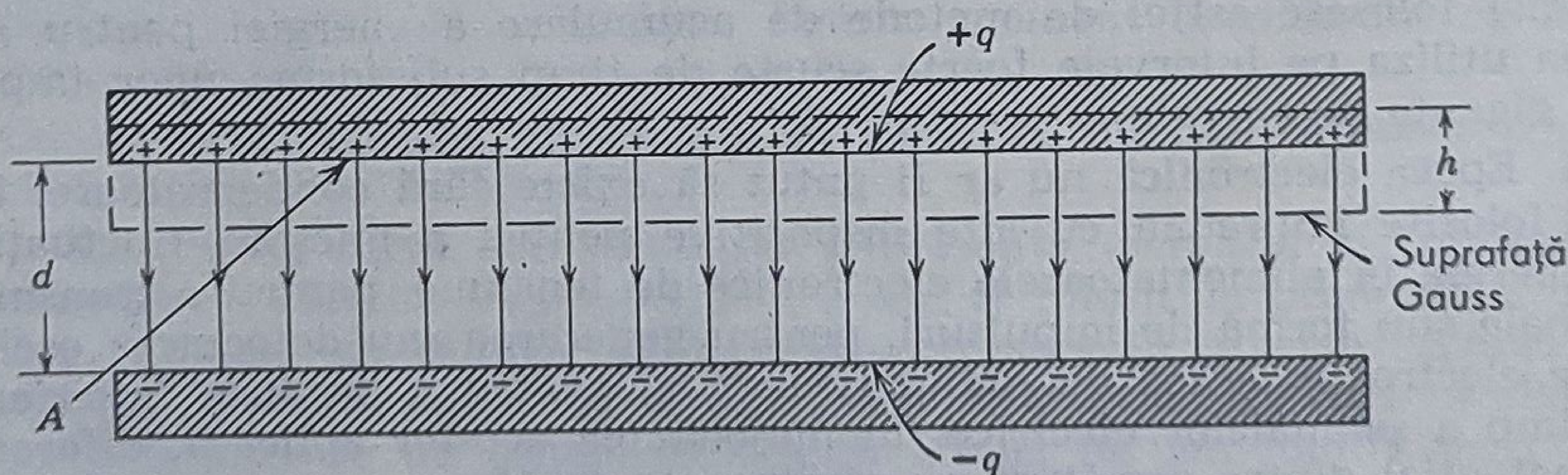


Figura 30-3. Un condensator plan cu plăci de arie A. Linia întreruptă reprezintă suprafața Gauss de înălțime h și ale cărei părți superioară și inferioară au forma plăcilor condensatorului.

independente de drum. Cu toate că cea mai simplă cale de la o placă la alta este linie dreaptă perpendiculară pe plăci, relaţia 30-6 este valabilă indiferent ce drum de integrare se alege.

Dacă introducem pe q şi V din relaţiile 30-5 şi 30-6 în relaţia $C=q/V$ obţinem

$$C=\frac{q}{V}=\frac{\varepsilon_0 EA}{Ed}=\frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{30-7}$$

Relaţia 30-7 este valabilă doar pentru condensatorul plan; condensatoarele de diverse geometrii vor avea formule diferite pentru capacitate.

În paragraful 26-4 am arătat că ε_0, pe care l-am întîlnit la legea lui Coulomb, nu a fost determinat cu ajutorul acelei formule din cauza dificultăţilor experimentale. Relaţia 30-7 sugerează că ε_0 poate fi determinat construind un condensator pentru care să cunoaştem cu precizie aria şi distanţa dintre plăci şi determinînd experimental capacitatea măsurînd pe q şi V. Astfel, ecuaţia 30-7 a fost folosită pentru determinarea lui ε_0 cu precizie.

Exemplul 1. Distanţa dintre plăcile unui condensator plan cu aer este de 1 mm. Ce arie va trebui să aibă plăcile pentru ca capacitatea să fie de 1,0 F? Din ecuaţia 30-7

$$A=\frac{dC}{\varepsilon_0}=\frac{(1{,}0\times10^{-3}\ \mathrm{m})\,(1{,}0\ \mathrm{F})}{8{,}9\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}}=1{,}1\times10^{8}\ \mathrm{m^2}$$

Aceasta este aria unei plăci pătrate cu latura mai mare de 10 km; faradul rezultă astfel a fi o unitate foarte mare.

Exemplul 2. *Un condensator cilindric.* Un condensator cilindric este construit din doi cilindri concentrici (fig. 30-4) de raze a şi b şi de lungime l. Care va fi capacitatea acestui dispozitiv? Presupuneţi că condensatorul este foarte lung (adică că $l\gg b$) astfel ca liniile de forţă, deformate la capetele condensatorului, să poată fi neglijate la calculul capacităţii.

Suprafaţa gaussiană se alege ca o suprafaţă cilindrică coaxială de rază r şi lungime l şi închisă prin două plane de bază. Teorema lui Gauss

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{s}=q$$

dă

$$\varepsilon_0 E(2\pi r)(l)=q,$$

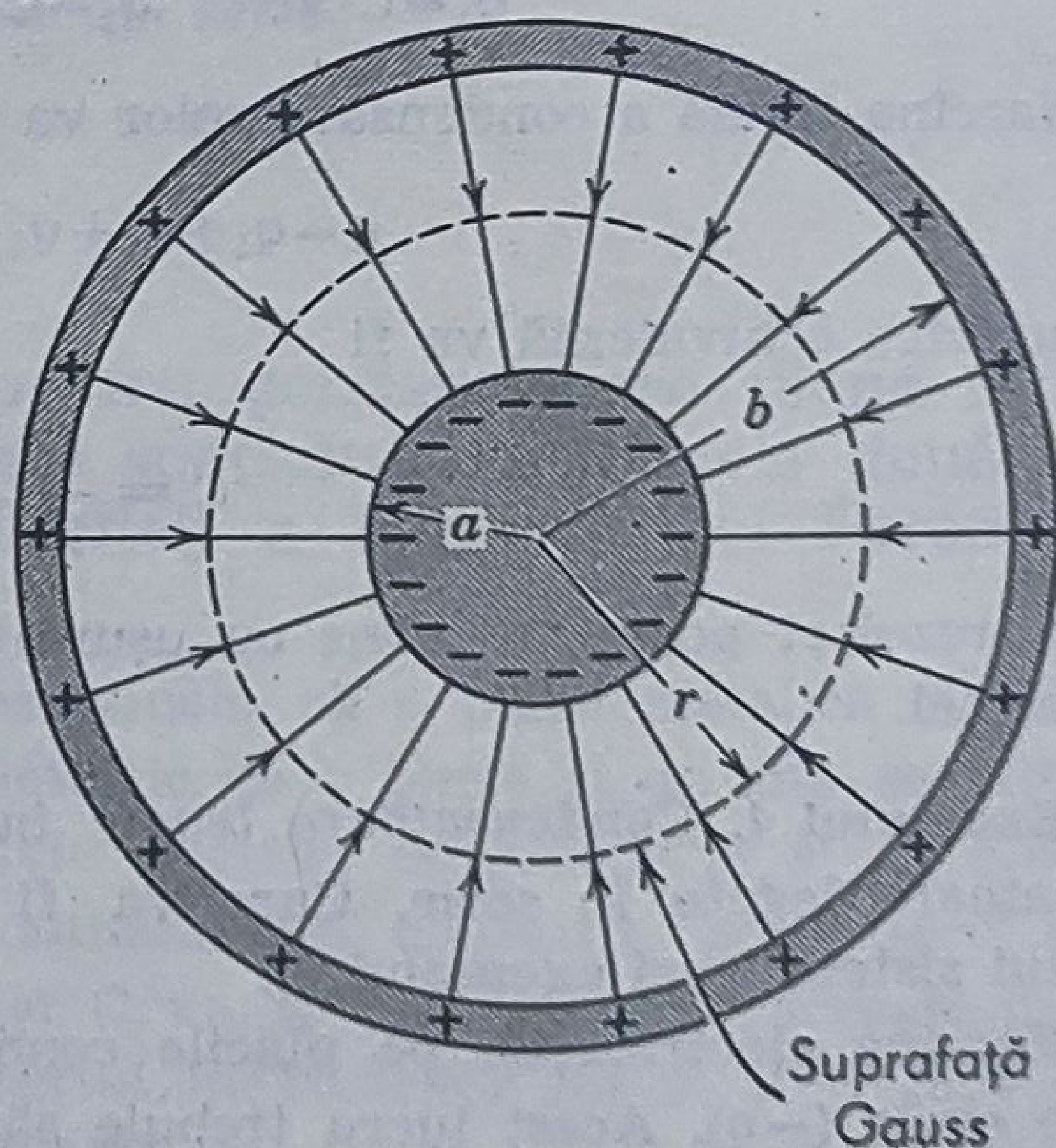


Figura 30-4. Exemplul 2. O secţiune transversală printr-un condensator cilindric. Linia punctată reprezintă o secţiune transversală printr-o suprafaţă Gauss cilindrică de rază r şi de lungime l.

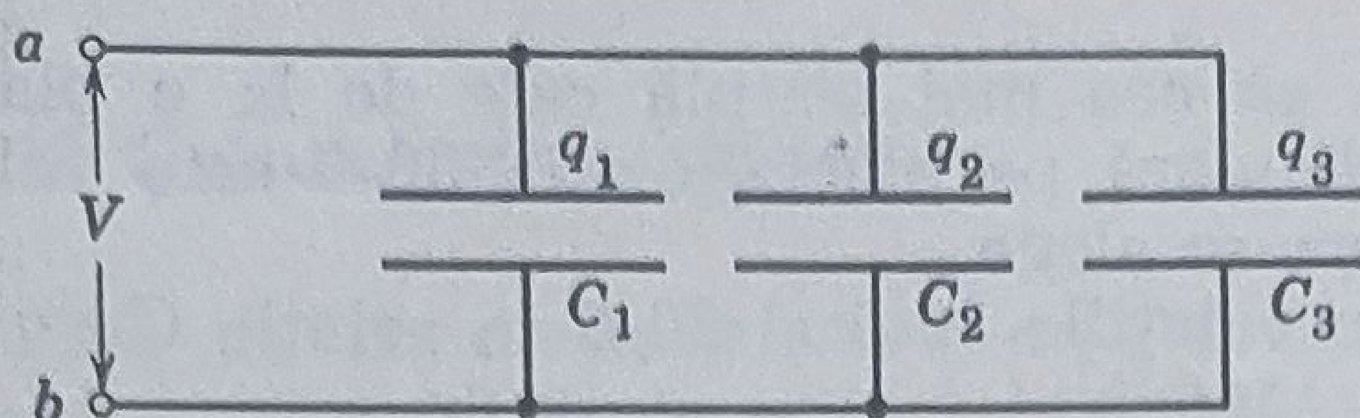


Figura 30-5. Exemplul 3. Trei condensatoare legate în paralel.

fluxul trecînd în întregime suprafaţa laterală a cilindrului Gauss. De aci

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl}.$$

Diferenţa de potenţial dintre plăci este dată de relaţia. 29-5 (observaţi că $\vec{E}$ şi $d\vec{l}$ $(=d\vec{r})$ sînt vectori antiparaleli) şi

$$V=-\int_a^b \vec{E}\,d\vec{l}=\int_a^b E\,dr=\int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}.$$

Capacitatea va fi deci

$$C=\frac{q}{V}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

Ca şi relaţia obţinută pentru condensatorul plan (30-7), această relaţie depinde doar de factori geometrici.

Exemplul 3. *Condensatoare legate în paralel.* În fig. 30-5 se arată trei condensatoare legate în paralel. Care va fi capacitatea echivalentă a acestui sistem de trei condensatoare? Termenul de echivalent se referă la faptul că dacă sistemul de trei condensatoare şi condensatorul echivalent ar fi fiecare într-o cutie în care doar punctele a şi b ar fi scoase la nişte borne, nu ar fi posibil prin măsurători electrice să le deosebim. Diferenţa de potenţial la bornele tuturor condensatoarelor va fi aceeaşi. Acest lucru rezultă din faptul că toate plăcile superioare sînt legate la borna a iar cele inferioare la borna b. Aplicînd relaţia $q=CV$ fiecărei capacităţi obţinem

$$q_1=C_1V;\qquad q_2=C_2V\qquad \text{şi}\qquad q_3=C_3V.$$

Sarcina totală a condensatoarelor va fi

$$q=q_1+q_2+q_3=(C_1+C_2+C_3)V.$$

Capacitatea echivalentă va fi

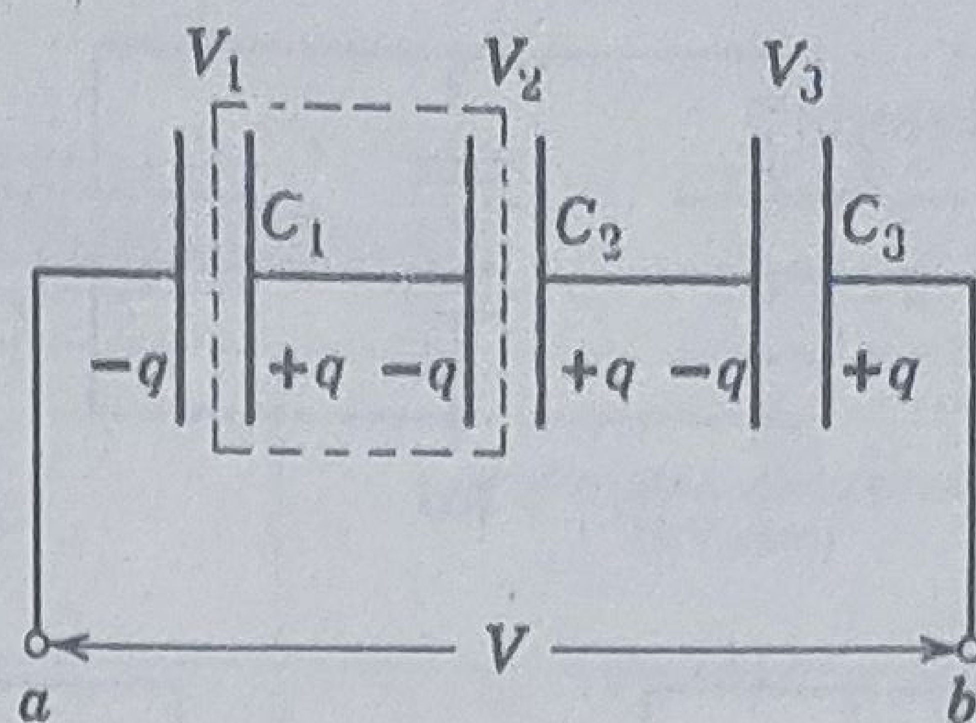
$$C=\frac{q}{V}=C_1+C_2+C_3$$

Acest rezultat poate fi extins cu uşurinţă la orice număr de condensatoare legate în paralel.

Exemplul 4. *Condensatoare legate în serie.* În figura 30-6 se arată trei condensatoare legate în serie. Care va fi capacitatea unui condensator echivalent acestui sistem (vezi exemplul 3).

Sarcina electrică de pe plăcile condensatoarelor legate în serie trebuie să fie toate egale $(-q)$. Acest lucru trebuie să fie aşa deoarece sarcina totală a regiunii

Figura 30-6. Exemplul 4. Trei condensatoare legate în serie.



închisă de linia punctată (fig. 30-6) trebuie să fie nulă; sarcina existentă pe aceste plăci înainte de a aplica tensiune la bornele a şi b era nulă, iar aplicarea ei va determina doar o separare a sarcinilor, sarcina *totală* rămînînd nulă. În afară de cazul în care unul din condensatoarele C_1 sau C_2 este străpuns, nici o posibilitate nu există pentru sarcina aflată în regiunea închisă prin linie punctată să o părăsească. Aplicînd relaţia $q=CV$ fiecărui condensator obţinem

$$V_1=\frac{q}{C_1}; \quad V_2=\frac{q}{C_2} \quad \text{şi} \quad V_3=\frac{q}{C_3},$$

Diferenţa de potenţial pentru condensatoarele în serie va fi

$$V=V_1+V_2+V_3=q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right);$$

Capacitatea echivalentă va fi

$$C=\frac{q}{V}=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$$

sau

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$$

Capacitatea echivalentă a condensatoarelor legate în serie este totdeauna mai mică ca cea mai mică dintre condensatoarele din serie.

30-3 Condensator plan cu dielectric

Relaţia 30-7 este valabilă doar pentru condensatoare plane în vid. Primul care a studiat efectul umplerii spaţiului dintre cele două plăci cu dielectric (de exemplu, mică sau ulei) a fost Michael Faraday în 1837. În cuvintele lui Faraday:

Problema poate fi pusă astfel: să presupunem că o placă metalică A electrizată este suspendată în aer, iar, paralel, simetric de o parte şi de alta se află alte două plăci B şi C identice cu prima, izolate electric; pe plăcile B şi C, placa A va induce sarcini egale. Dacă în această situaţie, un dielectric, altul decît aerul, de exemplu şerlac, este introdus între A şi C va fi oare inducţia aceeaşi în cele două regiuni? Va fi sau nu modificat raportul încărcărilor lui B şi C faţă de A în ciuda dielectricilor diferiţi aşezaţi între plăci?

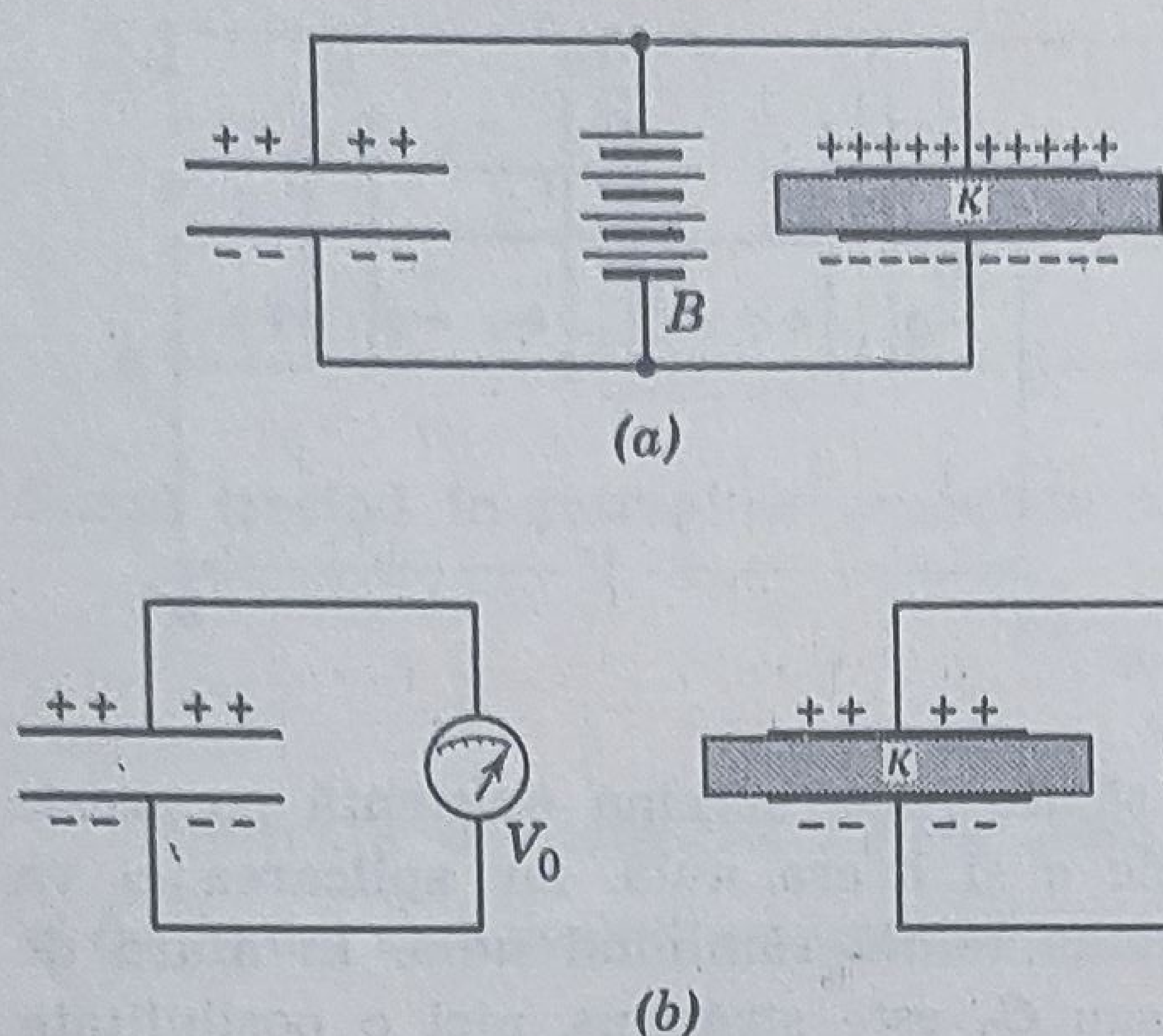


Figura 30-7. (a) Bateria *B* încarcă ambele condensatoare la aceeaşi diferenţă de potenţial; cea din dreapta posedă o sarcină mai mare. (b) Ambele condensatoare posedă aceeaşi sarcină electrică; cea din dreapta posedă o diferenţă de potenţial mai joasă, după cum indică şi instrumentul.

Faraday a răspuns la această întrebare construind două condensatoare identice unul conţinînd un dielectric oarecare pe cînd celălalt conţinea aer la presiune normală. Cînd ambele condensatoare erau încărcate la *aceeaşi diferenţă de potenţial*, el a constatat prin experienţă că *sarcina acumulată pe cel ce conţinea dielectricul era mai mare ca cea acumulată pe celălalt condensator* (fig. 30-7 a).

Farady a măsurat sarcina relativă de pe plăcile celor două condensatoare atingîndu-le cu o bilă metalică (prevăzută cu un mîner izolator) care lua de pe placă o sarcină proporţională cu sarcina ce o avea. Punea apoi această bilă în balanţa de torsiune a lui Coulomb şi măsura forţa de repulsie coulombiană faţă de o a doua bilă încărcată cu sarcină (luată ca referinţă).

Deoarece q este mai mare, pentru acelaşi V, în prezenţa dielectricului, rezultă din relaţia $C=q/V$ că *capacitatea condensatorului creşte dacă un dielectric se introduce între plăci*. Raportul în care creşte capacitatea condensatorului cu dielectric* faţă de cel fără dielectric, se numeşte *constantă dielectrică* k a materialului**; (vezi tabela 30-1).

În loc să păstrăm un potenţial constant pe plăcile condensatorului putem proceda şi altfel, păstrînd *aceeaşi sarcină* electrică pe plăci (fig. 30-7, b). Experienţa ne arată atunci că diferenţa de potenţial V_d dintre plăcile condensatorului din dreapta este mai mică ca cel pentru cel din stînga, cu factorul $1/k$, sau

$$V_d = \frac{V_0}{k}$$

Sîntem conduşi astfel din nou la concluzia că efectul dielectricului este de a creşte capacitatea cu factorul k.

---

* Presupunînd că dialectricul umple complet spaţiul dintre plăci.

** Constanta dielectrică k reprezintă constanta dielectrică relativă notată uneori şi cu ε_r, în comparaţie cu ε_0 — constanta dielectrică a vidului. $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ — denumindu-se, de obicei, constanta dielectrică a mediului. (N.T.)

Tabelul 30-1

PROPRIETĂȚILE CÎTORVA DIELECTRICI

Materialul	Constanta dielectrică	Rigiditatea dielectrică* (kV/mm)
Vid	1,00000	
Aer	1,00054	0,8
Apă	78	—
Hîrtie	3,5	14
Mică roșie	5,4	160
Chihlimbar	2,7	90
Porțelan	6,5	4
Sticlă de cuartz	3,8	8
Sticlă pirex	4,5	13
Bachelită	4,8	12
Polietilenă	2,3	50
Polistiren	2,6	25
Teflon	2,1	60
Neopren	6,9	12
Ulei de Pyranol	4,5	12
Bioxid de titan	100	6

* Reprezintă gradientul maxim de potențial ce poate exista în dielectric fără a se produce străpungerea lui. Dielectricii se folosesc uneori pentru a permite ca între două plăci conductoare să se poată aplica o diferență de potențial mai mare decît ar fi posibilă în aer.

Putem deci scrie pe baza rezultatelor experimentale capacitatea unui condensator plan sub forma

$$C = \frac{k\varepsilon_0 A}{d} \tag{30-8}$$

Ecuația 30-7 pentru vid devine relația dedusă pentru condensatorul plan în vid pentru care $k=1$. Experiența arată că capacitatea tuturor tipurilor de condensatoare este mărită cu factorul k dacă spațiul dintre plăci este umplut cu dielectric. Astfel capacitatea oricărui condensator poate fi scrisă sub forma

$$C = k\varepsilon_0 L$$

unde L depinde de forma lui geometrică și are dimensiunile unei lungimi. Pentru un condensator plan L este A/d (vezi ec. 30-7); pentru un condensator cilindric (vezi exemplul 2) este $2\pi l/\ln(b/a)$.

30-4 Dielectricii — punct de vedere atomic

Să încercăm să înțelegem din punct de vedere atomic ce se întîmplă cu un dielectric cînd este plasat în cîmp electric. Există două posibilități. Unii dielectrici au molecule care posedă moment dipolar electric

permanent, ca de exemplu apa. În astfel de materiale (numite polare) momentul electric dipolar $\vec{p}$ tinde să se alinieze pe direcţia cîmpului electric ca în figura 30-8 (vezi de asemenea paragraful 27-6). Gradul de aliniere al moleculelor nu va fi perfect din cauza agitaţiei termice dar va creşte o dată cu creşterea intensităţii cîmpului electric sau cu scăderea temperaturii.

Dar indiferent dacă moleculele au sau nu moment dipolar, ele vor obţine un astfel de moment prin *inducţie*, o dată cu introducerea lor în cîmp magnetic. În paragraful 29-5 am văzut că un cîmp electric tinde să separe sarcinile negative şi pozitive din atom sau moleculă. Acest *moment dipolar electric indus* există doar în prezenţa cîmpului electric. El este proporţional cu cîmpul electric (pentru intensităţi nu prea mari) şi are întotdeauna direcţia liniilor de cîmp ca în figura 29-12.

Să considerăm un condensator plan încărcat cu sarcină q şi neconectat la vreo baterie (vezi fig. 30-7 b), care va produce un cîmp electric intern uniform de intensitate $\vec{E}_0$ în care vom introduce dielectricul. Efectul global al alinierii şi al inducţiei va fi separarea centrului sarcinilor pozitive de cel al centrului sarcinilor negative. Dielectricul se va *polariza*, cu toate că luat ca un întreg va rămîne electric neutru, după cum sugerează fig. 30-9 b. Efectul net este încărcarea suprafeţei din dreapta a dielectricului cu sarcină pozitivă, iar a celei din stînga cu sarcină negativă; în volumul dielectricului nu apar sarcini suplimentare. Deoarece dielectricul rămîne neutru în ansamblu, *sarcina de suprafaţă indusă* pozitivă trebuie să fie egală în mărime cu cea negativă indusă. De notat că în acest proces, electronii din dielectric sînt deplasaţi de la poziţia lor de echilibru cu distanţe considerabil mai mici ca diametrul atomic.

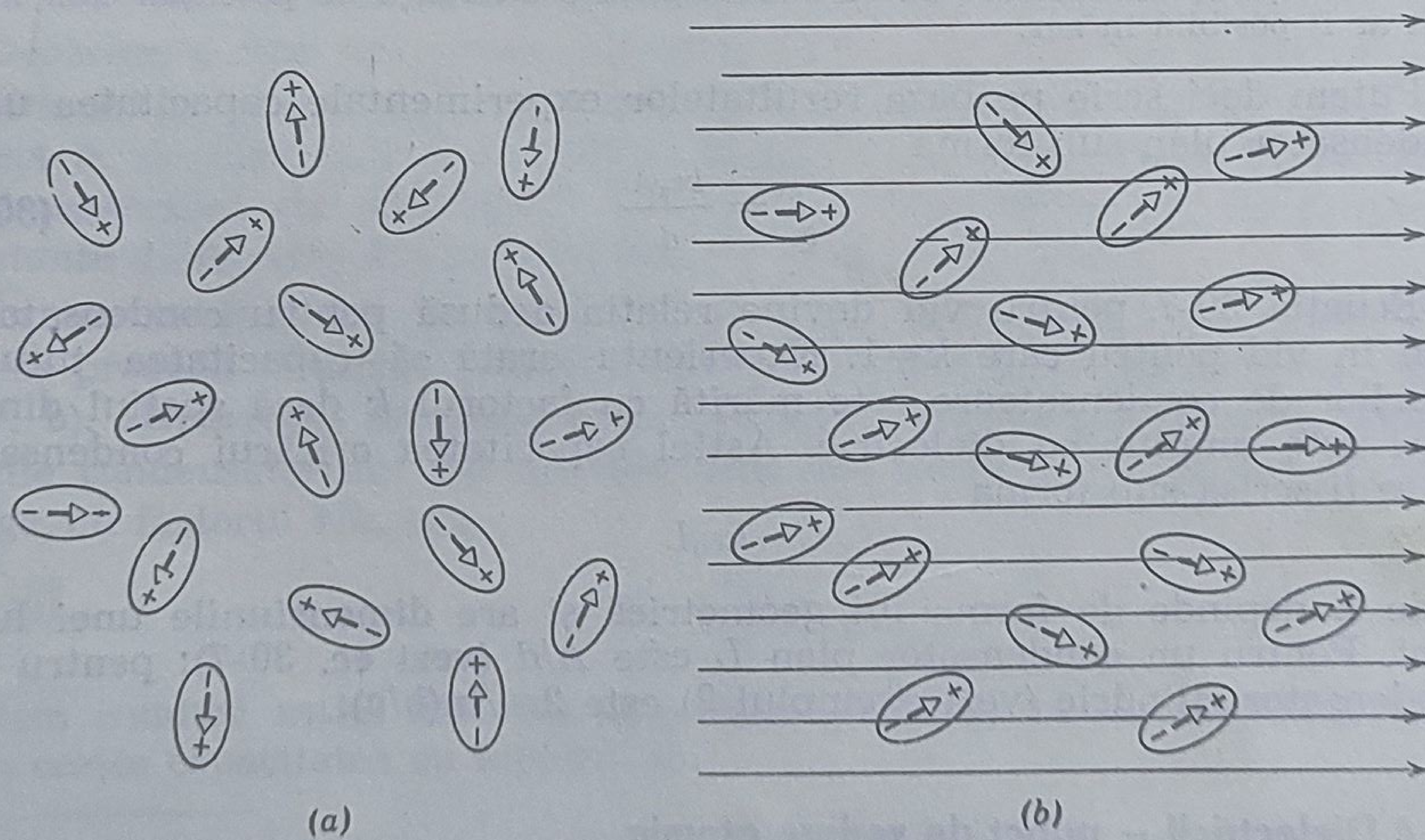


Figura 30-8. (a) În lipsa unui cîmp electric extern moleculele ce posedă momente electrice dipolare sînt orientate dezordonat. (b) Un cîmp electric exterior produce o orientare parţială a dipolilor. Agitaţia termică este cea care împiedică orientarea lor perfectă.

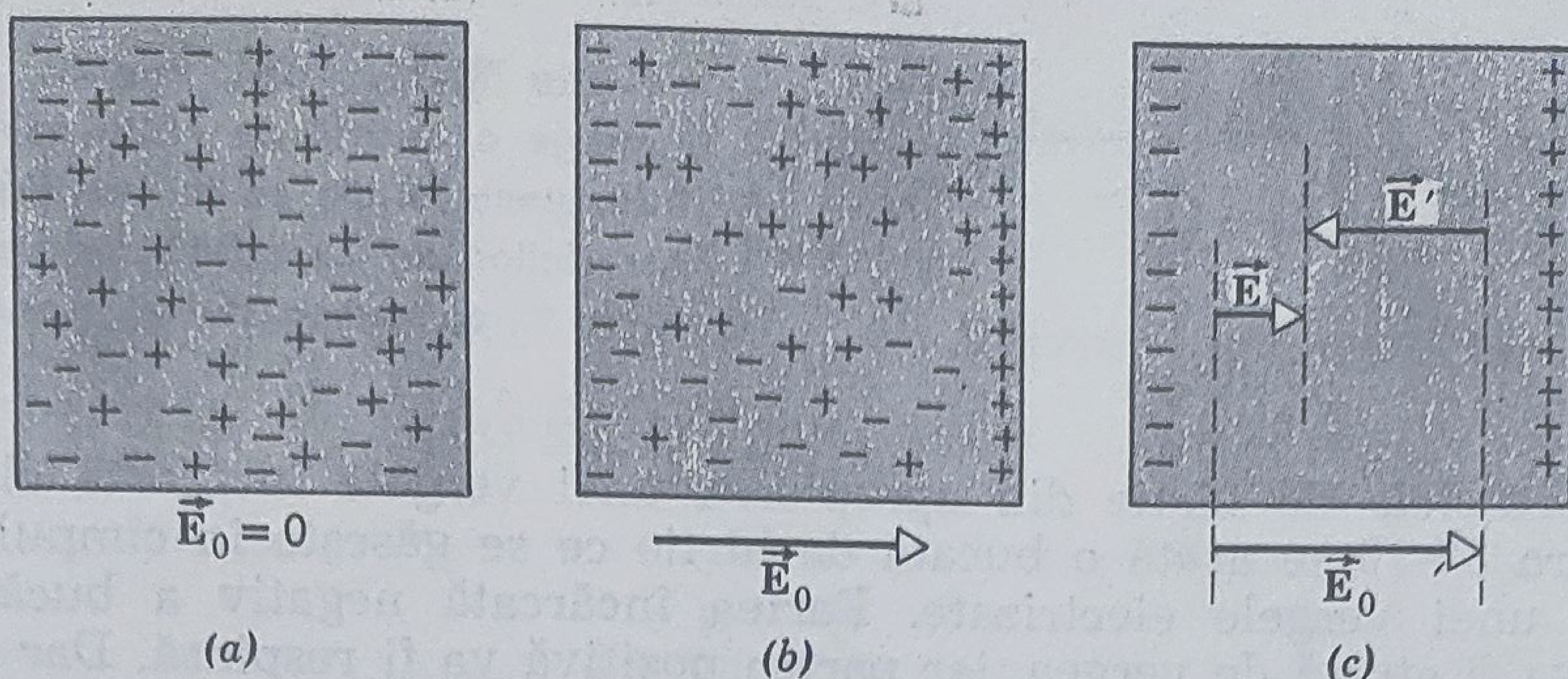


Figura 30-9. (a) O placă dielectrică în care se vede orientarea haotică a sarcinilor pozitive și negative. (b) Un cîmp electric exterior $\vec{E}_0$, obținut prin plasarea dielectricului între plăcile unui condensator plan (care nu este figurat aci), separă centrul sarcinilor pozitive de cel al sarcinilor negative, rezultînd o sarcină de suprafață. Cu toate acestea în *volumul* probei *nu* există o sarcină netă. (c) Sarcinile de suprafață produc un cîmp electric $\vec{E}'$, opus cîmpului extern $\vec{E}_0$ produs de sarcinile de pe plăcile condensatorului. Cîmpul rezultant $\vec{E}(=\vec{E}_0+\vec{E}')$ în dielectric este mai mic ca $\vec{E}_0$.

Nu există un transport de sarcină pe distanțe macroscopice cum are loc în cazul curenților ce trec prin conductor.

În fig. 30-9 *c* se poate vedea că sarcina superficială indusă va apare totdeauna astfel încît cîmpul electric creat *de el* ($\vec{E}'$) să se opună cîmpului electric extern $\vec{E}_0$. Cîmpul *rezultant* în dielectric $\vec{E}$ este suma vectorială a lui $\vec{E}_0$ și al lui $\vec{E}'$. Acest cîmp are aceeași direcție cu $\vec{E}_0$ dar este mai puțin intens. *Dacă un dielectric este așezat într-un cîmp electric, sarcina indusă pe suprafețe va tinde să micșoreze intensitatea cîmpului inițial.*

Această micșorare a intensității cîmpului electric se manifestă (fig. 30-7 b) prin reducerea diferenței de potențial dintre plăcile unui condensator încărcat izolat cînd se introduce un dielectric între plăci. Relația $V=Ed$ pentru condensatorul plan (vezi ec. 30-6) este valabilă indiferent de prezența sau absența dielectricului și arată că micșorarea lui V descrisă în fig. 30-7 b este legată direct de micșorarea lui E. Mai precis, dacă o placă dielectrică este introdusă între armăturile unui condensator plan, atunci

$$\frac{E_0}{E}=\frac{V_0}{V_d}=k \tag{30-9}$$

unde simbolurile expresiei din stînga se referă la figura 30-9, iar simbolurile V_o și V_d se referă la figura 30-7 b*.

Inducerea sarcinilor pe suprafață este explicația celui mai elementar fenomen de electricitate statică, și anume atracția pe care o su-

---

* Ecuația 30-9 nu este valabilă dacă bateria rămîne conectată în timp ce se introduce dielectricul. În acest caz V (și deci E) nu se poate modifica. În schimb, sarcina q de pe plăcile condensatorului va crește cu factorul k, așa cum se sugerează și în figura 30-7 a.

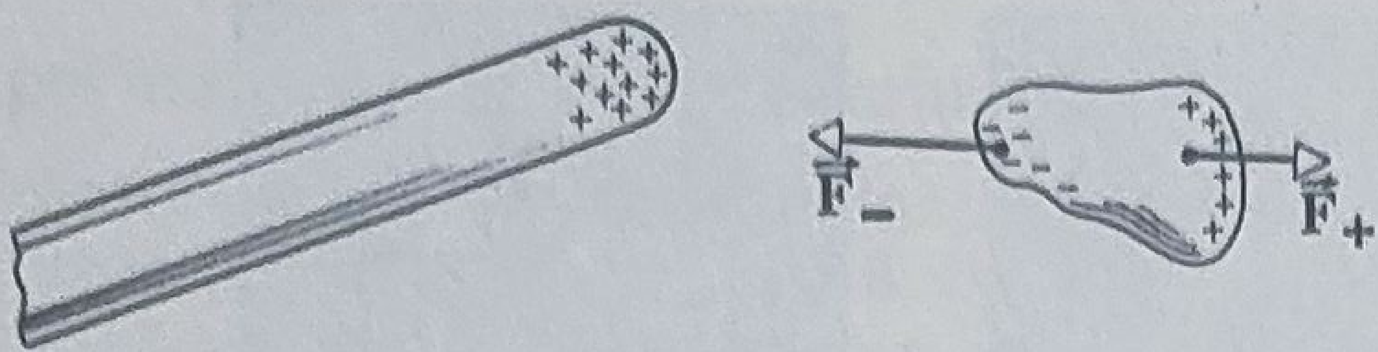


Figura 30-10. Un baston încărcat atrage o bucată de hîrtie neîncărcată deoarece forțele ce se exercită asupra sarcinilor de suprafață induse nu se compensează reciproc.

feră bucățelele de hîrtie din apropierea unei vergele încărcate electric. În figura 30-10 se arată o bucată de hîrtie ce se găsește în cîmpul electric al unei vergele electrizate. Partea încărcată negativ a bucății de hîrtie va fi atrasă de vergea, iar partea pozitivă va fi respinsă. Dar aceste două forțe nu au aceeași mărime deoarece partea negativă este mai apropiată de baston decît cea pozitivă. Efectul net este o atracție. Un corp dielectric, într-un cîmp electric *uniform* se va afla sub influența unei forțe totale nule.

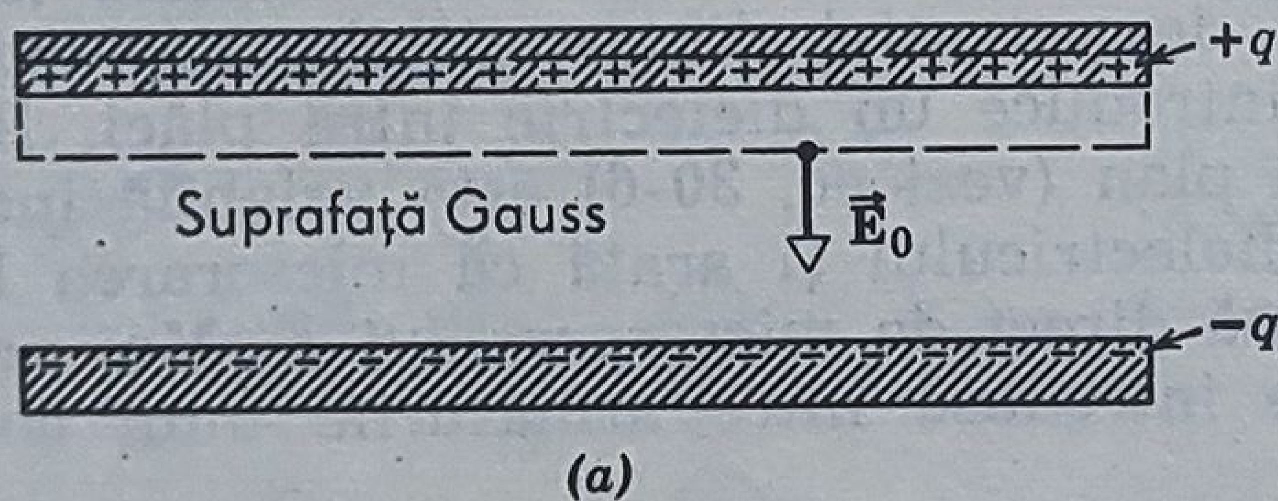
30-5 Dielectrici și teorema lui Gauss

Pînă acum folosirea teromei lui Gauss s-a restrîns la cazurile în care dielectricii lipseau. Să aplicăm acum această teoremă la un condensator plan umplut cu un dielectric de constantă dielectrică k.

Figura 30-11 arată condensatorul cu și fără dielectric. Facem presupunerea că aceeași sarcină q se găsește pe plăcile condensatorului cu și fără dielectric. Suprafața Gauss a fost dusă în același mod ca în figura 30-3.

Dacă nu avem dielectric (fig. 30-11 a), teorema lui Gauss (vezi relația 30-5) ne dă

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 A = q$$



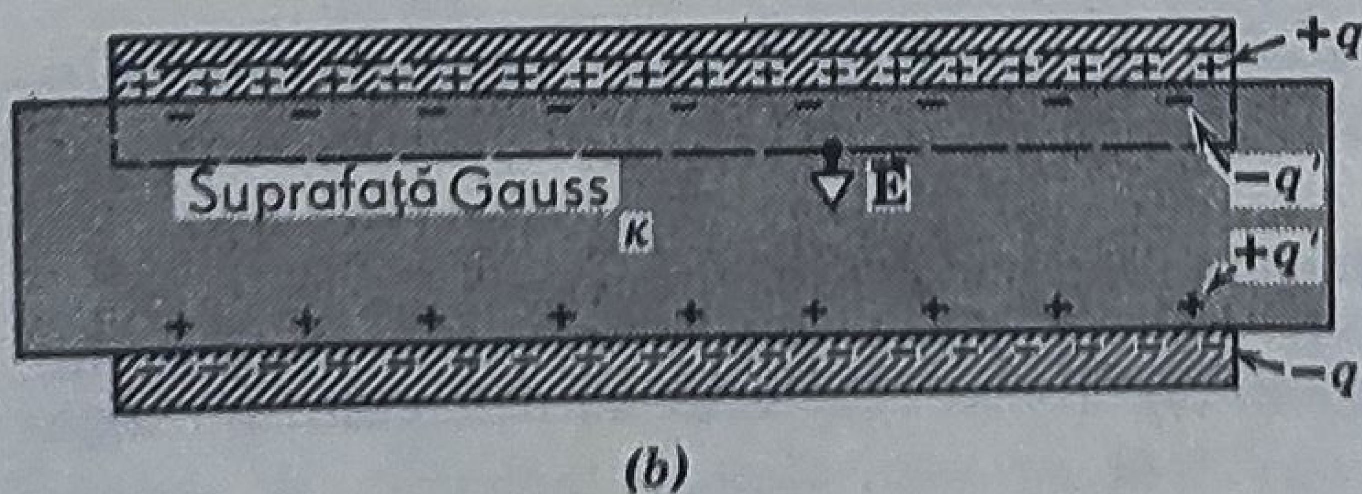


Figura 30-11. Un condensator plan (a) fără dielectric (b) cu dielectric. Sarcina q de pe plăci este aceeași în ambele cazuri.

sau

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \qquad (30\text{-}19)$$

Dacă dielectricul este prezent (fig. 30-11 b), teorema lui Gauss ne dă

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon_0 E A = q - q'$$

sau

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A},$$

în care $-q'$, este *sarcina superficială indusă*, care trebuie să fie distinsă de sarcina q, așa numita *sarcină liberă* de pe plăci. Aceste două sarcini, ce se găsesc împreună în interiorul suprafeței Gauss, sînt de semn opus: $q-q'$ fiind sarcina *netă* din interiorul suprafeței Gauss.

Relația 30-9 arată că în figura 30-11

$$E = \frac{E_0}{k}$$

Combinîndu-o cu relația 39-11, obținem

$$E = \frac{E_0}{k} = \frac{q}{k\varepsilon_0 A} \qquad (30\text{-}12)$$

Introducînd-o în relația 30-11, obținem

$$\frac{q}{k\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \qquad (30\text{-}13\ a)$$

sau

$$q' = q\left(1 - \frac{1}{k}\right). \qquad (30\text{-}13\ b)$$

Aceasta arată corect că totdeauna sarcina de suprafață q', indusă, este mai mică decît sarcină liberă q și este egală cu zero dacă dielectricul nu este prezent, adică dacă $k=1$.

Acum vom rescrie teorema lui Gauss pentru cazul din figura 30-11 b sub forma

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = q - q' \qquad (30\text{-}14)$$

$q-q'$ fiind de asemenea sarcina netă ce se găsește în interiorul suprafeței Gauss. Înlocuind în această relație pe q' din relația 30-13 b, obținem

$$\varepsilon_0 \oint k\vec{E} d\vec{S} = q \qquad (30\text{-}15)$$

Această relație importantă, dedusă pentru un condensator plan, este adevărată și în caz general și reprezintă modul în care teorema lui Gauss este dată atunci cînd sînt prezente medii dielectrice. Observați următoarele:

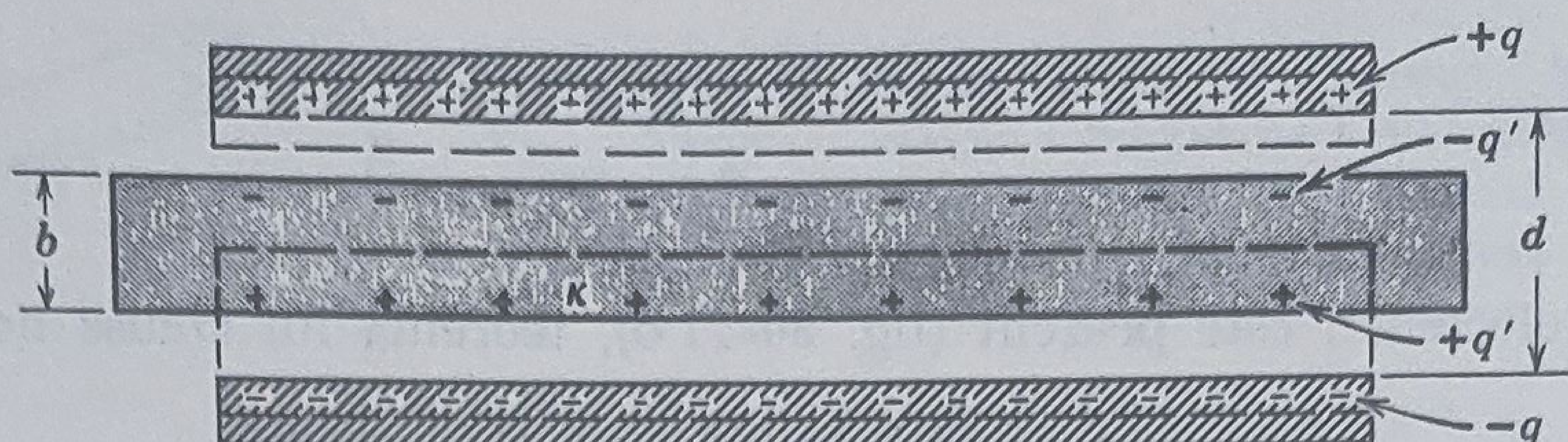


Figura 30-12. Exemplul 5. Un condensator plan ce conține o placă dielectrică.

1. Integrala de flux conține acum un factor k.

2. Sarcina q din interiorul suprafeței Gauss este *doar sarcina liberă.* Sarcina de suprafață indusă este lăsată de o parte în partea dreaptă a ecuației deoarece ea apare implicit prin intermediul constantei k din membrul stîng al ecuației. Ecuațiile 30-14 și 30-15 sînt formulări complet echivalente.

Exemplul 5. În fig. 30-12 se poate vedea o placă dielectrică de grosime b și constantă dielectrică k dispusă între armăturile unui condensator plan cu plăci de arie A și cu distanță d între ele. O diferență de potențial V_0 este aplicată în lipsa dielectricului. Apoi se deconectează bateria și se introduce dielectricul. Presupunînd că $A=100\ \text{cm}^2$, $d=1$ cm, $b=0{,}5$ cm, $k=7$ și $V_0=100$ V.

(*a*) Calculați capacitatea C_0 înainte de introducerea dielectricului.

Din ecuația 30-7, C_0 este $C_0=\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}=\dfrac{(8{,}9\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(10^{-2}\text{m}^2)}{10^{-2}\ \text{m}}=8{,}9\ \text{pF}$

(*b*) Calculați sarcina liberă q

Din ecuația 30-4.

$$q=C_0V_0=(8{,}9\times10^{-12}\ \text{F})(100\ \text{V})=8{,}9\times10^{-10}\ \text{C}.$$

Din cauza modului particular folosit pentru încărcarea condensatorului, sarcina nu se va modifica ca urmare a introducerii dielectricului. Cu totul altfel ar fi fost dacă bateria de încărcare *nu* ar fi fost deconectată.

(*c*) Calculați intensitatea cîmpului electric între plăci.

Folosind teorema lui Gauss în forma dată în ecuația 30-15 pentru o suprafață indicată în fig. 30-12 (placa superioară) obținem

$$\varepsilon_0 \oint k\vec{E}d\vec{S}=\varepsilon_0 E_0 A=q.$$

sau

$$E_0=\frac{q}{\varepsilon_0 A}=\frac{8{,}9\times10^{-10}\ \text{C}}{(8{,}9\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2)(10^{-2}\text{m}^2)}=1{,}0\times10^4\ \text{V/m}.$$

Observați că am luat aci $k=1$, deoarece suprafața considerată pentru calculul integralei de flux nu intersectează dielectricul. Observați de asemenea că E_0 rămîne neschimbat cînd introducem dielectricul; acest mod de a judeca nu ține cont în mod explicit de prezența dielectricului.

(*d*) Calculați intensitatea cîmpului electric în dielectric.

Aplicînd ecuaţia 30-15 suprafeţei Gauss din figura 30-12 (placa inferioară) obţinem

$$\varepsilon_0 \oint k\vec{E}d\vec{S} = \varepsilon_0 kEA = q$$

Observaţi că aci k apare deoarece suprafaţa intersectează dielectricul şi doar sarcina liberă q apare în partea stîngă a expresiei. Astfel avem:

$$E = \frac{q}{k\varepsilon_0 A} = \frac{E_0}{k} = \frac{1{,}0\times 10^4 \text{ V/m}}{7{,}0} = 0{,}14\times 10^4 \text{ V/m}$$

(e) Calculaţi diferenţa de potenţial dintre plăci.

Aplicînd ecuaţia 29-5 la un drum rectiliniu, perpendicular pe cele două plăci, inferioară i şi superioară s, avem

$$V = -\int^{s} \vec{E}d\vec{l} = -\int^{s} E \cos 180^\circ \, dl = \int^{s} E\, dl = E_0(d-b) + Eb.$$

Numeric

$$V = (1{,}0\times 10^4 \text{ V/m})\,(5\times 10^{-3} \text{ m}) + (0{,}14\times 10^4 \text{ V/m})\,(5\times 10^{-3}) = 57 \text{ V}.$$

Această diferenţă de potenţial este diferită de cea de 100 V aplicată iniţial; comparaţi cu figura 30-7 b.

(f) Calculaţi capacitatea condensatorului cu dielectricul introdus.

Din ecuaţia 30-4

$$C = \frac{q}{V} = \frac{8{,}9\times 10^{-10}\text{C}}{57V} = 16 \text{ pF}.$$

Cînd placa dielectrică se introduce, diferenţa de potenţial scade de la valoarea de 100 V la 57 V iar capacitatea creşte de la 8,9 la 16 pF, de 1,8 ori. Dacă dielectricul ar fi umplut tot spaţiul dintre armături, atunci capacitatea ar fi crescut de $k(=7)$ ori adică la 62 pF.

30-6 Trei vectori ai cîmpului electric

Pentru toate cazurile pe care le discutăm în această carte modul nostru de abordare al comportării dielectricilor în cîmpuri electrice este absolut suficient. Cu toate acestea, problemele pe care le discutăm, ca aceea a unor plăci dielectrice introduse perpendicular pe liniile unui cîmp uniform, sînt dintre cele simple. Pentru probleme mai complicate, cum ar fi aceea a determinării lui $\vec{E}$ în centrul unui dielectric elipsoidal plasat într-un cîmp electric (eventual neuniform) putem să ne uşurăm munca şi să mergem mai adînc în esenţa fenomenelor dacă vom folosi un alt formalism. Vom discuta despre acest formalism mai ales din cauză că cei ce vor urma un curs mai avansat de electromagnetism să fie cît de cît familiarizaţi cu aceste noţiuni.

Să rescriem relaţia 30-13 a, care se aplică condensatorilor plani cu dielectrici sub forma

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0\left(\frac{q}{k\varepsilon_0 A}\right) + \frac{q'}{A} \tag{30-16}$$

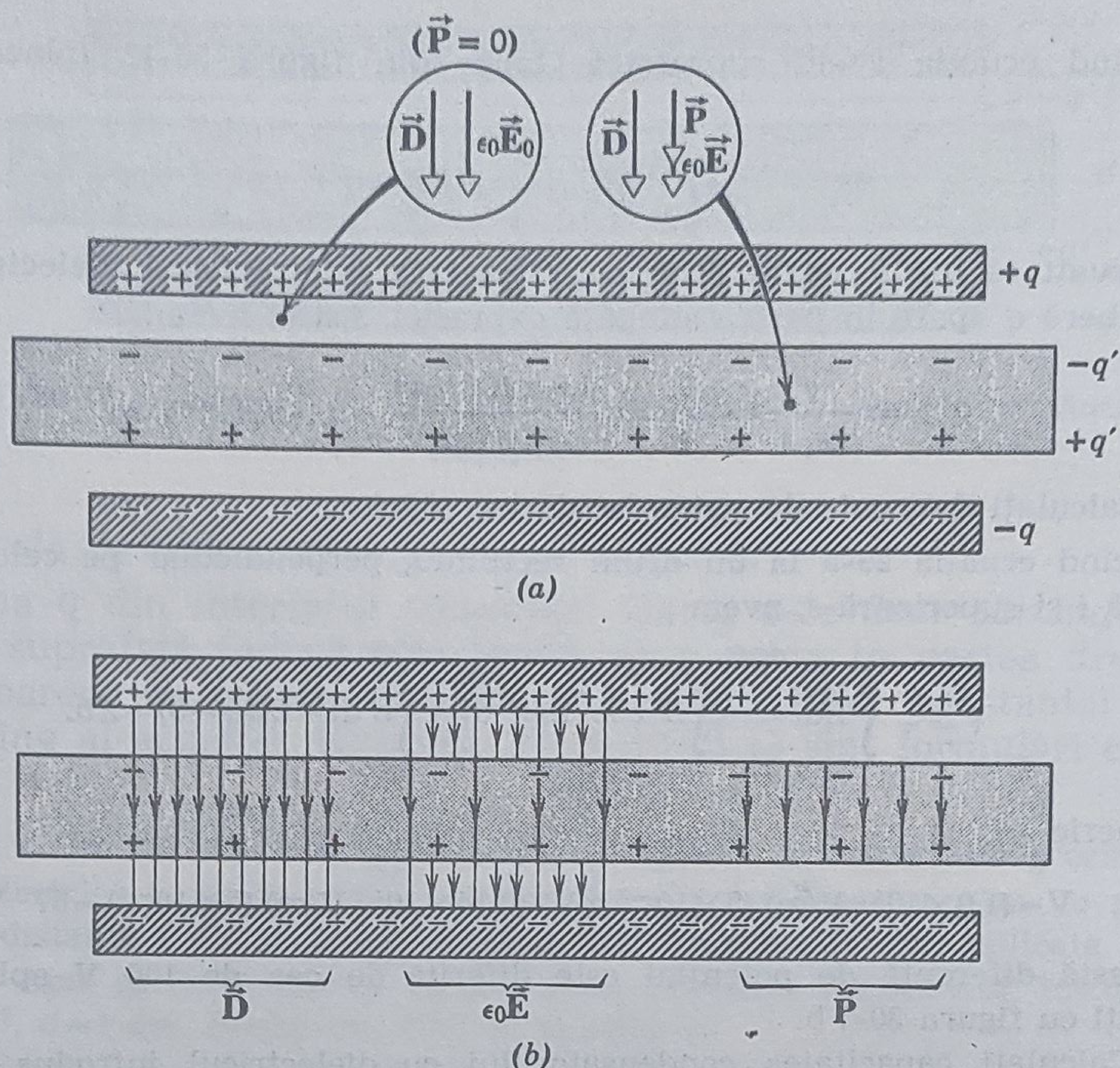


Figura 30-13. (a) Se indică, pentru un condensator plan, $\vec{D}$, $\epsilon_0\vec{E}$ și $\vec{P}$ în dielectric *(sus dreapta)* și în aer *(sus stînga).* (b) Sînt indicate schematic liniile de cîmp corespunzătoare lui $\vec{D}$ (sarcinile libere), $\epsilon_0\vec{E}$ (toate sarcinile) și $\vec{P}$ (sarcinile de polarizare).

Mărimea din paranteză (vezi relația 30-12) este tocmai intensitatea cîmpului E în dielectric. Ultimul termen din relația 30-16 reprezintă *densitatea de sarcină indusă pe suprafață.* O vom numi *polarizare electrică,* sau

$$P = \frac{q'}{A}. \tag{30-17}$$

Denumirea aceasta este proprie deoarece sarcina indusă q' apare doar dacă dielectricul este polarizat

Polarizarea electrică P poate fi definită într-un mod echivalent, înmulțind numărătorul și numitorul ecuației 30-17 cu d, grosimea plăcii dielectrice în figura 30-11.

$$P = \frac{q'd}{Ad}. \tag{30-18}$$

Numărătorul reprezintă produsul $q'd$ dintre mărimea sarcinilor induse (egale și de semn opus) pe cele două suprafețe și distanța ce le separă. Astfel că produsul reprezintă momentul dipolar al sarcinilor induse. Deoarece produsul de la numitor Ad, reprezintă volumul plăcii, rezultă că polarizarea electrică poate fi definită și ca moment dipolar indus în unitatea de volum a dielectricului. Această definiție ne sugerează că și polarizarea electrică ca și momentul dipolar, este un vector de mărime P. Direcția și sensul lui $\vec{P}$ este luat dinspre sarcinile negative induse spre cele pozitive, ca pentru orice dipol. În figura 30-13, care

reprezintă un condensator plan umplut pe jumătate cu un dielectric, vectorul $\vec{P}$ este îndreptat în jos.

Putem acum rescrie ecuaţia 30-16 sub forma

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0 E + P \tag{30-19}$$

Mărimea din partea dreaptă a relaţiei apare atît de des în problemele de electrostatică încît a primit o denumire specială *inducţie electrică D*

$$D = \varepsilon_0 E + P \tag{30-20 a}$$

în care

$$D = \frac{q}{A} \tag{30-20 b}$$

Deoarece $\vec{E}$ şi $\vec{P}$ sînt vectori, şi $\vec{D}$ trebuie să fie vector astfel că relaţia pentru cazul cel mai general va fi

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{30-21}$$

În figura 30-13 toţi cei trei vectori sînt îndreptaţi în jos şi toţi au mărimi constante în fiecare punct al dielectricului (şi de asemenea în oricare punct al stratului de aer dintre plăci) astfel că exprimarea vectorială a ecuaţiei 30-21 nu reprezintă ceva deosebit. Dar în probleme mai complicate $\vec{E}$, $\vec{P}$ şi $\vec{D}$ pot să varieze în mărime şi direcţie de la punct la punct.

Din definiţia lor putem extrage următoarele:

1. $\vec{D}$ (vezi relaţia 30-20 b) este legat doar de *sarcina liberă*. Putem reprezenta cîmpul vectorial $\vec{D}$ prin linii ale lui $\vec{D}$, la fel cum am reprezentat cîmpul $\vec{E}$ prin linii de cîmp. În figura 30-13 b se vede că liniile lui $\vec{D}$ încep şi se termină pe sarcinile libere.
2. $\vec{P}$ (vezi relaţia 30-17) este legat doar de *sarcina de polarizare*. De asemenea se poate reprezenta acest cîmp vectorial prin linii de cîmp. În figura 30-13 b se vede că liniile lui $\vec{P}$ încep şi se sfîrşesc pe sarcinile de polarizare.
3. $\vec{E}$ este legat de *totalitatea sarcinilor* prezente fie ele libere sau de polarizare. Aşa cum se vede în figura. 30-13 b, liniile lui $\vec{E}$ reflectă prezenţa ambelor tipuri de sarcini. Observaţi că (ecuaţiile 30-17 şi 30-20 b) unităţile de măsură ale lui $\vec{P}$ şi $\vec{D}$ (C/m^2) diferă de cea a lui $\vec{E}$ (N/C).

Vectorul cîmp electric $\vec{E}$, care determină forţa ce acţionează asupra unei sarcini de probă pusă în cîmp, rămîne totuşi, mărimea fundamentală. Vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ sînt vectori auxiliari, folositori în cazurile în care problemele de rezolvat sînt mult mai complexe ca cea din figura 30-13.

Vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ pot fi exprimaţi în funcţie de $\vec{E}$. În acest scop, relaţia convenabilă de pornire este identitatea:

$$\frac{q}{A} = k\,\varepsilon_0 \left(\frac{q}{k\varepsilon_0\, A}\right)$$

Comparînd cu ecuaţiile 30-12 şi 30-20 b şi trecînd la expresii vectoriale putem scrie

$$\vec{D} = k\varepsilon_0 \vec{E} \tag{30-22}$$

Putem de asemenea scrie polarizarea (vezi ecuaţiile 30-17 şi 30-13 b) ca

$$P=\frac{q'}{A}=\frac{q}{A}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

Deoarece $q/A=D$, putem scrie, folosind ecuaţia 30-22 şi trecînd la forma vectorială

$$\vec{P}=\varepsilon_0(k-1)\vec{E} \tag{30-23}$$

Acest lucru ne arată că în vid ($k=1$) vectorul de polarizare $\vec{P}$ este zero*. Ecuaţiile 30-22 şi 30-23 arată că în materiale izotrope pentru care constanta dielectrică k are o singură valoare, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ au aceeaşi direcţie cu $\vec{E}$, într-un punct dat.

Definiţia dată de ecuaţia 30-22 pentru $\vec{D}$ ne permite să scriem ecuaţia 30-15 astfel încît teorema lui Gauss în prezenţa dielectricilor are forma simplă

$$\oint \vec{D}d\vec{S}=q \tag{30-24}$$

unde, ca înainte, q reprezintă doar sarcinile libere, sarcinile de suprafaţă induse nefiind luate în consideraţie.

Exemplul 6. Calculaţi pe $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ folosind datele din exemplul 5 şi figura 30-13: (a) în dielectric şi (b) în aer.

(a) Cîmpul electric în dielectric a fost calculat în exemplul 5: $1{,}43\cdot10^3$ V/m.

$$D=k\varepsilon_0E=(7{,}0)(8{,}9\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2})(1{,}43\times10^3\ \mathrm{V/m})=8{,}9\times10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}.$$

Din ecuaţia 30-22,

$$D=k\varepsilon_0E=(7{,}0)(8{,}9\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(1{,}43\times10^3\ \mathrm{V/m})=8{,}9\times10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

şi din ecuaţia 30-23

$$P=\varepsilon_0(k-1)E=(8{,}9\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})\ (7{,}0\text{-}1)\ (1{,}43\times10^3\ \mathrm{V/m})=7{,}5\times10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}.$$

(b) Cîmpul electric E_0 în aer este calculat în exemplul 5: $1{,}00\cdot10^4$ V/m. Din ecuaţia 30-22.

$$D_0=k\varepsilon_0E_0=(1)(8{,}9\times10^{-12}\ \mathrm{C/N\cdot m^2})(1{,}00\times10^4\ \mathrm{V/m})=8{,}9\times10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

şi din ecuaţia 30-23, ţinînd cont că $k=1$ în aer:

$$P_0=\varepsilon_0(k-1)E_0=0.$$

Observaţi că $\vec{P}$ se anulează în afara dielectricului, $\vec{D}$ are aceeaşi valoare în dielectric şi în aer, iar $\vec{E}$ are valori diferite în dielectric şi în spaţiul liber. Studentul poate să verifice că ecuaţia 30-21 ($\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$) este corectă atît în aer cît şi în dielectric.

---

*Unele substanţe ceroase, polarizate în stare topită, rămîn într-o stare de polarizare permanentă după solidificare, chiar dacă cîmpul extern polarizant este îndepărtat. *Electreţii* produşi în acest fel, reprezintă analogul electrostatic al magneţilor permanenţi prin faptul că posedă un moment dipolar electric permanent. Substanţele din care se produc electreţii se numesc *feroelectrice*. Electreţii nu ascultă de ecuaţia 30-23 deoarece au o valoare nenulă a lui $\vec{P}$ chiar şi cînd $\vec{E}=0$.

Tabela 30-2

CEI TREI VECTORI ELECTRICI

Numele	Simbolul	Legat	Condiția la suprafață
Intensitatea cîmpului electric	$\vec{E}$	de toate sarcinile	Componentă tangențială continuă
Deplasarea electrică	$\vec{D}$	doar de sarcinile libere	Componentă normală continuă
Polarizarea (momentul dipolar al unității de volum)	$\vec{P}$	doar de sarcinile de polarizare	Se anulează în vid
Ecuația de definiție pentru $\vec{E}$		$\vec{F}=q\vec{E}$	Ecuația 27-2
Relația generală dintre cei trei vectori		$\vec{\oint}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	Ecuația 30-21
Teorema lui Gauss în prezența mediilor dielectrice		$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=q$ (q — doar sarcina liberă)	Ecuația 30-24
Relații empirice pentru unele materiale dielectrice*		$\vec{D}=k\varepsilon_0\vec{E}$ $\vec{P}=(k-1)\,\varepsilon_0\vec{E}$	Ecuația 30-22 Ecuația 30-23

* Valabile în general, cu k independent de $\vec{E}$, cu excepția unor tipuri de materiale denumite *feroelectrice;* vezi nota de picioar de la pagina 118.

Se poate arăta, folosind ecuațiile lui Maxwell, că indiferent de complexitatea problemei, componenta *normală* a lui $\vec{D}$ la suprafața dielectricului are aceeași valoare pe fiecare din fețele suprafeței. În problema aceasta chiar $\vec{D}$ este normal la suprafață neexistînd astfel decît componenta normală la suprafață. Se poate de asemenea arăta că componenta *tangențială* la suprafața dielectricului are aceleiași valori pe fiecare parte a suprafeței. Aceste *condiții la suprafață*, ca cele discutate pentru $\vec{D}$, sînt banale pentru această problemă, ambele componente tangențiale fiind nule. În probleme mai complicate aceste condiții la suprafață pentru $\vec{D}$ și $\vec{E}$ sînt foarte importante. În tabelul 30.2 se sumează proprietățile vectorilor electrici $\vec{E}$, $\vec{D}$ și $\vec{P}$.

30-7 Energia cîmpului electric

În paragraful 29-6 am văzut că pentru orice configuraţie de sarcini există o *energie potenţială electrică* U, egală cu lucrul mecanic W (ce poate fi pozitiv sau negativ), necesar pentru a obţine configuraţia dată, aducînd componentele individuale ale sale de la infinit, unde erau la momentul iniţial. Această energie potenţială ne aminteşte de energia potenţială într-un arc comprimat sau de energia potenţială gravitaţională, de exemplu, în sistemul Pămînt—Lună.

Ca exemplu simplu se poate da lucrul mecanic necesar pentru a separa două corpuri cu sarcină egală şi de semn contrar. Prin aceasta energia sistemului se modifică şi ea se poate elibera dacă permitem corpurilor încărcate să revină la distanţă anterioară. În mod asemănător, energia unui condensator creşte cînd se încarcă. Se acumulează în el o energie potenţială electrică U egală cu lucrul mecanic W necesar pentru a-l încărca. Această energie este cedată dacă permitem condensatorului să se descarce. Putem să ne imaginăm efectuarea acestui lucru de încărcare presupunînd că un agent extern duce electronii de pe placa pozitivă pe cea negativă, realizînd separarea sarcinilor, în mod normal acest lucru de încărcare este efectuat de către baterie, pe seama energiei chimice acumulate în ea.

Să presupunem că la un moment dat t, sarcina $q'(t)$ a fost transferată de pe o placă pe alta. Diferenţa de potenţial $V(t)$ dintre plăci va fi, la acest moment, $q'(t)/C$. Dacă o mică sarcină dq' se va transforma ulterior, va fi nevoie de un lucru mecanic suplimentar

$$dW = V dq = \left(\frac{q'}{C}\right) dq'.$$

Dacă acest proces continuă, atunci pentru a transfera sarcina totală q, va fi nevoie de un lucru mecanic total:

$$W = \int dW = \int_0^2 \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \tag{30-25}$$

Din relaţia $q = CV$ putem de asemenea să scriem

$$W(=U) = \frac{1}{2} CV^2 \tag{30-26}$$

Este normal să presupunem că energia acumulată în condensator să fie localizată în cîmpul electric. De exemplu pe măsură ce q sau V din ecuaţiile 30-25 şi 30-26 cresc, creşte şi intensitatea cîmpului electric E; cînd q şi V sînt zero, şi E este zero.

Într-un condensator plan, cîmpul electric are aceeaşi valoare în orice punct dintre plăci, dacă neglijăm efectele de margine. Astfel *densitatea de energie* u, ce reprezintă energia acumulată în unitate de volum, va trebui să fie de asemenea uniformă; u (vezi ecuaţia 30-26) este dat de

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} CV^2}{Ad},$$

unde Ad este volumul spațiului dintre plăci. Introducînd relația $C = k\varepsilon_0 A/d$ (ecuația 30-8) obținem

$$u = \frac{k\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2,$$

Deoarece V/d este intensitatea cîmpului electric E,

$$u = \frac{1}{2}\, k\varepsilon_0 E^2 \tag{30-27}$$

Cu toate că această relație a fost dedusă pentru cazul particular al condensatorului plan, ea este general valabilă. *Dacă un cîmp electric $\vec{E}$ există în fiecare punct din spațiu, atunci putem să privim acestea ca locuri de acumulare a energiei, cu densitatea de volum $\frac{1}{2}\, k\, \varepsilon_0\, E^2$.*

Exemplul 7. Un condensator C_1 este încărcat la o diferență de potențial V_0. Bateria de încărcare este apoi îndepărtată iar condensatorul se va conecta ca în figura 30-14, la un condensator neîncărcat C_2.

(a) care va fi diferența de potențial V la bornele acestui sistem.

Sarcina totală inițială, q_0, se va răspîndi acum pe armăturile celor două condensatoare. Astfel

$$q_0 = q_1 + q_2$$

Folosind relația $q = CV$ pentru fiecare din termenii egalității anterioare obținem

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V$$

sau

$$V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Această concluzie ne arată că putem determina, prin această metodă, capacitatea necunoscută a unui condensator (să zicem C_2) în funcție de una cunoscută.

(b) Care este energia acumulată înainte și după ce întrerupătorul din figura 30-14 este închis?

Energia inițială acumulată este

$$U_0 = \frac{1}{2}\, C_1 V_0^2$$

Energia finală acumulată este

$$U = \frac{1}{2}\, C_1 V^2 + \frac{1}{2}\, C_2 V^2 = \frac{1}{2}\,(C_1 + C_2)\left(\frac{V_0 C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) U_0.$$

Astfel U este mai mic ca U_0! Energia „lipsă" este de fapt consumată sub formă de căldură în conductorii prin care sarcinile au trecut.

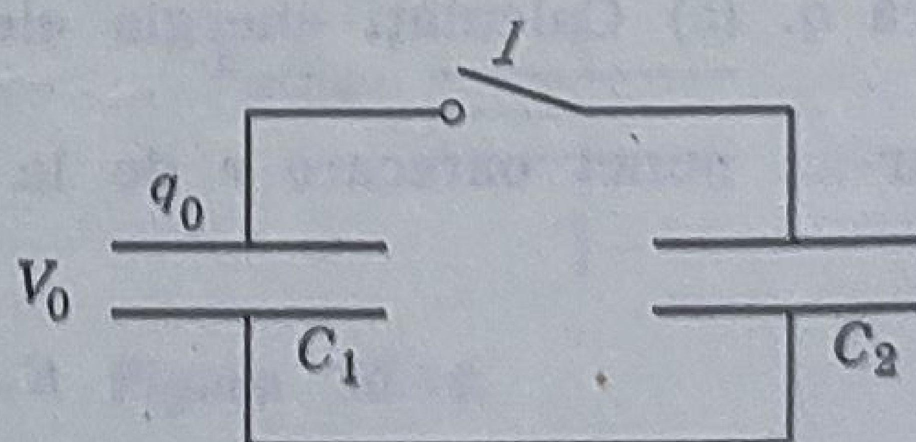


Figura 30-14. Exemplul 7. C_1 este încărcat și apoi legat cu C_2 închizînd întrerupătorul I.

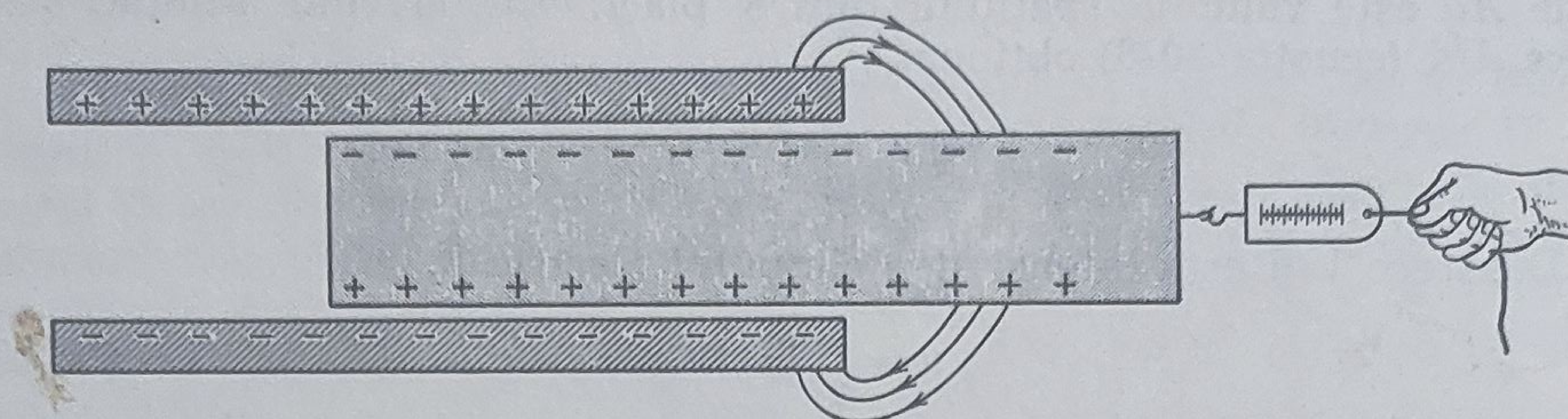


Figura 30-15. Cînd introducem o placă dielectrică într-un condensator încărcat, forțele ce apar tind să tragă dielectricul în interior.

Exemplul 8. Un condensator plan are plăci de arie A, la distanța d una de alta. Plăcile se încarcă la diferența de potențial V_0 cu ajutorul unei baterii. Apoi bateria se deconectează și între plăci se introduce o placă dielectrică de grosime d. Calculați energia înmagazinată înainte și după introducerea dielectricului și comparați-le.

Energia U_0 înainte de introducerea dielectricului a fost

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2.$$

După introducere, avem

$$C = k\,C_0 \qquad \text{și} \qquad V = V_0/k$$

și astfel

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} kC_0 \left(\frac{V_0}{k}\right)^2 = \frac{1}{k} U_0.$$

Energia după introducerea dielectricului este mai *mică* cu factorul $1/k$.

Energia „lipsă“ se găsește la persoana care a introdus dielectricul. Dielectricul va fi „supt“ de către condensator iar persoana va fi nevoită să încetinească (să frîneze) mișcarea dacă va voi să nu fie accelerată. Aceasta înseamnă că ea va fi obligată să efectueze un lucru mecanic negativ, sau altfel, condensatorul plus dielectricul vor efectua un lucru mecanic pozitiv pe seama opoziției persoanei. Acest lucru mecanic pozitiv este

$$W = U_0 - U = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Figura 30-15 arată cum apare această forță, ca rezultat al atracției dintre sarcinile libere de pe placă și a celor induse de pe suprafața dielectricului atunci cînd este introdus între plăci.

Exemplul 9. O sferă conductoare de rază R, în vid, este încărcată cu o sarcină electrică q. (a) Calculați energia electrostatică înmagazinată în spațiul din jurul sferei.

Într-un punct oarecare r de la centrul sferei (presupunîndu-se $r > R$) E este dat de

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Densitatea de energie la distanța r de sferă se poate obține din ecuația 30-27, punînd $k=1$.

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}.$$

Energia dU ce se găsește într-o pătură sferică de raze r și $r+dr$ este

$$dU=(4\pi r^2)(dr)u=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2},$$

unde $(4\pi r^2)dr$ este volumul păturii sferice. Energia totală U se obține prin integrare

$$U=\int dU=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Observați că această relație rezultă imediat din ecuația 30-25 ($U=q^2/2C$) unde C (vezi pag. 120) este capacitatea ($=4\pi\varepsilon_0 R$) unei sfere de rază R.

(b) Care este raza R_0 a unei suprafețe sferice astfel încît jumătate din energia înmagazinată să se găsească în interiorul suprafeței?

În ecuația obținută anterior vom pune

$$\frac{1}{2}U=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}$$

sau

$$\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right),$$

care conduce la

$$R_0=2R.$$

Întrebări

1. Un condensator este legat la o baterie (a). De ce cele două plăci se vor încărca cu sarcini egale în mărime? (b) Este acest lucru adevărat chiar dacă plăcile au dimensiuni diferite?

2. Poate să existe o diferență de potențial între două conductoare alăturate care sînt încărcate fiecare cu aceeași cantitate de sarcină pozitivă?

3. Relația $\sigma\sim 1/R$ sugerează că sarcinile plasate pe un conductor izolate se concentrează pe vîrfuri și fug de suprafețele plane unde $R=\infty$. Nu este oare o contradicție între cele spuse aci și cu faptul că în figura 30-3 sarcinile se găsesc pe suprafețele plane ale celor două plăci.

4. O foaie de aluminiu de grosime neglijabilă se așază între plăcile unui condensator ca în figura 30-16. Ce efect va avea această foaie asupra capacității dacă (a) foaia este izolată electric, și (b) dacă foaia este legată la placa superioară.

5. Discutați asemănările și deosebirile ce există atunci cînd (a) o placă dielectrică și (b) o placă conductoare se introduce între armăturile unui condensator plan. Presupuneți că grosimea plăcilor este jumătate din distanța dintre armăturile condensatorului.

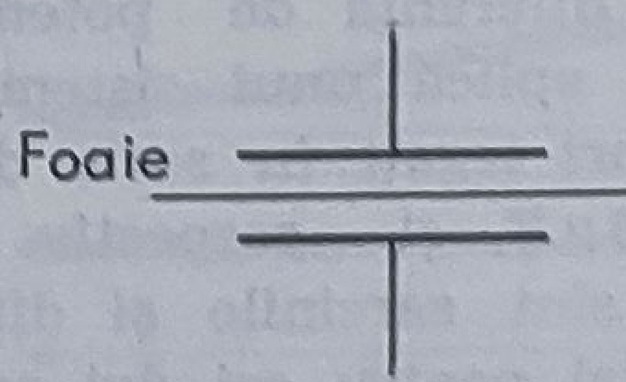


Figura 30-16.

6. Un condensator plan cu dielectric ulei a fost proiectat să aibă o capacitate C și să lucreze în condiții de siguranță la o diferență de potențial mai mică sau egală cu V_m peste care el se străpunge. Cu toate acestea, proiectantul a greșit și astfel condensatorul se străpunge din cînd în cînd. Cum trebuie reproiectat condensatorul ca să avem același C și V_m, folosind același dielectric?

7. Ce părere aveți, substanțele care conțin molecule cu moment dipolar electric permanent, vor avea constantă dielectrică ce depinde de temperatură?

8. La ce distanță estimați că se separă centrul sarcinilor pozitive de centrul sarcinilor negative într-o situație ca cea din figura 30-9, *b*? Se cere doar o estimare intuitivă.

9. Pentru o diferență de potențial dată o capacitate se încarcă cu mai multă sau mai puțină sarcină atunci cînd are un dielectric între armături în comparație cu cazul cînd nu are dielectric (vid)? Explicați răspunsul într-o interpretare microscopică.

10. O sferă conductoare izolată se încarcă pozitiv. Masa ei va crește, va scădea sau va rămîne aceeași?

11. O placă dielectrică se introduce la un capăt al unui condensator plan încărcat (armăturile fiind orizontale și bateria de încărcare, deconectată) și apoi este lăsat liber. Descrieți ce se întîmplă? Neglijați frecarea.

12. Un condensator se încarcă de la o baterie, care este apoi deconectată. Apoi, o placă dielectrică se introduce între armături. Descrieți calitativ ce se va întîmpla cu sarcina, capacitatea, diferența de potențial, intensitatea cîmpului electric și energia înmagazinată.

13. În timp ce un condensator rămîne conectat la baterie, o placă dielectrică se introduce între armăturile unui condensator. Descrieți calitativ ce se va întîmpla cu sarcina, capacitatea, diferența de potențial, intensitatea cîmpului electric și energia înmagazinată. Este necesar să se efectueze un lucru mecanic pentru a introduce dielectricul?

14. Două condensatoare identice sînt conectate la o baterie ca în figura 30-17. O placă dielectrică se introduce între plăcile unui condensator, bateria rămînînd conectată. Descrieți calitativ ce se întîmplă cu sarcina, capacitatea, diferența de potențial, intensitatea cîmpului electric și energia înmagazinată în fiecare condensator.

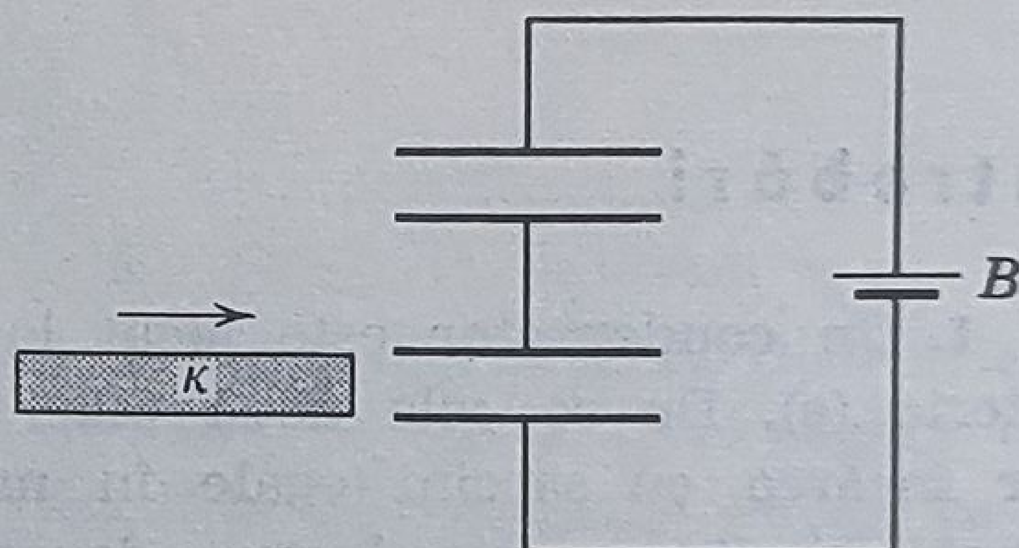


Figura 30-17.

15. Arătați că constanta dielectrică a unui conductor poate fi considerată infinit de mare.

Probleme

1. O diferență de potențial de 300 V se aplică unui sistem de doi condensatori legați în serie de capacități 2,0 μF și respectiv 8,0 μF. (a) Care sînt sarcinile și diferențele de potențial pentru cei doi condensatori? (b) Condensatorii încărcați sînt reconectați prin legarea lor în paralel, placa pozitivă cu cea pozitivă și placa negativă cu cea negativă, fără a se aplica o diferență de potențial exterioară. Care vor fi sarcinile și diferențele de potențial pentru fiecare condensator? (c) Condensatorii încăr-

caţi din punctul (a) sînt reconectaţi legîndu-se plăcile de semn opus între ele. Care sînt sarcinile şi diferenţele de potenţial pentru fiecare capacitate în parte?

2. Calculaţi capacitatea Pămîntului, considerîndu-l ca un conductor sferic de rază 6 400 km.

3. Un condensator de 100 pF este încărcat la o diferenţă de potenţial de 50 V, bateria de încărcare fiind apoi deconectată. Condensatorul astfel încărcat se leagă la un alt condensator, ca în figura 30-14. Care este capacitatea celui de-al doilea condensator, dacă după conectare, diferenţa de potenţial scade la 35 V.

4. Dacă din ecuaţia 30-7 îl scoatem pe ε_0 vedem că unitatea S.I. pentru el este F/m. Arătaţi că această unitate este echivalentă cu cea obţinută anterior pentru ε_0 şi anume $C^2/N \cdot m^2$.

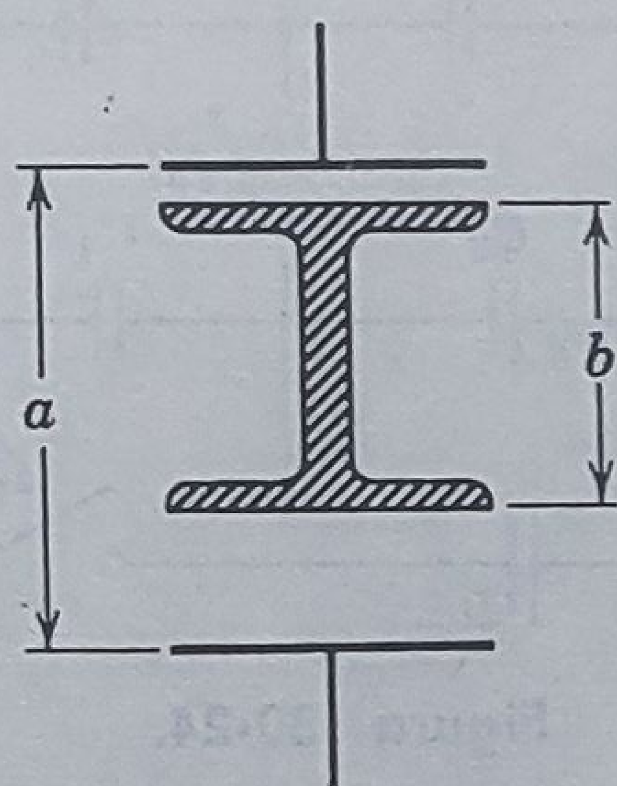


Figura 30-18.

5. În figura 30-18 se pot vedea doi condensatori legaţi în serie, porţiunea centrală, rigidă, de lungime b putînd fi deplasată pe verticală. Arătaţi că capacitatea echivalentă a acestui sistem este independentă de poziţia porţiunii centrale şi este dată de relaţia

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{a - b}$$

6. În figura 30-19 se arată un condensator variabil cu aer folosit pentru acordul aparatelor de radio. Plăcile sînt legate între ele alternativ, unul dintre grupurile de plăci fiind fixe

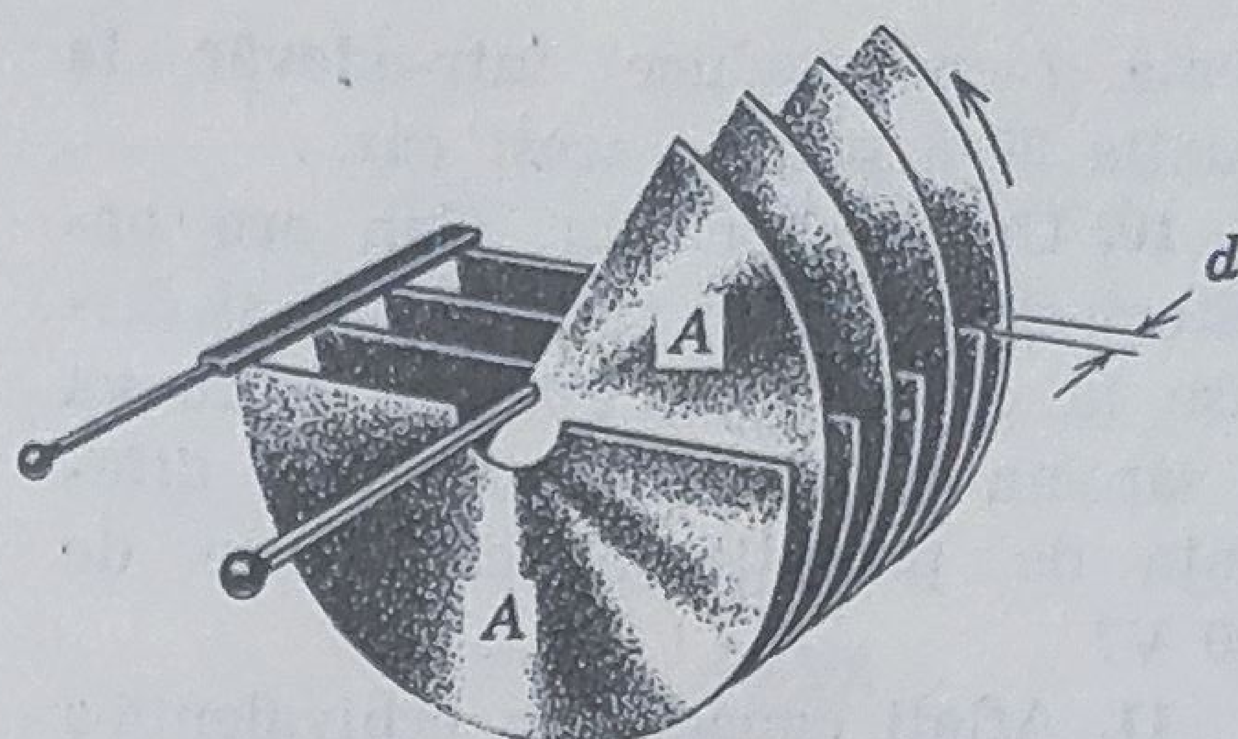


Figura 30-19.

iar celălalt grup putînd fi rotit. Considerăm un grup de n plăci de polarităţi alternante, fiecare placă avînd aria A şi fiind separate prin distanţa d, de placa vecină. Arătaţi că capacitatea maximă a sistemului va fi

$$C = \frac{(n-1)\varepsilon_0 A}{d}$$

7. Două sfere concentrice de raze a şi b, cu $b>a$, alcătuiesc un condensator sferic. Arătaţi că capacitatea acestui condensator este

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

8. Un condensator plan are armăturile pătrate, de latură a, şi fac un unghi θ unul faţă de celălalt, ca în figura 30-20. Arătaţi că pentru unghiuri θ mici, capacitatea condensatorului este

$$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)$$

(Indicaţie: condensatorul poate fi descompus în fîşii elementare de condensatori puşi în paralel.)

9. Presupunem că cele două armături sferice ale unui condensator sferic au raze aproximativ egale. În aceste condiţii, ansamblul poate fi aproximat cu un condensator plan cu $b-a=d$. Arătaţi că formula din pro-

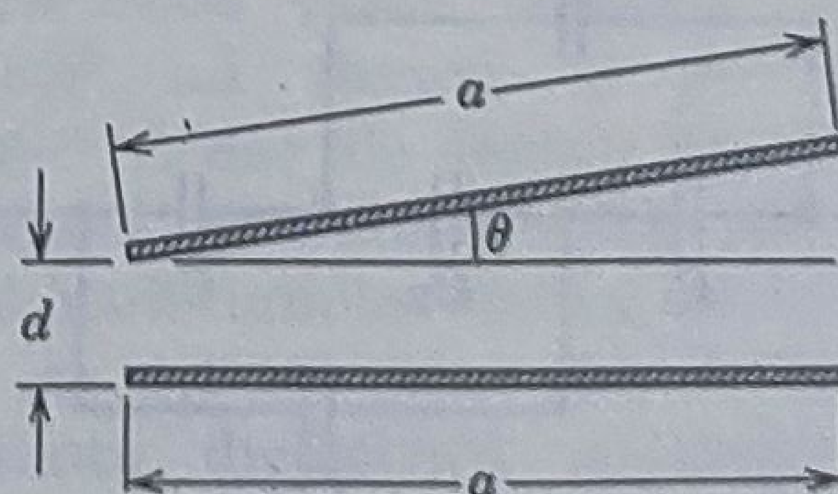


Figura 30-20.

blema 7 se reduce într-adevăr la acuația 30-7 pentru acest caz.

10. Un condensator plan are armături circulare de rază 8,0 cm și dispuse la distanța de 1,0 mm. Care va fi sarcina de pe armături dacă diferența de potențial aplicată este de 100 V?

11. Aflați capacitatea echivalentă a combinației de condensatori din figura 30-21. Presupuneți $C_1=10\ \mu F$, $C_2=5\ \mu F$, $C_3=4\ \mu F$ și $V=100$ V.

12. Să presupunem că condensatorul C_3, din figura 30-21, se străpunge,

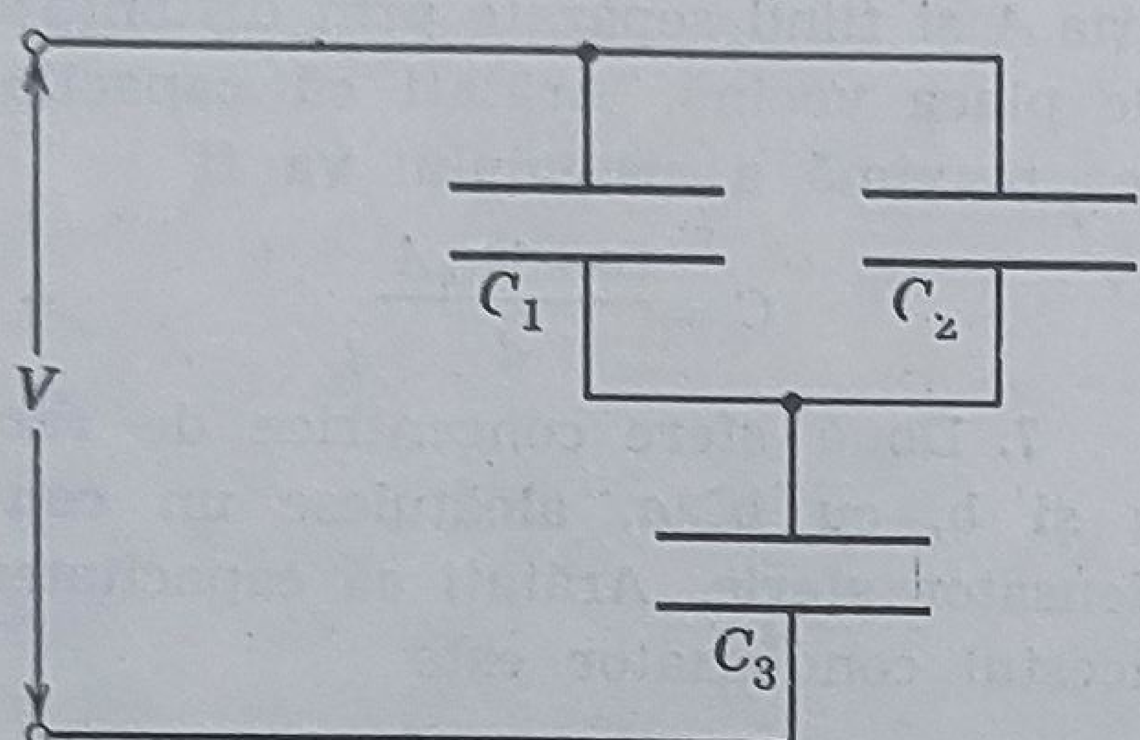


Figura 30-21.

adică se scurtcircuitează. Cum se vor *modifica* (a) sarcina și (b) diferența de potențial pentru condensatorul C_1?

13. Găsiți capacitatea echivalentă între punctele x și y a sistemului de capacități din figura 30-22. Presupuneți că $C_2=10\ \mu F$ iar toți ceilalți condensatori au capacitatea de $4{,}0\ \mu$ F. (Indicație: aplicați o diferență de potențial între x și y și scrieți toate relațiile între sarcini și diferențele de potențial pentru fiecare capacitate).

14. Avînd la dispoziție condensatori de $2{,}0\ \mu$ F cu tensiunea maximă

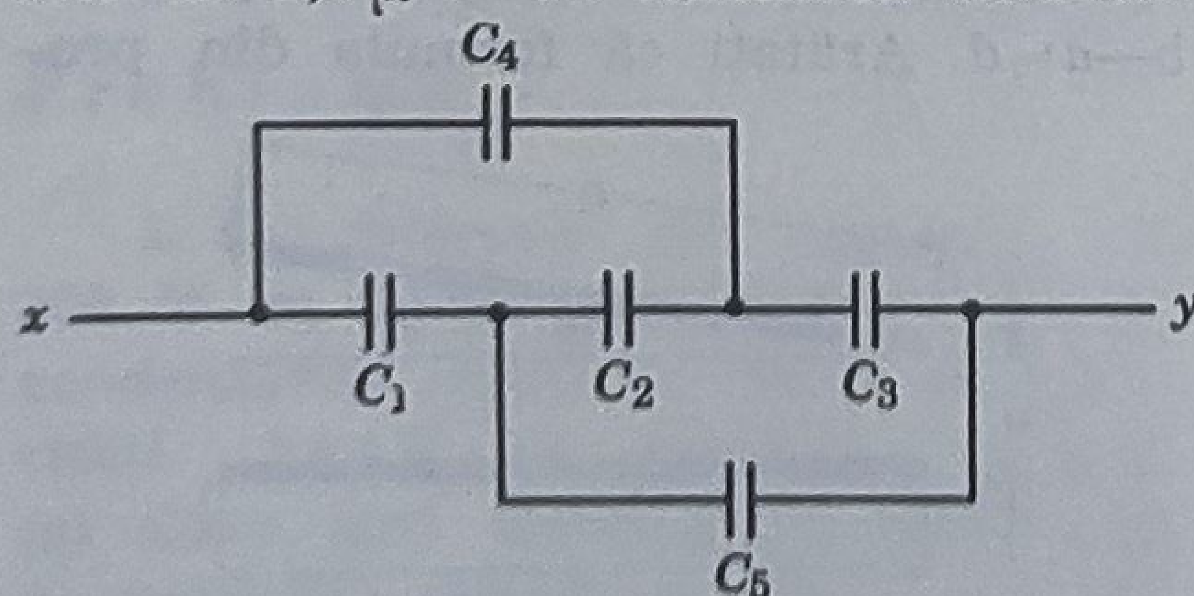


Figura 30-22.

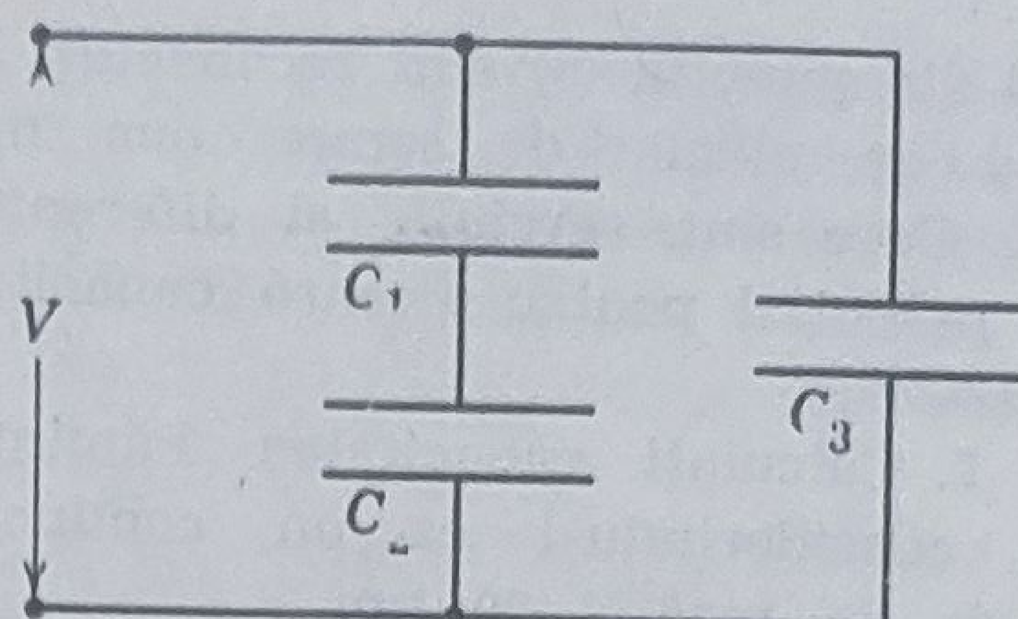


Figura 30-23.

de lucru de 200 V (fără străpungere) construiți ansambluri de condensatori care să aibă capacitatea de (a) $0{,}40\ \mu$ F și (b) $1{,}2\ \mu$ F, care să poată lucra sub diferența de potențial de 1 000 V.

15. Aflați capacitatea rezultantă (echivalentă) a combinației de condensatori din figura 30-23. Presupuneți că $C_1=10\ \mu F$, $C_2=5\ \mu F$, $C_3=4\ \mu F$ și $V=100$ V.

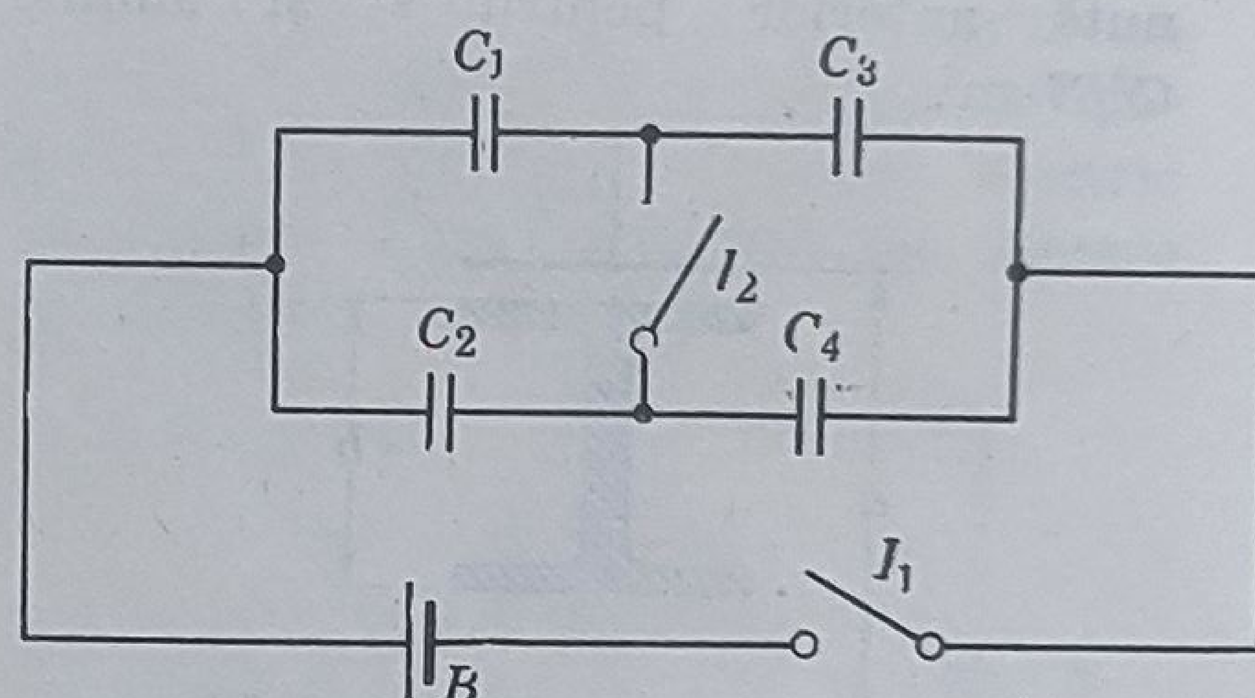


Figura 30-24.

16. Bateria B din figura 30-24 furnizează 12 V. (a) Determinați sarcina de pe fiecare capacitate atunci cînd I_1 este închis și (b) cînd I_2 este de asemenea închis. Presupuneți că $C_1=1\ \mu F$, $C_2=2\ \mu F$, $C_3=3\ \mu F$ și $C_4=4\ \mu F$.

17. Un condensator plan paralel, este umplut cu doi dielectrici ca în figura 20-25. Arătați că capacitatea este dată de

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right).$$

Verificați această formulă pentru toate cazurile limită pe care le puteți găsi. (Indicație: puteți justifica privi-

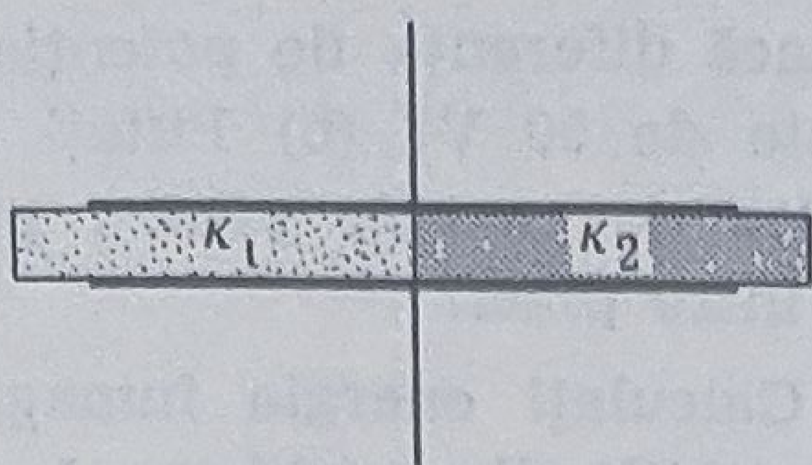


Figura 30-25.

rea acestui aranjament ca o punere în paralel a doi condensatori?)

18. Un condensator plan paralel este umplut cu doi dielectrici ca în

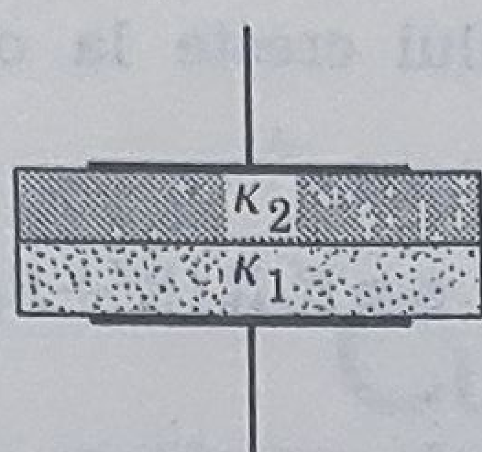


Figura 30-26.

figura 30-26. Arătaţi că capacitatea este dată de

$$C=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}\right).$$

Verificaţi această formulă pentru toate cazurile limită pe care le puteţi găsi. (Indicaţie: puteţi justifica privirea acestui aranjament ca o punere în serie a doi condensatori?).

19. O placă dielectrică de grosime b se introduce între plăcile unui condensator plan paralel cu separarea d între plăci. Arătaţi că expresia capacităţii este

$$C=\frac{k\varepsilon_0 A}{kd-b(k-1)}$$

(Indicaţie: Deduceţi formula prin acelaşi procedeu pe care l-aţi folosit la exemplul 6). Rezultatul indicat de această formulă conduce la un rezultat corect numeric, pentru exemplul 5? Este corectă formula pentru cazul particular în care $b=0$, $k=1$ şi $b=d$?

20. O placă de cupru de grosime b este introdusă între armăturile unui condensator plan paralel, ca în figura 30-27, exact la jumătatea dis-

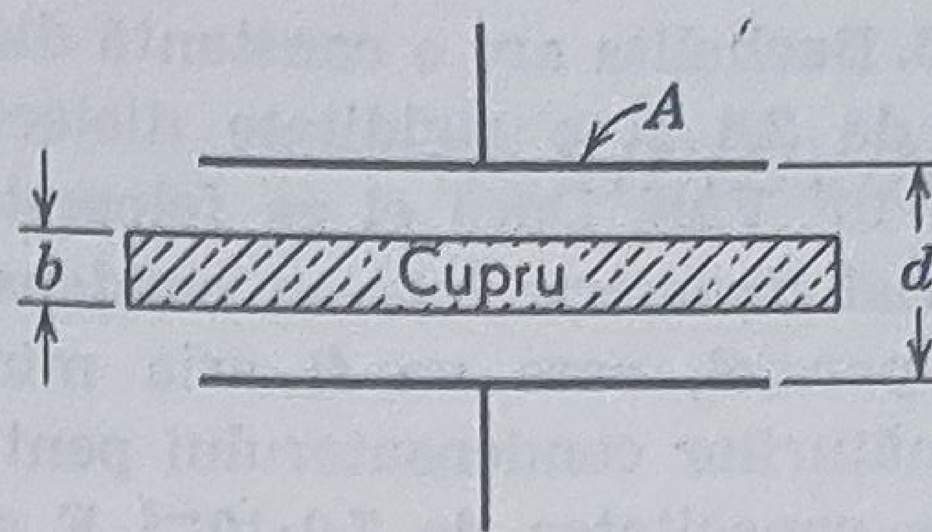


Figura 30-27.

tanţei dintre ele. Care este capacitatea înainte şi după introducerea plăcii?

21. În scopul construirii unui condensator, aveţi la dispoziţie două plăci de cupru, o foaie de mică (de grosime 0,10 mm şi $k=6$), o placă de sticlă (de grosime, 2,0 mm şi $k=7$) şi o placă de parafină (de grosime 1,0 cm şi $k=2$). Pentru a obţine capacitate maximă, care dintre placa (sau plăcile) dielectrice le veţi pune între plăcile de cupru?

22. Presupuneţi că în problema 5, bateria de 100 V rămîne conectată în timp ce dielectricul se introduce. Calculaţi (a) sarcina pe plăcile condensatorului, (b) cîmpul electric dintre armături, (c) cîmpul elctric în dielectric şi (d) capacitatea. Calculaţi valorile numerice ale tuturor acestor mărimi, înainte şi după introducerea dielectricului. Comparaţi aceste rezultate cu cele din exemplul 5 construind un tabel de valori.

23. Un condensator plan are o capacitate de 100 pF, armături de arie 100 cm^2 şi ca dielectric mică. Calculaţi, pentru o diferenţă de potenţial de 50 V, (a) intensitatea cîmpului electric E în mică, (b) sarcina liberă de pe armături şi (c) sarcina de suprafaţă indusă.

24. Două plăci paralele de arie 100 cm^2 au fiecare o sarcină de $8{,}9\cdot10^{-7}$ C dar de semne contrare. Intensitatea cîmpului electric din dielectricul care umple spaţiul dintre plăci este de $1{,}4\cdot10^6$ V/m. (a) Determinaţi constanta dielectrică a materialului, (b) Determinaţi sarcina indusă pe fiecare din feţele dielectricului.

25. Bachelita are o constantă dielectrică de 2,8 şi o rigiditate dielectrică de $18\cdot10^6$ V/m. Dacă el se foloseşte ca material dielectric într-un condensator plan paralel, care va fi aria minimă a armăturilor condensatorului pentru a obține capacitatea de $7{,}0\cdot10^{-2}$ F şi ca tensiunea maximă de lucru să fie de 4 000 V?

26. Armăturile unui condensator cilindric au razele a şi b, ca în figura 30-4. Arătaţi că jumătate din energia electrică potenţială înmagazinată se găseşte într-un cilindru de rază

$$r=\sqrt{ab}$$

27. O sferă metalică izolată de diametru 10 cm are un potenţial de 8 000 V. Care este densitatea de energie de la suprafaţa sferei?

28. Un condensator plan are plăci de aria A, la distanţa d una de alta şi este încărcat la o diferenţă de potenţial V. Bateria de încărcare este apoi deconectată şi plăcile sînt îndepărtate la distanţa 2 d. Determinaţi expresiile pentru (a) noua diferenţă de potenţial, (b) energia iniţială şi finală înmagazinată şi (c) lucrul mecanic necesar îndepărtării plăcilor.

29. Arătaţi că plăcile paralele ale unui condensator plan se atrag între ele cu o forţă

$$F=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

Demonstraţi această relaţie calculînd lucrul necesar pentru a creşte distanţa dintre plăci de la x la $x+dx$.

30. Placa dielectrică din condensatorul de la exemplul 5 umple jumătate din spaţiul dintre plăci. (a) Care este energia înmagazinată în aer, în procente din total? (b) Care este energia înmagazinată în dielectric, în procente din total?

31. Un condensator plan are capacitatea de 10 pF. (a) Care este energia înmagazinată de acest condensator dacă diferenţa de potenţial aplicată este de 50 V? (b) Puteţi calcula densitatea de energie pentru punctele situate între plăci?

32. Calculaţi energia înmagazinată în capacităţile din problema 1, pentru toate cele trei modurile de conectate (a), (b) şi (c). Comparaţi răspunsul dat şi explicaţi diferenţele.

33. Pe un balon de săpun iniţial neîncărcat, de rază R_0, se plasează o sarcină q. Din cauza repulsiei reciproce a sarcinilor de pe suprafaţă, raza balonului creşte la o valoare R. Arătaţi că

$$q=\left[\frac{32}{3}\pi^2\varepsilon_0 p R_0 R\left(R^2+R_0R+R_0^2\right)\right]^{1/2}$$

în care p este presiunea atmosferică. Determinaţi pe q pentru $p=1{,}00$ atm, $R_0=2{,}00$ cm, şi $R=2{,}10$ cm. (Indicaţie: Lucrul mecanic efectuat de balonul de săpun în procesul de dilatare, împotriva presiunii atmosferice trebuie să fie egal cu descreşterea energiei înmagazinate în cîmpul electric şi rezultă din dilatare, conform principiului de conservare a energiei).

34. Doi condensatori (2,0 μF şi 4,0 μF) sînt legate în paralel şi conectaţi la o diferenţă de potenţial de 300 V. Calculaţi energia totală înmagazinată în sistem.

35. Un sistem de 2 000 condensatori de 5,0 μF legaţi în paralel este folosit pentru a înmagazina energia electrică. Cît costă încărcarea acestei baterii de condensatori, la 50 kV, presupunînd că 1 kWh costă 2 cenţi?

36. În figura 30-21 determinaţi (a) sarcina, (b) diferenţa de potenţial şi (c) energia înmagazinată în fiecare condensator. Folosiţi valorile numerice din problema 11.

37. În figura 30-23 determinaţi: (a) sarcina, (b) diferenţa de potenţial şi (c) energia înmagazinată în fiecare condensator. Folosiţi valorile numerice din problema 15.

Capitolul 31

Curentul și rezistența

31-1 Curentul și densitatea de curent

Electronii liberi dintr-un conductor metalic izolat, de exemplu dintr-un fir de cupru, se găsesc într-o mișcare dezordonată ca și cea a moleculelor închise într-un container. Ei nu au o mișcare de ansamblu în lungul firului. Dacă se intersectează conductorul cu un plan oarecare, ipotetic, numărul de electroni ce străbate planul în unitate de timp de la dreapta spre stînga este egal cu al acelora care îl străbat de la stînga spre dreapta, fluxul *mediu* (*net*) este zero.

Dacă capetele conductorului sînt legate la o baterie, un cîmp electric va exista în fiecare punct al firului. Dacă diferența de potențial produsă de baterie este de 10 V și dacă conductorul (presupus uniform) este de 5 m lungime, intensitatea cîmpului electric în fiecare punct va fi de 2 V/m. Acest cîmp $\vec{E}$ va acționa asupra electronilor și va determina apariția unei mișcări rezultante în direcția $-\vec{E}$. Spunem în acest caz că s-a stabilit un *curent electric* i; dacă în intervalul de timp t prin orice secțiune transversală prin conductor trece o sarcină netă q, atunci curentul, presupus constant va fi:

$$i=q/t. \qquad (31\text{-}1)$$

Unitățile de măsură S.I. sînt pentru i amperul (A), pentru q coulombul (C) și secunda (s) pentru t. Studentul își amintește că (paragraful 26-4) ecuația 31-1 este ecuația de definiție pentru coulomb și că nu am dat încă o definiție operațională pentru amper; o vom face în paragraful 34-4.

Dacă curgerea sarcinilor nu se face cu un debit constant, curentul variază în timp și va fi dat de limita ecuației 31-1 adică

$$i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t. \qquad (31\text{-}2)$$

În continuare în întregul capitol vom considera numai curenţi constanţi.

Curentul i este acelaşi prin orice secţiune transversală a conductorului chiar dacă secţiunea transversală este diferită în puncte diferite. În acelaşi mod debitul de apă (presupus incompresibil) în orice secţiune transversală a unei conducte este acelaşi, chiar dacă secţiunea variază. Viteza de curgere a apei este mai mare în porţiunile mai înguste ale conductei şi mai mică în cele mai largi, astfel că debitul, măsurat în m^3/s, rămîne neschimbat. Această constanţă a curentului electric rezultă din faptul că sarcina trebuie să se conserve; ea nu se produce şi nu se pierde în mod constant, în nici un punct al conductorului în condiţiile staţionare presupuse. În limbajul folosit în paragraful 18-3, nu există nici „izvoare" şi nici „puţuri" pentru sarcini.

Existenţa unui cîmp electric în interiorul conductorului nu contrazice cele afirmate în paragraful 28-4. în care se spunea că $\vec{E}$ este nul în orice punct din interiorul unui conductor. În acel paragraf, care se ocupă de acea stare în care orice mişcare netă a sarcinilor era oprită (*electrostatica*), am presupus că conductorul a fost izolat şi că nici o diferenţă de potenţial nu a fost menţinută deliberat între două puncte oarecare, cum ar fi o baterie electrică. În acest capitol, în care ne vom ocupa de sarcinile în mişcare, vom ridica această restricţie.

Cîmpul electric care acţionează asupra electronilor din conductori nu determină o mişcare accelerată, *în medie,* a electronilor deoarece electronii se ciocnesc încontinuu de atomii (mai corect, ionii) constituenţi ai conductorului. Această mulţime de ioni, legaţi între ei prin forţe puternice causielastice de origine electrică se numeşte *reţea* (vezi figura 21.5). Efectul total al acestor ciocniri este transferarea energiei cinetice a electronilor acceleraţi, vibraţiei reţelei. Electronul se va mişca astfel cu o viteză constantă, medie, numită *viteza de transport* v_d* în direcţia $-\vec{E}$. O analogie se poate găsi în mişcarea de rostogolire a unei bile grele pe treptele unei scări lungi şi nu cu cea a căderii libere a ei de la aceeaşi înălţime. În primul caz acceleraţia determinată de cîmp (gravitaţional) este compensată de efectul de decelare al ciocnirilor cu treptele şi astfel în unele condiţii bila se rostogoleşte pe scări cu acceleraţie medie nulă, adică cu viteza medie constantă.

Cu toate că în metale, purtătorii sînt electronii, în electroliţi sau în gazele ionizate, purtătorii de sarcină pot fi ionii pozitivi, ionii negativi sau ambele tipuri la un loc. Din această cauză este necesară o convenţie pentru stabilirea sensului curentului, sarcinile de semn opus mişcîndu-se în sensuri opuse într-un cîmp dat. O sarcină pozitivă ce se mişcă într-un sens este echivalentă în aproape toate cazurile cu o sarcină negativă ce se mişcă în sens invers. De aceea, pentru simplificare şi pentru a fi consecvenţi din punct de vedere algebric, *presupunem că toţi purtătorii sînt pozitiv încărcaţi şi vom descrie curentul printr-o săgeată în direcţia în care aceste sarcini se mişcă.* Dacă purtătorii sînt negativi, ei se vor

---

* În literatura română de specialitate traducerea termenului de „*drift speed*" s-a făcut în multe feluri, începînd cu preluarea directă a termenului de *viteză de drift.* Ca semnificaţie fizică nici unul dintre termenii posibili: *viteză de transport, viteză de ansamblu, viteză medie,* nu este suficient de exact pentru a exprima fenomenul. N.T.

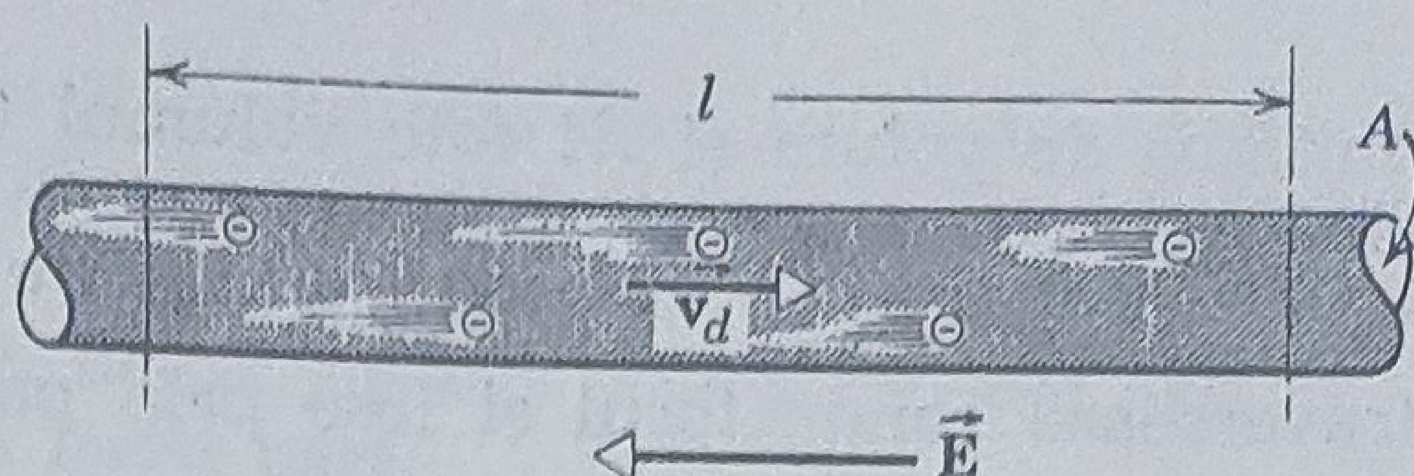


Figura 31-1. Electronii sînt antrenați în sens opus cîmpului electric din conductor.

mişca în sens invers săgeţii (vezi figura 31-1). Cînd ne vom întîlni cu o situaţie (ca în *efectul Hall*, vezi paragraful 33-5) în care semnul purtătorilor de sarcină va determina efecte diferite exterioare, vom renunţa la convenţia făcută şi vom lua în consideraţie situaţia reală.

Curentul i este caracteristic pentru un conductor dat. El este o mărime macroscopică, ca de exemplu masa sau volumul unui obiect sau lungimea unei bare. Mărimea microscopică ataşată ei este densitatea de curent $\vec{j}$. Ea este o mărime vectorială ataşată fiecărui punct din conductor şi nu întregului conductor. Dacă un curent este distribuit uniform într-un conductor de secţiune transversală A, mărimea densităţii de curent pentru toate punctele din această secţiune este

$$j = i/A \tag{31-3}$$

Vectorul $\vec{j}$ în fiecare punct este orientat în direcţia şi sensul în care o sarcină pozitivă s-ar mişca în acel punct. Un electron, în acel punct se va mişca după $-\vec{j}$.

În general legătura între $\vec{j}$ şi i este aceea că pentru o suprafaţă dată într-un conductor, i este fluxul vectorului $\vec{j}$ prin această suprafaţă:

$$i = \int \vec{j}\, d\vec{S} \tag{31-4}$$

unde $d\vec{S}$ este un element de suprafaţă, iar integrala se efectuează după toată aria considerată. Ecuaţia 31-3 (scrisă ca $i = jA$) este un caz special al acestei relaţii în care suprafaţa de integrare este o secţiune transversală prin conductor şi în care $\vec{j}$ este constant pe întreaga suprafaţă şi este normală la ea. Oricum, ecuaţia 31-4 poate fi aplicată oricărei suprafeţe prin care dorim să aflăm curentul. Ecuaţia 31-4 ne arată clar că i este un scalar deoarece mărimea de sub integrala $\vec{j} \cdot d\vec{S}$ este un scalar.

Săgeata care de obicei se asociază curentului dintr-un conductor nu indică că curentul este un vector ci doar arată *sensul* de mişcare al sarcinilor. Sarcinile pozitive se mişcă ori într-un sens ori în altul prin conductor, cele două posibilităţi fiind reprezentate prin + sau — în ecuaţiile algebrice. Observaţi că (a) curentul într-un conductor rămîne nemodificat dacă conductorul este îndoit, înnodat sau distorsionat într-un fel oarecare şi că (b) săgeata care reprezintă sensul curentului nu ascultă de legea compunerii vectorilor.

Viteza de transport v_d a purtătorilor de sarcină dintr-un conductor poate fi calculată din densitatea de curent j. Figura 31-1 ne arată mişcarea electronilor dintr-un conductor de la stînga spre dreapta cu o viteză constantă de transport v_d. Numărul de electroni de conducţie din conductor este nAl unde n este numărul de electroni de conducţie din

unitatea de volum şi Al este volumul conductorului. O cantitate de sarcină

$$q=(n\,Al)\,e$$

traversează conductorul şi iese prin partea lui dreaptă, în intervalul de timp t este dat de

$$t=\frac{l}{v_d}$$

Curentul i este dat de

$$i=\frac{q}{t}=\frac{nAle}{l/v_a}=nAev_d.$$

Scoţînd din această relaţie pe v_d şi ţinînd cont că $j=i/A$ (ecuaţia 31-3) obţinem

$$v_d=\frac{i}{nAe}=\frac{j}{ne}. \tag{31-5'}$$

Exemplul 1. Un conductor de aluminiu de diametru 2,54 mm este sudat cap la cap cu un conductor de cupru de diametru 1,63 mm. Prin conductorul acesta compus circulă un curent de 10 A. Care este densitatea de curent prin fiecare conductor?

Curentul se distribuie uniform pe întreaga secţiune a celor doi conductori, cu excepţia regiunilor de joncţiune, ceea ce ne permite să considerăm că densităţile de curent sînt constante în toate punctele din interiorul fiecărui conductor. Aria transversală a conductorului de aluminiu este de 5,07 mm². Astfel, din acuaţia 31-3

$$j_{Al}=\frac{i}{A}=\frac{10\ \text{A}}{5{,}07\ \text{mm}^2}=1{,}97\ \text{A/mm}^2$$

Aria secţiunii transversale pentru conductorul de cupru este 2,08 mm². Astfel

$$j_{Cu}=\frac{i}{A}=\frac{10\ \text{A}}{2{,}08\ \text{mm}^2}=4{,}80\ \text{A/mm}^2.$$

Nu am luat în consideraţie aci faptul că conductorii sînt din materiale diferite.

Exemplul 2. Care este v_d pentru conductorul de cupru din exemplul 1?

Putem scrie densitatea de curent pentru conductorul de cupru ca fiind 480 A/cm². Pentru a calcula n, pornim de la faptul că pentru fiecare atom de cupru există un electron liber. Numărul de atomi pe unitate de volum este $d\,N_0/m$ unde d este densitatea N_0 numărul lui Avagardo iar M este masa atomică. Astfel, numărul de electroni liberi în unitatea de volum este

$$n=\frac{dN_0}{M}=\frac{(9{,}0\ \text{g/cm}^3)\,(6{,}0\cdot 10^{23}\ \text{atomi/mol})\,(1\ \text{electron/atom})}{64\ \text{g/mol}}=8{,}4\times 10^{22}\ \frac{\text{electroni}}{\text{cm}^3}$$

În fine, v_d este dat de ecuaţia 31-5

$$v_d=\frac{j}{ne}=\frac{480\ \text{A/cm}^2}{(8{,}4\cdot 10^{22}\ \text{electroni/cm}^3)\,(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C/electron})}=3{,}6\times 10^{-2}\ \text{cm/s}.$$

Sînt necesare 28 s pentru ca electronii să se deplaseze cu 1,0 cm. V-aţi fi gîndit că v_d este atît de mic? Viteza de transport a electronilor nu trebuie să fie

confundată cu viteza cu care schimbările în configurația cîmpului electric se propagă de-a lungul conductorului, viteză ce este apropiată de cea a luminii. Dacă într-o conductă lungă umplută cu apă se aplică o presiune la unul din capete o *undă de presiune* va trece rapid în lungul tubului. Viteza cu care *apa* se mişcă prin conductă este cu toate acestea foarte mică.

31-2 Rezistența, rezistivitatea și conductivitatea

Dacă aceeaşi diferență de potențial se aplică la capetele a două bare una de cupru şi alta de lemn, rezultă curenți foarte diferiți. Mărimea caracteristică conductorului care determină acest rezultat este *rezistența* lui. Măsurăm rezistența unui conductor (numit de obicei *rezistor;* simbolul lui —/\/\/\/—) între două puncte aplicînd o diferență de potențial V între aceste puncte, măsurînd curentul i şi făcînd cîtul lor

$$R=V/i. \tag{31-6}$$

Dacă V este dat în volți şi i în amperi, rezistența R se va obține în *ohmi* (Ω).

Trecerea sarcinilor printr-un conductor este adesea comparată cu trecerea, (scurgerea) apei printr-o conductă, ce are loc datorită faptului că există diferență de presiune la capetele conductei, produsă și menținută de o pompă. Această diferență de presiune poate fi comparată cu diferența de potențial ce există la capetele unui rezistor conectat la o baterie. Debitul de apă scurs (în m^3/s) este comparat cu curentul (C/s sau A). Viteza de scurgere a apei pentru o diferență de presiune este determinată de natura conductei; este ea lungă sau scurtă, largă sau îngustă? Este plină sau goală, eventual cu pietriş? Aceste caracteristici ale conductei sînt analoage cu rezistența conductorului.

Standardul primar de rezistență, existent la Biroul național de standarde, este compus din mosoare pe care este înfăşurat un conductor a cărui rezistență a fost măsurată cu grije. Deoarece rezistența variază cu temperatura, standardele — cînd sînt folosite — sînt aşezate în ulei la temperatură cunoscută. Conductorul este făcut dintr-un aliaj special, numit *manganin*, pentru care rezistența variază foarte puțin cu temperatura. Conductorul este de asemenea tratat termic cu scopul de a elimina tensionările mecanice, care de asemenea afectează rezistența. Aceşti rezistori standard primari sînt folosiți în principal pentru a calibra standardele secundare ale altor laboratoare.

În practică, standardele primare de rezistență nu se măsoară folosind ecuația 31-6 ci printr-un procedeu indirect legat de cîmpurile magnetice. Ecuația 31-6 este de fapt folosită pentru a măsura pe V, cînd printr-o rezistență foarte bine cunoscută R, trece un curent i, de asemenea foarte bine cunoscut (folosind o *balanță de curent*, vezi paragraful 34-4). Acest procedeu practic de măsură a diferenței de potențial este cel folosit de obicei, în locul celuia care se bazează pe relația de definiție din paragraful 29-1, în care trebuie să se măsoare lucrul pe unitatea de sarcină necesară pentru a deplasa sarcina între două puncte.

Legat de rezistență este *rezistivitatea* ρ, care este o caracteristică a materialului din care este făcut conductorul şi nu de forma lui; ea se defineşte, pentru materiale izotrope*, prin relația

$$\rho = \frac{E}{j} \tag{31-7}$$

Rezistivitatea cuprului este de $1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$; cea a sticlei de cuartz este de $10^{16}\ \Omega \cdot m$. Puține sînt acele proprietăți fizice ale materialelor care să ia valori într-o plaje atît de mare. În tabela 31-1 sînt trecute valorile lui ρ pentru cele mai răspîndite metale.

Tabelul 31.1

PROPRIETĂŢI ALE METALELOR CA CONDUCTOR

	Rezistivitatea (la 20°C) Ω,m	Coeficientul de temperatură a rezistivității** α, (grad⁻¹)	Densitatea kg/m³	Temperatura de topire °C
Aluminiu	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$2{,}7 \cdot 10^{3}$	659
Cupru	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$8{,}9 \cdot 10^{3}$	1 080
Carbon(amorf)	$3{,}5 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}9 \cdot 10^{3}$	3 500
Fier	$1{,}0 \cdot 10^{-7}$	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	$7{,}8 \cdot 10^{3}$	1 530
Manganin	$4{,}4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$8{,}4 \cdot 10^{3}$	910
Nichel	$6{,}8 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$8{,}9 \cdot 10^{3}$	1 450
Argint	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$	$10{,}5 \cdot 10^{3}$	960
Oțel	$1{,}8 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$7{,}7 \cdot 10^{3}$	1 510
Wolfram (tungsten)	$5{,}6 \cdot 10^{-8}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	$19 \cdot 10^{3}$	3 400

** Această cantitate, definită prin

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \tag{31-8}$$

este variația relativă a rezistivității ($d\rho/\rho$) pe unitate de variație a temperaturii. Deoarece α depinde şi el de temperatură, valorile sînt date pentru 20°C. Pentru cupru ($\alpha = 3{,}9 \cdot 10^{-3}$/grd) rezistivitatea creşte cu 0,39% pentru o creştere a temperaturii cu 1°C lîngă 20°C. Observați că α pentru carbon este negativ, ceea ce înseamnă că rezistivitatea *descreşte* cu creşterea temperaturii.

---

* Acestea sînt materialele ale căror proprietăți (în cazul nostru electrice) nu depind de direcția în lungul cărora sînt măsurate în material.

Să considerăm un conductor cilindric, de arie transversală A și lungime l, prin care trece un curent constant i. Să aplicăm o diferență de potențial V la capetele lui. Dacă suprafețele transversale de la capetele conductorului cilindric sînt suprafețe echipotențiale, intensitatea cîmpului electric și densitatea de curent vor fi constante în toate punctele din cilindru și vor avea valorile

$$E=\frac{V}{l} \quad \text{și} \quad j=\frac{i}{A}$$

Rezistivitatea ρ poate fi scrisă atunci ca

$$\rho=\frac{E}{j}=\frac{V/l}{i/A}$$

Dar V/i este rezistența R și deci

$$R=\rho\frac{l}{A}$$

V, i și R sînt mărimi *macroscopice*, ce se aplică unui corp oarecare dat sau unei regiuni continue oarecare. Mărimile *microscopice* corespunzătoare sînt $\vec{E}$, $\vec{j}$ și ρ; ele au valori ce depind de punctul ales din conductor. Mărimile macroscopice sînt legate între ele prin ecuația 31-6 ($V=iR$) iar mărimile microscopice prin ecuația 31-7, care poate fi scrisă sub formă vectorială $\vec{E}=\rho\cdot\vec{j}$.

Mărimile macroscopice pot fi obținute integrînd mărimile microscopice folosind relațiile date anterior, respectiv

$$i=\int\vec{j}\,d\vec{S} \tag{31-4}$$

și

$$V_{ab}=-\int_a^b\vec{E}\,d\vec{l} \tag{29-5}$$

Integrala din ecuația 31-4 este o integrală de suprafață, luată pe orice suprafață transversală a conductorului. Integrala din ecuația 29-5 este o integrală curbilinie, luată de-a lungul unui parcurs arbitrar în lungul conductorului, ce unește două suprafețe echipotențiale, a și b. Pentru cazul unui conductor lung legat la o baterie, suprafața a poate fi aleasă ca o secțiune transversală prin conductor lîngă borna pozitivă a bateriei iar b poate fi aleasă analog, lîngă borna negativă.

Rezistența conductorului între a și b poate fi exprimată în funcție de mărimile microscopice, făcînd raportul celor două ecuații

$$R=\frac{V_{ab}}{i}=\frac{-\int_a^b\vec{E}\,d\vec{l}}{\int\vec{j}\,d\vec{S}}$$

Dacă conductorul este un cilindru lung de secțiune A și lungime l și punctele a și b se găsesc la capetele lui, ecuația anterioară se reduce la relația pentru R (vezi ecuația 31-7)

$$R=\frac{El}{jA}=\rho\frac{l}{A},$$

care este ecuația 31-9.

Mărimile microscopice V, i și R sînt fundamentale atunci cînd efectuăm măsurători electrice asupra conductorilor reali. Ele sînt mărimile pe care le citim pe instrumente. Mărimile microscopice $\vec{E}$, $\vec{j}$ și ρ sînt importante atunci cînd ne interesează aspectele fundamentale de comportare a materiei (și nu aspectele ei macroscopice) cum se întîmplă de exemplu în problemele de cercetare legate de *fizica corpului solid*. Astfel, paragraful 31-4 se ocupă mai deaproape de *rezistivitatea metalelor* din punct de vedere atomic și nu de *rezistența* probelor metalice. Mărimile microscopice sînt de asemenea importante cînd sîntem interesați de comportarea din interior pentru obiectele conductoare de forme neregulate.

Exemplul 3. Un bloc paralelipipedic de carbon are dimensiunile 1,0 cm$\times$1,0 cm$\times$50 cm. Care este rezistența lui măsurată (a) între cele două capete pătrate? (b) între două capete dreptunghiulare opuse? Rezistivitatea carbonului la 20°C este $3{,}5\cdot10^{-5}$ $\Omega\cdot$m.

(a) Aria secțiunii pătrate este de 1 cm^2, sau $1{,}0\cdot10^{-4}$ m^2. Ecuația 31-9 dă pentru rezistența între fețele pătrate

$$R=\rho\frac{l}{A}=\frac{(3{,}5\cdot10^{-5}\,\Omega\text{ m})(0{,}50\text{ m})}{1.0\cdot10^{-4}\text{ m}^2}=0{,}18\ \Omega,$$

(b) Rezistența între fețele dreptunghiulare opuse (de arie$=5{,}0\times10^{-3}$ m^2), obținem

$$R=\frac{(3{,}5\cdot10^{-5}\Omega\cdot\text{m})(10^{-2}\text{ m})}{5{,}0\cdot10^{-3}\text{ m}^2}=7{,}0\cdot10^{-5}$$

Astfel, un conductor dat poate avea diferite valori pentru rezistență depinzînd de modul în care aplicăm diferența de potențial pe el. Raportul rezistențelor pentru cele două cazuri este de 2 600. Am presupus că în fiecare caz diferența de potențial este aplicată astfel încît suprafețele între care se calculează rezistența sînt echipotențiale. În caz contrar ecuația 31-9 nu poate fi aplicată.

Figura 31-2 arată (curba plină) cum variază rezistivitatea cuprului cu temperatura. Uneori aceste date sînt aproximate sub formă analitică (de ecuație). Dacă sîntem interesați de ce se întîmplă într-o regiune mică de temperatură, să zicem între 0 și 500°C, putem aproxima curba din figura 31-2 printr-o linie dreaptă ce trece prin două puncte de pe curbă alese arbitrar (vezi linia întreruptă). În figură am ales punctul notat cu T_0, ρ_0 ca punct de referință, T_0 fiind 0°C, iar ρ_0 corespunzător $1{,}56\cdot10^{-8}$ $\Omega\cdot$m. Rezistivitatea ρ pentru o temperatură oarecare T poate fi găsită cu ajutorul unei funcții empirice, dată de linia întreruptă din figura 31-2 care este

$$\rho=\rho_0[1+\bar{\alpha}(T-T_0)] \tag{31-10}$$

Această relație ne indică corect rezistivitatea atunci cînd $T\to T_0$ și $\rho\to\rho_0$.

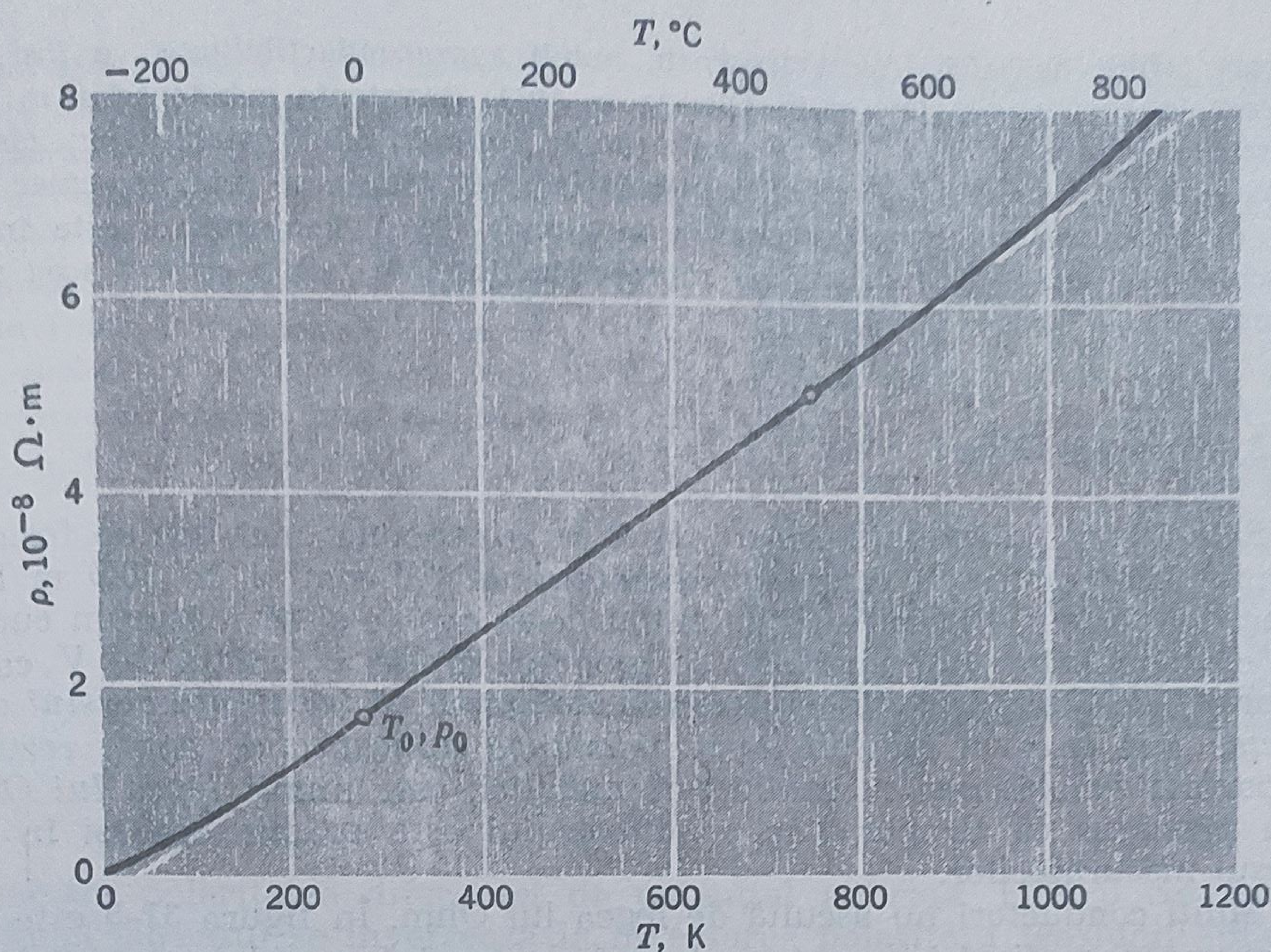


Figura 31-2. Rezistivitatea cuprului funcției de temperatură. Linia întreruptă este o aproximație a curbei considerînd cele două puncte de pe curbă. Punctul T_0, ρ_0 este luat ca referință.

Dacă scoatem din ecuația 31-10 pe $\bar{\alpha}$, obținem

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho-\rho_0}{T-T_0}$$

Comparînd cu ecuația 31-8, vedem că $\bar{\alpha}$ este *coeficient de temperatură mediu a rezistivității*, între două temperaturi alese și nu un coeficient de temperatură al rezistivității pentru o temperatură dată, care este definiția lui α. Pentru cele mai multe cazuri practice ecuația 31-10 dă rezultate cu o precizie suficient de bună.

Curba din figura 31-2 nu tinde spre zero pentru temperaturi ce se apropie de zero absolut, cu toate că pare a fi așa; rezistivitatea reziduală la această temperatură fiind $0{,}02\times10^{-8}\ \Omega\cdot$m. Pentru multe substanțe rezistența *devine* zero la o oarecare temperatură joasă. Figura 31-3 arată variația rezistenței unei probe de mercur pentru temperaturi sub 6K. În jurul a 4K, pe o plaje de aproximativ 0,05K, rezistivitatea scade brusc la o

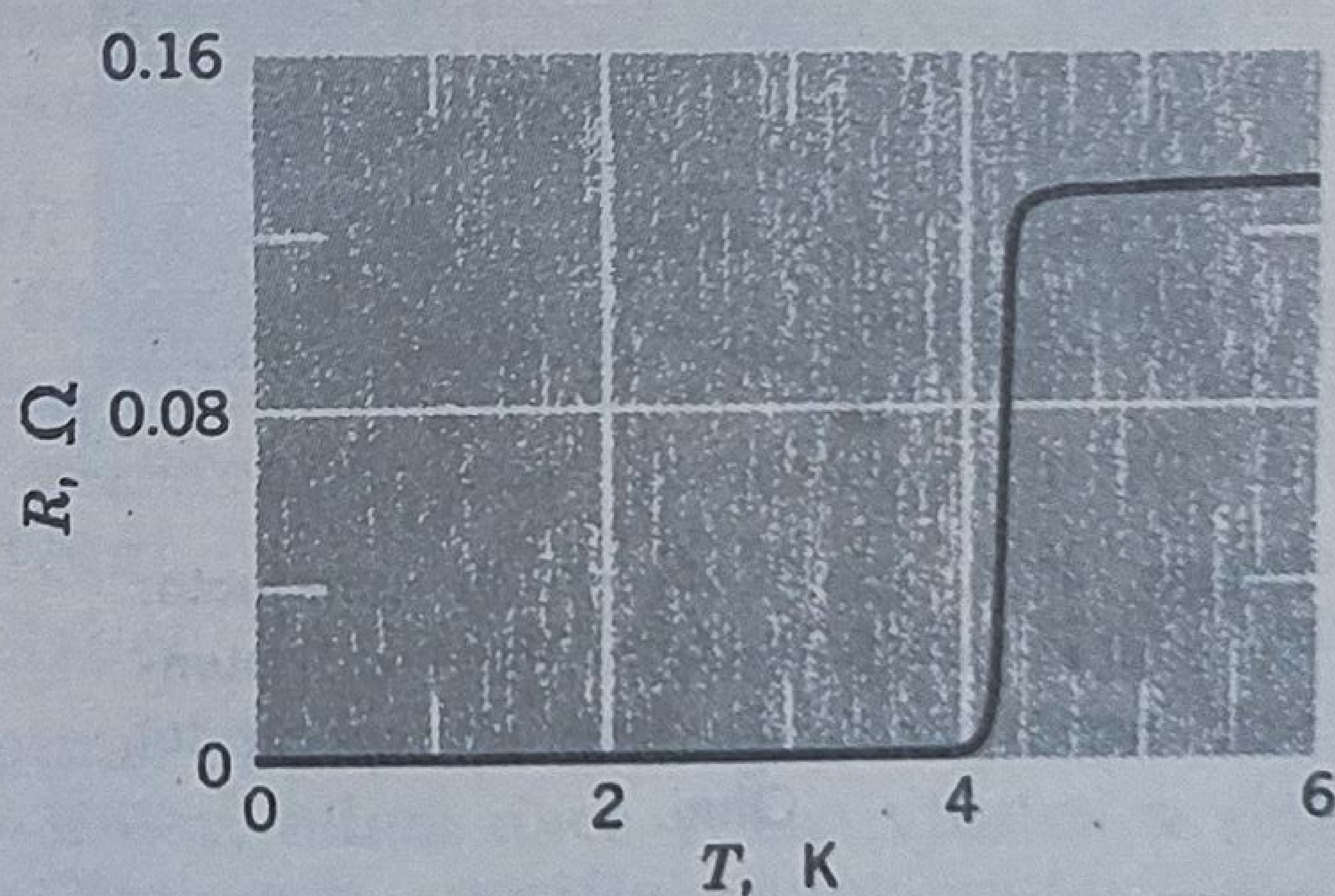


Figura 31-3. Rezistența mercurului scade la zero sub aproximativ 4 K.

valoare infinit de mică. Acest fenomen, numit *supraconductibilitate**, a fost descoperit de Kamerlingh Onnes în Olanda în 1911. Rezistența substanțelor în stare supraconductoare pare a fi realmente nulă; curenții odată stabiliți în circuite închise supraconductoare, persistă săptămîni întregi fără a se micșora, chiar dacă nici o sursă de curent nu se găsește în circuit. Dacă temperatura este treptat crescută pînă peste temperatura de supraconductibilitate, acești curenți scad rapid la zero.

31-3 Legea lui Ohm

Să aplicăm o diferență de potențial V la capetele unei bobine formată dintr-un conductor de cupru cu diametru de 4,6 mm și de 30,5 m lungime. Să variem diferența de potențial de la capete și să măsurăm curentul corespunzător i și apoi să reprezentăm grafic i funcție de V ca în figura 31-4. Linia dreaptă care rezultă înseamnă că *rezistența acestui conductor este aceeași indiferent de tensiunea aplicată lui.* Acest rezultat important valabil pentru conductori metalici, este numit *legea lui Ohm.* Am presupus că temperatura conductorului este practic aceeași în decursul măsurătorilor.

Mulți conductori nu ascultă de legea lui Ohm. În figura 31-5 este dat ca exemplu, graficul i-V pentru o lampă electronică cu vid de tipul 2 *A* 3**. Graficul este o linie curbă și astfel rezistența depinde de tensiunea aplicată. De asemenea, curentul prin acest dispozitiv este aproape nul dacă

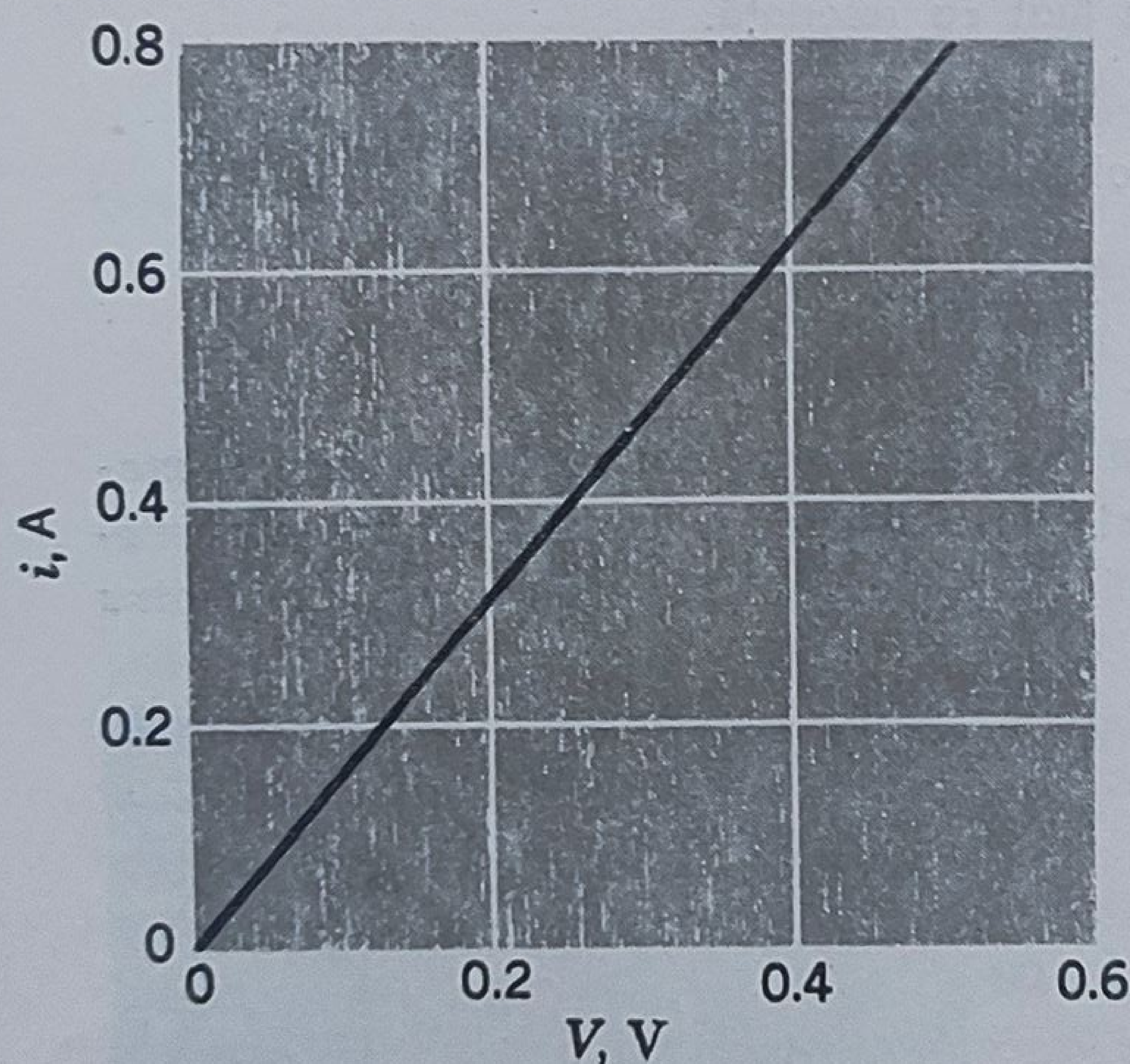


Figura 31-4. Curentul într-un conductor de cupru, funcție de diferența de potențial. Acest conductor satisface legea lui Ohm.

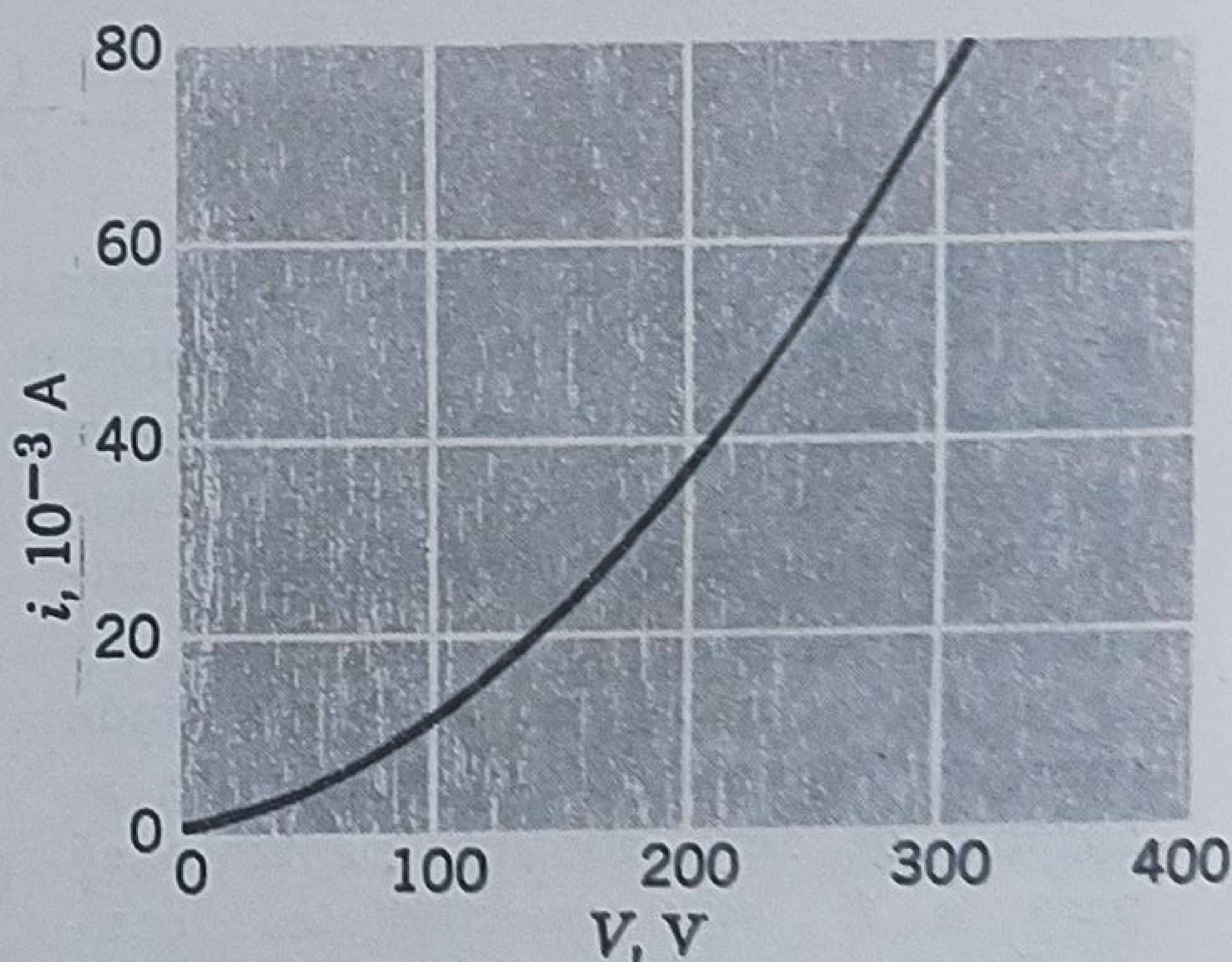


Figura 31-5. Curentul în tubul electronic 2A3 funcție de diferența de potențial. Acest conductor nu satisface legea lui Ohm.

* Vezi „Supraconductibilitatea" de B. T. Matthias, Scientific American, p. 92, Noiembrie, 1957.

** 2 *A* 3 este o triodă finală de fabricație americană cu 2,5 V la filament. (N. T.).

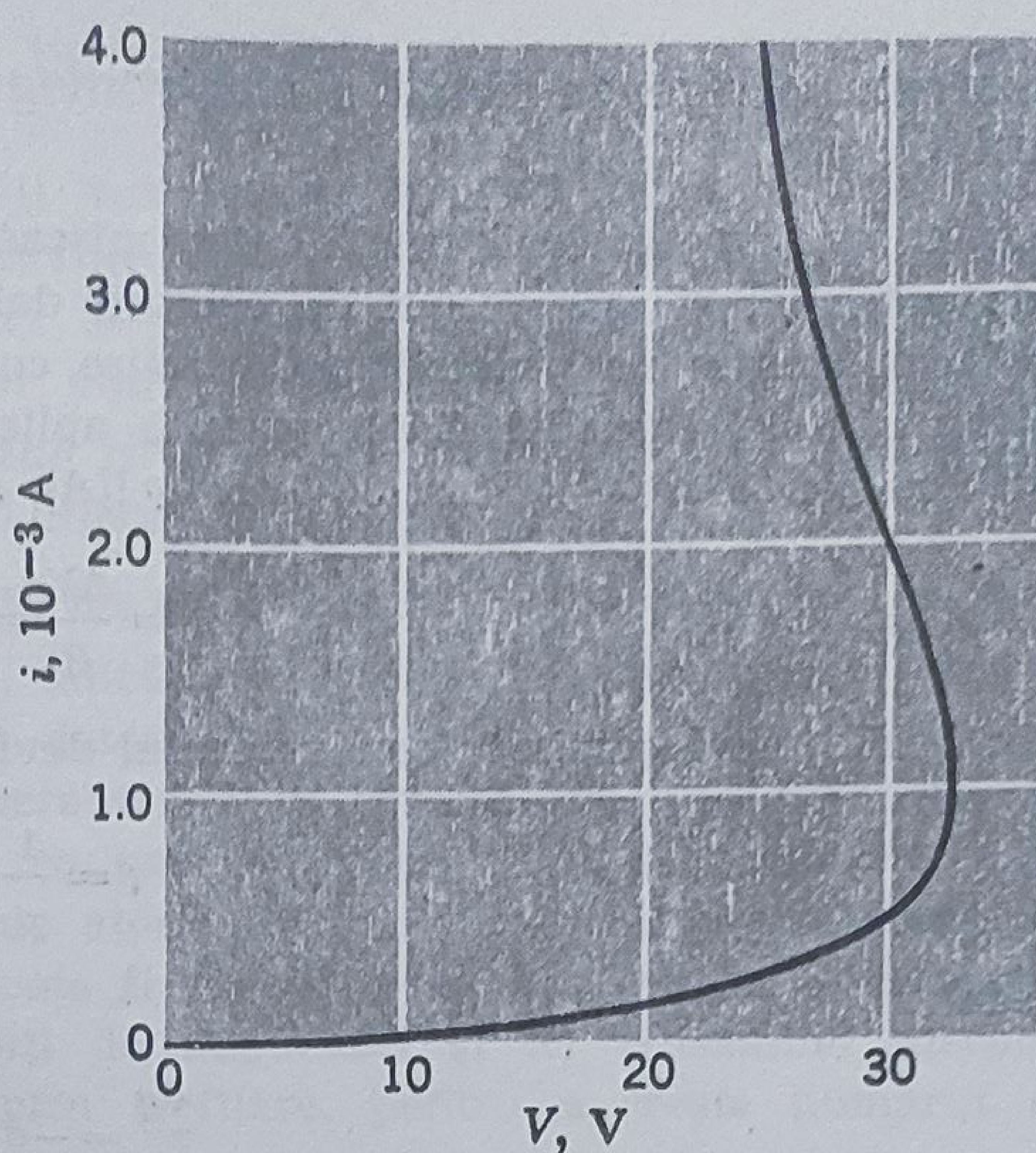


Figura 31-6. Graficul curentului funcție de diferența de potențial pentru un termistor Western Electric 1-B. Curba arată modul în care variază diferența de potențial la bornele termistorului pe măsură ce curentul crește. Forma curbei poate fi înțeleasă presupunînd că materialul din care este făcut posedă un mare coeficient termic al rezistivității.

inversăm polaritatea diferenței de potențial aplicată. Pentru conductori metalici curentul se inversează la inversarea polarității tensiunii aplicate dar valoarea lui nu se schimbă.

Figura 31-6 arată graficul i-V tipic pentru un alt dispozitiv neohmic numit *termistor*. Acesta este un semiconductor (vezi pag. 11) cu un coeficient de temperatură al rezistivității α (vezi tabelul 31-1) mare și negativ și care variază puternic cu temperatura. Observăm că pentru un termistor, pentru o tensiune dată, îi pot corespunde două valori diferite pentru curent.

Termistorii se folosesc deseori pentru a măsura puterea fasciculelor de microunde* ce cad pe el și îl încălzesc. Variația relativ mică a temperaturii termistorului produce ca rezultat o variație relativ mare a rezistenței, folosită astfel pentru a măsura puterea în domeniul microundelor. Electronica modernă, și deci în mare parte caracterul deosebit al civilizației tehnologice moderne, depind în mod fundamental de faptul că mulți conductori ca tuburile electronice în vid, detectorii cu semiconductori, termistorii și tranzistorii *nu* ascultă de legea lui Ohm.

Atragem atenția că relația $V=iR$ *nu* este o enunțare a legii lui Ohm. Un conductor ascultă de legea lui Ohm numai dacă dependența i-V este liniară, adică, numai dacă R este independentă de V și i. Relația $R=V/i$ rămîne ca o definiție generală a rezistenței unui conductor indiferent dacă el ascultă sau nu de legea lui Ohm.

Echivalentul microscopic al relației $V=iR$ este ecuația 31-7, sau $\vec{E}=\rho\vec{j}$. Un *material* conductor se spune că ascultă de legea lui Ohm dacă un grafic al lui E funcție de j este liniar, adică dacă rezistivitatea ρ este independentă de E și j. Legea lui Ohm este specifică unor materiale și

* Microundele sînt unde electromagnetice cu lungimea de undă de ordinul centimetrilor. (N. T.).

nu este o lege generală a electromagnetismului, ca de exemplu, teorema lui Gauss.

O analogie strînsă există între mişcarea sarcinilor determinată de o diferenţă de potenţial şi transportul de căldură determinat de o diferenţă de temperatură. Să considerăm un paralelipiped subţire conductor, de grosime Δx şi arie A. Fie o diferenţă de potenţial ΔV constantă aplicată pe feţele opuse. Curentul i este dat de ecuaţia 31-6 ($i=V/R$) şi 31-9 ($R=\rho\, l/A$), adică

$$i=\frac{\Delta V}{R}=\frac{\Delta V A}{\rho \Delta x}.$$

La limită, cînd grosimea conductorului devine dx

$$i=\frac{1}{\rho} A \frac{dV}{dx}$$

sau

$$\frac{dq}{dt}=-\sigma A \frac{dV}{dx},$$

unde σ ($=1/\rho$) este *conductivitatea* materialului. Am introdus semnul minus în ecuaţia 31-11 deoarece sarcinile pozitive se mişcă în direcţia descrescătoare a lui V, astfel că $d\Omega/dt$ este pozitiv cînd dV/dx este negativ.

Ecuaţia analoagă de conducţie termică (vezi paragraful 22-4) este

$$\frac{dQ}{dt}=-kA\frac{dT}{dx} \tag{31-12}$$

care îl arată pe k, conductivitatea termică, analogul lui σ, iar dT/dx, gradientul de temperatură, este analogul lui dV/dx, gradientul de potenţial. Între ecuaţia 31-11 şi ecuaţia 31-12 există o analogie mult mai profundă decît simpla analogie matematică. Atît energia termică cît şi sarcina sînt transportate de către electronii liberi ai metalului; în mod empiric, un bun conductor electric (de exemplu, argintul) este de asemenea un bun conductor termic şi reciproc.

31-4 Rezistivitatea din punct de vedere atomic

Se poate uşor înţelege de ce metalele ascultă de legea lui Ohm folosind raţionamente clasice simple. Dacă aceste idei sînt modificate în concordanţă cu cerinţele fizicii cuantice, atunci este posibil să mergem şi mai departe pentru a calcula teoretic valoarea rezistivităţii ρ a diferitelor metale. Aceste calcule nu sînt simple, dar dacă ele sînt efectuate, valorile obţinute pentru ρ sînt în bună concordanţă cu experienţa.

Într-un metal electronii de valenţă nu sînt ataşaţi atomilor individuali ci se mişcă liber în reţea şi se numesc *electroni de conducţie*. În cupru există un astfel de electron pentru fiecare atom, ceilalţi 28 rămînînd legaţi de nucleul de cupru şi formează împreună miezul ionic.

Distribuţia vitezelor electronilor de conducţie poate fi descrisă corect doar în cadrul fizicii cuantice. Pentru scopurile noastre, este totuşi suficient să luăm în consideraţie o viteză medie $\overline{v}$ bine aleasă; pentru cupru $\overline{v}=1{,}6\cdot10^{6}$ m/s. În absenţa unui cîmp electric direcţiile şi sensurile de

mişcare a electronilor sînt complet întîmplătoare, ca acelea ale moleculelor unui gaz închis într-un vas.

Electronii se ciocnesc constant cu miezurile ionice din conductor, adică ei interacţionează cu reţeaua, suferind dese schimbări bruşte de viteză (mărime şi direcţie). Aceste ciocniri ne amintesc de cele ale moleculelor de gaz închise într-un vas. Ca în cazul gazelor şi aici putem descrie ciocnirile electron-reţea prin *drumul liber mediu* $\bar{l}$, unde $\bar{l}$ este distanţa medie pe care o străbate electronul între două ciocniri*.

Într-un cristal metalic ideal la 0°K nu există ciocniri electron-reţea, în conformitate cu rezultatele fizicii cuantice, adică $\bar{l} \to \infty$ cînd $T \to 0$°K pentru cristale ideale. În cristale reale există ciocniri determinate de (a) vibraţiile termice dezordonate ale miezurilor ionice la temperatura T în jurul poziţiei de echilibru, (b) de impurităţi, adică de atomii străini ce pot exista şi (c) de defectele de reţea cum ar fi atomi deplasaţi sau şiruri de atomi lipsă. Pe această bază nu este de mirare că rezistivitatea unui metal poate fi crescută prin (a) creşterea temperaturii, (b) adăugarea unor mici cantităţi de impurităţi şi (c) tensionînd mecanic puternic conductorul ca de exemplu prin trefilare, pentru a creşte numărul de defecte ale reţelei.

Cînd un cîmp electric este aplicat asupra unui metal, mişcarea dezordonată a electronilor se modifică astfel că ei vor începe să se mişte în ansamblu, lent, în direcţie opusă cîmpului, cu o viteză medie de transport v_d. Această viteză de transport este mult mai mică ca viteza medie efectivă $\bar{v}$ menţionată anterior (vezi exemplul 2). Figura 31-7 încearcă să scoată în evidenţă relaţia ce există între aceste două viteze. Liniile pline indică traiectorii posibile, întîmplătoare, pe care un electron le poate urma în lipsa unui cîmp electric; electronul ajunge din x în y ca urmare a şase ciocniri pe parcurs. Liniile întrerupte indică cum *ar putea să arate* acelaşi proces dacă s-ar aplica un cîmp electric $\vec{E}$. Observaţi că

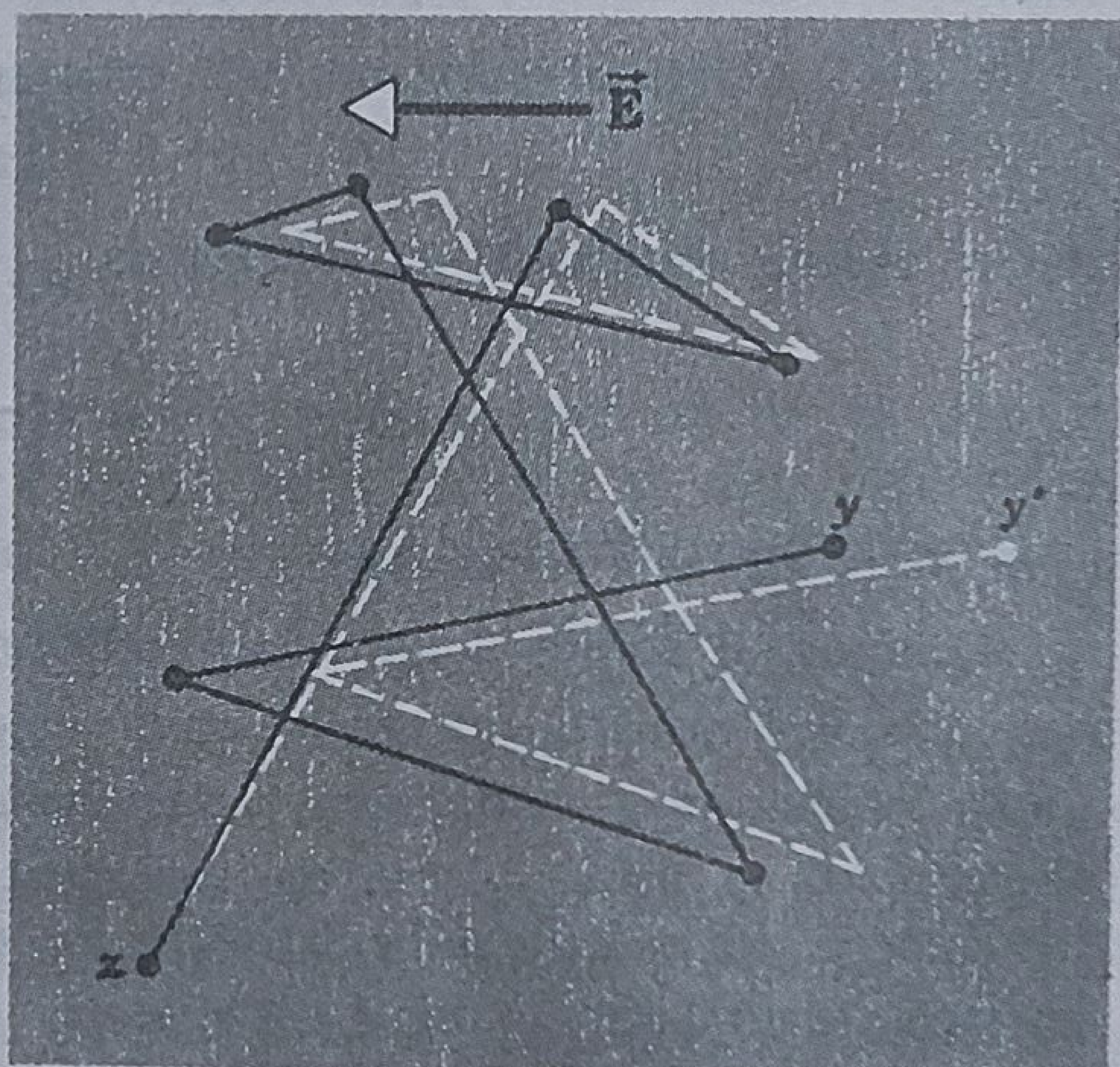


Figura 31-7. Linia continuă indică traectoria unui electron din punctul x în punctul y, care suferă pe parcurs şase ciocniri. Curba întreruptă indică traectoria *posibilă* a electronului în prezenţa unui cîmp electric $\vec{E}$. Observaţi deplasarea constantă spre $-\overleftarrow{E}$.

* Se poate arăta că ciocnirile dintre electroni sînt rare şi că au o influenţă neglijabilă asupra rezistivităţii.

electronul este transportat de cîmp, în mod constant, spre dreapta ajungînd în y' în loc de y. Pentru a desena figura 31-7 s-a presupus o viteză de transport $v_d=0{,}02\ \overline{v}$; în realitate ea este de ordinul a $10^{-10}\ \overline{v}$, astfel că „transportul" indicat pe figură este puternic exagerat.

Viteza de transport v_d, poate fi calculată în funcție de cîmpul electric aplicat E și de $\overline{v}$ și $\overline{l}$. Cînd un cîmp se aplică, electronul din metal se va găsi sub influența unei forțe eE care-i va imprima o accelerație a, dată de legea a doua a lui Newton

$$a=\frac{eE}{m}$$

Să luăm în considerație un electron care tocmai s-a ciocnit cu un miez ionic. Ciocnirea, în general, va strica pentru o clipă tendința de mișcare pe direcția cîmpului și astfel electronul va primi o direcție de mișcare complet arbitrară (dată de izotropia procesului de ciocnire — N.T.) după ciocnire. La următoarea ciocnire componenta după direcția $-\vec{E}$ a vitezei electronului se va modifica, în medie cu a, unde $\overline{l}/\overline{v}$ este intervalul mediu de timp dintre ciocniri. Vom numi aceasta viteză de transport v_d, adică

$$V_d=a\left(\frac{\overline{l}}{\overline{v}}\right)=\frac{eE\overline{l}}{m\overline{v}} \qquad (31\text{-}13)$$

Mișcarea electronului prin conductor este analoagă cu viteza constantă cu care o piatră cade prin apă. Forța gravitațională F_g este echilibrată continuu de o forță de precare („vîscoasă") proporțională cu viteza

$$F_g=mg=bv$$

unde b este un coeficient de frecare vîscoasă (vezi paragraful 15-8). Astfel că viteza constantă limită, a pietrii este

$$v=\left(\frac{1}{b}\right)F_g$$

Putem rescrie ecuația 31-13 sub forma

$$v_d=\left(\frac{\overline{l}}{m\overline{v}}\right)F_E$$

unde $F_E\,(=eE)$ este forța electrică.

Comparînd aceste două ecuații obținem că echivalentul coeficientului de frecare vîscoasă pentru mișcarea unui electron într-un conductor dat este $\overline{l}/m\overline{v}$. Dacă $\overline{l}$ este mic, conductorul acționează cu o „forță vîscoasă" mai mare asupra electronului și astfel viteza de transport v_d este proporțional mai scăzută.

Putem scrie pe v_d în funcție de densitatea de curent (ecuația 31-5) și împreună cu ecuația 31-13 obținem

$$v_d=\frac{j}{ne}=\frac{eE\overline{l}}{m\overline{v}}$$

Împreună cu ecuaţia 31-7 ($\rho = E/j$) obţinem în final

$$\rho = \frac{m\bar{v}}{ne^2\bar{l}}. \tag{31-14}$$

Ecuaţia 31-14 poate fi luată ca o afirmaţie a faptului că metalele ascultă de legea lui Ohm dacă putem arăta că $\bar{v}$ şi $\bar{l}$ nu depind de cîmpul electric aplicat E. În acest caz ρ nu va depinde de E (vezi paragraful 31-3), condiţie luată ca criteriu pentru ca un material să asculte de legea lui Ohm. Mărimile $\bar{v}$ şi $\bar{l}$ depind de distribuţia de viteze a electronilor de conducţie. Am văzut că această distribuţie este foarte puţin modificată de aplicarea chiar a unor cîmpuri relativ puternice, deoarece $\bar{v}$ este de ordinul 10^6 m/s iar v_d (vezi paragraful 2) doar de ordinul a 10^{-4} m/s, un raport de 10^{10}. Astfel noi vom fi siguri că valorile lui $\bar{v}$ şi $\bar{l}$ (să zicem pentru cupru la 20°C) vor fi practic independente faţă de prezenţa cîmpului.

Astfel partea dreaptă a ecuaţiei 31-14 este independentă de E şi astfel materialul ascultă de legea lui Ohm. Încercarea de a obţine valoarea numerică a lui ρ din ecuaţia 31-14 este împiedicată de dificultăţile legate de calculul lui $\bar{l}$; cu toate acestea astfel de calcule au fost efectuate într-o serie de cazuri.

Exemplul 4. Care este (a) intervalul mediu de timp τ între ciocniri şi (b) drumul liber mediu pentru electroni, în cupru?

(a) Din ecuaţia 31-14 (vezi de asemenea exemplul 2) obţinem

$$\tau = \frac{\bar{l}}{\bar{v}} = \frac{m}{ne^2\rho} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{(8{,}4 \cdot 10^{28}/\text{m}^3)(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C})^2(1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m})} = 2{,}5 \cdot 10^{-14}\ \text{s}$$

(b) Drumul liber mediu este

$$\bar{l} = \tau\bar{v} = (2{,}5 \cdot 10^{-14}\ \text{s})(1{,}6 \cdot 10^6\ \text{m/s}) = 4{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$$

Această distanţă corespunde la aproximativ 200 diametre ionice.

31-5 Bilanţul energetic într-un circuit electric

Să luăm un circuit format dintr-o baterie B conectată la o „cutie neagră". Un curent electric constant i trece prin circuit şi produce între bornele a şi b o diferenţă de potenţial V_{ab}, constantă. Cutia poate conţine un rezistor, un motor, un acumulator sau alte astfel de elemente.

Borna a, legată la polul pozitiv al bateriei, se află la un potenţial superior bornei b. Dacă o sarcină dq se mişcă prin cutie de la a la b, atunci această sarcină îşi va micşora energia potenţială cu $dq \cdot V_{ab}$ (vezi paragraful 29.6). Legea de conservare a energiei ne va spune că această energie potenţială electrică va fi transferată cutiei sub o altă formă de energie. Ce altă formă de energie se va produce în cutie, depinde de ce este în ea. În timpul dt energia transferată cutiei dU va fi

$$dU = dqV_{ab} = i\,dtV_{ab}$$

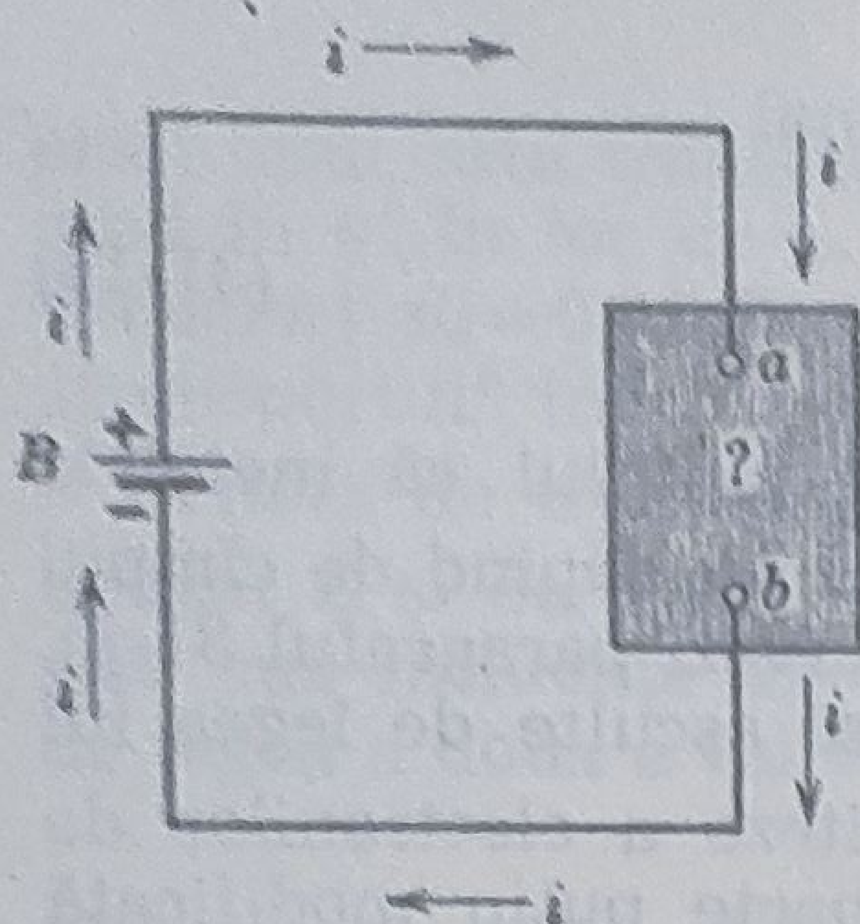


Figura 31-8. Bateria *B* determină apariția unui curent într-un circuit ce conține o „cutie neagră".

obținem transferul de energie în unitatea de timp *P*, împărțind prin *dt*

$$P = \frac{dU}{dt} = i\,V_{ab} \qquad (31\text{-}15)$$

Dacă în cutie există un motor, energia ce va apare va fi în principal un lucru mecanic efectuat de motor; dacă în cutie va exista un acumulator pus la încărcat, energia va rezulta în principal sub formă de energie chimică.

Dacă în cutie se găsește un rezistor, atunci, vom presupune că energia apărută va fi termică. Pentru a vedea acest lucru, să considerăm căderea unei pietre de masă m de la înălțimea h. În cădere ea își micșorează energia gravitațională cu mgh. Dacă piatra cade în vid — practic în aer — această energie se va transforma în energie cinetică a pietrei. Dacă ea cade în apă viteza ei devine constantă ceea ce înseamnă că energia ei cinetică nu mai crește. Astfel energia potențială este treptat transformată în energie termică a pietrei și a apei înconjurătoare. Frînarea vîscoasă a apei cu suprafața pietrei face ca piatra să fie împiedicată să se miște accelerat, ceea ce face ca la suprafața ei să apară energie termică.

Trecerea electronului prin rezistor este foarte asemănătoare cu cea a pietrei prin apă. Electronul se mișcă cu viteza medie de transport v_d și deci nu cîștigă energie cinetică. Energia potențială electrică pe care o pierde este transferată rezistorului sub formă de căldură. La scară microscopică acest lucru poate fi înțeles astfel: ciocnirile dintre electroni și rețea (vezi figura 31-5) cresc amplitudinea de vibrație termică a rețelei; la scară macroscopică aceasta corespunde creșterii de temperatură. Acest efect termodinamic ireversibil, se numește *efect Joule*.

Combinînd ecuația 31-15 cu ecuația 31-6 ($R = V/i$) pentru un rezistor. obținem

fie
$$P = i^2 R \qquad (31\text{-}16)$$

fie
$$P = \frac{V^2}{R} \qquad (31\text{-}17)$$

Observați că ecuația 31-15 se aplică la transferul de energie electrică *în orice* altă formă; ecuațiile 31-16 și 31-17 se aplică doar în transferul de energie electrică în energie termică într-un rezistor. Ecuațiile 31-16 și 31-17 sînt cunoscute sub numele de *legea lui Joule*. Această lege este una din formele particulare de scriere a legii de conservare a energiei pentru cazul particular al transformării energiei electrice în energie termică.

Unitatea de măsură pentru putere rezultă din ecuația 31-15 și ea este Volt-amperul. Ea se poate scrie

$$1\ \text{Volt-Amper} = 1\ \text{Volt}\cdot\text{amper}\left(\frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{Volt}\cdot 1\ \text{C}}\right)\left(\frac{1\ \text{C}}{1\ \text{A}\cdot 1\ \text{s}}\right) = 1\ \text{joule/s}$$

Primul factor de conversie din paranteză provine de la definiţia voltului (ecuaţia 29-1); al doilea provine de la definiţia coulombului. Unitatea J/s este atît de obişnuită încît i s-a dat un nume special, *watt*; vezi paragraful 7.7. Puterea, evident, nu este un concept exclusiv electric şi deci putem să exprimăm în waţi puterea ($=\vec{F}\cdot\vec{v}$) cheltuită de un agent ce exercită o forţă $\vec{F}$ în timp ce se mişcă cu viteza $\vec{v}$.

Exemplul 5. Aveţi la dispoziţie 6 m de sîrmă pentru încălzire din aliajul special denumit Nicrom; ea are o rezistenţă de 24 Ω. Puteţi obţine mai multă energie termică înfăşurînd-o pentru a forma o bobină sau tăind sîrma în două şi construind două bobine? În fiecare caz bobinele se leagă separat la 110 V.

Puterea P a unei singure bobine este dată de ecuaţia 31-17

$$P=\frac{V^2}{R}=\frac{(110\ \text{V})^2}{24\Omega}=500\ \text{W}$$

Puterea dată de bobina ce are jumătate din lungimea sîrmei va fi

$$P'=\frac{(110\ \text{V})^2}{12\ \Omega}=1\,000\ \text{W}$$

Avem la dispoziţie două „jumătăţi de bobină", astfel că puterea totală obţinută, tăind sîrma în două este de 2 000 W, adică de patru ori puterea obţinută cu o singură bobină. Acest lucru ne sugerează că putem cumpăra o spirală de încălzire de (reşou) de 500 W, o tăiem în două, şi o rebobinăm pentru a obţine 2 000 W. De ce nu este practică această idee?

Întrebări

1. Căutaţi şi alte mărimi fizice care, ca şi curentul, să fie mărimi scalare dar care să aibă un sens şi să fie reprezentate printr-o săgeată în desen.

2. Ce concluzie puteţi trage prin aplicarea ecuaţiei 31-4 la o suprafaţă închisă prin care trec un număr de conductori în direcţii arbitrare, transportînd curenţi de diverse intensităţi?

3. O diferenţă de potenţial V se aplică unui cilindru circular de carbon prinsă între doi electrozi cilindrici de cupru, ca în figura 31-9. Discutaţi dificultăţile de calcul a rezistenţă cilindrului de carbon folosind relaţia $R=\rho\ L/A$.

4. Cum aţi putea măsura rezistenţa unui conductor inelar? Daţi detalii pentru a clarifica ideea.

5. Discutaţi dificultăţile legate de verificarea valabilităţii legii lui Ohm pentru filamentul unei lămpi cu incandescenţă.

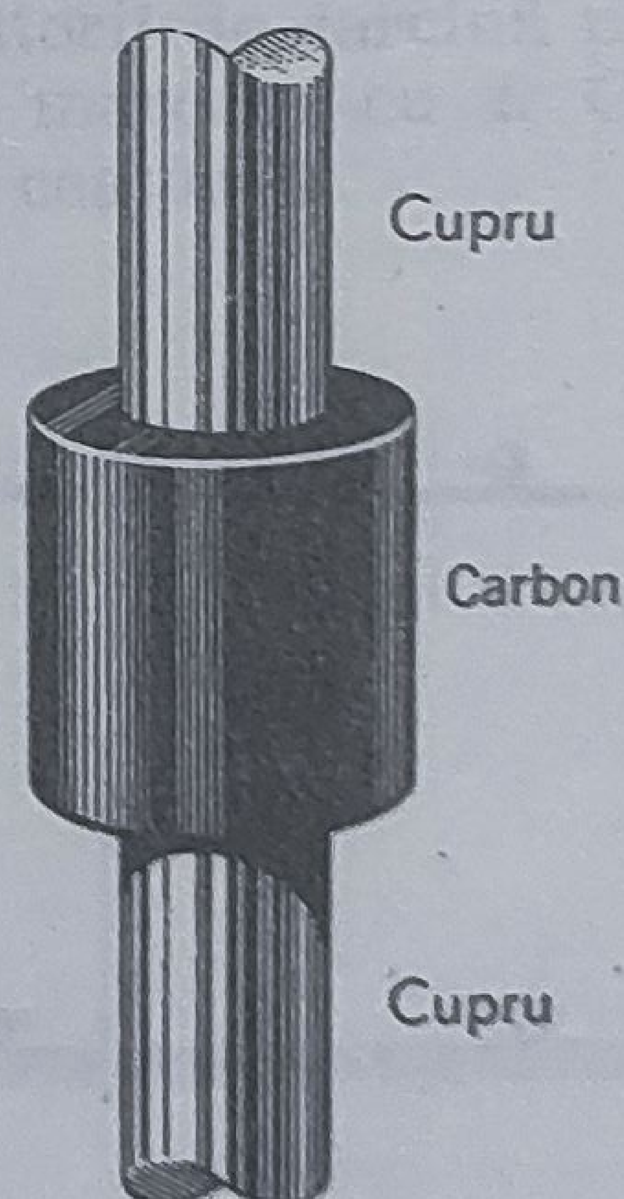


Figura 31-9.

6. Se aplică relația $V=iR$, unui rezistor neohmic?

7. Coeficientul de temperatură al rezistenței unui termistor este negativ și variază puternic cu temperatura. Descrieți calitativ forma graficului i—V pentru termistorul din figura 31-6.

8. La capetele unui conductor de cupru de lungime l și diametru d se aplică o tensiune V. Ce efect va avea asupra vitezei de transport a electronului (a) dublarea lui V, (b) dublarea lui l și (c) dublarea lui d?

9. Dacă viteza de transport a electronilor într-un conductor în condiții normale este atît de mică (vezi exemplul 2), cum se poate că becul dintr-o cameră se aprinde atît de repede după ce se închide întrerupătorul?

10. Puteți să găsiți o metodă de a măsura viteza de transport a electronilor prin măsurarea timpului necesar de trecere a lor prin conductor?

11. De ce liniile albe, întrerupte, din figura 31-7 sînt puțin curbate?

12. Un curent i intră printr-un punct într-o sferă de cupru de rază R și iese printr-un punct diametral opus. Oare toate punctele sferei vor fi la fel de capabile în disiparea căldurii joule?

13. Ce caracteristici speciale trebuie să aibă (a) o sîrmă de reșou și (b) o sîrmă pentru siguranță?

Tensiunea electromotoare și circuitele electrice

32-1 Tensiunea electromotoare

Există unele dispozitive ca bateriile electrice și generatoarele electrice care sînt capabile să mențină o diferență de potențial între punctele la care sînt legate. Astfel de dispozitive poartă numele de surse de *tensiune electromotoare* (prescurtat t.e.m.) În acest capitol nu vom discuta construcția și principiul lor de funcționare ci ne vom limita la descrierea principalelor lor caracteristici electrice și la investigarea aplicațiilor lor la circuitele electrice.

În figura 32-1, *a* este dată o sursă de t.e.m. *B*, reprezentată printr-o baterie, legată la un rezistor *R*. Sursa de t.e.m. își păstrează polaritatea constantă. În circuitul exterior al bateriei *B* purtătorii de sarcină pozitivă se vor îndrepta în direcția indicată de săgețile marcate cu *i*. Cu alte cuvinte se va stabili un curent în sensul acelor de ceasornic.

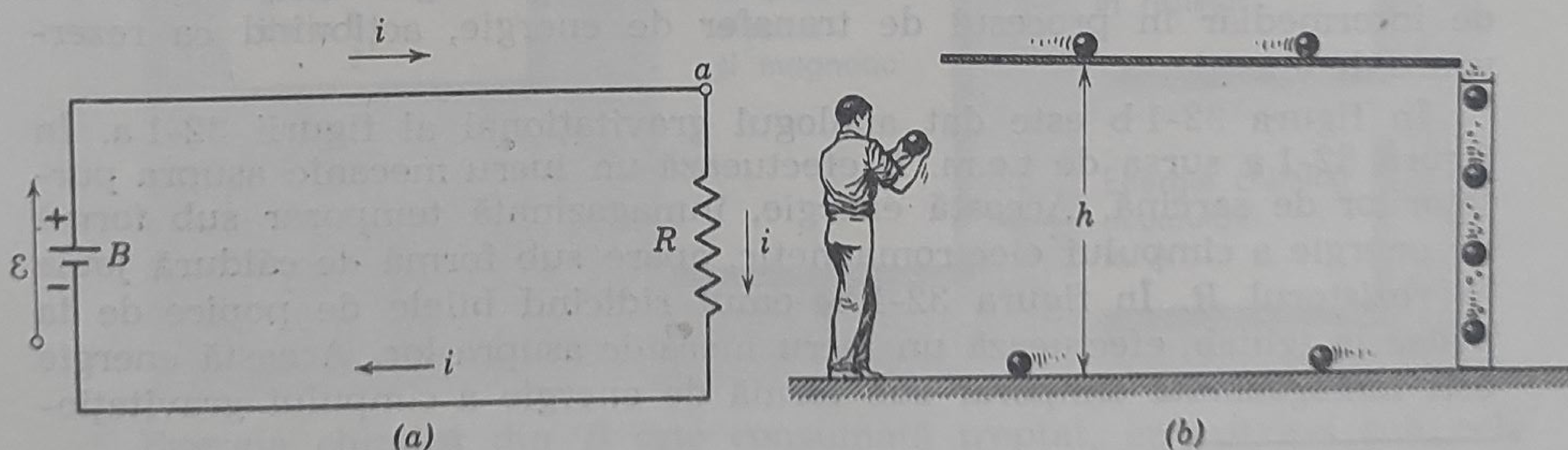


Figura 32-1. (a) Un circuit electric simplu și (b) analogul său gravitațional.

O sursă de t.e.m. se reprezintă printr-o săgeată plasată lîngă sursă; sensul ei este cel pe care l-ar avea un purtător de sarcină pozitivă care s-ar deplasa în circuitul exterior numai sub influența sursei. Pentru a nu se confunda cu săgeata ce indică curentul, pe coada săgeții ce indică t.e.m. se desenează un mic cerc.

O sursă de t.e.m. trebuie să fie capabilă să efectueze un lucru mecanic asupra purtătorilor de sarcină ce intră în ea. În figura 32-1, *a*, de exemplu, sursa acționează pentru a deplasa sarcinile pozitive dintr-un punct de potențial mai mic (borna negativă) prin sursă către un punct de potențial mai mare (borna pozitivă). Aceasta amintește de o pompă, care ridică apa dintr-un punct de potențial gravitațional mai mic într-unul de potențial gravitațional mai mare.

În figura 32-1, *a*, prin *orice* secțiune a circuitului trece sarcina dq în timpul dt. În particular, această sarcină intră în sursa de t.e.m. ε prin borna de potențial mai mic și iese prin cea de potențial mai mare. Sursa trebuie să efectueze un lucru mecanic dW asupra purtătorilor (pozitivi) de sarcină pentru a-i deplasa într-un punct de potențial mai mare. T.e.m. $\mathcal{E}$ a sursei este definită prin relația

$$\mathcal{E} = dW/dq. \tag{32-1}$$

Unitatea de t.e.m. este J/C (vezi ec. 29-1) care este de fapt *voltul*. Am putea fi înclinați să spunem că o baterie are o t.e.m. de 1 V dacă ea menține un potențial de 1 V între bornele ei. Aceasta este corect numai în anumite condiții, pe care le vom descrie în paragraful 32-4.

Dacă o sursă de t.e.m. efectuează un lucru mecanic asupra unui purtător de sarcină, ea trebuie să fie alimentată cu energie. De exemplu, într-o baterie, energia chimică este transformată în energie electrică. Astfel, putem spune că o sursă de t.e.m. este un dispozitiv în care energia chimică, mecanică sau orice altă formă de energie este transformată (reversibil) în energie electrică. Energia chimică furnizată de bateria din figura 32-1 *a* este înmagazinată în cîmpurile electrice și magnetice* ce înconjoară circuitul. Această energie înmagazinată rămîne constantă deoarece este cheltuită pe măsură ce este produsă fiind transformată în căldură joule în rezistență. Cîmpurile electrice și magnetice joacă un rol de intermediar în procesul de transfer de energie, acționînd ca rezervoare de energie.

În figura 32-1 b este dat analogul gravitațional al figurii 32-1 a. În figura 32-1 a sursa de t.e.m. *B* efectuează un lucru mecanic asupra purtătorilor de sarcină. Această energie, înmagazinată temporar sub formă de energie a cîmpului electromagnetic, apare sub formă de căldură joule în rezistorul *R*. În figura 32-1 b, omul ridicînd bilele de popice de la podea la jghiab, efectuează un lucru mecanic asupra lor. Această energie este înmagazinată temporar sub formă de energie a cîmpului gravitațio-

* Un curent ce trece printr-un fir produce un cîmp magnetic în jurul firului iar acest cîmp, la fel ca și cîmpul electric trebuie considerat ca un loc de înmagazinare de energie (vezi paragraful 36-4).

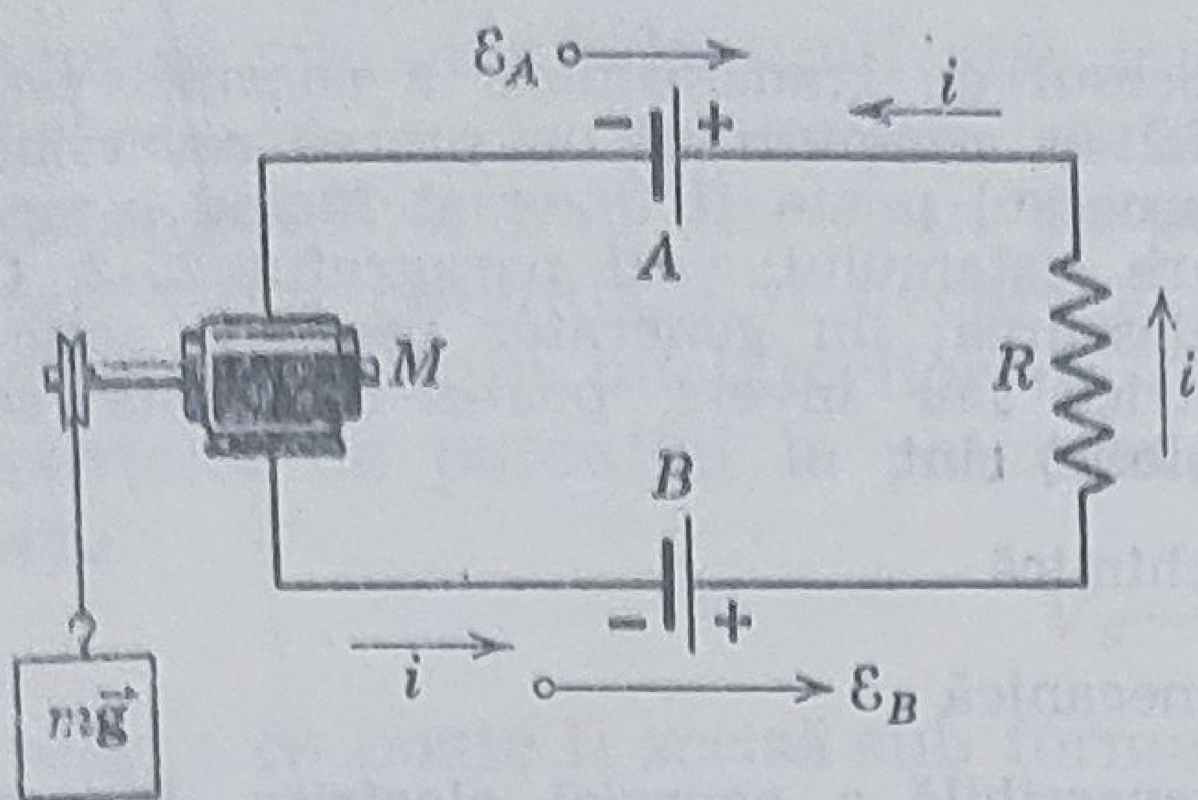
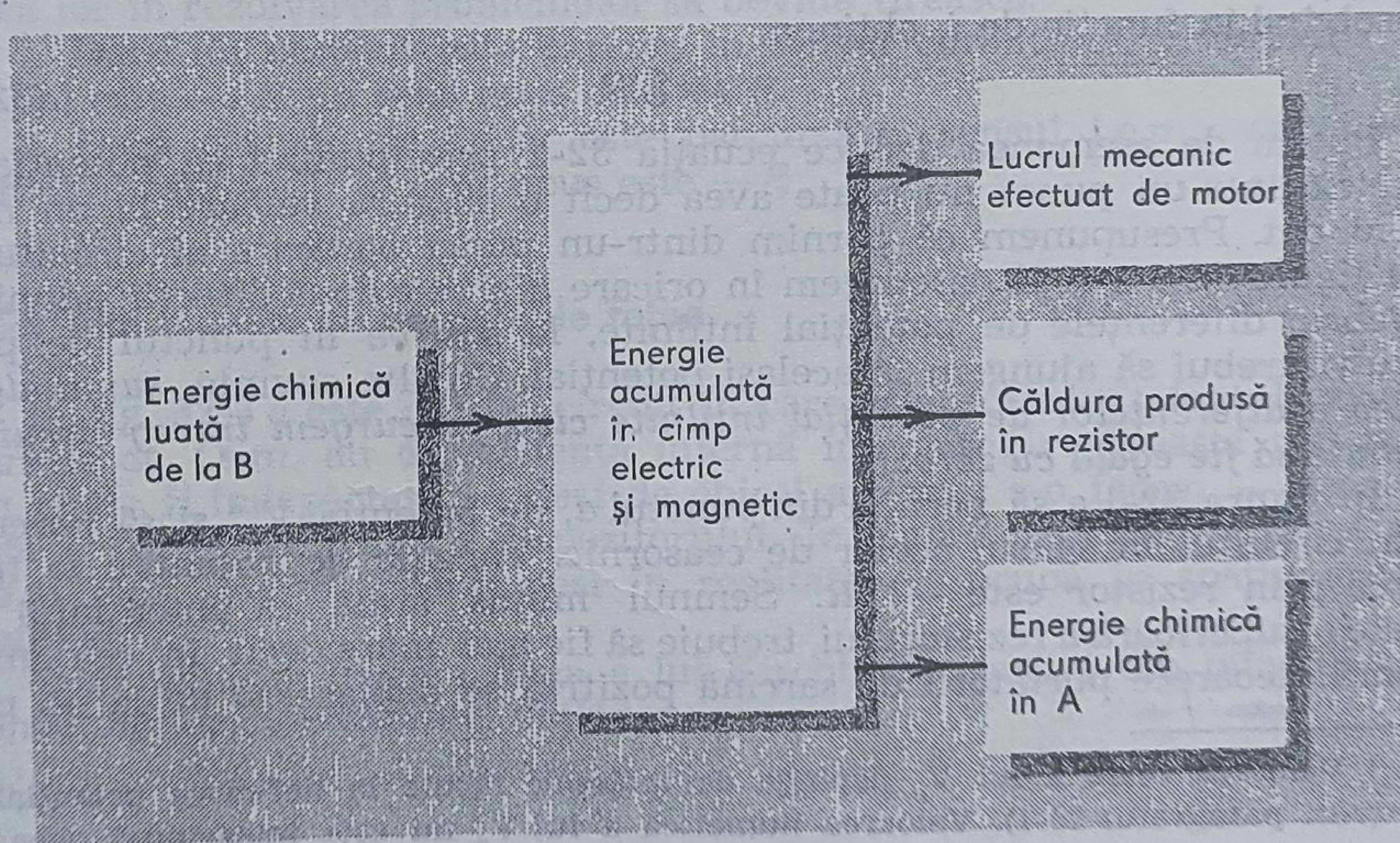


Figura 32-2. Două baterii, un rezistor și un motor conectate pentru a forma un circuit cu un singur ochi. Se presupune $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$.

nal. Bilele se rostogolesc încet și uniform de-a lungul jghiabului, iar atunci cînd ajung la extremitatea din dreapta cad într-un cilindru plin cu un lichid vîscos. Ele cad cu viteză constantă către fundul vasului, sînt scoase cu ajutorul unui mecanism nereprezentat în figură și se rostogolesc de-a lungul podelei spre stînga. Energia cedată sistemului de către om apare sub formă de căldură în fluidul vîscos. Energia furnizată de om își are originea în energia sa internă (chimică). Circulația sarcinilor din figura 32-1 *a* se oprește dacă bateria *B* nu este încărcată; circulația bilelor de popice din figura 32-1 *b* se oprește dacă omul nu-și reîmprospătează rezerva de energie internă hrănindu-se.

În figura 32-2 este dat un circuit ce conține două baterii (ideale) *A* și *B*, un rezistor *R* și un motor electric (ideal) folosit pentru a ridica o greutate. Bateriile sînt astfel legate încît să trimită sarcini în circuit în direcții opuse; direcția curentului este determinată de *B* care dă o diferență de potențial mai mare. Transformările de energie în acest circuit sînt:



Energia chimică din *B* este consumată treptat, ea apărînd sub cele trei forme arătate în dreapta. Bateria A se „încarcă" în timp ce bateria *B* se „descarcă". Și aici, cîmpurile electrice și magnetice ce înconjoară circuitul acționează ca intermediari.

În definiția t.e.m. este presupus că procesul de transformare a energiei este *reversibil* cel puțin în principiu. Studentul își va reaminti că un proces reversibil este acela ce trece prin stări de echilibru; procesul poate fi inversat făcînd o modificare infinitezimală a condițiilor exterioare sistemului; vezi paragraful 25-2. O baterie, de exemplu, se poate încărca sau descărca; un generator poate fi acționat mecanic pentru a produce energie electrică sau invers poate funcționa ca motor. Aici, transformările de energie (reversibile) sînt

$$\text{electrică} \rightleftharpoons \text{chimică}$$

și

$$\text{electrică} \rightleftharpoons \text{mecanică}$$

Încălzirea joule este o transformare *ireversibilă* a energiei electrice. Putem ușor încălzi un conductor furnizîndu-i energie electrică dar nu este posibil să se producă un curent într-un circuit închis format dintr-o spiră de cupru, încălzindu-o uniform. Din cauza caracterului ireversibil, nu asociem t.e.m. cu încălzirea joule.

32-2 Calculul intensității curentului

În rezistorul din figura 32-1 *a*, în timpul dt, apare o energie egală cu i^2R dt sub formă de căldură joule. În acest interval de timp, prin sursa de t.e.m. trece o sarcină dq (=i dt), iar lucrul mecanic efectuat de sursă asupra acestei sarcini (vezi ec. 32-1) este

$$dW = \mathscr{E}dq = \mathscr{E}i\ dt$$

Din legea de conservare a energiei, lucrul mecanic efectuat de sursă trebuie să fie egal cu căldura joule,

$$\mathscr{E}\, i\, dt = i^2\, R\, dt$$

Rezolvînd în funcție de i, obținem

$$i = \mathscr{E}/R \tag{32-2}$$

Putem de asemenea deduce ecuația 32-2 presupunînd că potențialul electric într-un punct nu poate avea decît o singură valoare la un moment dat. Presupunem că pornim dintr-un punct oarecare al circuitului din figura 32-1 a și îl parcurgem în oricare din cele două direcții; adunînd algebric diferențele de potențial întîlnite, la sosirea în punctul de plecare va trebui să ajungem la același potențial. Cu alte cuvinte, *suma algebrică a diferențelor de potențial întîlnite cînd parcurgem întreg circuitul trebuie să fie egală cu zero.*

În figura 32-1 a să pornim din punctul a, de potențial V_a* și să parcurgem circuitul în sensul acelor de ceasornic. Variația de potențial la trecerea prin rezistor este — iR. Semnul minus arată că potențialul în partea superioară a rezistorului trebuie să fie mai mare decît în cea inferioară, deoarece purtătorii de sarcină pozitivă se deplasează de la un po-

* Valoarea reală a lui V_a depinde de ipotezele făcute la definirea potențialului (vezi paragraful 29-1). Valoarea numerică a lui V_a nu este importantă deoarece, așa cum este cazul în majoritatea problemelor de circuite electrice, ne interesează numai *diferențele* de potențial. Punctul a din fig. 32-1 a (sau oricare alt punct din figură) poate fi legat la pămînt (simbolul ⏚) și considerat la potențialul V_a=0, procedeu folosit în mod curent în practică.

tențial mai mare la unul mai mic. La traversarea bateriei de la partea inferioară la cea superioară, purtătorii de sarcină trec dintr-un punct de potențial mai mic într-unul de potențial mai mare, deci are loc *o creștere* $+\mathscr{E}$ a potențialului deoarece bateria efectuează un lucru mecanic (pozitiv) asupra purtătorilor de sarcină. Adunînd suma algebrică a diferențelor de potențial la potențialul inițial V_a, trebuie să obținem tot V_a, sau

$$V_a - iR + \mathscr{E} = V_a$$

relație ce poate fi scrisă sub forma

$$-iR + \mathscr{E} = 0,$$

independentă de valoarea lui V_a și care arată explicit că suma algebrică a diferențelor de potențial* la o parcurgere completă a circuitului este zero. Această relație duce direct la ecuația 32-2.

Aceste două moduri de a găsi curentul într-un circuit format dintr-un ochi, bazate pe legea conservării energiei și pe noțiunea de potențial, sînt complet echivalente deoarece diferențele de potențial sînt definite în funcție de lucru mecanic și energie (paragraful 29-1). Afirmația că suma diferențelor de potențial întîlnite la parcurgerea completă a buclei este egală cu zero poartă numele de *legea a doua a lui Kirchhoff.*

Trebuie să reținem că această teoremă nu este altceva decît un mod particular de enunțare a legii conservării energiei pentru circuitele electrice.

Înainte de a trece la circuite mai complexe, să examinăm regulile de găsire a diferențelor de potențial; aceste reguli decurg din discuția precedentă. Ele nu trebuiesc memorate ci înțelese atît de bine încît folosirea lor în rezolvarea problemelor să devină firească.

1. Dacă un rezistor este parcurs în sensul curentului, variația de potențial este $-iR$; în sens opus este $+iR$.

2. Dacă o sursă de t.e.m. este parcursă în sensul t.e.m., variația de potențial este $+\mathscr{E}$; în sens opus este $-\mathscr{E}$.

32-3 Alte circuite cu un ochi de rețea

În fig. 32-3 *a* este dat un circuit în care este accentuat faptul că toate sursele de t.e.m. au o rezistență internă intrinsecă *r*. Această rezistență nu poate fi îndepărtată — deși de obicei am vrea s-o facem — deoarece este o parte intrinsecă a dispozitorului. În figură rezistența internă *r* și t.e.m. sînt arătate separat deși în realitate ele ocupă în spațiu aceeași regiune.

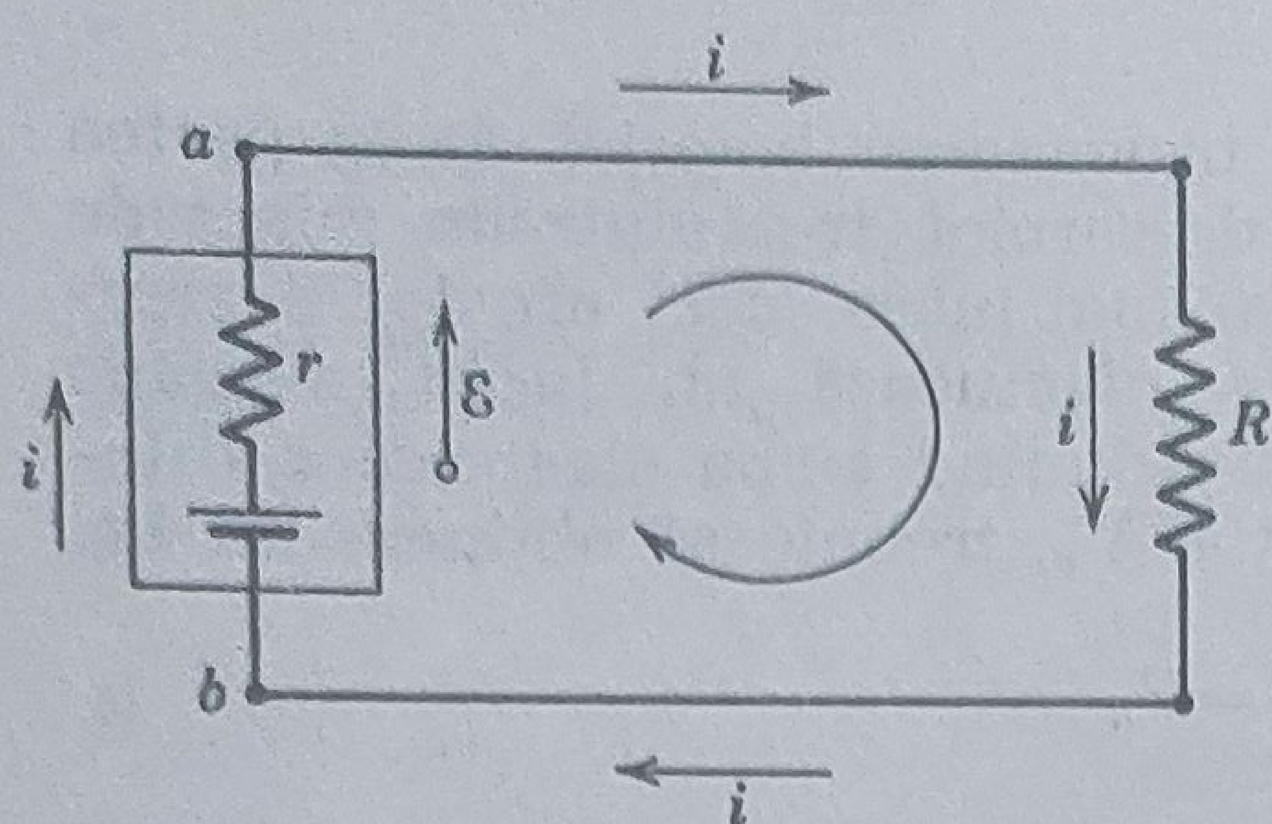
Dacă aplicăm legea a doua a lui Kirchhoff, plecînd din punctul *b* în sensul acelor de ceasornic, obținem

$$V_b + \mathscr{E} - ir - iR = V_b$$

sau

$$+\mathscr{E} - ir - iR = 0$$

* Diferența de potențial determinată de rezistența circuitului se numește cădere de potențial. (N. T.)



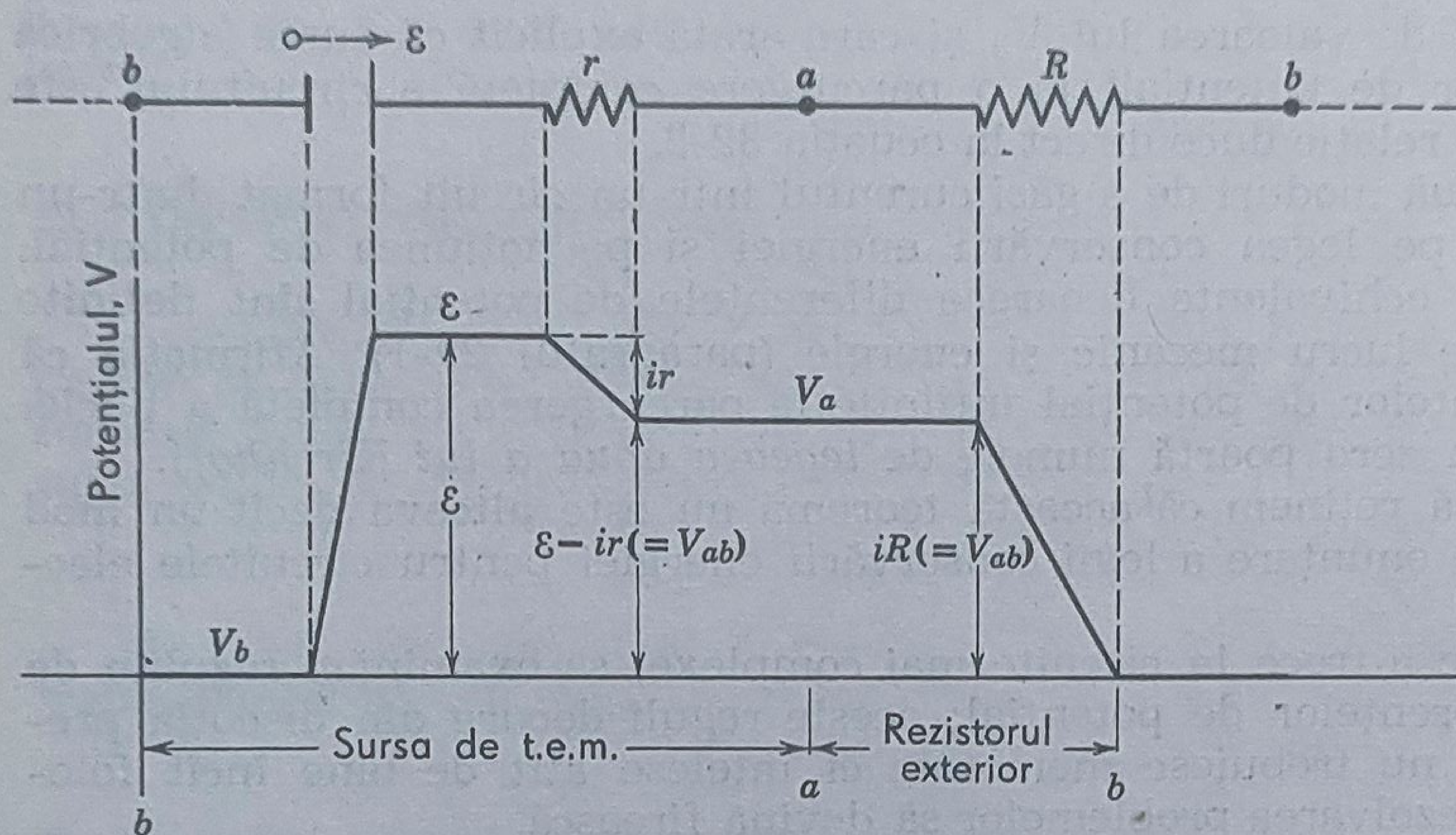


Figura 32-3. Un circuit cu un ochi. Blocul dreptunghiular este o sursă de t.e.m. de rezistență internă *r*. (b) Același circuit desenat pentru simplitate sub formă de linie dreaptă. Dedesubt sînt reprezentate căderile de potențial întîlnite parcurgînd circuitul pornind din punctul *b* în sens invers acelor de ceasornic.

Studentul va compara aceste ecuații cu figura 32-3 *b*, care arată grafic căderile de potențial. Observați că la scrierea acestor ecuații am parcurs pe r și R în direcția curentului iar pe $\mathcal{E}$ în direcția t.e.m. Se obține aceeași ecuație chiar dacă se pornește din oricare alt punct al circuitului sau dacă se parcurge circuitul în sens invers acelor de ceasornic. Rezolvînd în funcție de i se obține

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R+r} \tag{32-3}$$

Exemplul 1. *Rezistori în serie.* Rezistorii în serie sînt legați astfel încît curentul care trece printr-unul trece în mod obligator prin toți ceilalți ca în figura 32-4. Care este rezistența echivalentă R a acestei combinații de rezistor legați în serie? Rezistența echivalentă este acea rezistență R a unui rezistor care introdus în circuit între punctele ab, în locul rezistorilor legați în serie, va lăsa curentul i neschimbat.

Aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff (plecînd din a în sensul acelor de ceasornic) obținem:

$$-iR_1-iR_2-iR_3+\mathcal{E}=0$$

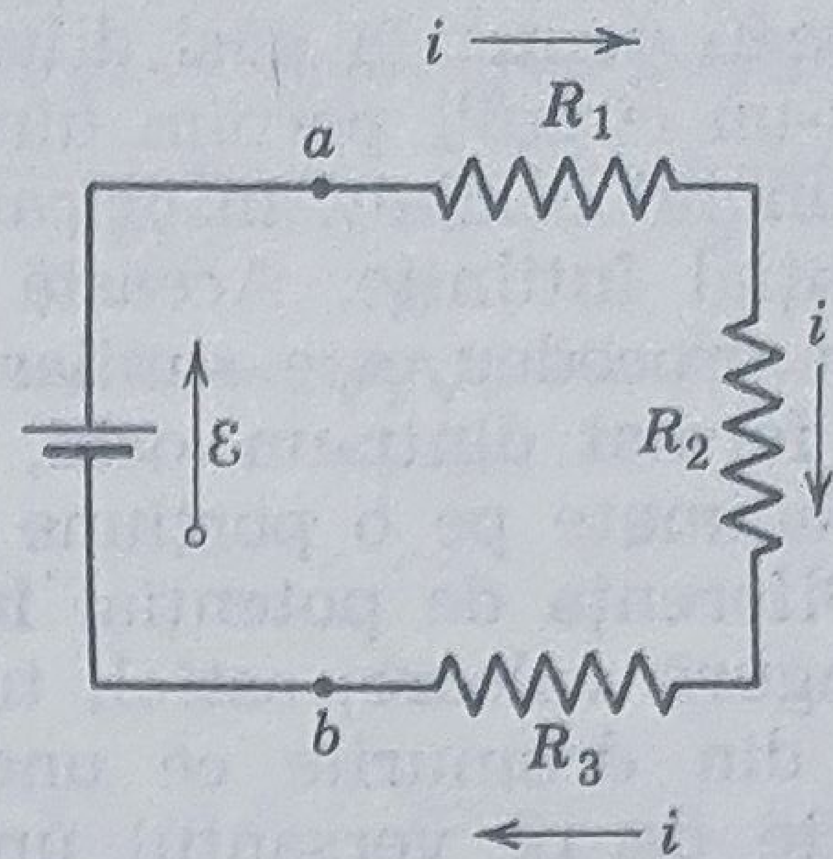


Figura 32-4. Exemplul 1. Trei rezistori sînt conectați în serie între bornele *a* și *b*.

sau

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+R_3}$$

Pentru rezistența echivalentă R

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}$$

sau

$$R=R_1+R_2+R_3 \qquad (32\text{-}4)$$

Generalizarea pentru cazul a mai mult de trei rezistori este clară.

32-4 Diferențe de potențial

Adesea dorim să calculăm diferența de potențial între două puncte dintr-un circuit. De exemplu, în fig. 32-3 *a*, care este legătura dintre diferența de potențial V_{ab} ($=V_a—V_b$) dintre punctele b și a și parametrii fixi $\mathcal{E}$, r și R ai circuitului? Pentru aceasta pornim din punctul b și parcurgem circuitul pînă în punctul a, trecînd prin rezistorul R în sens invers curentului. Dacă V_b și V_a sînt potențialele în b și a, respectiv, avem

$$V_b+iR=V_a$$

deoarece potențialul crește la parcurgerea rezistorului în sens invers curentului. Rescriem această relație ca

$$V_{ab}=V_a—V_b=+iR$$

care ne spune că V_{ab} diferența de potențial dintre puncte a și b are valoarea iR și că punctul a este mai pozitiv decît punctul b. Combinînd această ultimă ecuație cu ecuația 32-3 obținem

$$V_{ab}=\mathcal{E}\frac{R}{R+r} \qquad (32\text{-}5)$$

Deci, pentru a găsi diferența de potențial dintre oricare două puncte dintr-un circuit, pornim dintr-unul din puncte, parcurgem circuitul pînă la punctul celălalt, în oricare din sensuri și adunăm algebric căderile de potențial întîlnite. Această sumă algebrică este diferența de potențial. Acest procedeu este similar cu cel pentru găsirea curentului într-un circuit format dintr-un ochi, cu deosebirea că aici căderile de potențial sînt adunate pe o porțiune din circuit și nu pe întregul circuit.

Diferența de potențial între două puncte oarecare poate avea numai o singură valoare; astfel, trebuie să obținem aceeași valoare pentru oricare din drumurile ce unesc aceste puncte. Dacă considerăm două puncte de pe versantul unui deal, diferența de potențial gravitațional, măsurată, (adică altitudinea) dintre ele este aceeași indiferent de drumul parcurs. Să calculăm V_{ab}, din figura 32-3 a, urmînd un drum ce trece prin sau (vezi și fig. 32-3 b)

$$V_b+\mathcal{E}-ir=V_a$$

sau (vezi și fig. 32-3 b)

$$V_{ab}=V_a-V_b=+\mathcal{E}-ir$$

Din nou, combinînd cu ecuația 32-3 se obține ecuația 32-5.

Așa după cum arată ec. 32-5, diferența de potențial V_{ab} de la bornele bateriei, este mai mică decît $\mathcal{E}$ cu excepția cazului în care bateria nu are rezistență internă ($r=0$) sau cînd circuitul este deschis ($R=\infty$); atunci V_{ab} este egal cu $\mathcal{E}$. Astfel, t.e.m. a unui dispozitiv este egală cu diferența de potențial de la borne atunci *cînd circuitul este deschis.*

Exemplul 2. Fie $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ din figura 32-5 a, egale cu 2,0 V și 4,0 V, respectiv; fie rezistențele r_1, r_2 și R egale cu 1,0 Ω, 2,0 Ω și 5,0 Ω, respectiv. Care este curentul?

T.e.m. $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ sînt opuse una alteia, dar $\mathcal{E}_2$ fiind mai mare ea va da direcția curentului. Astfel i va fi în sens invers acelor de ceasornic. Legea a doua a lui Kirchhoff dă, plecînd de la a în sensul acelor de ceasornic

$$-\mathcal{E}_2+ir_2+iR+ir_1+\mathcal{E}_1=0$$

Studentul va verifica că se obține același rezultat și în cazul în care se alege sensul invers acelor de ceasornic. De asemenea, el va compara atent această ecuație cu fig. 32-5 b, care arată grafic diferențele de potențial.

Rezolvînd în funcție de i se obține

$$i=\frac{\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1}{R+r_1+r_2}=\frac{4{,}0\ \text{V}-2{,}0\ \text{V}}{5{,}0\ \Omega+1{,}0\ \Omega+2{,}0\ \Omega}=0{,}25\ \text{A}$$

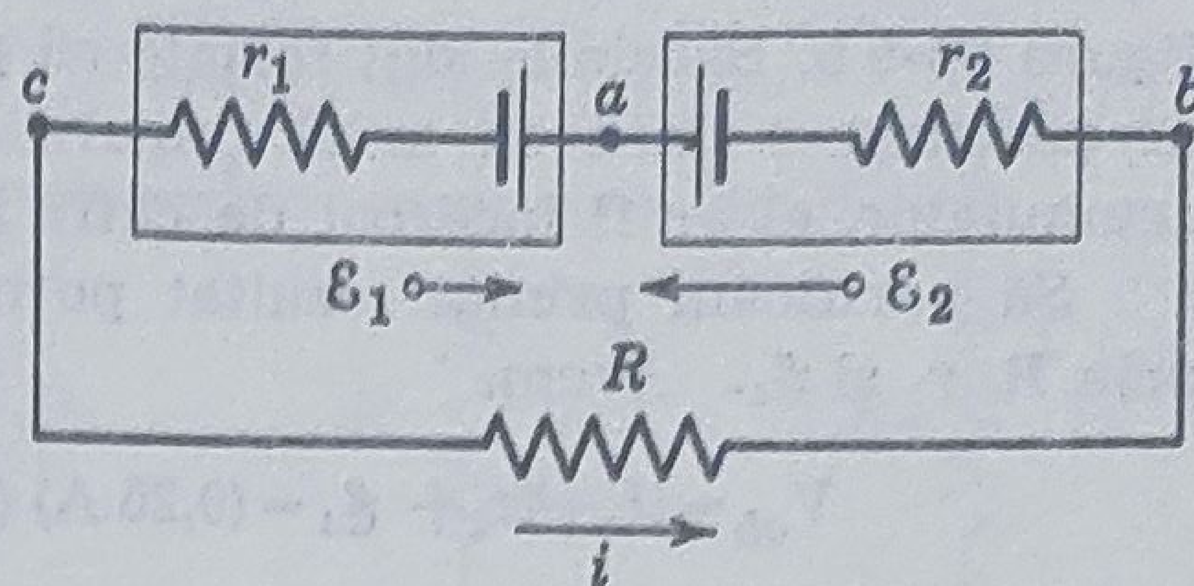
Nu este necesar să se cunoască dinainte care este direcția reală a curentului. Pentru a ilustra aceasta să presupunem că în figura 32-5 a curentul este în sensul acelor de ceasornic, presupunere ce știm că este incorectă. Legea a doua a lui Kirchhoff dă (plecînd din a în sensul acelor de ceasornic)

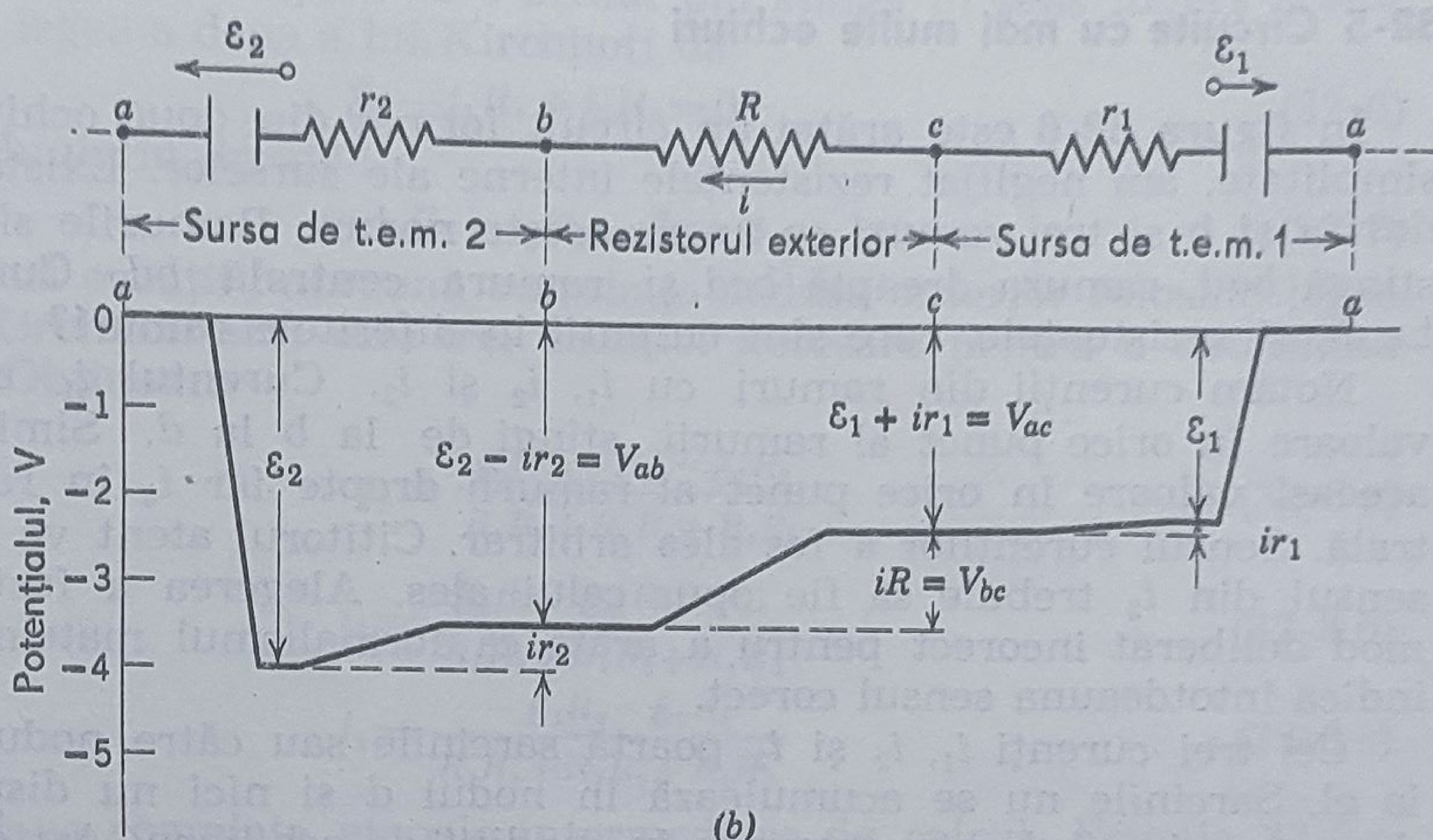
$$-\mathcal{E}-ir_2-iR-ir_1+\mathcal{E}_1=0$$

sau

$$i=\frac{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2}{R+r_1+r_2}$$

Figura 32-5. (a) Un circuit cu un ochi. (b) Acelaşi circuit este arătat schematic sub formă de linie dreaptă. Dedesubt sînt reprezentate căderile de potenţial întîlnite la traversarea circuitului pornind din punctul *a* în sensul acelor de ceasornic. Pentru simplitate potenţialul punctului *a* este considerat egal cu zero.





Introducînd valorile numerice (vezi mai sus) se obţine un curent de —0,25 A. Semnul minus arată că sensul curentului este în sens invers celui ales.

În problemele cu circuite mai complexe, formate din multe ochiuri şi ramuri adesea este imposibil să se cunoască dinainte semnul corect al curenţilor din toate porţiunile circuitului. Putem alege la întîmplare sensul curenţilor. Vor avea sensuri corecte acei curenţi pentru care se obţin valori numerice pozitive; acei pentru care se obţin valori negative, au sensuri opuse celor alese. Dar în toate cazurile valorile numerice sînt corecte.

Exemplul 3. Care este diferenţa de potenţial (a) dintre punctele a şi b din figura 32-5 a? (b) Dintre punctele a şi c?

(a) Pentru cazul punctelor a şi b, pornim din b şi parcurgem circuitul către a, obţinînd

$$V_{ab}\,(=V_a-V_b)=-ir_2+\mathscr{E}_2=-(0{,}25\text{ A})\,(2{,}0\,\Omega)+4{,}0\text{ V}=+3{,}5\text{ V}$$

Astfel, a este mai pozitiv decît b iar diferenţa de potenţial (3,5 V) este *mai mică* decît t.e.m. (4,0 V); vezi figura 32-5 b.

(b) Pentru punctele c şi a, pornim din c şi parcurgem circuitul către a, obţinînd

$$V_{ac}\,(=V_a-V_c)=+\mathscr{E}_1+ir_1=2{,}0\text{ V}+(0{,}25\text{ A})\,(1{,}0\,\Omega)=+2{,}25\text{ V}$$

Aceasta ne arată că potenţialul în a este mai mare decît în c. Diferenţa de potenţial de la bornele lui $\mathscr{E}_1$ (2,25 V) este *mai mare* decît t.e.m. (2,0 V); vezi

figura 32-5 b. Sarcinile sînt forțate să parcurgă sursa $\mathcal{E}_1$ în sens opus celui în care ar parcurge-o dacă ea ar fi singura sursă existentă în circuit; dacă $\mathcal{E}_1$ ar fi un acumulator, el ar fi încărcat de către $\mathcal{E}_2$.

Să verificăm primul rezultat pornind din b către a pe un alt drum și anume, prin R, r_1 și $\mathcal{E}_1$. Avem.

$$V_{ab}=iR+ir_1+\mathcal{E}_1=(0,25\ \text{A})\ (5,0\ \Omega)+(0,25\ \text{A})\ (1,0\ \Omega)+2,0\ \text{V}=3,5\ \text{V}$$

care este identic cu rezultatul precedent.

32-5 Circuite cu mai multe ochiuri

În figura 32-6 este arătat un circuit format din două ochiuri. Pentru simplitate, am neglijat rezistențele interne ale surselor. Există două *noduri a* și *b* și trei *ramuri* ce unesc aceste noduri. Ramurile sînt: ramura stîngă *bad*, ramura dreaptă *bcd* și ramura centrală *bd*. Cunoscîndu-se t.e.m. și rezistențele, care sînt curenții în diferitele ramuri?

Notăm curenții din ramuri cu i_1, i_2 și i_3. Curentul i_1 are aceeași valoare în orice punct al ramurii stîngi de la b la d. Similar, i_2 are aceeași valoare în orice punct al ramurii drepte iar i_3 în ramura centrală. Sensul curenților a fos ales arbitrar. Cititorul atent va observa că sensul din i_3 trebuie să fie opus celui ales. Alegerea a fost făcută în mod deliberat incorect pentru a arăta că formalismul matematic ne va indica întotdeauna sensul corect.

Cei trei curenți i_1, i_2 și i_3 poartă sarcinile sau către nodul d sau de la el. Sarcinile nu se acumulează în nodul d și nici nu dispar din el, deoarece circuitul este presupus în condiții de echilibru. Astfel, sarcinile sînt luate din nod de către curenți pe măsură ce ele sînt aduse în el. Dacă considerăm în mod arbitrar curentul ce intră în nod ca fiind pozitiv și negativ cel ce iese din el, atunci

$$i_1+i_3-i_2=0$$

Această ecuație ne sugerează un principiu general de rezolvare a rețelelor de curenți: *în orice nod, suma algebrică a curenților trebuie să fie zero.* Aceasta poartă numele de *legea nodului* sau de *legea întîia a lui Kirchhoff*. De observat că aceasta nu este altceva decît legea de conservare a sarcinii. Astfel, pentru rezolvarea rețelelor ne bazăm pe: (a) conservarea energiei (vezi pag. 151) și (b) conservarea sarcinii.

Pentru circuitul din figura 32-6, legea întîia a lui Kirchhoff ne furnizează doar o singură relație pentru cele trei necunoscute. Aplicînd legea pentru nodul b se obține exact aceeași ecuație, după cum studentul poate verifica. Pentru a găsi cele trei necunoscute sînt necesare încă două ecuații independente; ele pot fi găsite aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff.

În cazul circuitelor formate dintr-un singur ochi există doar un singur ochi căruia să-i aplicăm legea a doua a lui Kirchhoff iar curentul este același în oricare punct al ochiului. În circuitele formate din mai multe ochiuri, în general, curentul nu va fi același în toate porțiunile unui ochi dat.

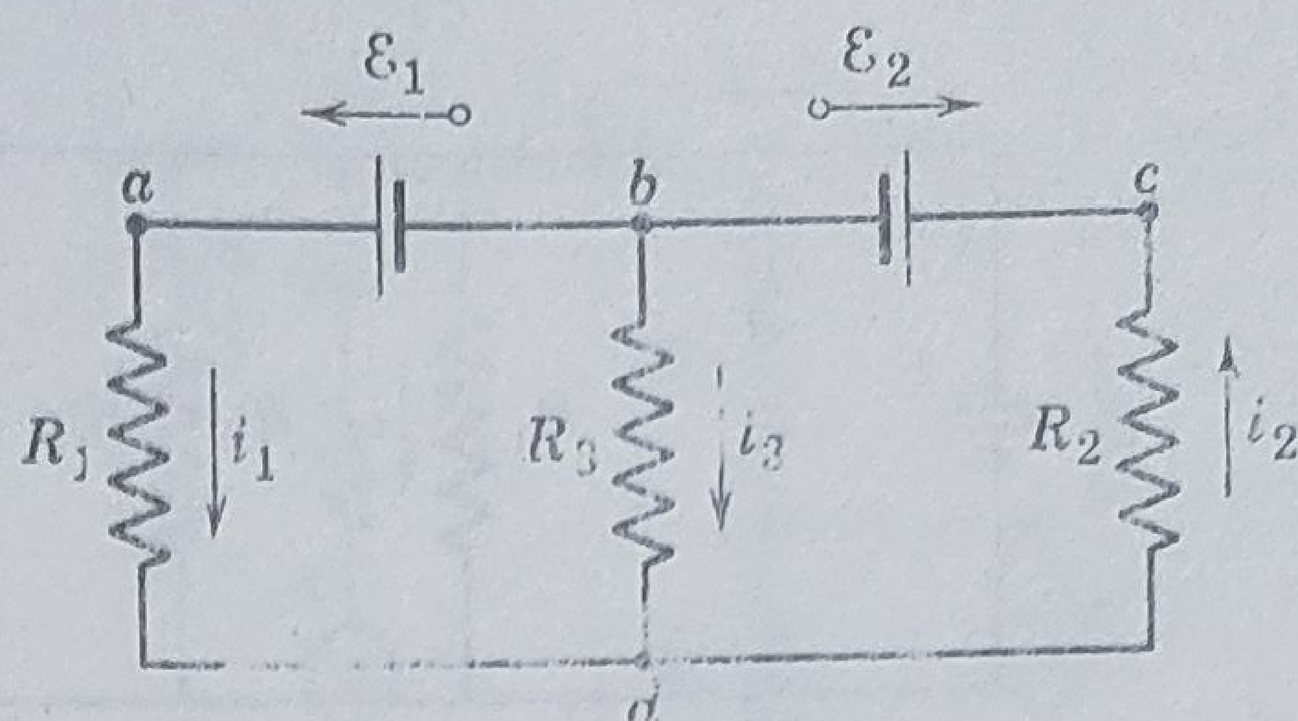


Figura 32-6. Un circuit cu mai multe ochiuri.

Dacă parcurgem în figura 32-6 ochiul din stînga în sens invers acelor de ceasornic, legea a doua a lui Kirchhoff dă

$$\mathcal{E}_1 - i_1R_1 + i_3R_3 = 0 \qquad (32\text{-}6)$$

Pentru ochiul din dreapta

$$-i_3R_3 - i_2R_2 - \mathcal{E}_2 = 0 \qquad (32\text{-}7)$$

Aceste două ecuații împreună cu relația dedusă anterior folosind legea întîia a lui Kirchhoff sînt cele trei ecuației necesare pentru a determina pe i_1, i_2 și i_3. Obținem:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2+R_3) - \mathcal{E}_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \qquad (32\text{-}8\ a)$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1R_3 - \mathcal{E}_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \qquad (32\text{-}8\ b)$$

$$i_3 = \frac{-\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \qquad (32\text{-}8\ c)$$

Studentul va completa etapele intermediare de calcul. Ecuația 32-8 c arată că indiferent de valorile numerice ale t.e.m. și ale rezistențelor, curentul i_3 va fi întotdeauna negativ. Aceasta înseamnă că în figura 32-6 el va avea întotdeauna sensul în sus și nu în jos așa cum l-am ales în mod intenționat. Curenții i_1 și i_2 pot avea orice sens, în funcție de valorile lor numerice.

Studentul va verifica că ecuația 32-8 duc la concluzii interesante pentru unele cazuri speciale. De exemplu, pentru $R_3 = \infty$, găsim

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} \quad \text{și} \quad i_3 = 0$$

La ce se reduc aceste ecuații pentru $R_2 = \infty$?

Putem aplica legea a doua a lui Kirchhoff unui ochi mare format din întregul circuit abcda din figura 32-6. Aceasta ar putea sugera că dispunem de mai multe ecuații decît avem nevoie, deoarece pentru numai trei necunoscute avem deja trei ecuații. Legea doua a lui Kirchhoff pentru acest ochi

$$-i_1R_1 - i_2R_2 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 = 0$$

nu este decît suma ecuațiilor 32-6 și 32-7. Astfel, pentru acest ochi mare nu obținem o altă ecuație *independentă*. La rezolvarea rețelelor nu vom obține niciodată mai multe ecuații, independente decît numărul necunoscutelor.

Exemplul 4. ***Rezistori în paralel.*** În figura 32-7 sînt arătați trei rezistori legați în paralel la aceeași sursă de t.e.m. Rezistorii la capetele cărora este apli-

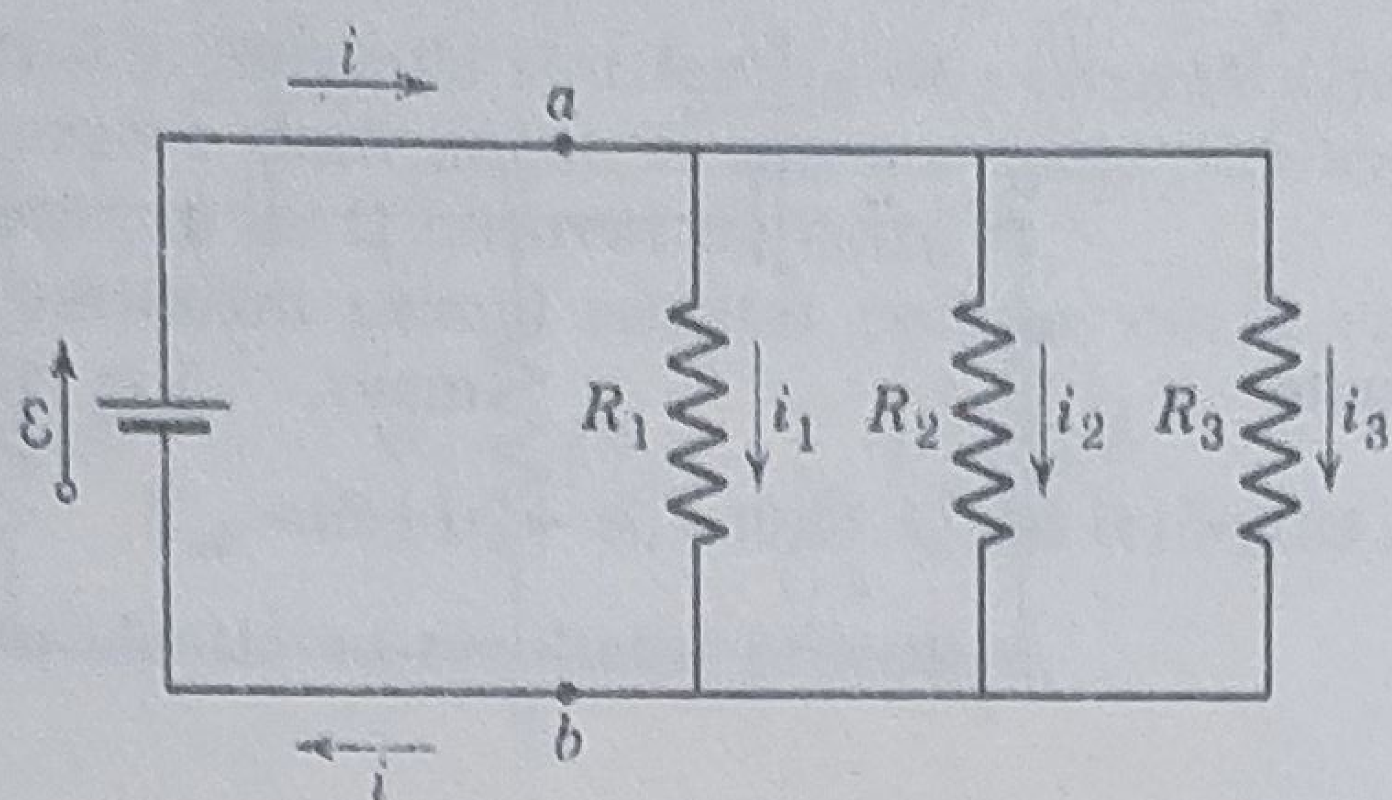


Figura 32-7. Exemplul 4. Trei rezistori sînt legaţi în paralel între bornele a şi b.

cată aceeaşi diferenţă de potenţial se spune că sînt legaţi în paralel. Care este rezistenţa echivalentă R a acestor rezistori legaţi în paralel? Rezistenţa echivalentă este acea rezistenţă R a unui rezistor care introdus în circuit în locul rezistorilor legaţi în paralel între bornele ab, lasă curentul i neschimbat.

Curenţii în cele trei ramuri sînt:

$$i_1 = \frac{V}{R_1}; \quad i_2 = \frac{V}{R_2} \quad \text{şi} \quad i_3 = \frac{V}{R_3}$$

unde V este diferenţa de potenţial ce apare între punctele a şi b. Curentul total i se poate determina aplicînd legea întîia a lui Kirchhoff la conductorul superior ce poate fi considerat ca un nod extins (fig. 32-7):

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Dacă în locul combinaţiei în paralel folosim rezistenţa echivalentă avem

$$i = \frac{V}{R}$$

Combinînd aceste două ecuaţii obţinem:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \tag{32-9}$$

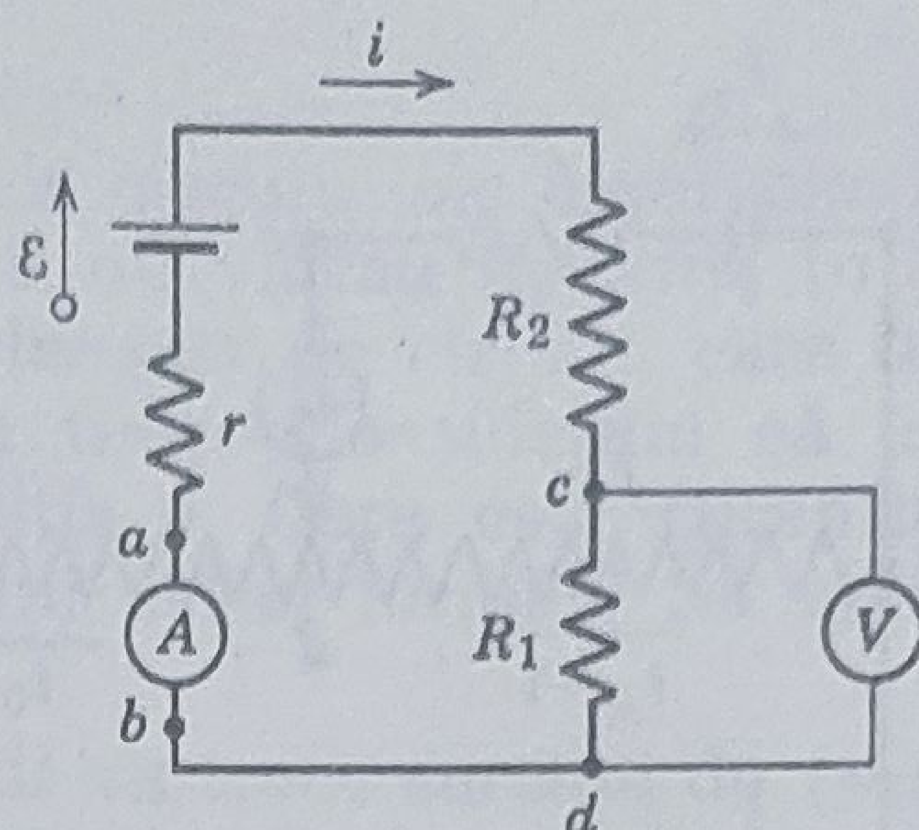
Această formulă poate fi extinsă uşor pentru mai mult de trei rezistenţe. Observaţi că rezistenţa echivalentă a unei combinaţii în paralel este mai mică decît oricare din rezistenţele componente.

32-6 Măsurarea curenţilor şi a diferenţelor de potenţial

Instrumentul de măsură a curenţilor poartă numele de *ampermetru* (sau *miliampermetru* sau *microampermetru* în funcţie de mărimea curentului de măsurat). Pentru a determina curentul ce trece printr-un fir, este necesar să întrerupem sau să tăiem firul şi să legăm în serie ampermetrul, astfel încît curentul de măsurat să treacă prin fir (vezi fig. 32-8).*

* Instrumentul trebuie să fie conectat astfel încît curentul să intre (presupunînd purtători de sarcină pozitivă) prin borna notată + a instrumentului. Altfel instrumentul va devia în sens invers.

Figura 32-8. Ampermetrul *(A)* este legat pentru a măsura curentul în circuit iar voltmetrul *(V)* este legat pentru a măsura diferența de potențial la capetele rezistorului R_1.



Este esențial ca rezistența R_A a ampermetrului să fie *mică* în comparație cu celelalte rezistențe din circuit. În caz contrar însăși înserierea instrumentului va modifica curentul de măsurat. Un ampermetru ideal ar trebui să aibe rezistența zero. Această condiție, în circuitul din figura 32-8, presupunînd că voltmetrul nu este conectat, este

$$R_A \ll r + R_1 + R_2$$

Instrumentul de măsură a diferențelor de potențial se numește *voltmetru* (sau *milivoltmetru* sau *microvoltmetru*). Pentru a determina diferența de potențial dintre două puncte dintr-un circuit, este necesar să legăm bornele voltmetrului la fiecare din punctele circuitului, fără să întrerupem circuitul (vez. fig. 32-8).*

Este esențial ca rezistența voltmetrului R_V să fie *mare* în comparație cu oricare din rezistențele circuitului. În caz contrar instrumentul însuși va reprezenta un element important din circuit și va modifica atît curentul în circuit cît și diferența de potențial de măsurat. Un voltmetru ideal trebuie să aibe o rezistență infinită. În fig. 32-8 condiția aceasta este

$$R_V \gg R_1$$

La măsurarea diferenței de potențial în circuitele electronice unde rezistența echivalentă a circuitului poate fi de ordinul $10^6\ \Omega$ sau mai mare, este necesar să se folosească *voltmetre electronice*, instrumente cu tuburi electronice ce sînt construite anume pentru a avea o rezistență internă foarte mare.

32-7 Potențiometrul**

În figura 32-9 este dată schema de principiu a unui *potențiometru* care este un dispozitiv pentru măsurarea unor t.e.m. $\mathcal{E}_x$ necunoscute. Curenții și t.e.m. sînt notate în figură. Astfel, aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff ochiului *a b c d*

$$-\mathcal{E}_x - ir + (i_0 - i)fR = 0$$

---

* Borna voltmetrului notată cu + trebuie conectată la punctul de potențial mai mare. Altfel, instrumentul va fi deviat în sens invers.

** Mai exact, aci avem de-a face cu un montaj potențiometric ce permite măsurarea diferențelor de potențial prin așa-numita metodă a compensării sau a opoziției. Aceasta este o metodă de zero, ce asigură precizie foarte mare în măsurătoare indiferent de rezistența internă a sursei măsurate. Compensarea se realizează prin deplasarea cursorului și este indicată prin curentul nul al galvanometrului. Din această cauză aceste dispozitive poartă denumirea de potențiometre compensatoare sau potențiometre compensatoare automate dacă echilibrarea se efectuează automat. (N. T.)

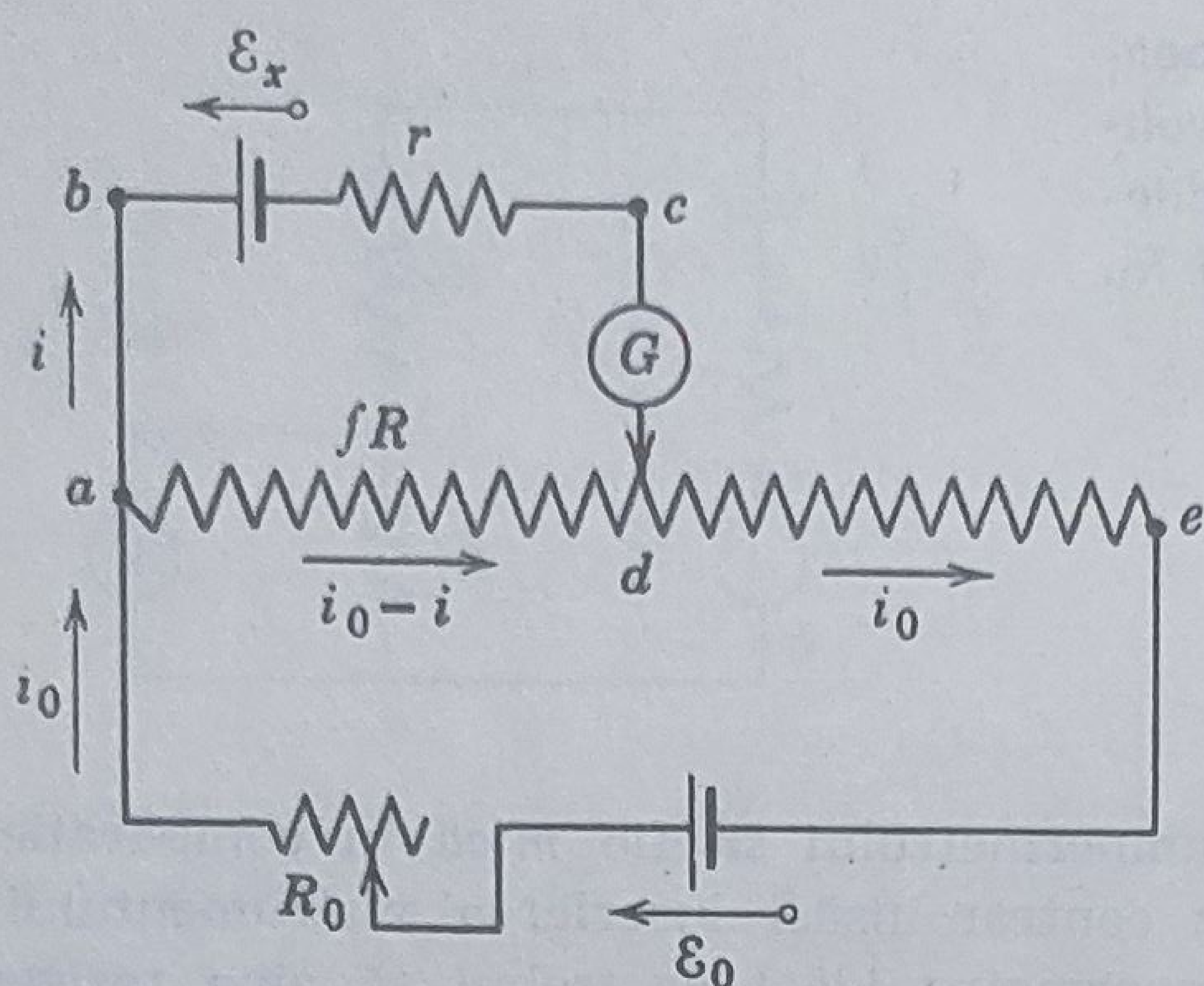


Figura 32-9. Schema de principiu a montajului electrometric. Rezistorul lung din centrul figurii are între punctele *a* și *e* rezistența *R*.

unde $i_0 - i$ este, aplicînd legea întîia a lui Kirchhoff nodului *a*, curentul prin rezistorul *R* iar *f* este fracțiunea din rezistorul uniform *R* ce corespunde poziției *d* a cursorului. Rezolvînd în funcție de *i* obținem:

$$i = \frac{i_0 f R - \mathcal{E}_x}{f R + r}$$

Această relație arată că dacă cursorul este deplasat din *d* dintr-un punt definit prin f_x, unde

$$i_0 f_x R = \mathcal{E}_x \tag{32-10}$$

curentul *i* din ramura *a b c d* devine zero. Pentru a *calibra* astfel potențiometrul, cursorul trebuie deplasat manual pînă ce instrumentul sensibil *G* indică zero.

T.e.m. poate fi obținută din ecuația 32-10 dacă se cunoaște curentul i_0 deoarece f_x poate fi cunoscut citind diviziunile de pe rezistorul *R* corespunzătoare poziției cursorului. În practică se înlocuiește $\mathcal{E}_x$ printr-o t.e.m. standard cunoscută $\mathcal{E}_s$ și se deplasează cursorul pînă ce condiția de curent zero este îndeplinită. Aceasta înseamnă, presupunînd că i_0 rămîne neschimbat

$$i_0 f_s R = \mathcal{E}_s$$

Combinînd cele două ecuații obținem

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_s \frac{f_x}{f_s} \tag{32-11}$$

care ne permite să comparăm cu precizie tensiunile electromotoare. De observat că rezistența internă *r* a t.e.m. nu joacă nici un rol. În realitate, potențiometrele se prezintă sub forma unui aparat ce conține o *sursă etalon* de tensiune, calibrată în prealabil de Biroul Național de Standarde*, ca sursă standard de t.e.m. $\mathcal{E}_s$ cunoscută. Dispozitivele de comutare pentru trecerea de la sursa de t.e.m. cunoscută la cea necunoscută cît și dispozitivele necesare pentru reglarea curentului i_0 ce rămîne constant, sînt de asemenea încorporate în aparat. Rezistorul *R* este format dintr-o serie de rezistori iar pozițiile cursorului pe acești rezistori sînt marcate direct în $\mathcal{E}_x$.

---

* La noi, calibrarea se efectuează de către Institutul de Metrologie. (N.T.).

32-8 Circuite RC

În paragrafele precedente ne-am ocupat de circuite ale căror elemente componente erau rezistorii și în care curenții nu variau în timp. În acest paragraf vom introduce condensatorul ca element de circuit, care ne va conduce la noțiunea de curenți variabili în timp. Considerăm că întrerupătorul I din figura 32-10 se află în poziția a. Care este curentul ce se stabilește în circuitul dintr-un singur ochi astfel format? Să aplicăm legea conservării energiei.

Prin orice punct al circuitului în timpul dt va trece sarcina dq $(=i\,dt)$. Lucrul mecanic efectuat de sursa de t.e.m. $[=\mathcal{E}\,dq$; vezi ec. 32-1] trebuie să fie egal cu energia ce apare sub formă de căldură joule în rezistor în timpul dt $(=i^2R\,dt)$ plus energia U acumulată în condensator în acest interval de timp $[=dU=d(q^2/2C)$; vezi ec. 30-25]. Sub formă de ecuație

$$\mathcal{E}\,dq=i^2R\,dt+d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

sau

$$\mathcal{E}\,dq=i^2R\,dt+\frac{q}{C}\,dq.$$

Împărțind cu dt obținem

$$\mathcal{E}\frac{dq}{dt}=i^2R+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}.$$

Dar dq/dt este chiar i, astfel că această ecuație devine

$$\mathcal{E}=iR+\frac{q}{C} \tag{32-12}$$

Această ecuație poate fi dedusă și din legea doua a lui Kirchhoff cum este și normal, dacă ne amintim că legea a doua a lui Kirchhoff a fost dedusă din legea conservării energiei. Plecînd din punctul x și traversînd circuitul în sensul acelor de ceasornic, vom observa o creștere a potențialului în momentul de trecere prin sursa de t.e.m. și o scădere a potențialului la trecerea prin rezistor și prin condensator, sau

$$\mathcal{E}-iR-\frac{q}{C}=0,$$

care este identică cu ecuația 32-12.

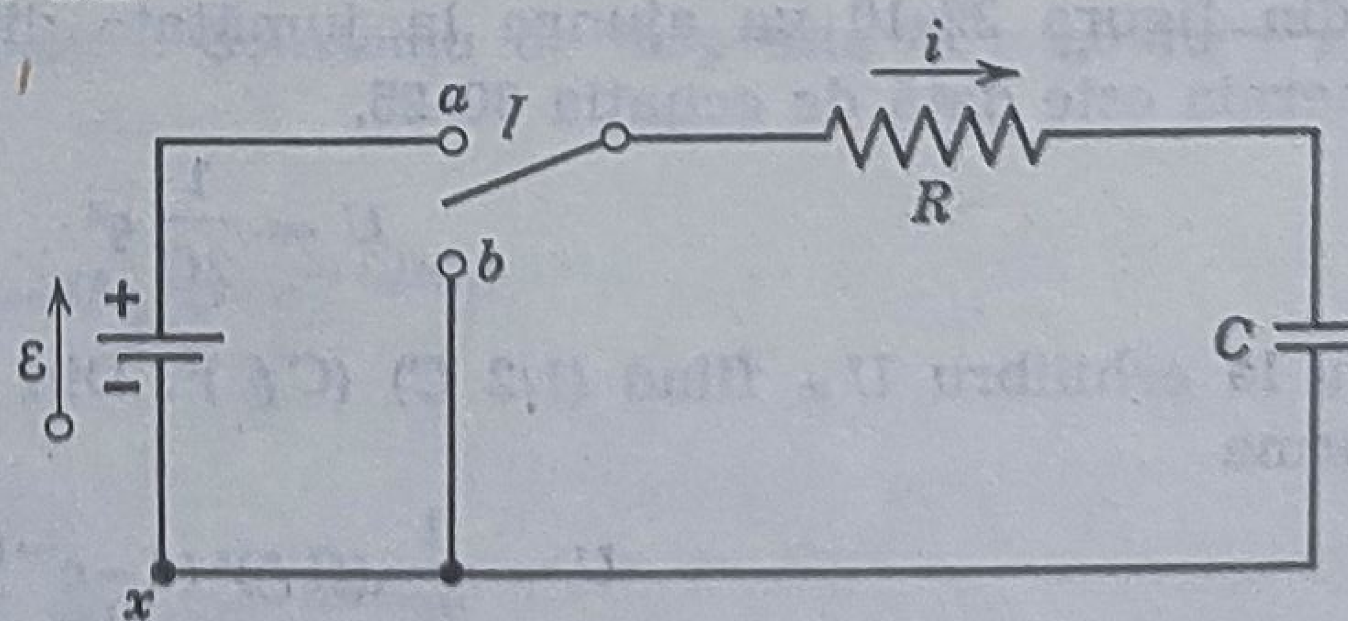


Figura 32-10. Un circuit RC.

Nu putem rezolva imediat ecuaţia 32-12 deoarece ea conţine două variabile, q şi i, care sînt legate prin relaţia

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{32-13}$$

Înlocuind pe i în ecuaţia 32-12 obţinem

$$\mathscr{E} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \tag{32-14}$$

Acum sarcina noastră este de a găsi funcţia $q(t)$ ce satisface această *ecuaţie diferenţială*. Deşi această ecuaţie nu este dificil de rezolvat, preferăm să evităm complicaţiile matematice, dînd pur şi simplu soluţia, care este

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}) \tag{32-15}$$

Putem verifica uşor dacă această funcţie $q(t)$ este în adevăr o soluţie a ec. (32-14), substituind-o în ecuaţii şi văzînd dacă se obţine o identitate. Diferenţiind ecuaţia 32-15 în funcţie de timp se obţine

$$\frac{dq}{dt}(=i) = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/RC} \tag{32-16}$$

Introducînd pe q ecuaţia 32-15 şi pe dq/dt ecuaţia 32-16 în ecuaţia 32-14 se obţine o identitate, după cum studentul poate verifica. Astfel, ecuaţia 32-15 este o soluţie a ecuaţiei 32-14.

În figura 32-11 sînt date reprezentări ale ecuaţiilor 32-15 şi 32-16 pentru un caz particular. Studiul acestor reprezentări şi al ecuaţiilor corespunzătoare arată că (a) la $t=0$, $q=0$ şi $i=\mathscr{E}/R$, şi (b) cînd $t \to \infty$, $q \to C\mathscr{E}$ şi $i \to 0$: adică iniţial curentul este $\mathscr{E}/R$ şi în final zero; sarcina de pe plăcile condensatorului este iniţial zero şi în final este egală cu C.

Mărimea RC din ecuaţiile 32-15 şi 32-16 are dimensiunile unui timp (deoarece exponentul trebuie să fie adimensional) şi poartă numele de *constanta de timp capacitivă* a circuitului RC. Ea reprezintă timpul în care sarcina de pe plăcile condensatorului creşte cu factorul $(1-e^{-1})$ $(=63\%)$ din valoarea sa de echilibru. Pentru a arăta aceasta, punem $t=RC$ în ec. (32-15) şi obţinem

$$q = C\mathscr{E}(1-e^{-1}) = 0{,}63\ C\mathscr{E}$$

Ceea ce am vrut să arătăm deoarece $C\mathscr{E}$ este sarcina de echilibru de pe plăcile condensatorului, corespunzătoare la $t \to \infty$.

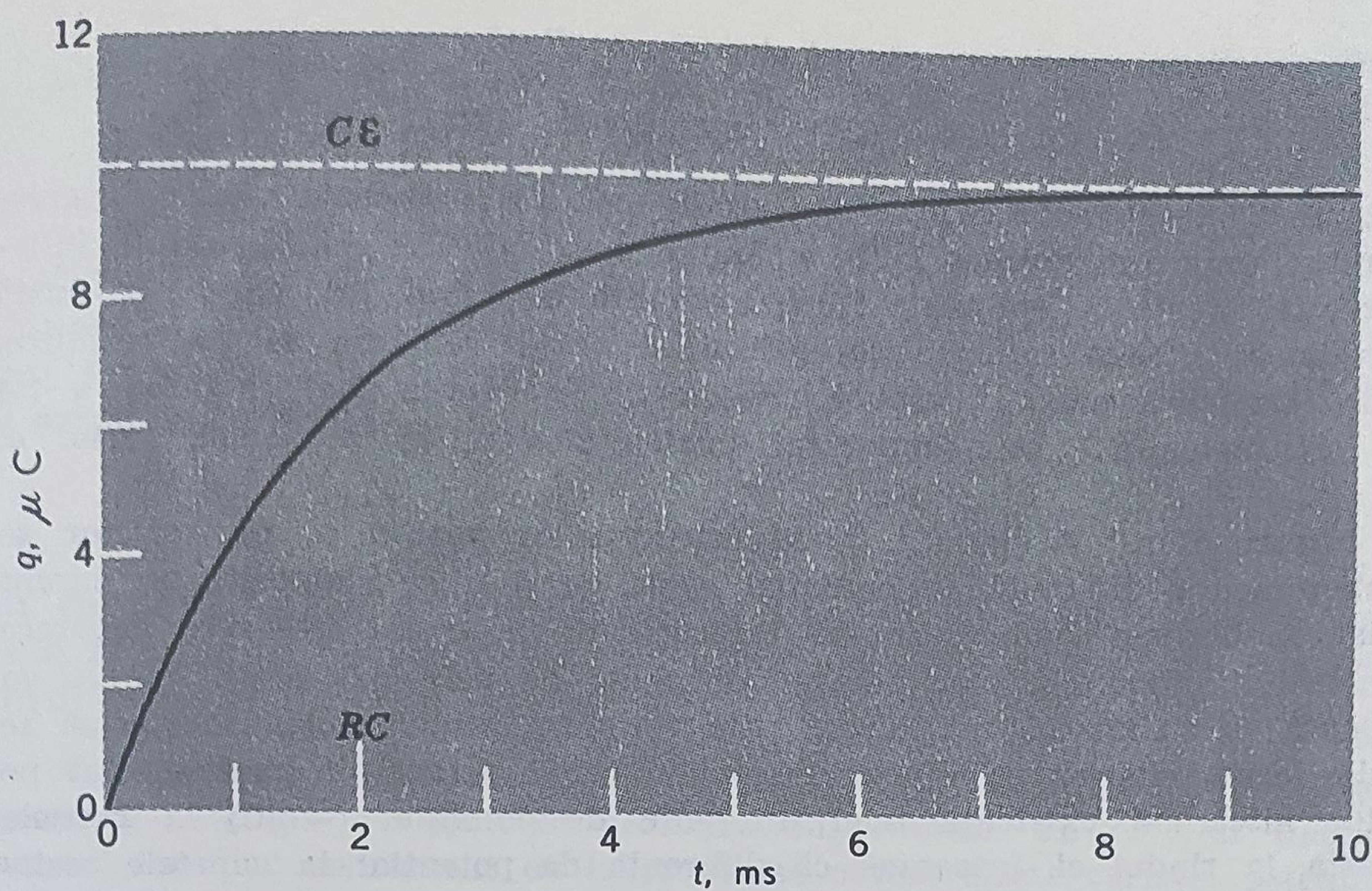
Exemplul 5. După cîte constante de timp, energia înmagazinată în condensatorul din figura 32-10 va ajunge la jumătate din valoarea s-a de echilibru?

Energia este dată de ecuaţia 30-25.

$$U = \frac{1}{2C}q^2$$

energia la echilibru U_∞ fiind $(1/2\ C)\ (C\mathscr{E})^2$. Din ecuaţia 32-15, putem scrie energia sub forma

$$U = \frac{1}{2C}(C\mathscr{E})^2(1-e^{-t/RC})^2$$



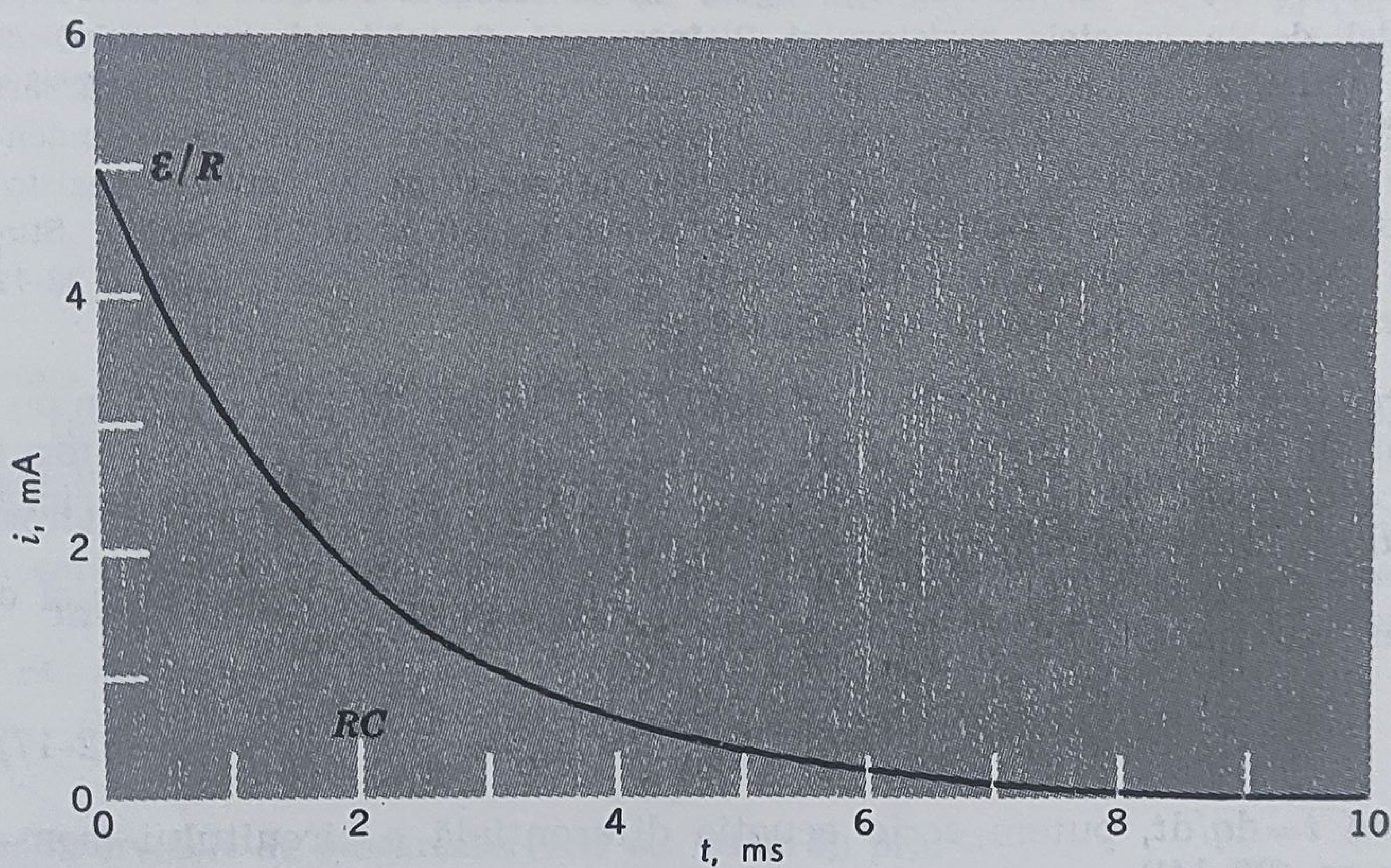


Figura 32-11. Dacă presupunem că în figura 32-10, R=2 000 Ω, C=1,0 μF și ℰ=10 V, atunci (a) reprezintă variația lui q cu t în timpul procesului de încărcare, iar (b) variația lui i cu t. Constanta de timp este $RC=2{,}0\cdot10^{-3}$ s.

sau

$$U=U_\infty(1-e^{-t/RC})$$

Punînd $U=\frac{1}{2}U_\infty$ obținem

$$\frac{1}{2}=(1-e^{-t/RC})$$

şi rezolvînd această relaţie în raport cu t obţinem în final

$$t=1{,}22\ RC=\ 1{,}22 \text{ constante de timp.}$$

Din figura 32-11 se vede că dacă în circuit există o rezistenţă viteza de creştere a sarcinii unui condensator către valoarea sa finală de echilibru este *întîrziată;* o măsură a acestei întîrzieri fiind constanta de cîmp RC. Cînd nu există nici un rezistor ($RC=0$) sarcina creşte imediat către valoarea sa de echilibru. Deşi am arătat că această întîrziere rezultă din aplicarea legii a doua a lui Kirchhoff circuitelor RC, este important pentru student să înţeleagă sensul ei fizic.

Cînd întrerupătorul I din fig. 32-10 este pus în poziţia a, pe rezistor se aplică instantaneu o diferenţă de potenţial egală cu $\mathcal{E}$ şi se stabileşte un curent $\mathcal{E}/R$. Iniţial, la bornele condensatorului diferenţa de potenţial este zero deoarece sarcina sa iniţială fiind egală cu zero şi diferenţa de potenţial egală cu q/C va fi zero. Odată cu stabilirea unui curent prin rezistor, condensatorul începe să se încarce şi aceasta are cîteva efecte. În primul rînd, existenţa unei sarcini pe condensator înseamnă existenţa unei diferenţe de potenţial ($=q/C$) la bornele sale; aceasta, la rîndul ei, înseamnă că diferenţa de potenţial la capetele rezistorului trebuie să scadă cu această cantitate, deoarece suma celor două diferenţe de potenţial trebuie să fie întotdeauna egală cu ε. Această scădere a diferenţei de potenţial de la capetele rezistorului R înseamnă şi scăderea curentului de încărcare. Astfel, pe condensator se acumulează sarcină şi curentul de încărcare scade pînă ce condensatorul este complet încărcat. În acest moment pe condensator este aplicată întreaga t.e.m. $\mathcal{E}$, diferenţa de potenţial la capetele rezistorului fiind egală cu zero ($i=0$). Aceasta este exact opusul situaţiei iniţiale. Studentul va revedea deducerea ecuaţiilor 32-15 şi 32-16 şi va studia figura 32-11 folosind argumentele calitative din acest paragraf.

Să presupunem acum că întrerupătorul I din figura 32-10 se află în poziţia a un interval de timp t, unde $t \gg RC$. Deci practic condensatorul se încarcă complet. Apoi întrerupătorul I este comutat în b. Cum variază cu timpul sarcina condensatorului şi curentul?

Cînd întrerupătorul I se află în poziţia b, în circuit nu există nici o t.e.m., iar ecuaţia (32-12) pentru circuit, cu $\mathcal{E}=0$, devine

$$iR+\frac{q}{C}=0 \tag{32-17}$$

Punînd $i=dq/dt$, putem scrie ecuaţia diferenţială a circuitului (comparaţi cu ec. (32-14))

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \tag{32-18 a}$$

Soluţia este

$$q=q_0\ e^{-t/RC} \tag{32-18 b}$$

după cum studentul poate verifica uşor, q_0 fiind sarcina iniţială a condensatorului. Constanta de timp capacitivă RC apare atît în această expresie ce dă descărcarea condensatorului cît şi în cea de încărcare a lui (ec. 32-15). Se vede că după intervalul de timp $t=RC$ sarcina condensatorului a scăzut la valoarea $q_0\ e^{-1}$, ceea ce reprezintă 37% din sarcina iniţială q_0.

Curentul în timpul descărcării se obține diferențiind ecuația 32-18 b

$$i=\frac{dq}{dt}=-\frac{q_0}{RC}e^{-t/RC} \qquad (32\text{-}19)$$

Semnul minus arată că sensul curentului este opus celui indicat în figura 32-10. Acest rezultat este corect deoarece condensatorul în realitate se descarcă și nu se încarcă. Deoarece $q_0=C\mathscr{E}$, ecuația 32-19 poate fi scrisă sub forma

$$i=-\frac{\mathscr{E}}{R}\cdot e^{-t/RC}$$

în care $\mathscr{E}/R$ joacă rol de curent inițial, corespunzător lui $t=0$. Aceasta este rezonabil, deoarece diferența inițială de potențial pentru condensatorul complet încărcat este $\mathscr{E}$.

Comportarea circuitului RC din figura 32-10 în timpul încărcării și descărcării poate fi studiată cu ajutorul oscilografului catodic. Pe ecranul fluorescent al acestui familiar instrument de laborator se obține direct variația potențialului cu timpul. În figura 32-12 este dat circuitul din figura 32-10 cu legăturile făcute astfel pentru a se putea reprezenta (a) diferența de potențial V_C de la bornele condensatorului și (b) diferența de potențial V_R de la bornele rezistorului în funcție de timp. V_C și V_R sînt date de

$$V_C=\left(\frac{1}{C}\right)q$$

și

$$V_R=(R)\,i$$

prima fiind proporțională cu sarcina și a doua cu mărimea curentului.

În figura 32-13 sînt date reprezentările pe oscilograf ale lui V_C și V_R atunci cînd întrerupătorul I din fig. 32-10 este comutat cînd în poziția a cînd în b, în fiecare poziție fiind lăsat un interval egal cu cîteva constante de timp. Intervalele în care sarcina se acumulează sînt notate *înc* iar cele în care scade, *desc*.

Intervalele de încărcare în reprezentarea a (vezi ec. (32-15)) sînt reprezentate prin

$$V=\left(\frac{1}{C}\right)q=\mathscr{E}\,(1-e^{-t/RC})$$

iar intervalele de descărcare (vezi ec. (32-18 b)) prin

$$V=\left(\frac{1}{C}\right)q=\mathscr{E}e^{-t/RC}$$

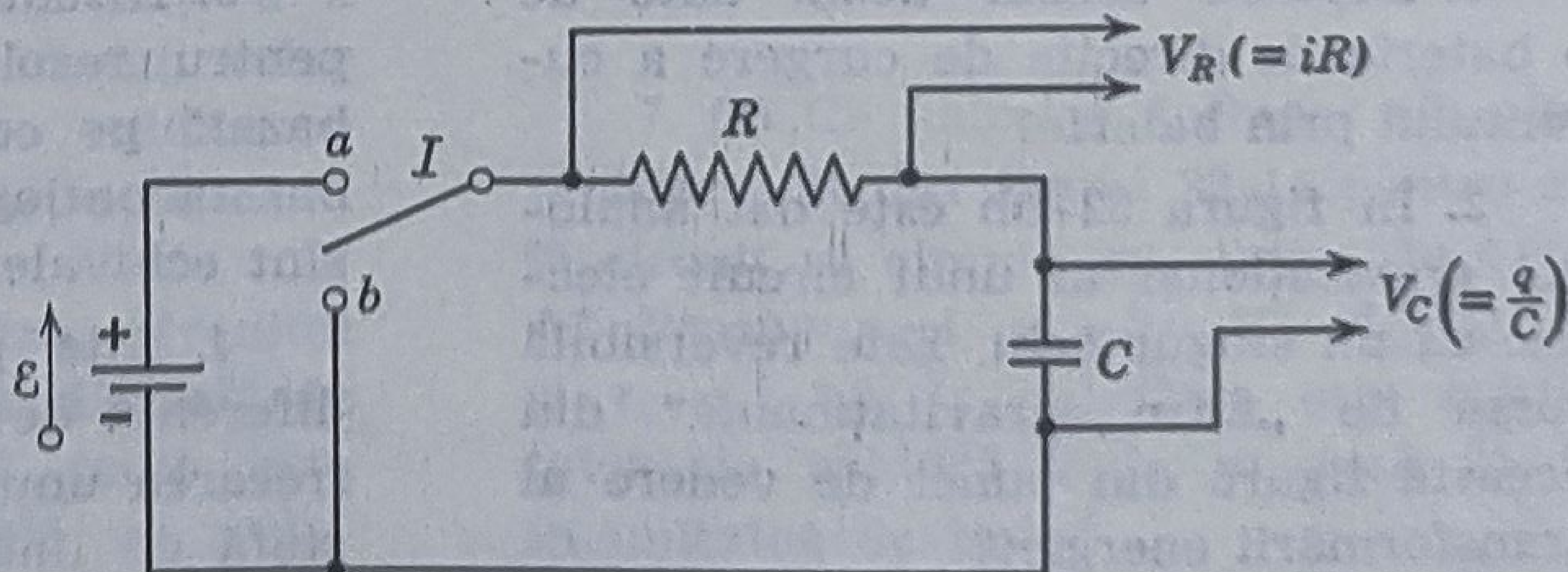


Figura 32-12. Circuitul din figura 32-10 cu legăturile făcute pentru a se putea reprezenta pe ecranul unui osciloscop diferența de potențial de la bornele rezistorului și condensatorului.

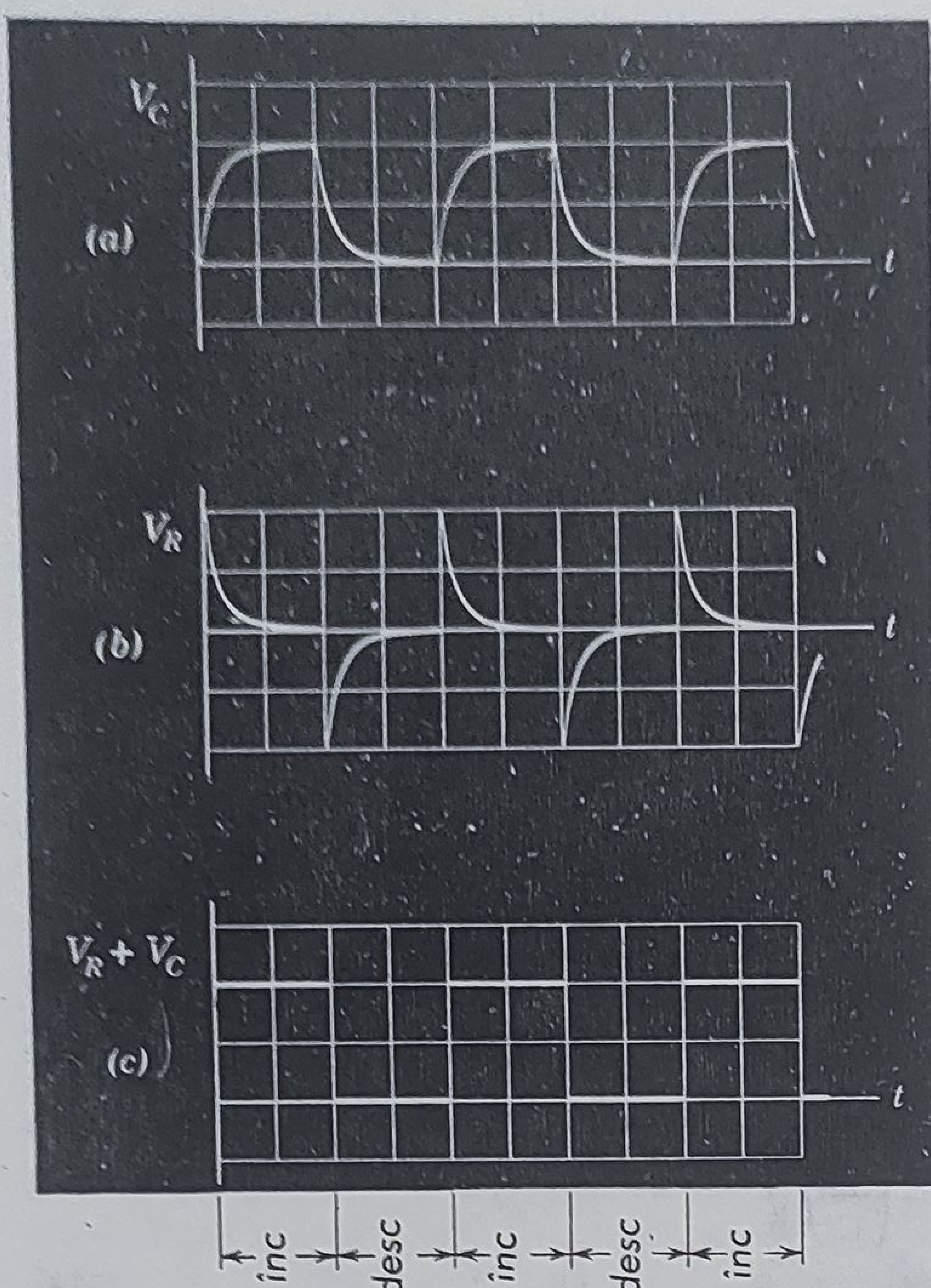


Figura 32-13. În figura 32-10 comutatorul *I* este comutat periodic cu ajutorul unui dispozitiv electronic, între pozițiile *a* și *b*. Imaginea de pe ecranul unui osciloscop a variației cu timpul a diferenței de potențial de la capetele condensatorului (a) și (b) ale rezistorului. (c) Imaginea ce apare pe ecran atunci cînd osciloscopul este conectat pentru a reprezenta suma lui V_R și a lui V_C. (Prin amabilitatea lui E. K. Hege, Rensselaer Polytechnic Institute).

De observat că, după cum indică reprezentarea b, curentul în timpul încărcării are sens invers celui din timpul descărcării, în concordanță cu ecuațiile 32-16 și 32-19.

În reprezentarea c din figura 32-13 oscilograful a fost legat pentru a se obține suma algebrică a reprezentărilor a și b. Conform legii a doua a lui Kirchhoff, această sumă trebuie să fie egală cu $\mathcal{E}$ în timpul intervalelor de încărcare și zero în timpul celor de descărcare, cînd sursa nu încă este în circuit, adică

$V_R+V_C=\mathcal{E}$ în timpul încărcării (vezi ec. 32-12)

$V_R+V_C=0$ în timpul descărcării (vezi ec. 32-17).

Reprezentarea c este în deplină concordanță cu aceasta.

Întrebări

1. Depinde sensul t.e.m. date de o baterie de direcția de curgere a curentului prin baterie?

2. În figura 32-1 b este dat analogul gravitațional al unui circuit electric cu un singur ochi. Este reversibilă sursa de „t.e.m. gravitațională“ din această figură din punct de vedere al transformării energiei?

3. Discutați în detaliu afirmația: pentru rezolvarea circuitelor metoda bazată pe conservarea energiei și cea bazată pe legea a doua a lui Kirchhoff sînt echivalente.

4. Este posibil să se genereze o diferență de potențial de 10 000 V prin frecarea unui pieptene de buzunar cu o stofă de lînă. De ce această diferență

de potențial atît de mare nu este periculoasă iar tensiunea mult mai mică de la o priză obișnuită este foarte periculoasă?

5. Imaginați o metodă de măsurare a t.e.m. și a rezistenței interne a unei baterii.

6. Un bec de 25 W, 110 V luminează normal cînd este legat la o baterie de acumulatori. Un bec de 500 W, 110 V legat la aceeași baterie luminează slab. Explicați.

7. În ce condiții, diferența de potențial de la bornele unei baterii este mai mare decît t.e.m. a sa?

8. Care este diferența dintre o t.e.m. și o diferență de potențial?

9. Care este analogul, în curgerea fluidelor incompresibile, (a) legii a doua a lui Kirchhoff și (b) legii întîia a lui Kirchhoff.

10. Găsiți asemănările și deosebirile dintre formulele valorilor echivalente ale (a) condensatoarelor și (b) rezistorilor legați în serie și în paralel.

11. Depinde timpul de încărcare al unui condensator, dintr-un circuit RC, pînă la o fracțiune dată a valorii sale de echilibru de mărimea t.e.m. aplicate?

12. Imaginați o metodă de folosire a unui circuit RC la măsurarea rezistențelor foarte mari.

Probleme

1. În circuitul exterior al unui acumulator de 6,0 V se stabilește un curent de 5,0 A timp de 60 minute. Cu cît se micșorează energia chimică a acumulatorului?

2. Într-un circuit serie simplu, curentul este de 5 A. Dacă se inseriază o rezistență suplimentară de 2 Ω, curentul scade la 4 A. Care este rezistența circuitului inițial?

3. În exemplul 2, în circuit se introduce și un ampermetru de rezistența 0,05 Ω. Cu cîte procente va varia curentul datorită introducerii ampermetrului?

4. În figura 32-3 a, fie $\mathscr{E}=2,0$ V și $r=100$ Ω. Reprezentați (a) curentul și (b) diferența de potențial la capetele lui R în funcție de R pentru intervalul 0—500 Ω. Faceți ambele reprezentări pe același grafic. (c) Faceți o a treia reprezentare cu produsul celor două curbe, pentru fiecare valoare a lui R. Care este semnificația fizică a acestei reprezentări?

5. (a) Arătați că pentru circuitul din figura 32.3 a, puterea disipată în R sub formă de căldură joule este maximă cînd R este egală cu rezistența internă r a bateriei. (b) Arătați că puterea maximă este $P=\mathscr{E}^2/4r$.

6. Cantitatea de căldură generată în unitatea de timp într-un rezistor de 0,10 Ω legat la o baterie a cărei t.e.m. este de 1,5 V este de 10 W. (a) Care este rezistența internă a bateriei? (b) Care este diferența de potențial la capetele rezistorului?

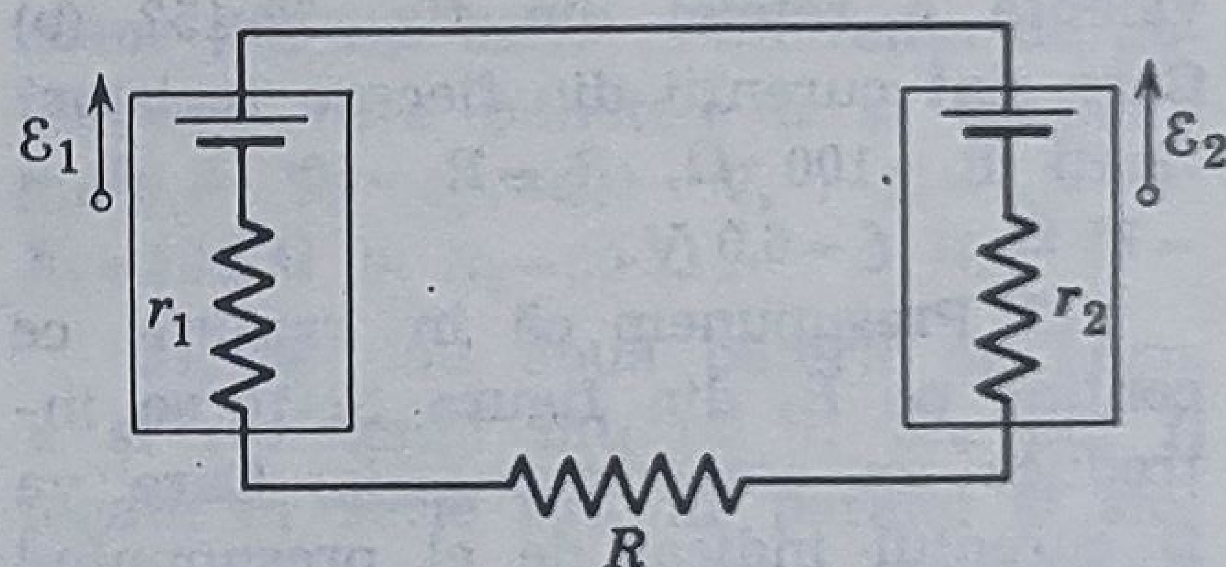


Figura 32-14.

7. (a) Ce valoare trebuie să aibe rezistorul R din figura 32-14 pentru ca în circuit să circule un curent de 0,001 A? Presupuneți $\mathscr{E}_1=2,0$ V, $\mathscr{E}_2=3,0$ V și $r_1=r_2=3,0$ Ω. (b) Care este cantitatea de căldură joule produsă în R în unitatea de timp?

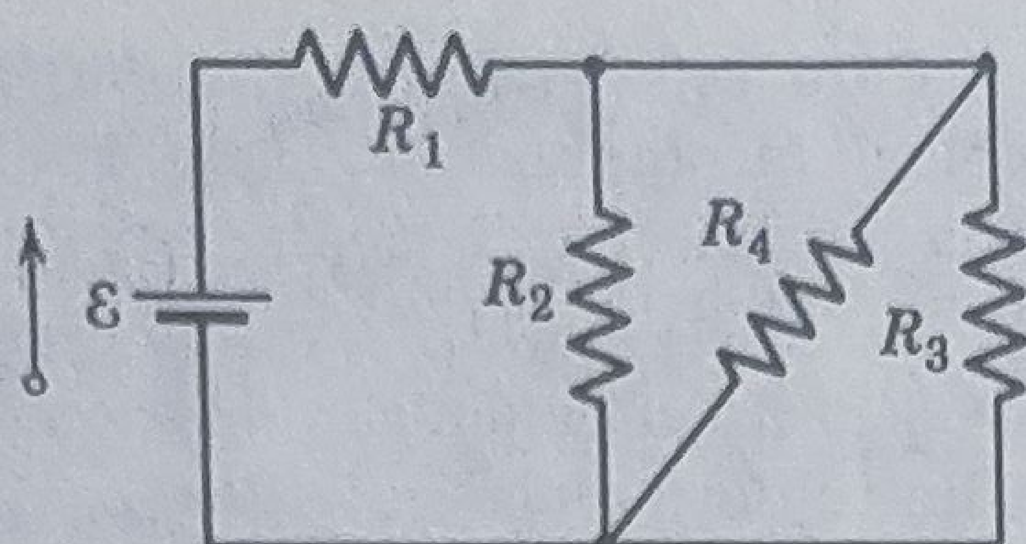


Figura 32-15.

8. Un fir de rezistență 5,0 Ω este legat la o baterie ce are t.e.m. $\mathcal{E}=2,0$ V și rezistența internă de 1,0 Ω. (a) Care este cantitatea de energie chimică transformată în energie electrică într-un interval de timp de 2,0 minute? (b) Care este cantitatea de energie ce apare în fir sub formă de căldură joule în acest interval de timp? (c) Explicați diferența dintre (a) și (b).

9. Calculați diferența de potențial dintre punctele c și d din figura 32-6 folosind cît mai multe variante posibile. Presupunem că $\mathcal{E}_1=4,0$ V, $\mathcal{E}_2=1,0$ V, $R_1=R_2=10$ Ω și $R_3=5$ Ω.

10. Calculați diferența de potențial dintre punctele a și c din figura 32-5 considerînd parcursul ce conține pe R și $\mathcal{E}_2$.

11. (a) Care este rezistența echivalentă a rețelei din fig. 32-15? (b) Care sînt curenții din fiecare rezistor? Luați $R_1=100$ Ω, $R_2=R_3=50$ Ω, $R_4=75$ Ω și $\mathcal{E}=6,0$ V.

12. Presupunem că în ramura ce conține pe R_3 din figura 32-16 se introduce un ampermetru. (a) Care va fi curentul indicat de el presupunînd că $\mathcal{E}=5,0$ V, $R_1=2,0$ Ω, $R_2=4,0$ Ω și $R_3=6,0$ Ω? (b) Presupunem că schimbăm între ele ampermetrul și sursa de t.e.m. Arătați că indicația ampermetrului rămîne nemodificată. Această relație de reciprocitate este valabilă pentru orice circuit ce conține o singură sursă de t.e.m.

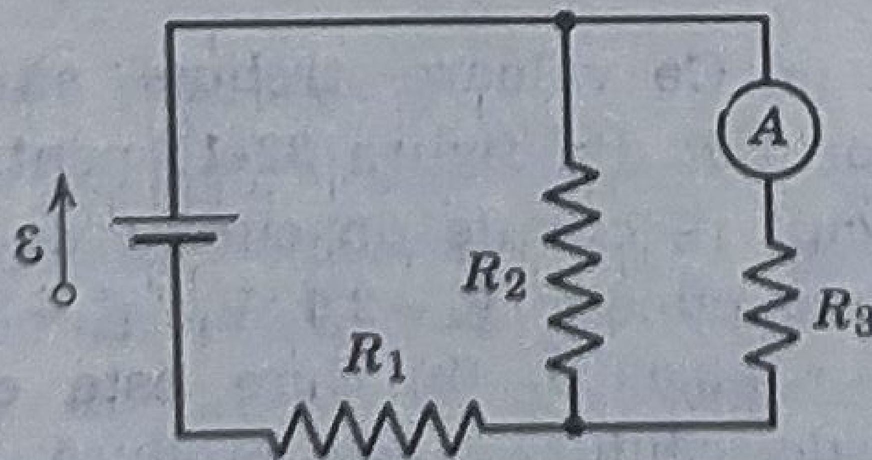


Figura 32-16.

13. Două baterii de t.e.m. $\mathcal{E}$ și rezistență internă r sînt legate în paralel la capetele unui rezistor R, ca în figura 32-20 b. (a) Pentru ce valoare a lui R puterea disipată în rezistor este maximă? (b) Care este puterea maximă?

14. Folosind numai doi rezistori — legați în serie, în paralel sau singuri — se pot obține rezistențe de 3, 4, 12 și 16 Ω. Care sînt valorile celor doi rezistori folosiți?

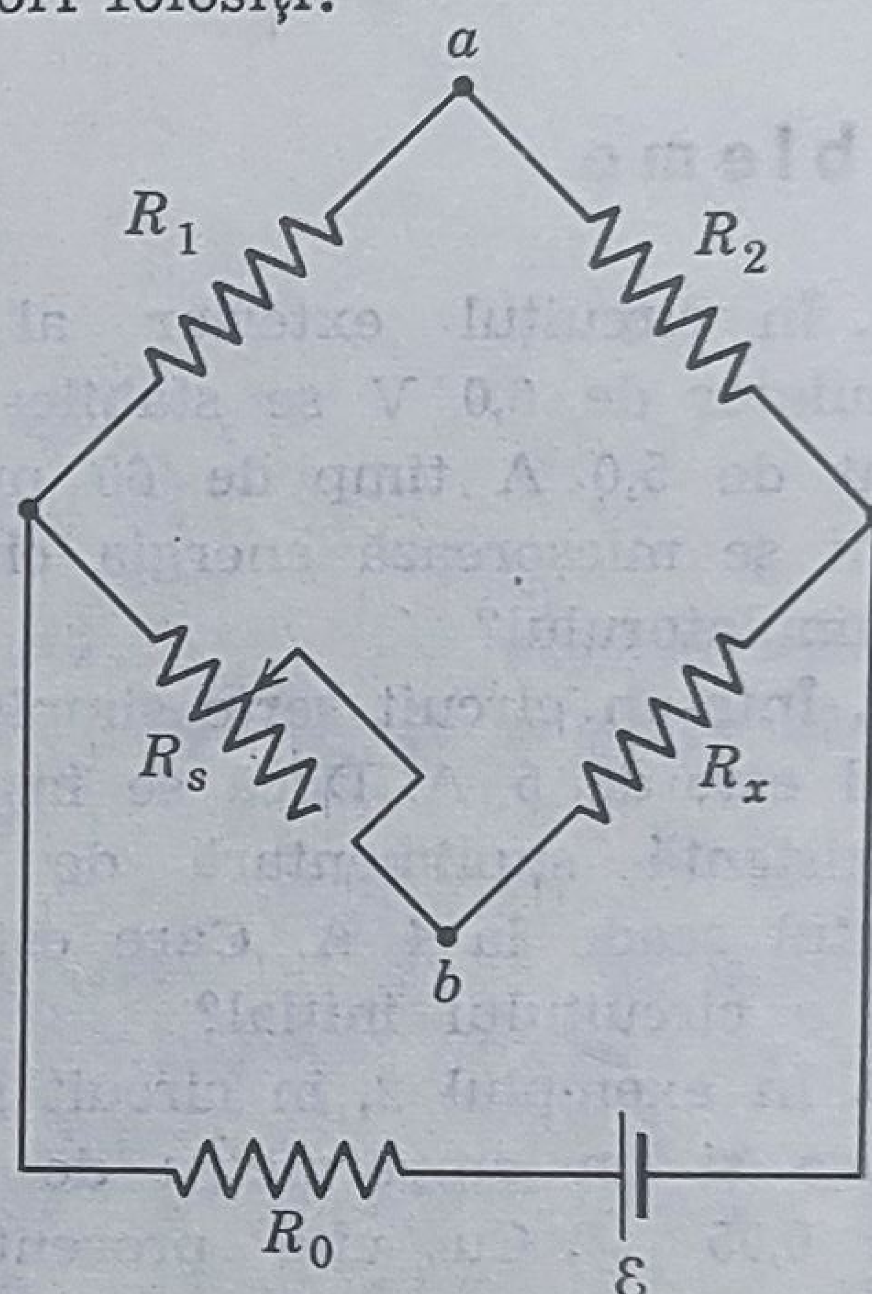
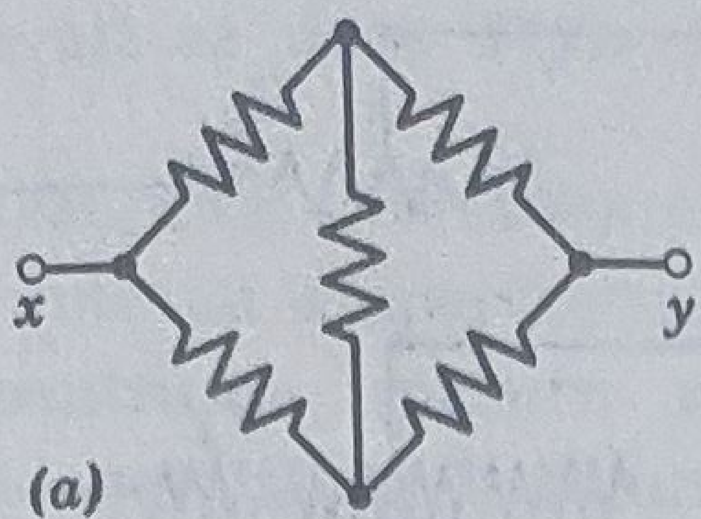
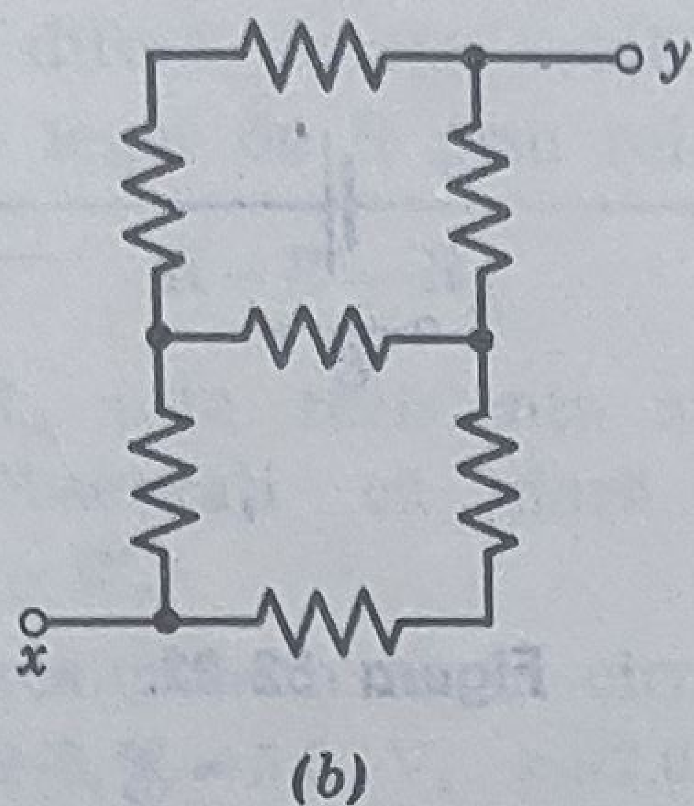


Figura 32-17.

15. *Puntea Wheastone.* Valoarea lui R_S din figura 32-17 se ajustează pînă ce punctele a și b se află exact la același potențial. (Această condiție se verifică conectînd pentru un interval scurt de timp un instrument sensibil între a și b; dacă aceste puncte sînt la același potențial, instrumentul va rămîne nedeviat). Arătați că atunci cînd ajustarea s-a realizat, este valabilă următoarea relație:

$$R_x=R_S\frac{R_2}{R_1}$$





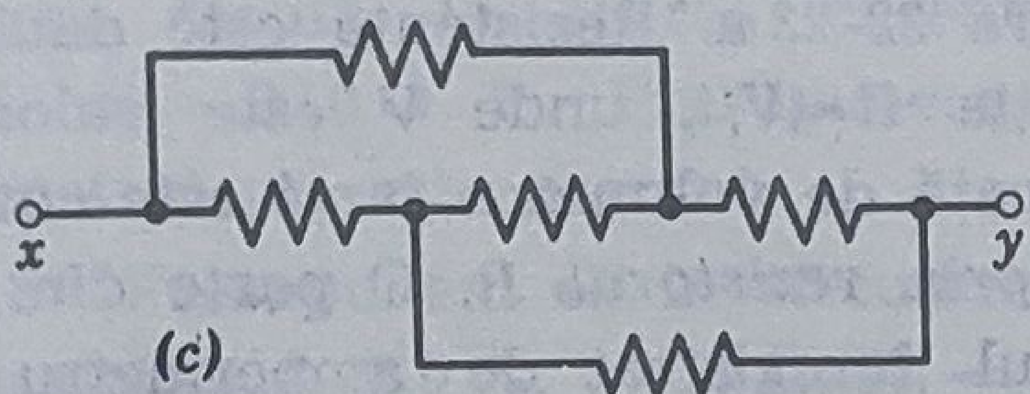


Figura 32-18.

Folosind acest montaj, numit punte Wheastone, pot fi măsurați rezistorii necunoscuți (R_x) în funcție de rezistori cunoscuți (de precizie).

16. Dacă punctele a și b din figura 32-17 sînt unite printr-un fir de rezistență r, arătați că prin fir trece un curent egal cu

$$i=\frac{\mathcal{E}\,(R_s-R_x)}{(R+2r)\,(R_s+R_x)+2R_sR_x}$$

unde $\mathcal{E}$ este t.e.m. a bateriei. Presupunînd că R_1 și R_2 sînt egali ($R_1=R_2=$ $=R$) și că R_0 este zero. Această relație este în concordanță cu rezultatul din problema 15?

17. Doi rezistori R_1 și R_2 pot fi legați sau în serie sau în paralel la bornele unei baterii de t.e.m. $\mathcal{E}$ și de rezistență internă zero. Dorim ca încălzirea joule pentru legarea în paralel să fie de cinci ori mai mare decît cea corespunzătoare legării în serie. Dacă R_1 este 100 Ω, care este R_2?

18. Patru reșouri de cîte 100 W sînt legate în toate combinațiile posibile serie și paralel și conectate la 100 V. Care vor fi cantitățile de căldură produse în ele în unitatea de timp pentru fiecare caz în parte?

19. Care este rezistența echivalentă între bornele x și y ale circuitelor din

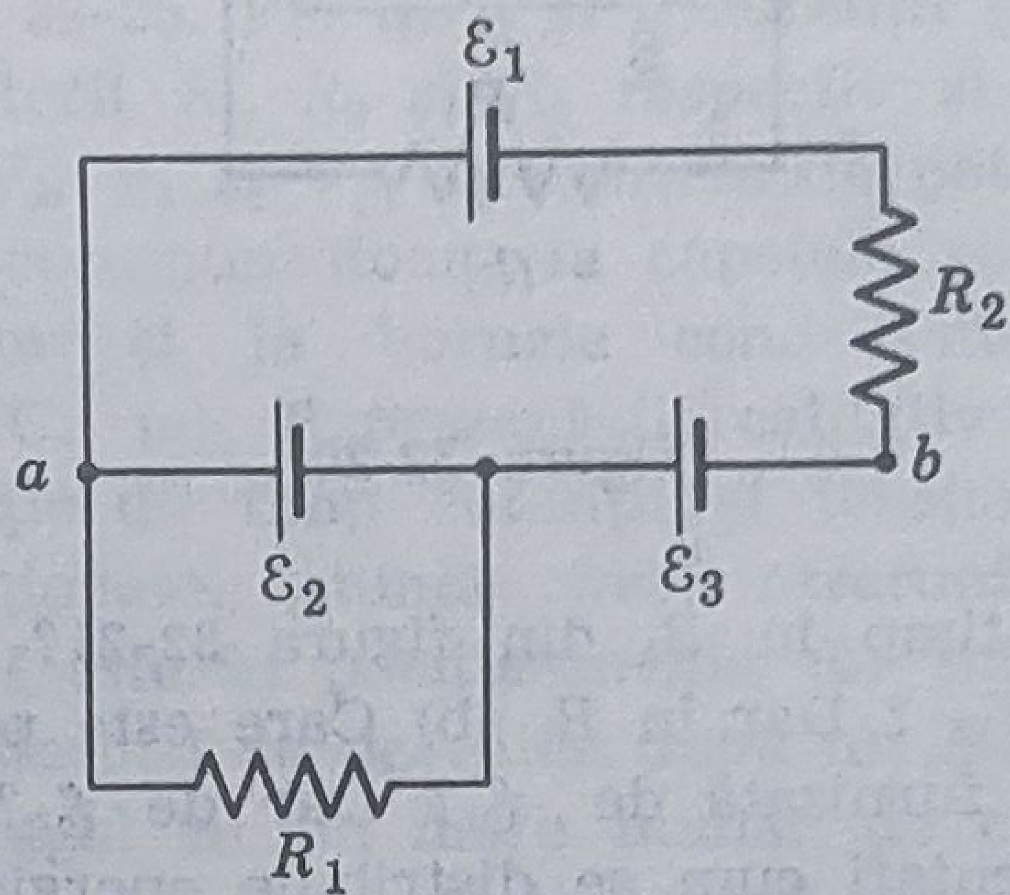


Figura 32-19.

(a) figura 32-18 a, (b) figura 32-18 b și (c) fig. 32-18 c? Presupunem că rezistența fiecărui rezistor este egală cu 10 Ω.

20. Găsiți curentul din fiecare rezistor din fig. 32.19 și diferența de potențial dintre punctele a și b. Luați $\mathcal{E}_1=6{,}0$ V, $\mathcal{E}_2=5{,}0$ V, $\mathcal{E}_3=4{,}0$ V, $R_1=100$ Ω și $R_2=50$ Ω.

21. Se dau două baterii de t.e.m. $\mathcal{E}$ și rezistență internă r. Ele pot fi legate în serie sau în paralel și sînt folosite pentru a produce un curent prin rezistorul R, ca în figura 32-20. Deduceți expresia curentului prin R pentru ambele metode de legare. În care caz curentul este mai mare, presupunînd diferite valori ale raportului R/r?

22. (a) Care este energia ce apare sub formă de căldură joule în unitatea

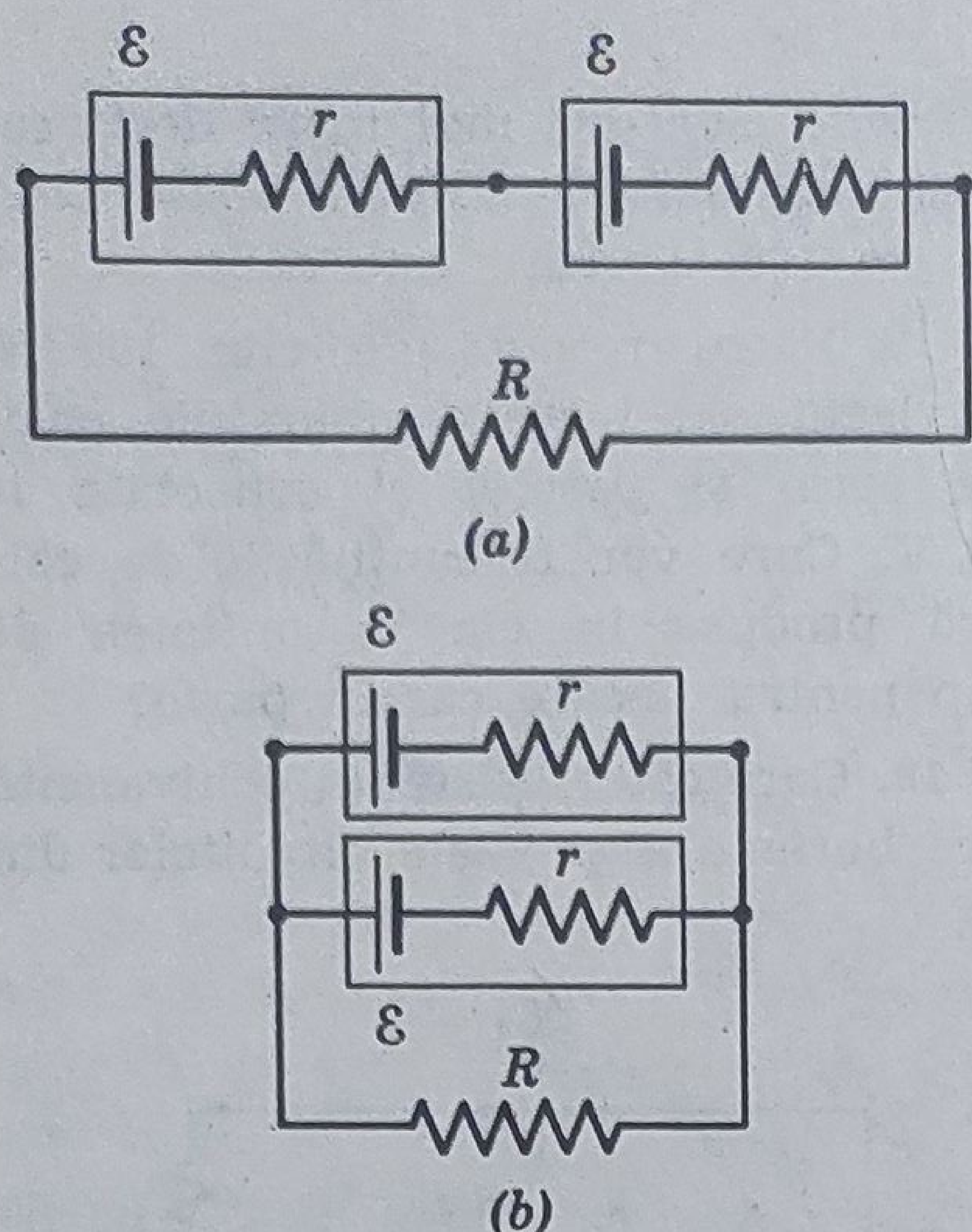


Figura 32-20.

de timp în R_1 din figura 32-21? Dar în R_2 ? Dar în R_3 (b) Care este puterea furnizată de $\mathcal{E}_1$? Dar de $\mathcal{E}_2$? (c) Discutaţi cum se distribuie energia în acest circuit. Presupunem că $\mathcal{E}_1=3{,}0$ V, $\mathcal{E}_2=1{,}0$ V, $R_1=5{,}0\ \Omega$, $R_2=2{,}0\ \Omega$ şi $R_3=4{,}0\ \Omega$.

23. Pentru a putea varia curentul într-un circuit, un student foloseşte

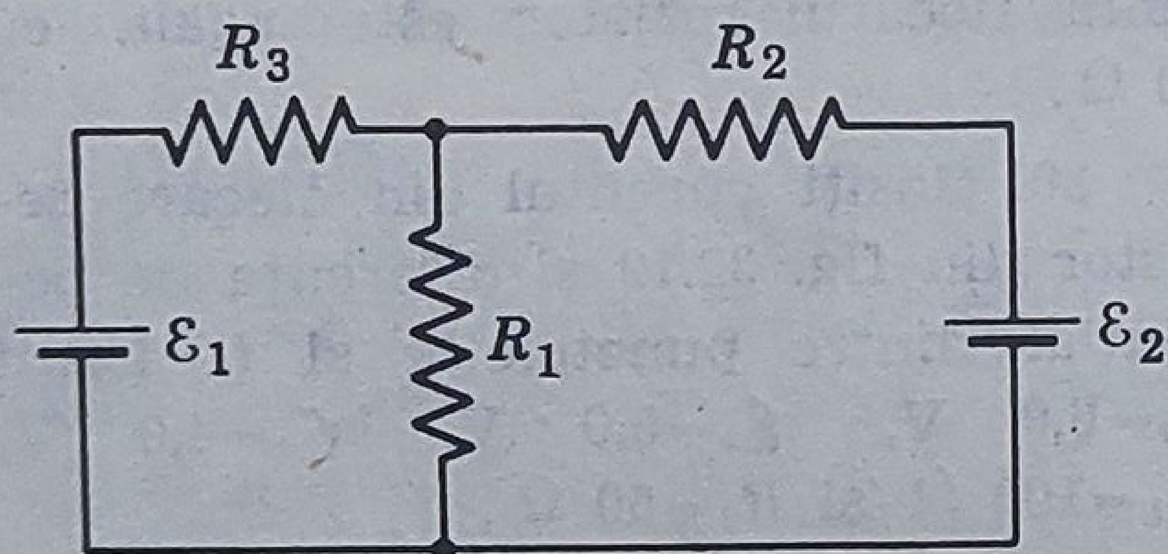


Figura 32-21.

doi rezistori variabili, cu cursor, legaţi în paralel, ca în figura 32-22 cu $R_1=20\ R_2$. (a) Cum se procedează pentru a obţine curentul de valoarea dorită? (b) In ce constă avantajul folosirii în paralel a doi rezistori variabili în locul unuia singur?

24. *Măsurarea rezistenţei.* Un voltmetru (de rezistenţă R_v) şi un ampermetru (de rezistenţă R_A) sînt legaţi

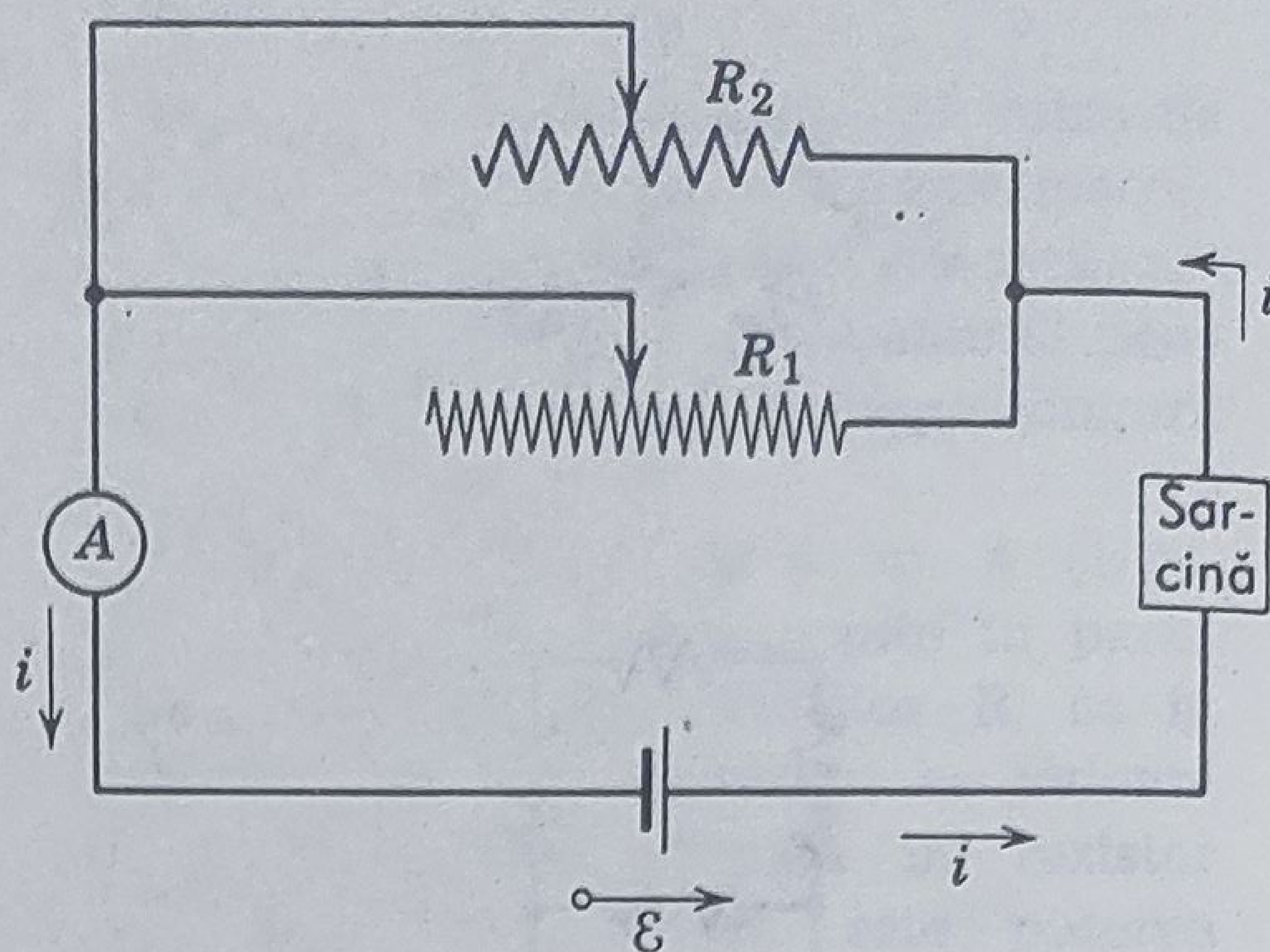
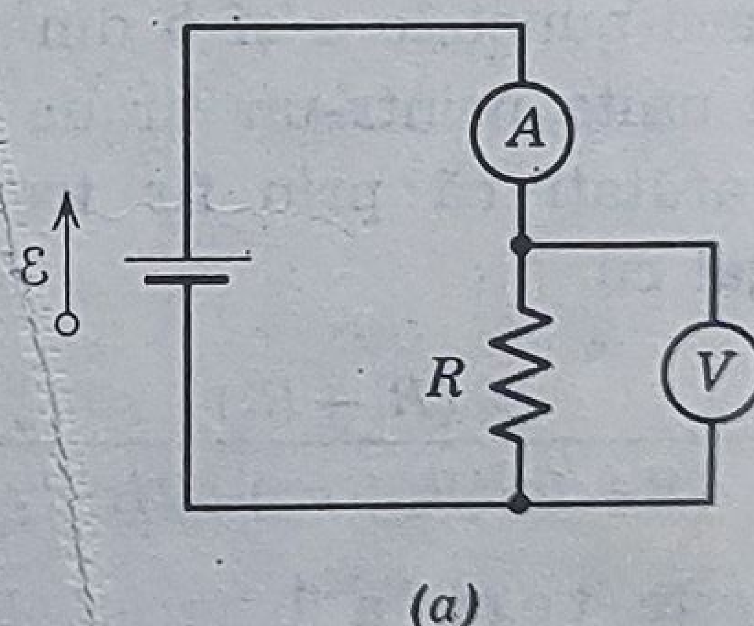


Figura 32-22.

pentru a măsura rezistenţa R, ca în figura 32-23 a. Rezistenţa este dată de relaţia $R=V/i$, unde V este valoarea indicată de voltmetru iar i este curentul *prin rezistorul* R. O parte din curentul înregistrat de ampermetru (i') trece prin voltmetru, astfel că raportul valorilor citite ($=V/i'$) dă o rezistenţă R' diferită de cea reală. Arătaţi că R şi R' sînt legaţi prin relaţia

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_V}.$$



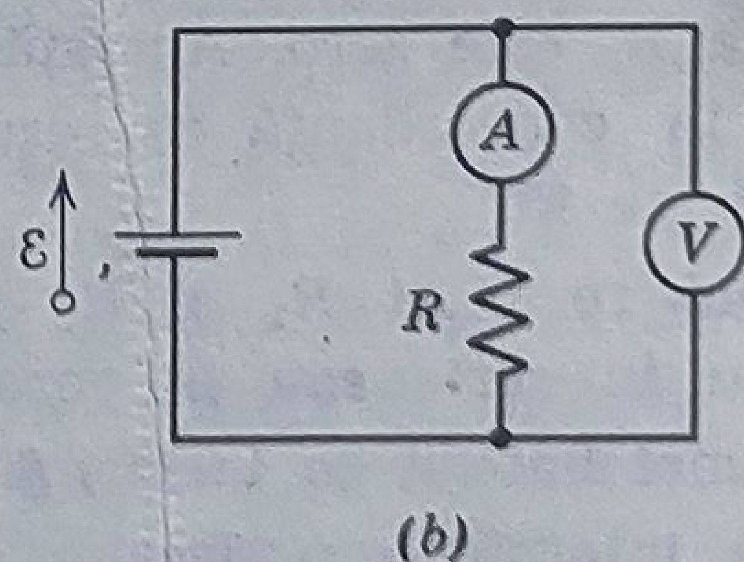


Figura 32-23.

Observați că dacă $R_V \gg R$, atunci $R \approx R'$.

25. *Măsurarea rezistenței.* Dacă dorim să folosim ampermetrul și voltmetrul pentru a măsura rezistența, ele pot fi legate și ca în figura 32-23 b. Și în acest caz, indicațiile instrumentelor conduc la o valoare a rezistenței R' ce diferă de cea reală. Arătați că R' este legat de R prin relația

$$R = R' - R_A$$

în care R_A este rezistența ampermetrului. Observați că dacă $R_A \ll R$, atunci $R \cong R'$.

26. Presupunem că în circuitul din figura 32-8, $\mathcal{E} = 5{,}0$ V, $r = 2{,}0\ \Omega$, $R_1 = 5{,}0\ \Omega$ și $R_2 = 4{,}0\ \Omega$. Cît la sută este eroarea făcută la citirea curentului dacă $R_A = 0{,}10\ \Omega$? Presupunem că voltmetrul nu este prezent.

27. Presupunem că în circuitul din figura 32-8, $\mathcal{E} = 5{,}0$ V, $r = 20\ \Omega$, $R_1 = 50\ \Omega$ și $R_2 = 40\ \Omega$. Cît la sută este eroarea făcută la citirea diferenței de potențial la capetele lui R_1, dacă $R_V = 1\,000\ \Omega$. Neglijăm existența ampermetrului.

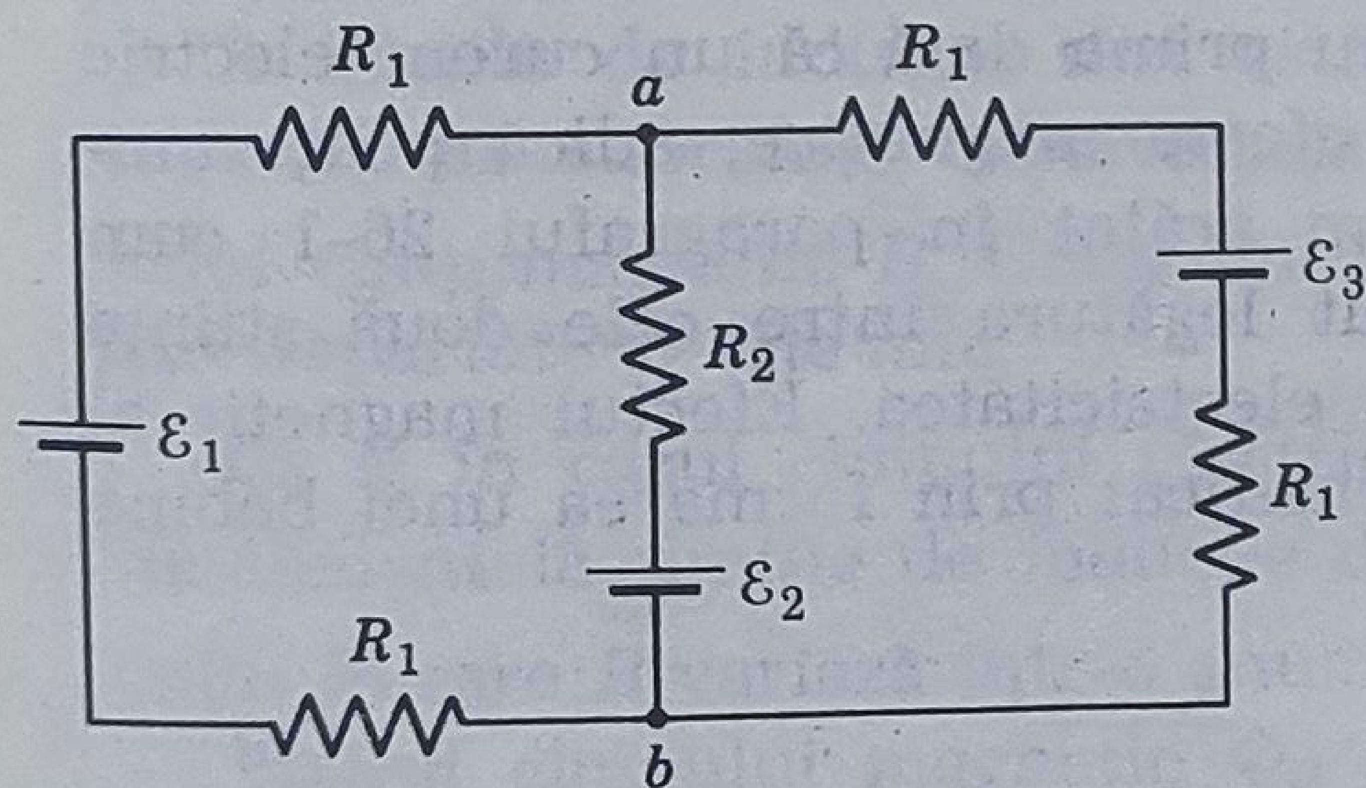


Figura 32-24.

28. (a) Găsiți cei trei curenți din figura 32-24. (b) Găsiți pe V_{ab}. Presupunem că $R_1 = 1{,}0\ \Omega$, $R_2 = 2{,}0\ \Omega$, $\varepsilon_1 = 2{,}0$ V și $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4{,}0$ V.

29. Cîte constante de timp sînt necesare pentru încărcarea unui condensator dintr-un circuit RC la 1,0 la sută la valoarea sarcinii sale de echilibru?

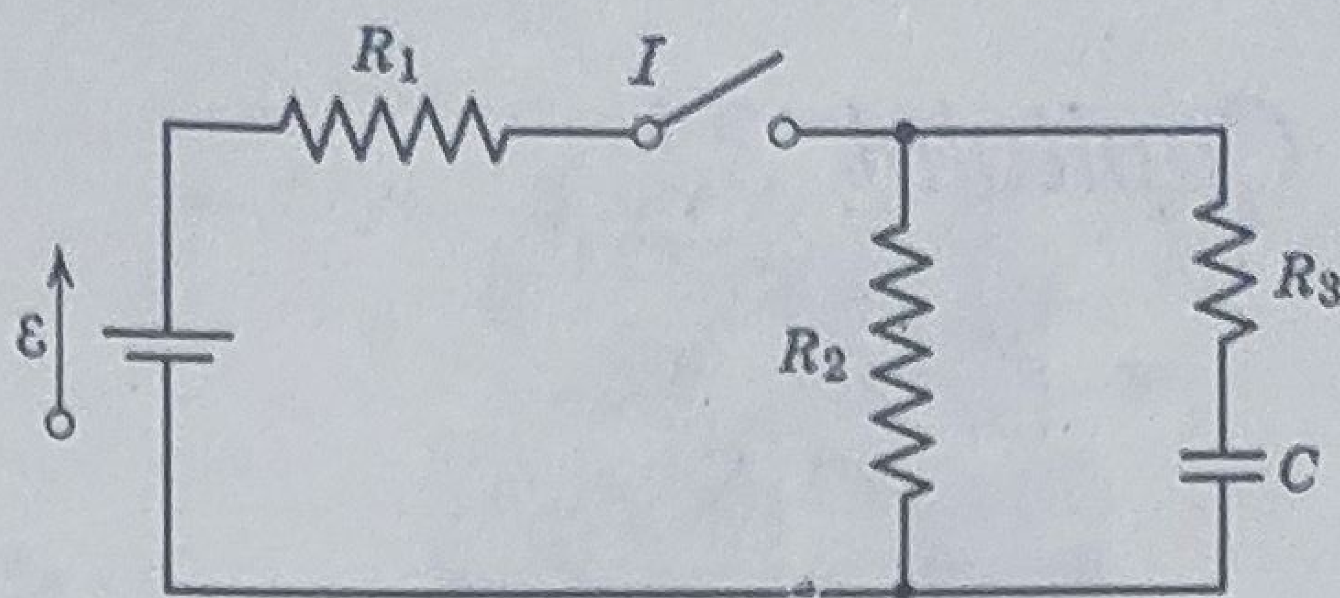


Figura 32-25.

30. Considerăm circuitul din figura 32-25. Fie i_1, i_2 și i_3 curenții prin rezistorii R_1, R_2 și R_3 respectiv și fie V_1, V_2, V_3 și V_C diferențele de potențial corespunzătoare la capetele rezistorilor și la bornele condensatorului C. (a) Reprezentați calitativ în funcție de timp curenții și tensiunile menționate, atunci cînd întrerupătorul I este în poziția închis. (b) Întrerupătorul I se deschide după un interval egal cu un mare număr de constante de timp. Reprezentați calitativ în funcție de timp, curenții și tensiunile de mai sus, pentru poziția deschis a întrerupătorului.

31. Arătați că unitatea de măsură pentru RC este într-adevăr unitatea de timp, adică 1 ohm×1 farad = 1 secundă.

32. Arătați că atunci cînd întrerupătorul I din figura 32-10 este comutat din a în b, toată energia înmagazinată în condensator este transformată în căldură joule în rezistor. Presupunem că, înaintea comutării în b, condensatorul este complet încărcat.

33. Un rezistor de $3{,}0 \times 10^6\ \Omega$ și un condensator de 1,0 μF sînt legați într-un circuit format dintr-un singur ochi, împreună cu o sursă de t.e.m. cu $\mathcal{E} = 4{,}0$ V. După 1,0 s de la închiderea circuitului, cu ce viteză (a) crește sarcina de pe condensator? (b) este înmagazinată energia în condensator? (c) apare în rezistor căldura Joule? și (d) sursa de t.e.m. furnizează energie?

Capitolul 33

Cîmpul magnetic

33-1 Cîmpul magnetic

Magnetismul ca știință s-a dezvoltat din observația că unele roci (magnetita) atrag bucățele de fier. Cuvîntul *magnetism* vine de la numele localității antice Magnesia din Asia Mică în care s-au găsit astfel de pietre. În figura 33-1 este arătat un magnet permanent modern, „urmaș“ al acestor magneți naturali. Un alt „magnet natural“ este Pămîntul însăși, a cărui proprietate de a orienta acul magnetic al busolei era cunoscut din antichitate.

În 1820 Oersted a descoperit pentru prima dată că un curent electric ce trece printr-un fir poate produce efecte magnetice, adică poate modifica orientarea acului magnetic. Am arătat în paragraful 26-1 cum această descoperire importantă a făcut legătura între cele două științe separate pînă atunci: magnetismul și electricitatea. Efectul magnetic al unui curent printr-un fir poate fi intensificat prin formarea unei bobine

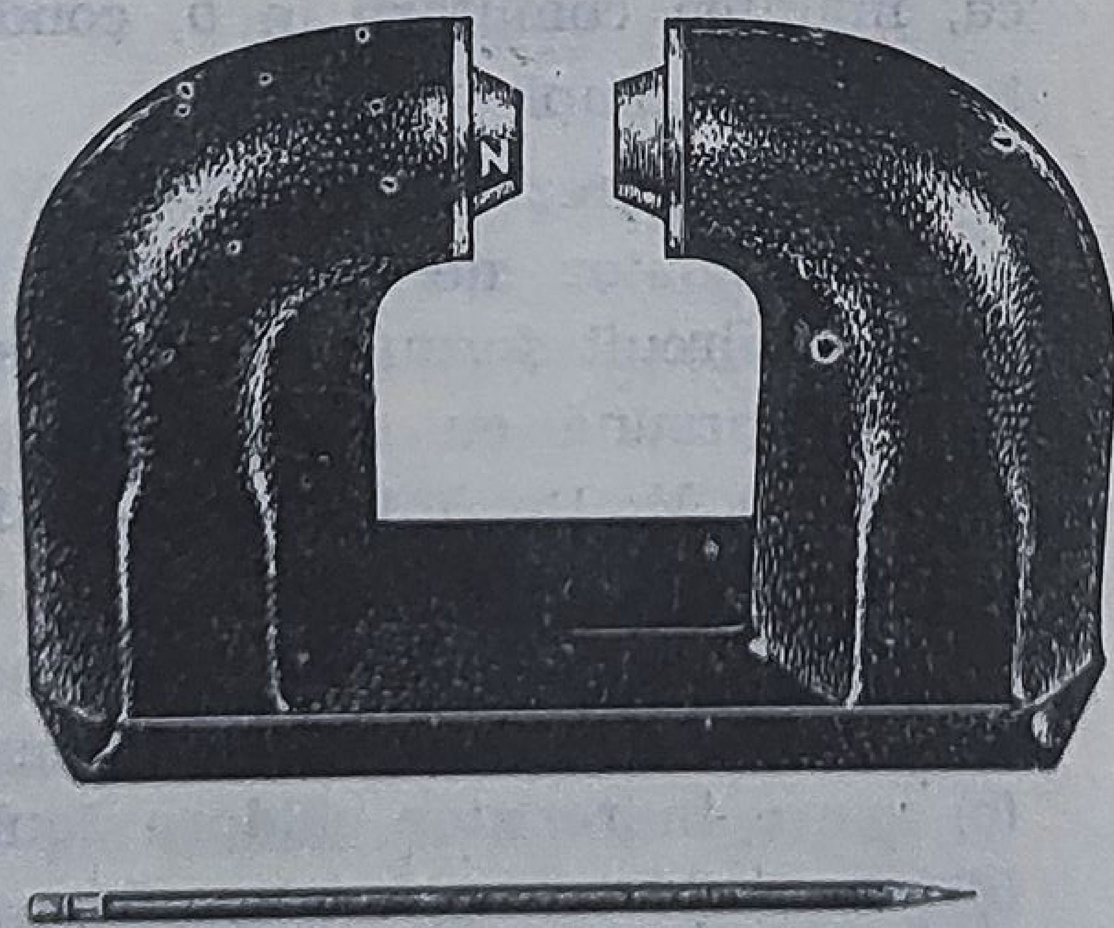


Figura 33-1. Un magnet permanent. Liniile de inducție magnetică ies din fața polului nord, notat *N*, străbat intrefierul și intră în fața polului sud.

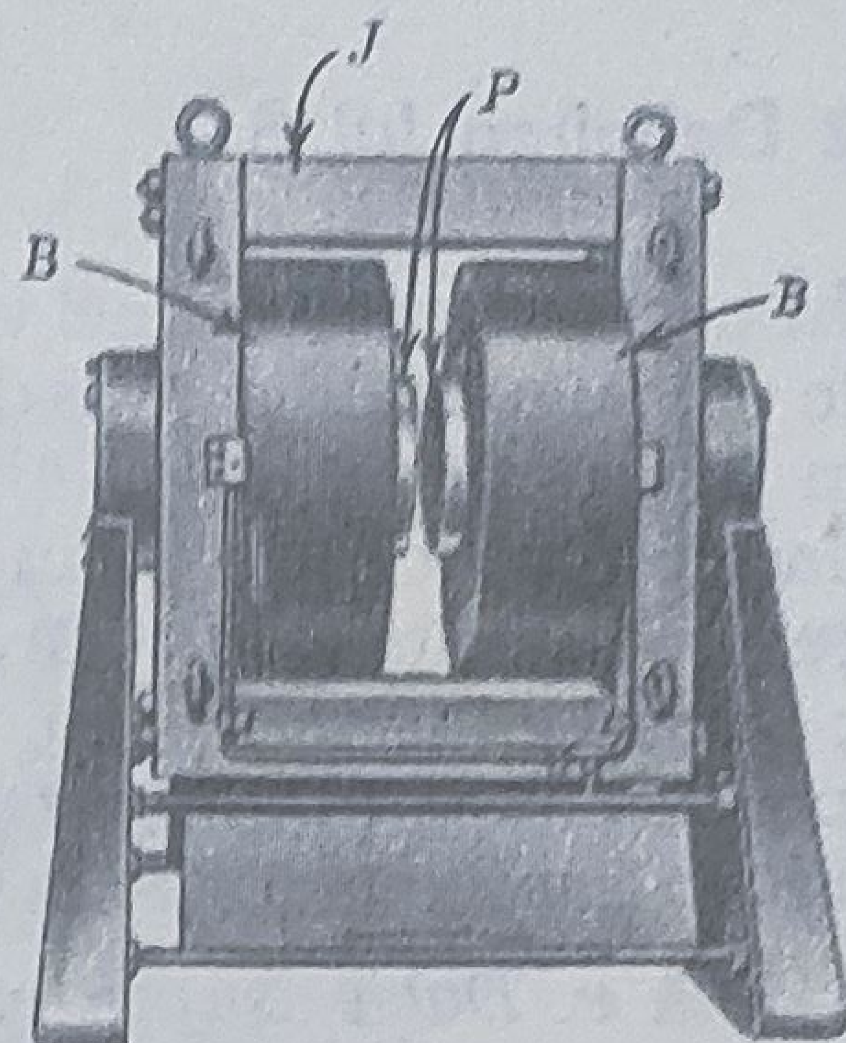


Figura 33-2. Un electromagnet de laborator. Se văd: jugul de fier J, fețele polilor P și bobinele B. Fețele polilor au diametrul de 30,5 cm. (Prin amabilitatea Varian Associates).

cu multe spire și cu un miez de fier în interior. În figura 33-2 se arată cum s-a realizat în acest fel un electromagnet mare de tipul celor folosite curent în cercetările de magnetism.

În spațiul din jurul unui magnet sau a unui conductor prin care trece un curent electric există un *cîmp magnetic* la fel cum în spațiul din jurul unei vergele electrizate se găsește un cîmp electric. Vectorul fundamental al cîmpului magnetic $\vec{B}$, pe care-l vom defini în paragraful următor, este numit *inducție magnetică**: el poate fi reprezentat prin *linii de inducție* la fel cum cîmpul electric a fost reprezentat prin linii de cîmp. Ca și în cazul cîmpului electric (vezi paragraful 27-3), vectorul cîmp magnetic este legat de liniile sale de inducție în felul următor:

1. Tangenta la o linie de inducție, în orice punct, dă *direcția* lui $\vec{B}$ în acel punct.

2. Liniile de inducție sînt astfel desenate încît numărul de linii pe unitatea de suprafață transversală este proporțional cu *mărimea* vectorului cîmp magnetic $\vec{B}$. Unde liniile sînt apropiate B este mare iar unde sînt depărtate B este mic.

Ca și în cazul cîmpului electric, vectorul cîmp $\vec{B}$ este de importanță fundamentală, liniile de inducție dînd doar reprezentarea grafică a modului în care $\vec{B}$ variază într-o anumită regiune din spațiu.

Fluxul cîmpului magnetic Φ_B se definește complet analog cu fluxul cîmpului electric Φ_E, adică

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{33-1}$$

în care integrala este luată pe suprafața (închisă sau deschisă) pentru care se definește Φ_B.

---

* Mai potrivit ar fi pentru $\vec{B}$ numele de *intensitate a cîmpului magnetic*, dar din motive istorice acest nume a fost dat unui alt vector legat de cîmpul magnetic (vezi paragraful 37-7).

33-2 Definirea lui $\vec{B}$

În acest capitol nu ne vom ocupa de cauzele care produc cîmpul magnetic ci vom încerca să determinăm (a) dacă într-un punct dat există cîmp magnetic şi (b) acţiunea acestui cîmp asupra unei sarcini ce se deplasează în el. Ca şi în cazul cîmpului electric, drept corp de probă alegem o particulă de sarcină q_0. Presupunem că nu există cîmp electric; aceasta înseamnă că, neglijînd forţa gravitaţională asupra corpului de probă situat *în repaus* în punctul dat, nu acţionează nici o forţă.

Fie o sarcină de probă pozitivă care în punctul P are o viteză oarecare dată $\vec{v}$. *Dacă asupra ei acţionează o forţă de deviere laterală* $\vec{F}$, *afirmăm că în punctul* P *este prezent un cîmp magnetic* şi definim inducţia magnetică $\vec{B}$ a acestui cîmp în funcţie de $\vec{F}$ şi de alte mărimi măsurabile.

Dacă modificăm direcţia lui $\vec{v}$ în punctul P, păstrînd constantă mărimea lui $\vec{v}$, constatăm că, deşi $\vec{F}$ va rămîne mereu normal la $\vec{v}$, mărimea sa F se va modifica. Pentru o anumită orientare a lui $\vec{v}$ (cît şi pentru orientarea sa inversă $-\vec{v}$) forţa $\vec{F}$ va deveni zero. Definim această direcţie ca direcţia lui $\vec{B}$; sensul lui $\vec{B}$ (adică sensul pe această direcţie) îl vom indica mai jos cînd vom da o definiţie mai completă a lui $\vec{B}$.

Acum, după ce am găsit *direcţia* lui $\vec{B}$, sîntem capabili să orientăm pe $\vec{v}$ astfel încît sarcina să se deplaseze normal la $\vec{B}$. În acest caz, forţa $\vec{F}$ are valoare maximă şi definim *mărimea* lui $\vec{B}$ din mărimea măsurată a acestei forţe maxime $F_\perp$,

$$B = \frac{F_\perp}{q_0 v}. \quad (33\text{-}2)$$

Considerăm această definiţie a lui $\vec{B}$ (în care am specificat mărimea şi direcţia sa dar nu şi sensul) ca un prim pas spre definirea vectorială completă ce o dăm acum: *dacă o sarcină de probă pozitivă* q_0 *se mişcă cu viteza* $\vec{v}$ *printr-un punct* P *şi dacă asupra sarcinii în mişcare acţionează o forţă (laterală)* $\vec{F}$, *în punctul* P *este prezentă o inducţie magnetică* $\vec{B}$, *unde* $\vec{B}$ *este vectorul ce satisface relaţia*

$$\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B} \quad (33\text{-}3\ a)$$

$\vec{v}$, q_0 şi $\vec{F}$ fiind măsurate. Mărimea forţei de deviere magnetică $\vec{F}$, este conform regulei produsului vectorial, dată de*

$$F = q_0 v B \sin\theta \quad (33\text{-}3\ b)$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{B}$.

---

* Cititorul poate revedea paragraful 2-4, despre produsul vectorial.

Figura 33-3. Reprezentarea vectorului $\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$ (ecuația 33-3a).

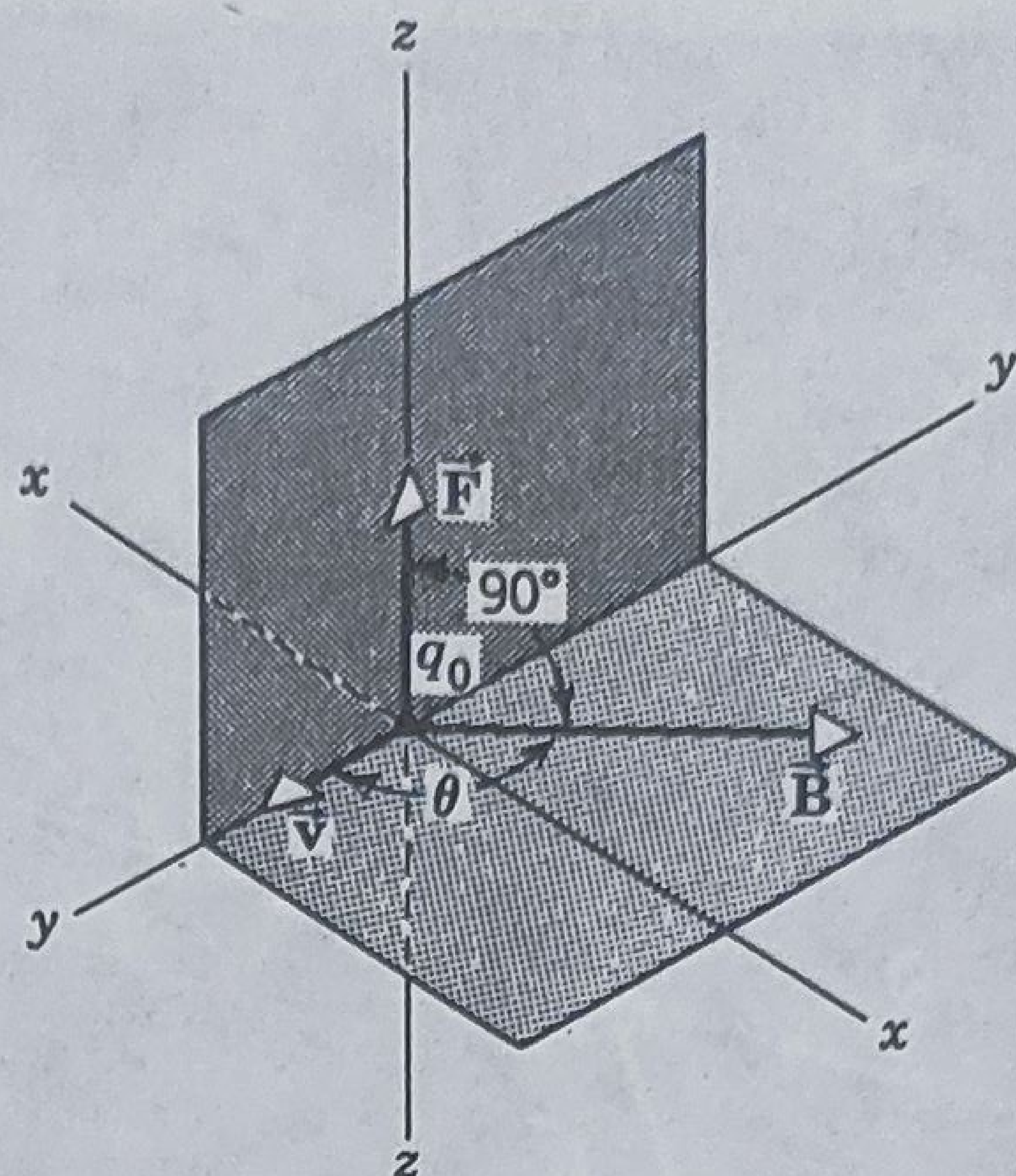


Figura 33-3 arată legătură dintre acești vectori. Se vede că $\vec{F}$, fiind normal la planul format de $\vec{v}$ și $\vec{B}$ este întotdeauna normal la $\vec{v}$ (și de asemenea la $\vec{B}$) și astfel va fi întotdeauna o forță laterală. Ecuația 33-3 *a* este în concordanță cu următoarele observații experimentale: (a) forța magnetică tinde către zero cînd $v \to 0$, (b) forța magnetică tinde către zero dacă $\vec{v}$ este sau paralel sau antiparalel cu direcția lui $\vec{B}$ (în aceste cazuri $\theta = 0$ sau 180° și $\vec{v} \times \vec{B} = 0$), și (c) dacă $\vec{v}$ este normal la $\vec{B}$ ($\theta = 90°$), forța de deviere este maximă și egală cu $F_{\perp} = q_0 v B$ (din ecuația 33-2).

Această definiție a lui $\vec{B}$ este asemănătoare, deși mai complexă, cu definiția intensității cîmpului electric $\vec{E}$, pe care o putem formula astfel: *dacă o sarcină de probă pozitivă q_0 este plasată în punctul P și dacă asupra sarcinii în repaus acționează o forță (electrică) $\vec{F}$, în punctul $\vec{P}$ este prezent un cîmp electric $\vec{E}$, unde $\vec{E}$ este vectorul ce satisface relația*

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

q_0 și $\vec{F}$ fiind măsurate. În definirea lui $\vec{E}$, singura direcție caracteristică ce apare este aceea a forței electrice $\vec{F}_E$ ce acționează asupra corpului de probă; direcția lui $\vec{E}$ este aceea a lui $\vec{F}_E$. La definirea lui $\vec{B}$ apar *două* direcții caracteristice: a lui $\vec{v}$ și a forței magnetice $\vec{F}_B$ ce sînt întotdeauna normale una pe alta.

Un electron pozitiv și altul negativ sînt creați în punctul P în camera cu bule (figura 33-4). Cîmpul magnetic este perpendicular pe cameră și iese din planul figurii (simbolul ⊙)*. Relația $\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$ (ecuația 33-3 *a*) arată că forțele de deviere ce acționează asupra celor două particule sînt

* Simbolul ⊗ indică un vector care intră în pagină, semnul × indicînd coada săgeții; simbolul ⊙ indică un vector ce iese din pagină, punctul indicînd vîrful săgeții.

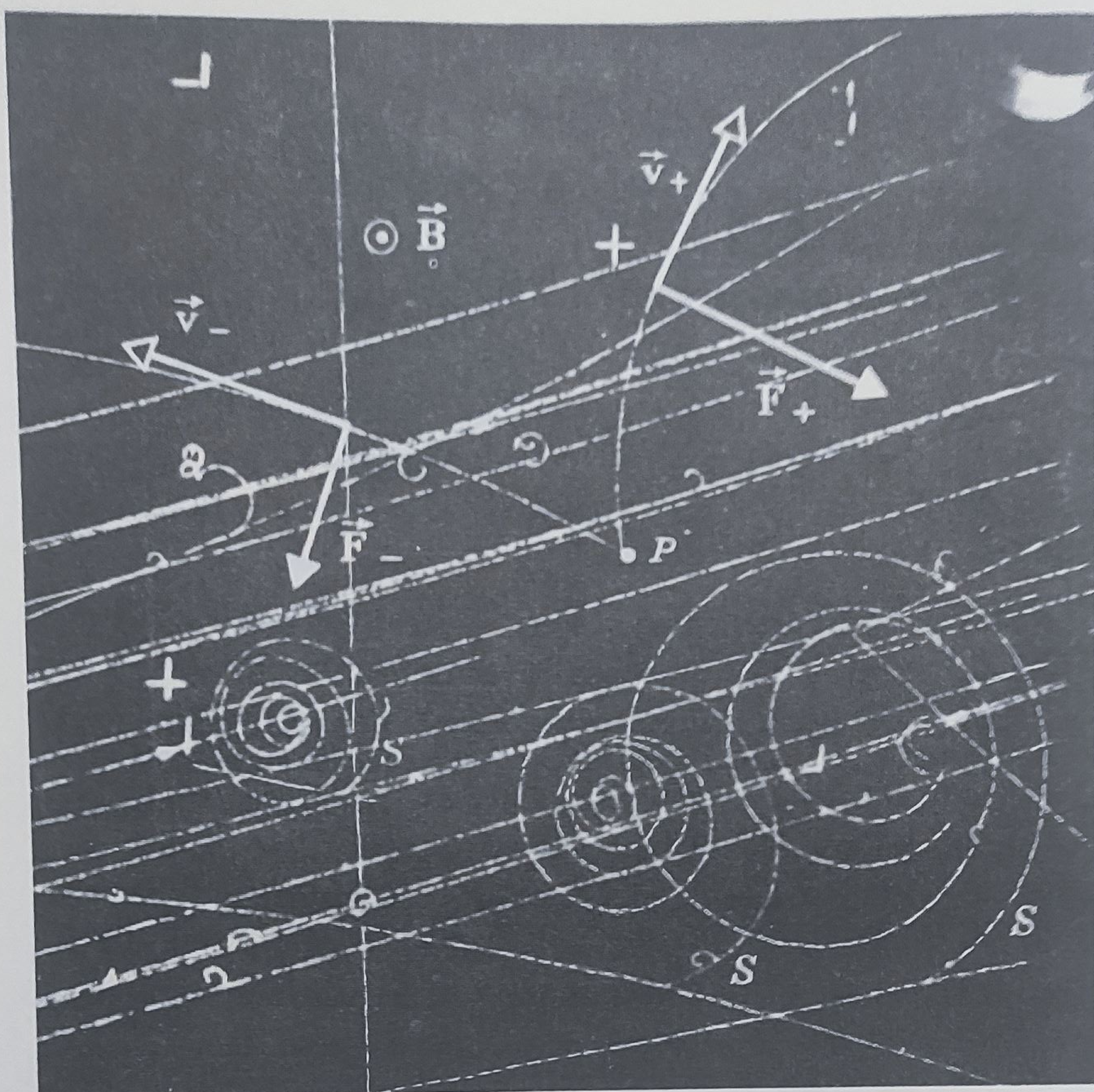


Figura 33-4. *Camera cu bule* este un dispozitiv cu ajutorul căruia se pun în evidență, prin intermediul unor bule mici, urmele particulelor încărcate ce străbat camera. Figura este fotografia obținută cu o astfel de cameră situată într-un cîmp de inducție magnetică *B* și expusă unui fascicul de radiații provenit de la un accelerator mare cum ar fi de exemplu un ciclotron. *V*-ul curb din punctul *P* reprezintă traiectoriile unui electron pozitiv și a unuia negativ, deviați în sensuri opuse în cîmpul magnetic. Spiralele *S* sînt traiectoriile a trei electroni de joasă energie. (Prin amabilitatea lui E. O. Lawrence, Radiation Laboratory, University of California).

cele desenate pe figură. Aceste forțe de deviere vor face ca traiectoriile să aibă forma din figură.

Unitatea de măsură pentru $\vec{B}$, ce rezultă din ecuația 33-3, este (N/C)/(m/s). Aceasta poartă numele special de weber/metru² (Wb/m²) sau tesla (T). Amintindu-ne că un coulomb/secundă este un amper

$$1\,\mathrm{Wb/m^2} = \frac{1N}{C(m/s)} = \frac{1N}{A \cdot m}.$$

O unitate mai veche pentru B, care se mai folosește încă, este gaussul

$$1\ Wb/m^2 = 10^4\ Gs.$$

Weberul este folosit la măsurarea lui Φ_B, fluxul lui $\vec{B}$, vezi ecuația 33-1.

Faptul că forța magnetică este întotdeauna perpendiculară pe direcția de mișcare înseamnă că (pentru cîmpuri magnetice staționare) lucrul mecanic efectuat de această forță asupra particulei este zero. Pentru un element de drum de lungime $d\vec{l}$, acest lucru mecanic dW este $\vec{F}_B \cdot d\vec{l}$; dW este zero deoarece $\vec{F}_B$ și $d\vec{l}$ fac întotdeauna un unghi de 90°. Astfel, un cîmp magnetic static nu poate modifica energia cinetică a unei sarcini în mișcare; el o poate doar devia lateral.

Dacă o particulă încărcată se deplasează într-o regiune în care este prezent atît un cîmp electric cît și unul magnetic, forța rezultantă se găsește combinînd ecuațiile 27-2 și 33-3 a

$$\vec{F} = q_0\vec{E} + q_0\vec{v} \times \vec{B} \qquad (33\text{-}4)$$

Uneori aceasta poartă numele de *relația lui Lorentz* în amintirea lui H. A. Lorentz care a contribuit atît de mult la dezvoltarea și clarificarea noțiunilor de cîmp electric și magnetic.

Exemplul 1. Un cîmp uniform de inducție magnetică $\vec{B}$ are direcția orizontală cu sensul de la sud la nord și mărimea de 1,5 Wb/m². Ce forță va acționa asupra unui proton de 5,0 MeV ce se deplasează pe verticală, în jos, în acest cîmp?

Energia cinetică a protonului este

$$E_c = (5{,}0 \times 10^6\ eV)(1{,}6 \times 10^{-19}\ J/eV) = 8{,}0 \times 10^{-13}\ J$$

Viteza sa poate fi găsită din relația $E_c = \frac{1}{2} mv^2$, sau

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(8{,}0 \times 10^{-13} J)}{1{,}7 \times 10^{-27} kg}} = 3{,}1 \times 10^7\ m/s$$

Ecuația (33-3 b) dă

$$F = qvB\ \sin\theta = (1{,}6 \times 10^{-19}\ C)(3{,}1 \times 10^7\ m/s)(1{,}5\ Wb/m^2)(\sin 90°) = 7{,}4 \times 10^{-12}\ N.$$

Studentul poate arăta că această forță este de aproximativ $4 \cdot 10^{14}$ ori mai mare decît greutatea protonului.

Relația $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ arată că *direcția* forței de deviere este către est. Dacă particula este încărcată negativ, devierea este către vest. Aceasta rezultă automat din ecuația 33-3 a dacă înlocuim q_0 cu $-e$.

33-3 Forța magnetică care acționează asupra unui fir prin care trece curent electric

Un curent este un ansamblu de sarcini în mișcare. Deoarece cîmpul magnetic exercită o forță laterală asupra unei sarcini în mișcare, ne așteptăm să exercite o forță laterală și asupra unui fir prin care trece un

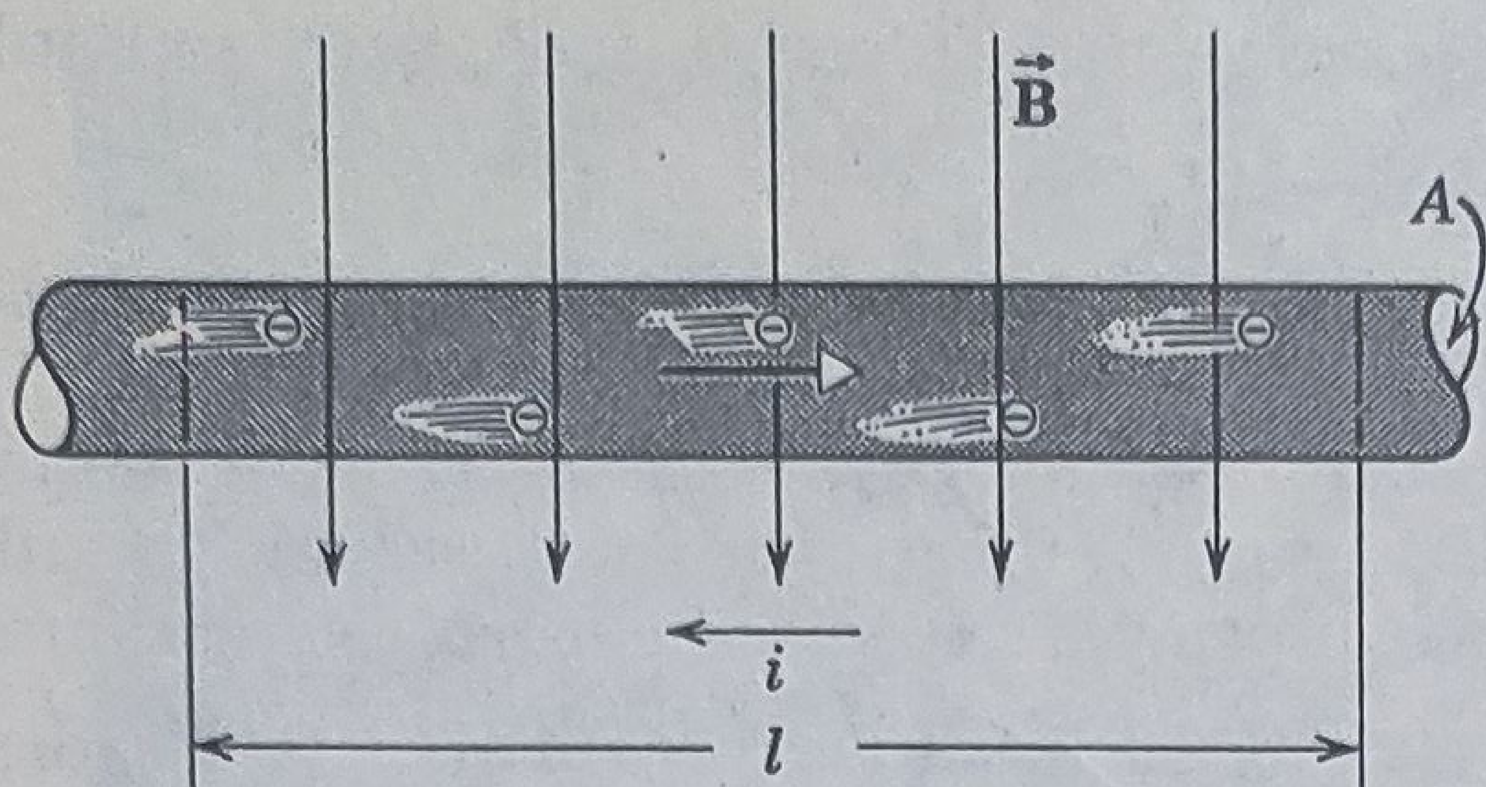


Figura 33-5. Un fir străbătut de un curent i este plasat într-un cîmp de inducție magnetică $\vec{B}$ normală pe el.

curent. În figura 33-5 este arătat un fir de lungime l străbătut de curentul i, plasat într-un cîmp de inducție magnetică $\vec{B}$. Pentru simplitate, firul este orientat astfel ca vectorul densității de curent $\vec{j}$ să fie normal la $\vec{B}$.

Purtătorii de curent printr-un fir metalic sînt electroni liberi (sau de conducție), numărul lor în unitatea de volum a firului fiind n. Mărimea forței medii asupra unui astfel de electron este dată de ecuația 33-3 b sau, deoarece $\theta = 90°$

$$F' = q_0 v B \sin\theta = e v_d B$$

unde v_d este viteza de transport. Din relația $v_d = j/ne$ (ecuația 31-5)

$$F' = e\left(\frac{j}{ne}\right)B = \frac{jB}{n}$$

Un fir de lungime l și de secțiune A conține $n\,Al$ electroni, Al fiind volumul firului. Forța totală asupra electronilor liberi din fir și deci asupra firului însuși este

$$F = (n\,Al)F' = n\,Al\,\frac{jB}{n}$$

Deoarece jA este curentul i prin fir, avem

$$F = i\,l\,B \tag{33-5}$$

Sarcinile negative, care se deplasează spre dreapta în firul din figura 33-5, sînt echivalente cu sarcini pozitive ce se deplasează spre stînga, adică în sensul săgeții de curent. Viteza $\vec{v}$ a unei astfel de sarcini pozitive este spre stînga, iar forța asupra firului, dată de ecuația 33-3 a $(\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B})$ este îndreptată în sus, ieșind în pagină. La aceeași concluzie ajungem și dacă considerăm purtătorii reali, de sarcină negativă, a căror viteză este spre dreapta dar a căror sarcină q_0 este negativă. Astfel, măsurînd forța magnetică laterală asupra unui fir străbătut de un curent și plasat într-un cîmp magnetic, nu putem spune dacă purtătorii de curent sînt sarcini negative ce se deplasează într-un sens dat sau sarcini pozitive ce se deplasează în sens opus.

Ecuația 33-5 este valabilă numai dacă firul este normal la $\vec{B}$. În caz general, exprimată sub formă vectorială, ecuația este

$$\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B} \tag{33-6 a}$$

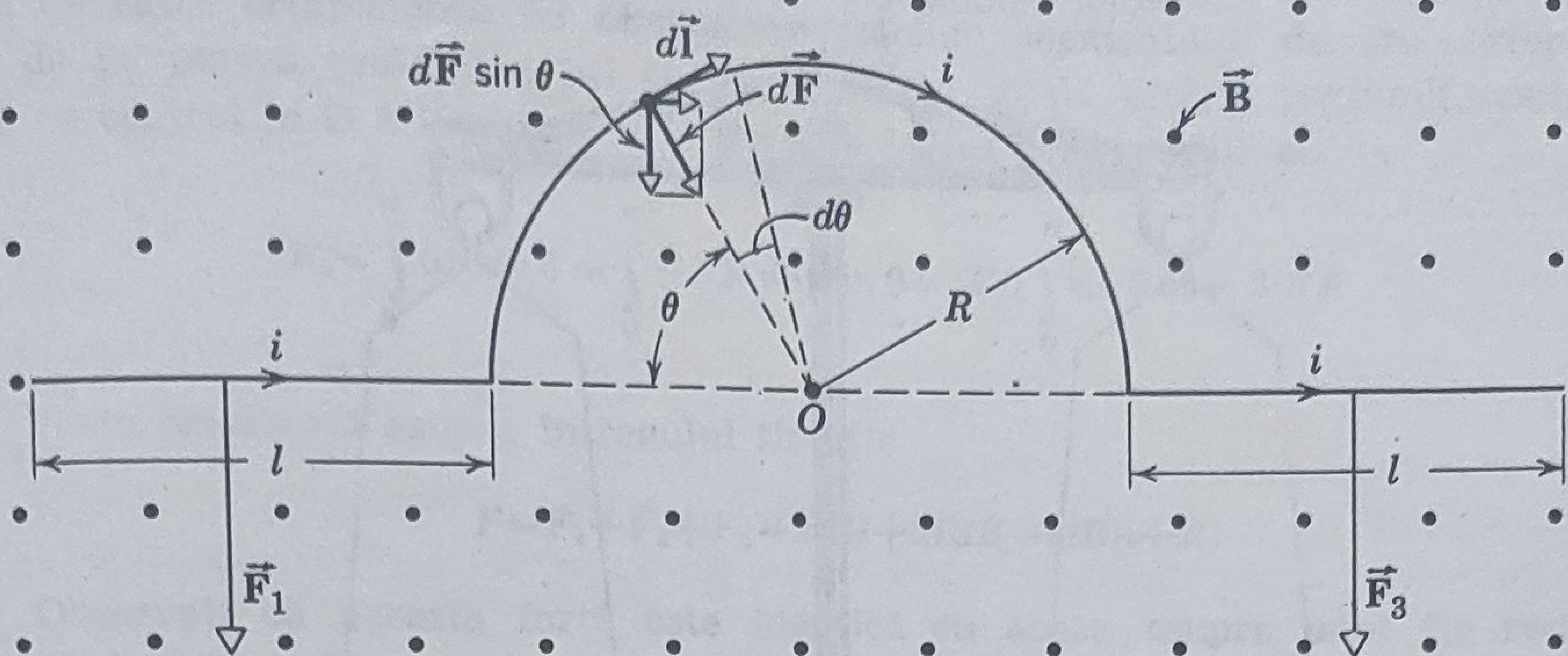


Figura 33-6. Exemplul 2.

unde $\vec{l}$ este un vector în lungul firului (rectiliniu) în sensul curentului. Ecuația 33-6 a este echivalentă cu relația $\vec{F}=q_0\vec{v}\times\vec{B}$ (ecuația 33-3 a; oricare din ele poate fi folosită pentru definirea lui $\vec{B}$. De observat că în figura 33-5 vectorul $\vec{l}$ are sensul spre stînga și că forța magnetică $\vec{F}(=i\,\vec{l}\times\vec{B})$ este îndreptată în sus, în afara paginii. Aceasta este în concordanță cu concluzia la care se ajunge din analiza forțelor ce acționează asupra purtătorilor de sarcină individuali.

Dacă considerăm un element infinit mic, de lungime $d\vec{l}$ dintr-un conductor, forța $d\vec{F}$ ce acționează asupra sa poate fi găsită prin analogie cu ecuația 33-6 a,

$$d\vec{F}=i\,d\vec{l}\times\vec{B} \qquad (33\text{-}6\ b)$$

Integrînd această formulă putem găsi forța $\vec{F}$ asupra unui conductor nelinear.

Exemplul 2. Un fir de forma indicată în figura 33-6 prin care trece un curent i este situat într-un cîmp uniform de inducție magnetică $\vec{B}$ ce iese din planul figurii. Calculați forța ce acționează asupra firului. Cîmpul magnetic este reprezentat prin linii de inducție, desenate ca ieșind din pagină. Punctele arată că sensul lui $\vec{B}$ este în sus, în afara paginii.

Forța asupra fiecărei porțiuni rectilinii are mărimea (din ecuația 33-6 a)

$$F_1=F_3=ilB$$

și este îndreptată în jos după cum indică săgețile din figură.

Asupra unui segment de fir de lungime $d\vec{l}$ din porțiunea circulară, acționează forța $d\vec{F}$ de mărime

$$dF=iBdl=iB(Rd\theta)$$

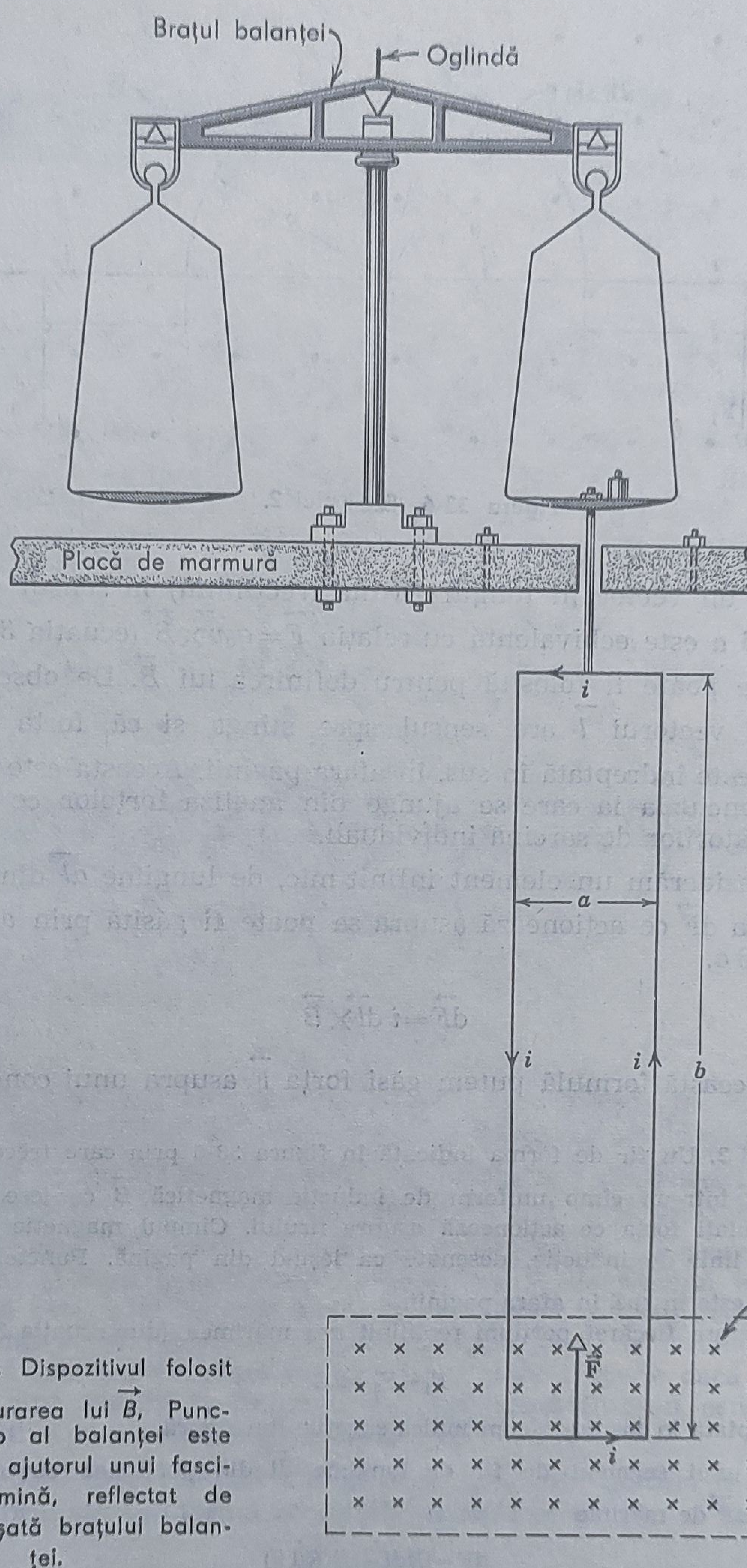


Figura 33-7. Dispozitivul folosit pentru măsurarea lui $\vec{B}$, Punctul de zero al balanței este observat cu ajutorul unui fascicul de lumină, reflectat de oglinda atașată brațului balanței.

a cărei direcție este radială către O, centrul arcului de cerc. Doar componenta îndreptată în jos a acestei forțe acționează efectiv, cealaltă, orizontală, fiind anulată de către componenta de sens opus asociată segmentului de arc corespunzător de pe partea cealaltă a lui O. Astfel, forța totală asupra porțiunii semicirculare cu centrul în O a firului este îndreptată în jos și este egală cu

$$F_2=\int_0^{\pi} dF \sin\theta=\int_0^{\pi}(iBR\,d\theta)\sin\theta=iBR\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=2iBR$$

Forța rezultantă asupra întregului fir este

$$F=F_1+F_2+F_3=2ilB+2iBR=2iB(l+R)$$

Observați că această forță este identică cu aceea asupra unui fir rectiliniu de lungime $2l+2R$.

În figura 33-7 este indicat dispozitivul experimental folosit de Thomas, Driscoll și Hipple de la Biroul Național de Standarde pentru măsurarea inducției magnetice produse de un magnet de laborator de tipul celui din figura 33-2. Dreptunghiul este o bobină cu nouă spire de lățimea a și lungime b de aproximativ 10 cm și 70 cm respectiv. Partea inferioară a bobinei este plasată într-un cîmp de inducție magnetică $\vec{B}$, iar partea superioară este suspendată de brațul unei balanțe; $\vec{B}$ intră perpendicular pe planul figurii.

Prin bobină se stabilește un curent i în sensul indicat în figură, de aproximativ 0,10 A, măsurat cu precizie, iar pe platanul din dreapta se așază greutăți pînă ce balanța este echilibrată. Forța magnetică $\vec{F}$ $(=i\vec{l}\times\vec{B}$; vezi ecuația 33-6 a) asupra părții inferioare a bobinei este îndreptată în sus, după cum este indicat în figură. Ecuația 33-5 arată că forța *asupra fiecărei spire* din partea inferioară a bobinei este iaB. Luînd nouă spire, forța totală asupra părții inferioare a bobinei este $9iaB$. Forțele asupra laturilor verticale ale bobinei $(=i\vec{l}\times\vec{B})$ sînt laterale; deoarece sînt egale și de semn opus ele se anulează și nu produc nici un efect.

După echilibrarea sistemului, experimentatorii au inversat sensul curentului, modificînd astfel semnul tuturor forțelor magnetice ce acționau asupra bobinei. În particular, $\vec{F}$ este acum îndreptat în jos, fapt ce produce dezechilibrarea balanței. Pentru reechilibrare, trebuie pus pe platanul din stînga o greutate m de aproximativ 8,78 g. *Variația* forței la inversarea curentului este de $2F$ și aceasta trebuie să fie egală cu greutatea pusă pe platanul din stînga al balanței

$$mg=2(9iaB)=18iaB$$

Aceasta dă

$$B=\frac{mg}{18ai}=\frac{(8{,}78\times10^{-3}\text{ Kg})\,(9{,}80\text{ m/s}^2)}{(18)\,(0{,}10\text{ m})\,(0{,}10\text{ A})}=0{,}48\text{ Wb/m}^2=4\,800\text{ Gs.}$$

Cercetătorii de la Biroul de Standarde au făcut aceste măsurători cu mult mai multă grijă decît pot indica aceste cifre aproximative. De exemplu, dintr-o serie de măsurători ei au obținut o inducție magnetică egală cu 4697,55 Gs.

33-4 Cuplul care acţionează asupra unei spire parcurse de curent

O spiră dreptunghiulară de lungime a şi lăţime b (figura 33-8) este plasată într-un cîmp uniform de inducţie $\vec{B}$, cu laturile 1 şi 3 mereu normale la direcţia cîmpului. Normala nn' la planul spirei face unghiul θ cu direcţia lui $\vec{B}$.

Presupunem curentul prin spiră cel indicat în figură. Dacă firele care duc şi aduc curentul din spiră sînt răsucite strîns împreună, forţa magnetică netă asupra lor va fi nulă deoarece curenţii în cele două fire sînt în sensuri opuse. Astfel firele de alimentare a spirei pot fi neglijate. Să ne imaginăm că spira este suspendată în centrul ei de greutate cu un fir lung. Astfel, spira este liberă să se rotească, cu un unghi nu prea mare, în jurul oricărei axe ce trece prin centrul său de greutate.

Forţa netă asupra spirei este rezultanta forţelor asupra celor două laturi ale spirei. Pe latura 2, vectorul $\vec{l}$ are sensul curentului şi mărimea b. Unghiul dintre $\vec{l}$ şi $\vec{B}$ pentru latura 2 (vezi figura 33-8 b) este $90°—\theta$. Astfel, mărimea forţei ce acţionează asupra acestei laturi este

$$F_2 = ibB \sin(90° - \theta) = ibB \cos\theta.$$

Din relaţia $\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B}$ (ecuaţia 33-6 a) găsim că $\vec{F}_2$ iese din planul figurii 33-8 b. Arătaţi că forţa $\vec{F}_4$ asupra laturii 4 este de aceeaşi mărime cu $\vec{F}_2$ dar de sens opus. Astfel $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_4$ luate împreună nu au nici un efect asupra mişcării spirei. Forţa rezultantă produsă de ele este zero deoarece ele sînt colineare, cuplul rezultant produs de aceste forţe fiind de asemenea zero.

Forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$ sînt egale între ele şi au valoarea iaB. Şi aceste forţe au sensuri opuse astfel că ele nu tind să deplaseze bobina ca un întreg.

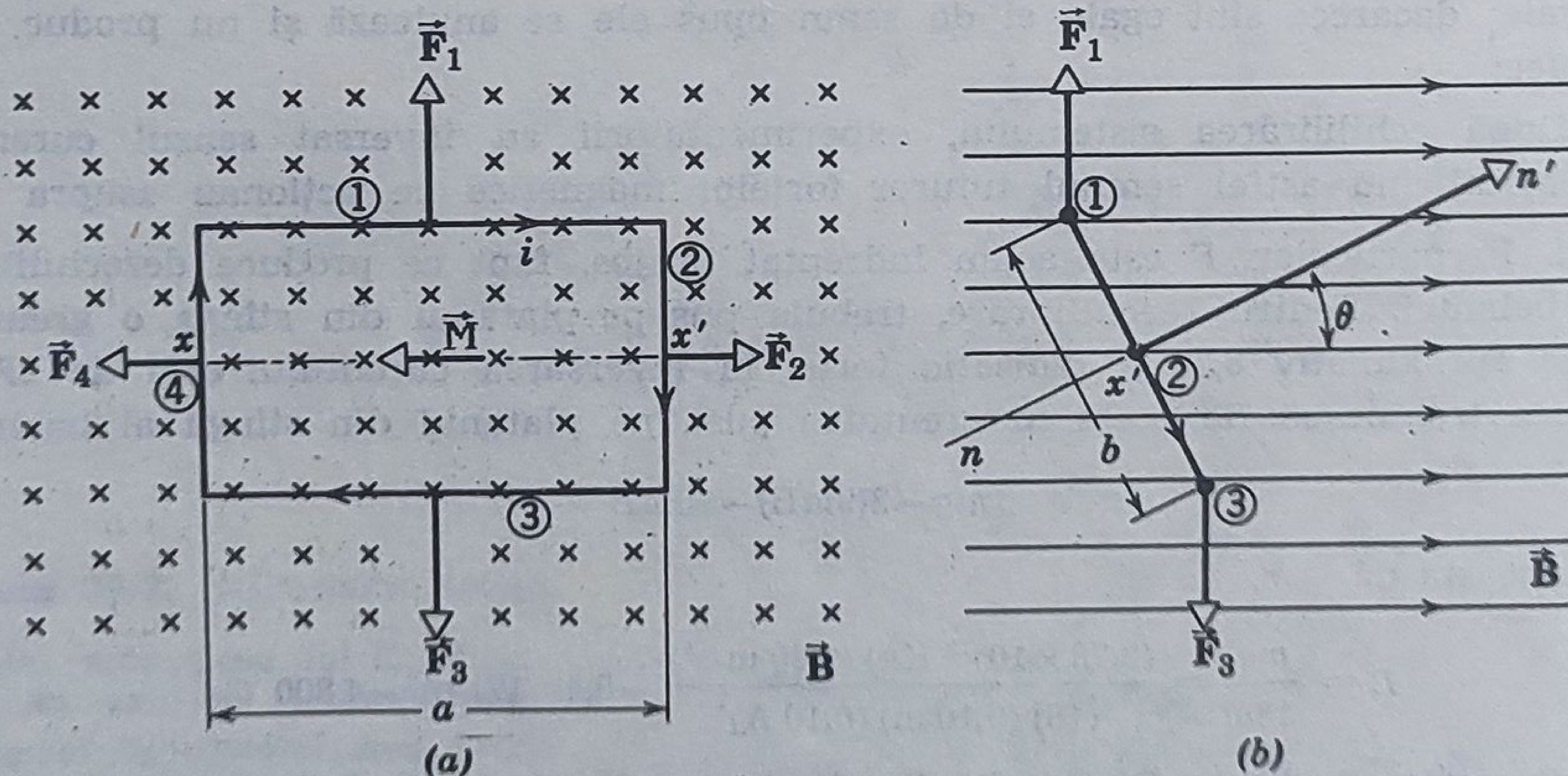


Figura 33-8. O spiră dreptunghiulară străbătută de curentul i, plasată într-un cîmp magnetic exterior uniform.

Dar după cum arată și figura 33-8 b, ele *nu* sînt colineare dacă bobina este în poziția din figură; există un cuplu diferit de zero ce tinde să rotească bobina în sensul acelor de ceasornic în jurul liniei xx'. Bobina poate fi fixată pe o axă rigidă în lungul direcției xx', fără ca să-și piardă din libertatea de mișcare. Acest cuplu poate fi reprezentat în figura 33-8 b printr-un vector care intră în figură în punctul x' sau, în figura 33-8 a printr-un vector în lungul axei xx' cu sensul de la dreapta la stînga.

Mărimea momentului cuplului $\vec{M}'$ se găsește însumînd momentele forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$ față de axa xx'. Deoarece momentele forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$ sînt egale în raport cu această axă, obținem

$$M'=2(iaB)\left(\frac{b}{2}\right)(\sin\theta)=iabB\sin\theta.$$

Acest cuplu acționează asupra fiecărei spire a bobinei. Dacă sînt N spire, momentul cuplului întregii bobine este

$$M=NM'=NiabB\sin\theta=NiAB\sin\theta \tag{33-7}$$

în care suprafața ab a bobinei a fost notată A.

Se poate arăta să această ecuație este valabilă pentru *orice spiră plană de suprafață A, fie că este dreptunghiulară fie că nu.* Existența cuplului asupra unei spire de curent stă la baza funcționării oricărui motor electric și a majorității instrumentelor electrice de măsură folosite la măsurarea curenților sau a diferențelor de potențial.

Exemplul 3. Galvanometrul. În figura 33-9 este dată construcția simplificată a unui galvanometru, instrument de măsură a curenților. Bobina are înălțimea de 2,0 cm și lățimea de 1,0 cm; are 250 de spire și este astfel montată pentru a se putea roti în jurul unui ax vertical într-un cîmp magnetic radial uniform cu $B=0{,}2$ T (2 000 Gs). Arcul spiral produce un cuplu invers care va echilibra cuplul magnetic pentru o anumită rotație φ de echilibru ce corespunde unui curent i prin bobină. Care este *constanta de torsiune k* a arcului (vezi ecuația 15.21) dacă un curent de $1{,}0\cdot10^{-4}$ A produce o rotație de 30°?

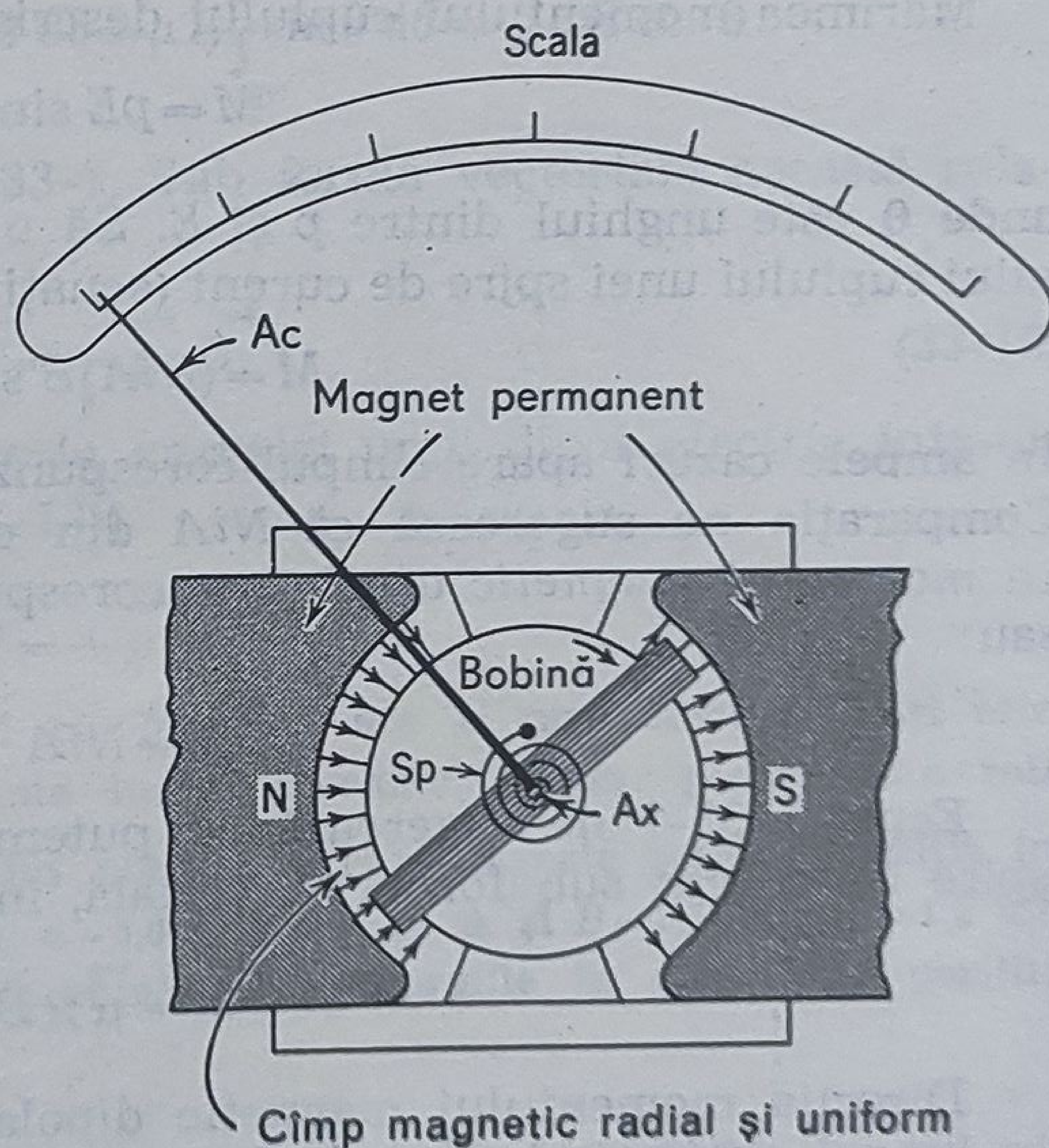


Figura 33-9. Exemplul 3. Părțile principale ale unui galvanometru. Se văd: bobina, arcul spiral și acul indicator.

Egalînd cuplul magnetic cu cel produs de arc (vezi ecuația 33-7) obținem

$$M=NiAB\sin\theta=k\varphi$$

sau

$$k=\frac{NiAB \sin \theta}{\varphi}=\frac{(250)(1{,}0\times10^{-4}\ \mathrm{A})(2{,}0\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2)(0{,}20\ \mathrm{T})(\sin 90^\circ)}{30^\circ}=$$

$$=3{,}3\times10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m/grd}.$$

Observaţi că normala la planul bobinei (adică acul indicator) face întotdeauna un unghi de 90°cu cîmpul magnetic (radial), astfel că $\theta=90^\circ$.

O spiră parcursă de curent ce se orientează singură într-un cîmp magnetic exterior ne reaminteşte de un ac magnetic într-un astfel de cîmp. Una din feţele spirei se comportă ca polul nord al acului*; cealaltă forţă se comportă ca polul sud. Acele magnetice, magneţii în formă de bară şi spirele de curent pot fi considerate ca *dipoli magnetici.* Vom arăta aceasta acum pentru cazul spirelor de curent, raţionînd complet analog cu cazul dipolilor *electrici.*

O entitate poartă numele de dipol electric dacă (a) atunci cînd este plasată într-un cîmp electric *exterior* asupra sa acţionează un cuplu dat de ecuaţia 27-11

$$\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E} \qquad (33\text{-}8)$$

unde $\vec{p}$ este momentul electric dipolar şi (b) produce un cîmp propriu care la distanţă mare este descris calitativ de liniile de cîmp din figura 29-10 şi cantitativ de ecuaţia (29-11). Aceste două condiţii nu sînt independente; dacă una este îndeplinită, cealaltă urmează automat.

Mărimea momentului cuplului descris de ecuaţia 33-8 este

$$M=pE \sin \theta \qquad (33\text{-}9)$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{p}$ şi $\vec{E}$. Să o comparăm cu expresia momentului cuplului unei spire de curent (ecuaţia 33-7)

$$M=(NiA)B \sin \theta \qquad (33\text{-}7)$$

În ambele cazuri apare cîmpul corespunzător (E sau B) şi factorul $\sin \theta$. Comparaţia ne sugerează că NiA din ecuaţia 33-7 poate fi considerat ca *momentul magnetic dipolar* μ corespunzător lui p din ecuaţia (33-9), sau

$$\mu=NiA \qquad (33\text{-}10)$$

Ecuaţia 33-7 ne sugerează că putem scrie momentul cuplului unei spire de curent sub formă vectorială, în analogie cu ecuaţia 33-8

$$\vec{M}=\vec{\mu}\times\vec{B} \qquad (33\text{-}11)$$

Direcţia momentului magnetic dipolar $\vec{\mu}$ al unei spire trebuie luată în lungul axei spirei; sensul său este dat de următoarea regulă: degetele

* Polul nord al unui ac magnetic este capătul ce se îndreaptă spre nordul geografic.

mîinii drepte se curbează în jurul spirei în direcția curentului; degetul mare drept va indica în acest caz sensul lui $\vec{\mu}$. Studentul va trebui să verifice cu atenție că dacă $\vec{\mu}$ este definit prin această regulă și prin ecuația 33-10, atunci ecuația 33-11 descrie corect, în fiecare amănunt, cuplul ce acționează asupra unei spire de curent situată într-un cîmp exterior (vezi figura 33-8).

Deoarece, asupra unei spire de curent sau a unui alt dipol magnetic, acționează un cuplu atunci cînd este plasat într-un cîmp magnetic exterior, rezultă că pentru a modifica orientarea unui astfel de dipol trebuie efectuat un lucru mecanic (pozitiv sau negativ) de către un agent exterior. Astfel, dipolul magnetic, posedă o *energie potențială* asociată cu orientarea sa într-un cîmp magnetic exterior. Această energie poate fi considerată egală cu zero pentru o poziție oarecare a dipolului. Prin analogie cu presupunerea făcută în cazul dipolului electric în paragraful 27-6, presupunem că energia magnetică U este zero atunci cînd $\vec{\mu}$ și $\vec{B}$ fac un unghi de 90°, adică cînd $\theta=90°$. Această alegere a originii energiei pentru U este arbitrară, deoarece ne interesează numai *variațiile* de energie ce se produc cînd dipolul este rotit.

Energia potențială magnetică într-o poziție oarecare θ este definită ca lucrul mecanic ce trebuie efectuat de un agent exterior pentru a roti dipolul din poziția de energie zero ($\theta=90°$) în poziția dată θ. Astfel

$$U=\int_{90°}^{\theta} M\,d\theta=\int_{90°}^{\theta} NiAB\sin\theta\,d\theta=\mu B\int_{90°}^{\theta}\sin\theta\,d\theta=-\mu B\cos\theta$$

în care M este luat din ecuația 33-7. Sub formă vectorială această relație este

$$\vec{U}=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad (33\text{-}12)$$

care este aceeași formă cu expresia energiei unui dipol *electric* într-un cîmp *electric* exterior (ecuația (27-13))

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Exemplul 4. O bobină circulară cu N spire are o rază efectivă a și este străbătută de un curent i. Care este lucrul mecanic necesar pentru a o roti într-un cîmp magnetic exterior $\vec{B}$ din poziția în care θ este zero în poziția în care $\theta=180°$? Presupunem că $N=100$, $a=5{,}0$ cm, $i=0{,}10$ A și $B=1{,}5$ Wb/m²$=1{,}5$ T?

Lucrul mecanic necesar este diferența dintre energiile în cele două poziții; din ecuația 33-12

$$W=U_{\theta=180°}-U_{\theta=0°}=(-\mu B\cos 180°)-(-\mu B\cos 0°)=2\mu B$$

Dar $\mu=NiA$, astfel că

$$W=2NiAB=2Ni(\pi a^2)B=(2)(100)(0{,}10\text{ A})(\pi)(5\times10^{-2}\text{ m})^2(1{,}5\text{ T})=0{,}24\text{ J}.$$

33-5 Efectul Hall

În 1879 E. H. Hall a imaginat o experiență ce dă semnul purtătorilor de sarcină dintr-un conductor; vezi pag. 131. Figura. 33-10 arată un conductor de cupru în formă de bandă prin care trece un curent i în sensul indicat. Şi în acest caz, sensul săgeţii ce indică curentul, notată cu i, este sensul în care s-ar deplasa purtătorii de sarcină dacă ar fi pozitivi. Săgeata de curent poate reprezenta sau sarcini pozitive ce se deplasează în jos (ca în figura 33-10 a) sau sarcini negative ce se deplasează în sus (ca în figura 33-10 b). Efectul Hall poate fi folosit pentru a decide între aceste două posibilități.

Normal pe banda de cupru se stabileşte un cîmp de inducţie magnetică $\vec{B}$ prin introducerea benzii între piesele polare ale unui electromagnet. Cîmpul exercită o forţă de deviere $\vec{F}$ asupra benzii (dată de $i\vec{l}\times\vec{B}$), cu sensul spre dreapta în figură. Deoarece forţa de deviere laterală asupra benzii se datorește forţelor de deviere laterală asupra purtătorilor de sarcină (date de $q\vec{v}\times\vec{B}$) rezultă că aceşti purtători, fie că sînt pozitivi fie că sînt negativi vor tinde să se deplaseze spre dreapta în figura 33-10, în timp ce se deplasează în lungul benzii, producînd o *diferenţă de potenţial transversală* Hall V_{xy} între punctele x şi y spre exemplu. Semnul acestei diferenţe de potenţial Hall determină semnul purtătorilor de sarcină. Dacă purtătorii sînt pozitivi, y va fi la un potenţial mai mare decît x; dacă sînt negativi, y va fi la un potenţial mai mic decît x. Experienţa a arătat că în metale purtătorii de sarcină sînt negativi.

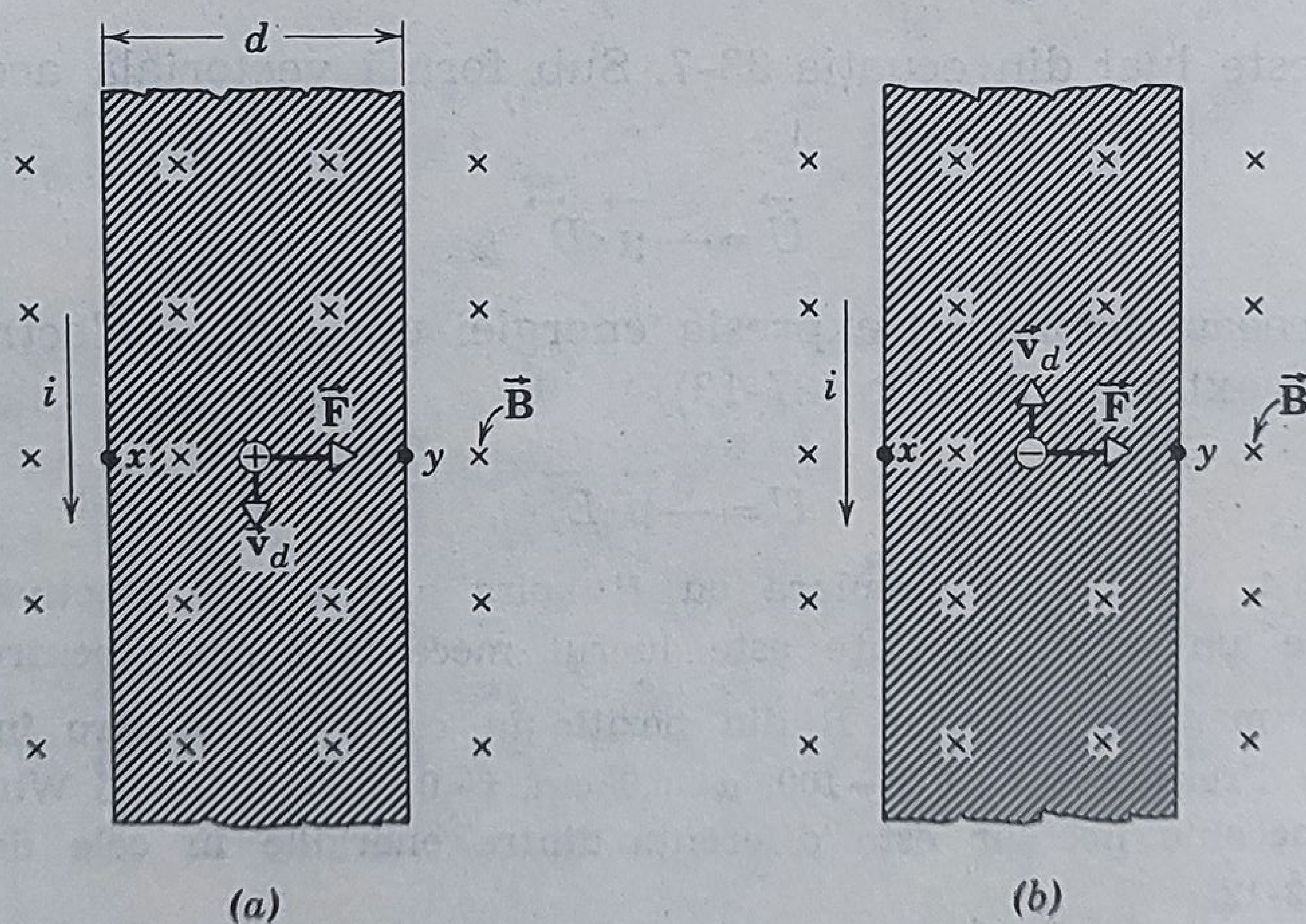


Figura 33-10. O bandă de cupru străbătută de curentul i şi situată într-un cîmp de inducţie magnetică $\vec{B}$, în ipoteza (a) unor purtători pozitivi de sarcină şi (b) a unor purtători negativi de sarcină.

Pentru tratarea cantitativă a efectului Hall, vom folosi modelul *electronilor liberi din metal*, modelul folosit în paragraful 31-4 la explicarea rezistivității. Presupunem că purtătorii de sarcină se deplasează în lungul conductorului cu o viteză de transport constantă v_d. Forța magnetică de deviere care face ca purtătorii de sarcină ce străbat conductorul să se deplaseze spre marginea din dreapta a benzii este dată de $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ (vezi ecuația 33-3 a).

Purtătorii de sarcină nu se pot acumula la nesfîrșit la extremitatea din dreapta a benzii de cupru deoarece deplasarea de sarcină dă naștere unui *cîmp electric Hall* transversal $\vec{E}_H$, ce acționează în interiorul conductorului, opunîndu-se deplasării laterale a purtătorilor. Acest cîmp electric Hall este o altă manifestare a diferenței de potențial Hall și este legat de ea prin

$$E_H = v_{xy}/d.$$

Pînă la urmă se ajunge la echilibru atunci cînd forța magnetică de deviere laterală asupra purtătorilor de sarcină este egalată de forța electrică de sens opus $q\vec{E}_H$ produsă de cîmpul electric Hall, sau

$$q\vec{E}_H + q\vec{v}_{xy} \times \vec{B} = 0$$

care poate fi scrisă

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_d \times \vec{B}. \tag{33-13}$$

Această ecuație arată explicit că, dacă se măsoară $\vec{E}_H$ și $\vec{B}$, se poate determina atît mărimea cît și sensul lui $\vec{v}_d$; odată cunoscut sensul lui $\vec{v}_d$, semnul purtătorilor de sarcină rezultă imediat, așa după cum indică și figura 33-10.

Din măsurători de efect Hall poate fi determinat și numărul de purtători de sarcină din unitatea de volum (n). Dacă $\vec{v}_d$ și $\vec{B}$ formează între ei un unghi drept, atunci ecuația 33-13 devine scalară și obținem $E_H = v_d B$. Combinînd aceasta cu ecuația 31-5 ($v_d = j/ne$) se obține

$$E_H = \frac{j}{ne} B \quad \text{sau} \quad n = \frac{jB}{eE_H} \tag{33-14}$$

Concordanța dintre experiență și ecuația 33-14 este destul de bună pentru metalele monovalente, după cum este arătat în tabela 33-1.

Tabela 33.1

NUMĂRUL DE ELECTRONI DE CONDUCȚIE ÎN UNITATEA DE VOLUM

Metalul	Valori obținute din efect Hall, $10^{22}/cm^3$	Valori calculate presupunînd un electron pe atom, $10^{22}/cm^3$
Li	3,7	4,8
Na	2,5	2,6
K	1,5	1,3
Cs	0,80	0,85
Cu	11	8,4
Ag	7,4	6,0
Au	8,7	5,9

Interpretarea simplă a efectului Hall bazată pe modelul electronilor liberi nu este valabilă pentru metalele nemonovalente, pentru fier şi materiale magnetice similare şi pentru semiconductori ca de exemplu germaniu. Interpretarea teoretică a efectului Hall, bazată pe fizica cuantică modernă dă o bună concordanţă cu experienţa în toate cazurile.

Exemplul 5. O bandă de cupru lată de 2,0 cm şi groasă de 1,0 mm este plasată într-un cîmp magnetic cu $B=1,5$ Wb/m², ca în figura 33-10. Care este diferenţa de potenţial Hall ce apare transversal pe bandă atunci cînd prin ea trece un curent de 200 A?

Din ecuaţia 33-14

$$E_H = \frac{jB}{ne}$$

$$\text{dar } E_H = \frac{V_{xy}}{d} \quad \text{şi} \quad j = \frac{i}{A} = \frac{i}{dh}$$

unde h este grosimea benzii. Combinînd aceste ecuaţii obţinem

$$V_{xy} = \frac{iB}{neh} = \frac{(200\ \text{A})(1,5\ \text{Wb/m}^2)}{(8.4\cdot 10^{28}/\text{m}^3)(1,6\cdot 10^{-19}\text{C})(1,0\cdot(10^{-3}\text{m})} = 2,2\times 10^{-5}\ \text{V} = 22\mu\ \text{V}$$

Astfel de diferenţe de potenţial nu sînt mari. Pentru calculul lui n vezi pag. 132.

33-6 Purtători de sarcină în mişcare circulară

O particulă încărcată negativ intră cu viteza $\vec{v}$ într-un cîmp uniform de inducţie magnetică $\vec{B}$ (figura 33-11). Presupunem că $\vec{v}$ este normal pe $\vec{B}$, deci că este în planul figurii. Relaţia $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ (ecuaţia 33-3 *a*) indică că asupra particulei va acţiona o forţă de deviere laterală de mărime qvB. Această forţă fiind cuprinsă în planul figurii, înseamnă că particula nu va putea părăsi acest plan.

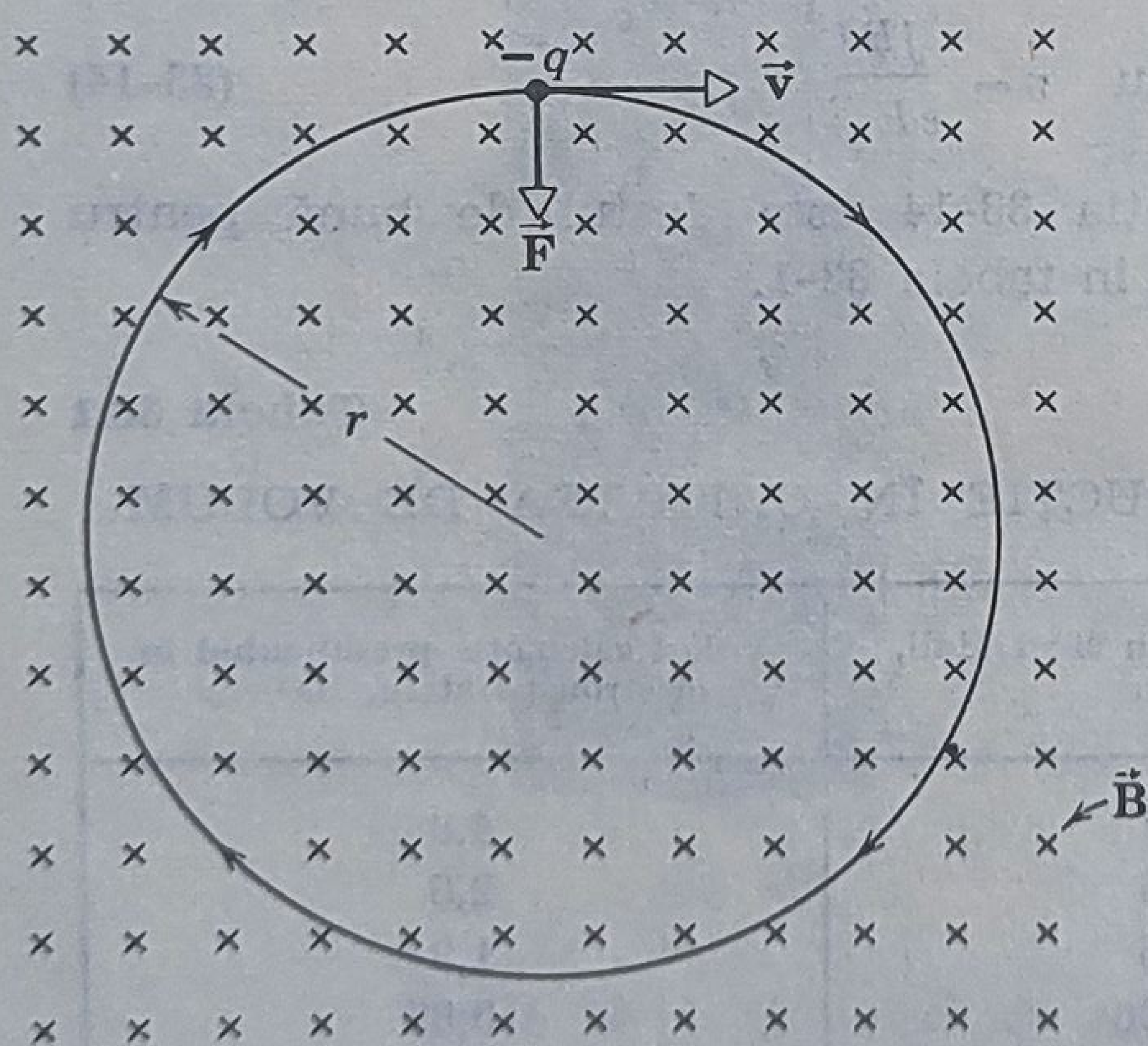


Figura 33-11. O sarcină $-q$ în mişcare circulară într-un plan normal pe un cîmp magnetic uniform.

Aceasta ne reaminteşte de o piatră legată cu o sfoară şi învîrtită pe o suprafaţă plană orizontală. Şi aici o forţă de mărime constantă, tensiunea în sfoară, acţionează în plan şi formează un unghi drept cu viteza. Particula încărcată, la fel ca şi piatra, see mişcă de asemenea cu viteză constantă pe o traiectorie circulară. Din legea a doua a lui Newton avem

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \text{sau} \quad r = \frac{mv}{qB} \qquad (33\text{-}15)$$

care ne dă raza traiectoriei. Cele trei spirale din figura 33-4 indică trei

electroni de energie relativ joasă, într-o cameră cu bule. Traiectoriile nu sînt cercuri deoarece electronii în mişcarea lor pierd din energie prin ciocniri.

Viteza unghiulară ω este dată de v/r sau din ecuaţia 33-15

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}.$$

Frecvenţa ν măsurată de exemplu în rotaţii/secundă, este dată de

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}. \qquad (33\text{-}16)$$

Observaţi că ν *nu depinde de viteza particulei.* Particulele rapide se deplasează pe cercuri mari (ecuaţia 33-15), cele lente pe cercuri mici dar timpul T (perioada) necesar pentru parcurgerea unui cerc complet este egal pentru toate.

Frecvenţa ν este o frecvenţă caracteristică pentru particula încărcată în cîmp şi poate fi comparată cu frecvenţa caracteristică a unui pendul ce oscilează în cîmpul gravitaţional al Pămîntului sau cu frecvenţa caracteristică a unui sistem oscilant format dintr-o masă şi un arc legate între ele. Ea poartă uneori numele de *frecvenţă ciclotronică* a particulei în cîmp deoarece în ciclotron particulele se rotesc cu această frecvenţă.

Exemplul 6. Un electron de 10 eV se roteşte într-un plan normal la un cîmp uniform de inducţie magnetică de $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ Wb/m² (=1,0 Gs).

a) Care este raza orbitei sale?

Viteza unui electron de energie cinetică E_c se obţine din

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

Studentul va verifica că aceasta dă pentru v valoarea de $1{,}9 \cdot 10^6$ m/s. Apoi, din ecuaţia 33-15

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{(9{,}1 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg})\,(1{,}9 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s})}{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})\,(1{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb/m^2})} = 0{,}11\ \mathrm{m} = 11\ \mathrm{cm}$$

(b)Care este frecvenţa sa ciclotronică? Din ecuaţia 33-16

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})\,(1{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb/m^2})}{(2\pi)\,(9{,}1 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg})} = 2{,}8 \times 10^{6}\ \mathrm{rot/s}$$

(c) Care este perioada sa de rotaţie T?

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2{,}8 \times 10^{6}\ \mathrm{rot/s}} = 3{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

Astfel, un electron are nevoie de 0,36 μs pentru a efectua o rotaţie într-un cîmp de 1,0 Gs=$1{,}0 \cdot 10^{-4}$ T.

(d) Care este sensul de parcurgere a traiectoriei circulare pentru un observator ce priveşte în lungul cîmpului?

În figura 33-11 forţa magnetică $q\vec{v} \times \vec{B}$ este îndreptată radial spre interiorul cercului, ea fiind forţa centripetă. Deoarece $\vec{B}$ intră în planul hîrtiei, $\vec{v}$ ar tre-

bui să fie îndreptat spre stînga în poziția indicată pe figură, dacă sarcina q ar fi pozitivă. Dar, sarcina fiind un electron, cu $q = -e$, $\vec{v}$ trebuie să fie spre dreapta. Astfel, pentru un observator ce privește în lungul lui $\vec{B}$, sarcina se rotește în sensul acelor de ceasornic.

33-7 Ciclotronul

Ciclotronul, realizat în 1932 de Ernest Lawrence (1902—1958), accelerează particule încărcate, ca de exemplu protoni și deuteroni*, la energii mari pentru a putea fi folosite în experiențele de ciocnire atomică și nucleară. În figura 33-12 este dat ciclotronul Universității din Pittsburgh.

În *sursa de ioni* din centrul ciclotronului, moleculele de deuteriu sînt bombardate cu electroni de energie suficient de mare (de aproximativ 100 eV) pentru ca la ciocnire să formeze ioni pozitivi. Mulți dintre

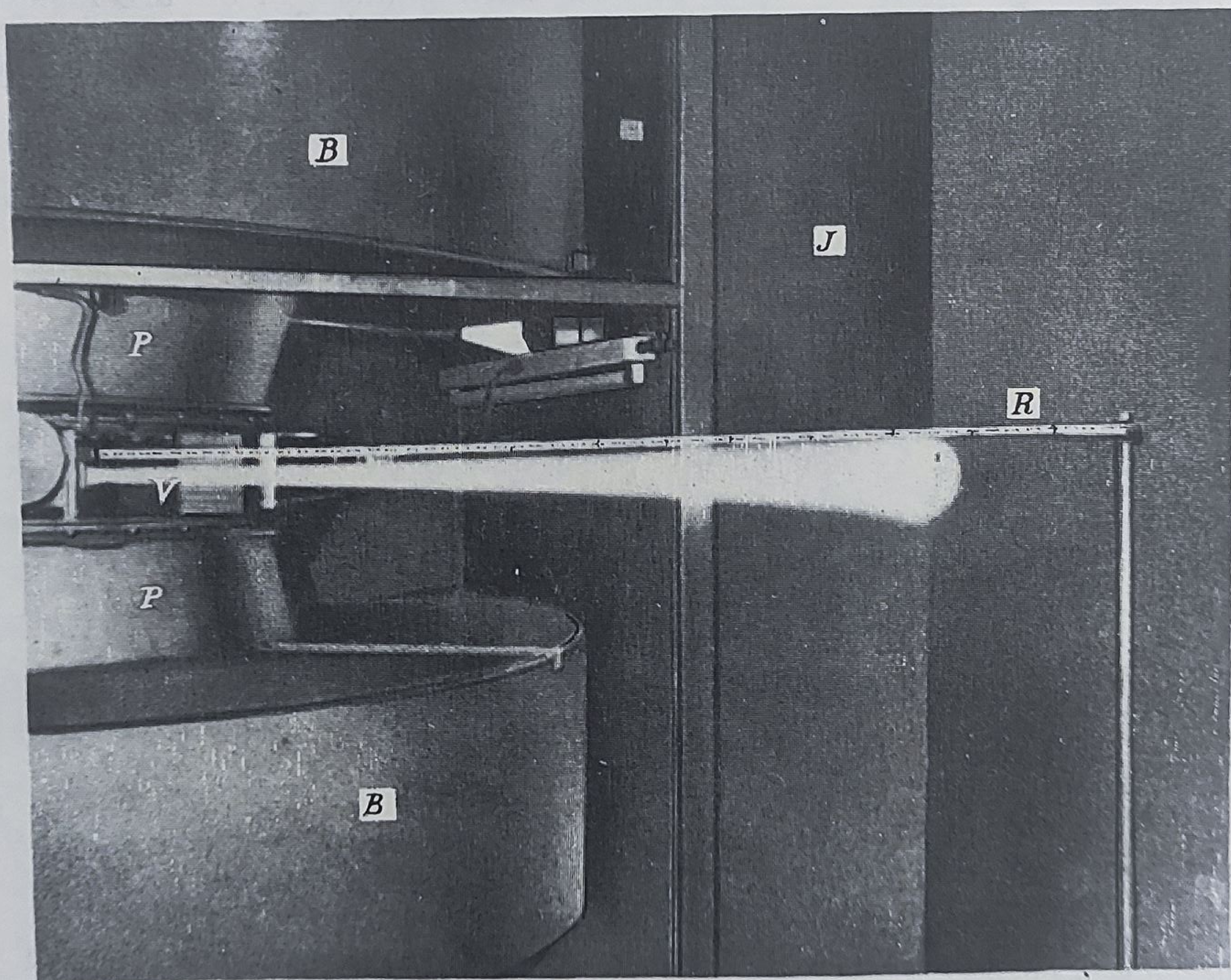


Figura 33-12. Ciclotronul Universității din Pittsburgh. Se observă incinta vidată *V*, jugul magnetului *J*, fețele polilor magnetici *P*, bobinele magnetului *B* și fasciculul de deuteroni ce ies în aer. Rigla *R* are 1,8 m lungime. (Cu amabilitatea lui A. J. Allen.)

* Deuteronii sînt nuclee de hidrogen greu.

acești ioni sînt deuteroni liberi ce intră în ciclotronul propriu-zis printr-un mic orificiu din peretele sursei de ioni și apoi sînt accelerați.

Pentru accelerare ciclotronul nu folosește o diferență de potențial foarte mare (aproximativ 10^5 V) ci energia mare se obține prin faptul că ionul parcurge de multe ori această diferență de potențial. Pentru a atinge 10 MeV cu un potențial de accelerare de 10^5 V sînt necesare 100 de treceri. Un cîmp magnetic este folosit pentru a curba traiectoria ionilor pentru ca astfel să poată trece din nou prin același potențial de accelerare.

În figura 33-13 este dată o privire de sus a porțiunii ciclotronului ce se găsește în interiorul incintei vidate notată cu V (fig. 33-12). Este format din două cutii din cupru în formă de „D“, numite *duanți* ce fac parte dintr-un oscilator electric ce produce o diferență de potențial de accelerare în intervalul dintre duanți. Sensul acestei diferențe de potențial se inversează de cîteva milioane de ori într-o secundă.

Duanții se găsesc într-un cîmp magnetic ($B \cong 1{,}6$ Wb/m^2) ce iese din planul figurii 33-13. Acest cîmp este produs de un electromagnet mare, notat cu J în figura 33-12. În final, spațiul în care se deplasează ionii este evacuat pînă la o presiune de aproximativ 10^{-6} mm Hg, pentru că altfel ionii s-ar ciocni în continuu de moleculele de aer.

Să presupunem că un deuteron ce iese din sursa de ion, găsește duantul din fața sa încărcat negativ; va fi accelerat către acest duant și va intra în interiorul său. Ajuns în interior, forțele electrice nu mai acționează asupra sa, fiind ecranate de pereții metalici ai duanților. Cîmpul magnetic nefiind ecranat de duanți, traiectoria ionului se curbează devenind circulară, cu raza, depinzînd de viteză, dată de ecuația 33-15

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

După un timp t_0 ionul iese din duant de cealaltă parte a sursei de ioni. Să presupunem că acum potențialul de accelerare și-a schimbat semnul. Deci, ionul are *din nou* în față un duant negativ, este iar accelerat și descrie din nou în duant un semicerc dar de rază ceva mai mare (vezi ecuația (33-15)). *Timpul de trecere prin acest duant este din nou* t_0. Aceasta deoarece perioada de rotație T a unui ion ce se deplasează pe o traiectorie circulară într-un cîmp magnetic nu depinde de viteza ionului (vezi ecuația 33-16). Acest proces se continuă pînă ce ionul ajunge la extremitatea duantului unde este extras din sistem cu ajutorul unei plăci de deviere încărcată negativ.

Condiția de bază a funcționării unui ciclotron este ca frecvența caracteristică ν cu care ionul se rotește în cîmp să fie egală cu frecvența constantă ν_0 a oscilatorului electric

$$\nu = \nu_0.$$

Această *condiție de rezonanță* ne spune că pentru ca energia unui ion ce se rotește să crească, trebuie să-i furnizăm energie, cu o frecvență ν_0 egală cu frecvența proprie ν cu care ionul se rotește în cîmp. Analog, furnizăm energie unui pendul împingîndu-l cu o frecvență egală cu frecvența proprie de oscilație a pendului.

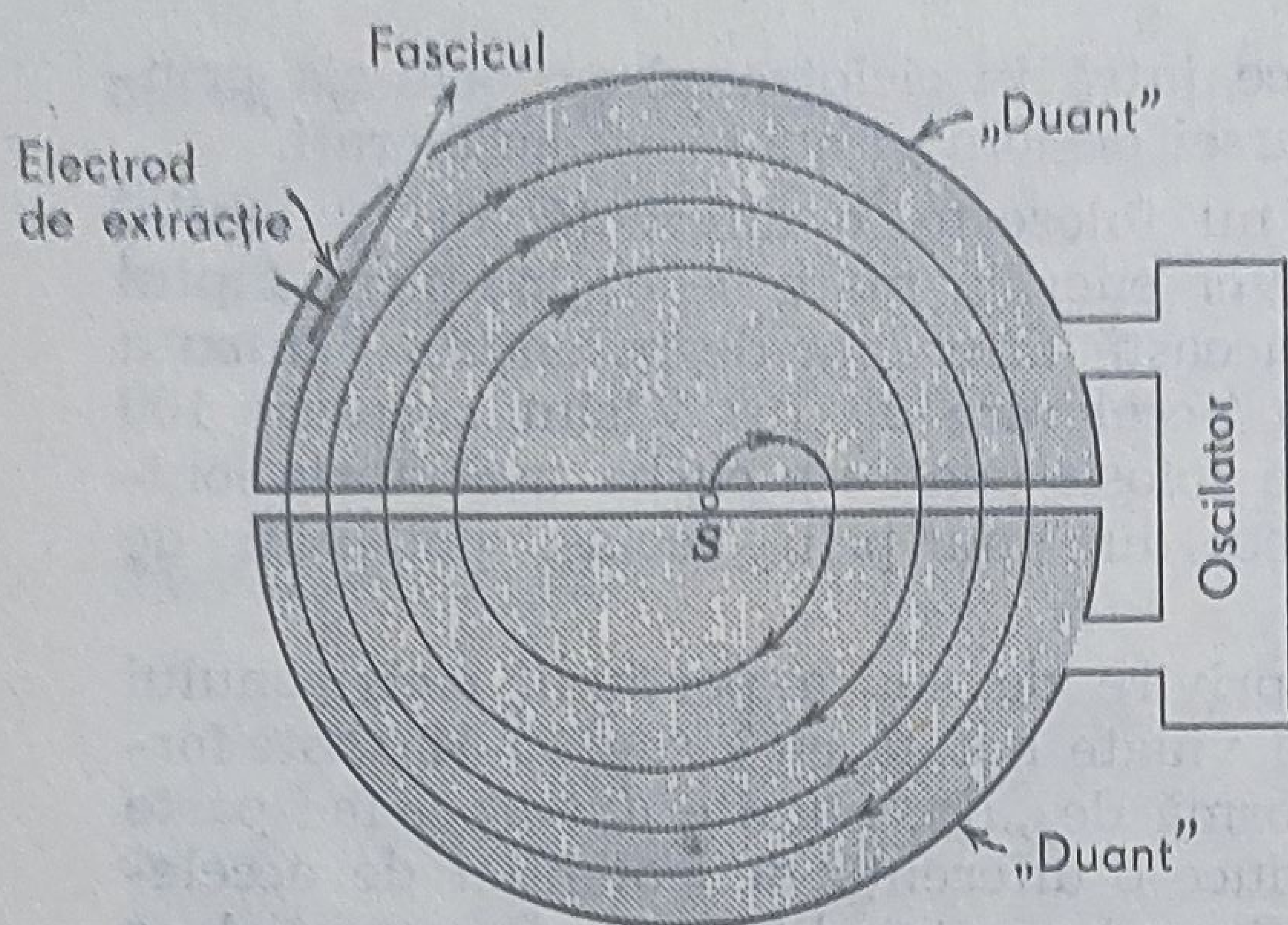


Figura 33-13. Elementele unui ciclotron. Se văd: sursa de ioni S și duanții. Placa de deviere, pusă la un potențial negativ potrivit, deviază particulele în afara sistemului de duanți.

Putem rescrie condiția de rezonanță, folosind ecuația 33-16 ($\nu = qB/2\pi m$)

$$\frac{qB}{2\pi m} = \nu_0 \qquad (33\text{-}17)$$

Pentru un anumit ion ce este accelerat raportul q/m este fix; în mod obișnuit oscilatorul este proiectat pentru a lucra pe o singură frecvență ν_0. Deci, se „acordă" ciclotronul, variind pe B pînă ce ecuația (33-17) este satisfăcută și apare un fascicul accelerat.

Energia particulelor accelerate în ciclotron depinde de raza R a duanților. Viteza unei particule ce se deplasează pe o traiectorie circulară de rază R dată de ecuația 33-15 ($r = mv/qB$) este

$$v = \frac{qBR}{m}$$

Energia cinetică este deci

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \qquad (33\text{-}18)$$

Exemplul 7. Ciclotronul Universității din Pittsburgh are frecvența oscilatorului egală cu $12 \cdot 10^6$ Hz și raza duanților de 53,34 cm (a) Care este inducția magnetică B necesară pentru accelerarea deuteronilor?

Din ecuația (33-17) $\nu_0 = qB/2\pi m$, astfel că

$$B = \frac{2\pi\nu_0 m}{q} = \frac{(2\pi)(12 \cdot 10^6/5)(3,3 \cdot 10^{-27}\text{kg})}{1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}} = 1,6\,\text{Wb/m}^2 :$$

Observați că deuteronul are aceeași sarcină cu protonul dar masa (aproape) dublă.

(b) Care este energia deuteronilor obținuți?

Din ecuația 33-18

$$E_c = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}\text{C})^2(1,6\text{Wb/m}^2)^2(53,34 \cdot 10^{-2}\text{m})^2}{(2)(3,3 \times 10^{-27}\text{kg})} =$$

$$= (2,8 \cdot 10^{-12}\text{J})\left(\frac{1\text{eV}}{1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}}\right) = 17\text{MeV}.$$

La energii mari ciclotronul nu mai poate accelera deoarece una din condiţiile de bază a funcţionării sale, şi anume că frecvenţa de rotaţie a unui ion într-un cîmp magnetic este independentă de viteza sa, este valabilă numai pentru viteze mult mai mici decît viteza luminii. Cînd viteza particulei creşte, în ecuaţia (33-16) trebuie folosită *masa relativistă* m. Masa relativistă creşte cu viteza (ecuaţia (8-20)), astfel că la viteze suficient de mari, ν scade cu viteza. Astfel, ionul rămîne în urma oscilatorului electric şi în cele din urmă energia ionului ce se deplasează pe traiectoria circulară nu mai creşte.

O altă dificultate întîlnită la accelerarea particulelor la energii mari este că dimensiunile magnetului necesar pentru a ghida particulele pe traiectorii circulare sînt foarte mari. Pentru obţinerea unui proton de 30 GeV, de exemplu, într-un cîmp de 1,5 T, raza de curbură trebuie să fie de 65 m. Un magnet de tipul celui folosit în ciclotron de această dimensiune (cu un diametru de aproximativ 130 m) ar fi extraordinar de scump. Viteza unui astfel de proton de 30 GeV este egală cu 0,99998 din viteza luminii.

Atît limitările relativiste cît şi cele de ordin economic pot fi depăşite. Iată cum: în ecuaţia 33-17 masa m trebuie luată egală cu masa relativistă dată de ecuaţia 8-20

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

v fiind viteza particulei, iar c a luminii.

Cînd viteza particulei creşte, masa sa relativistă m creşte şi ea. Pentru ca egalitatea din ecuaţia 33-17 să se menţină şi deci pentru ca rezonanţa să fie asigurată, pe măsură ce particula (presupunem un proton) este accelerată, frecvenţa oscilatorului ν_0 poate fi micşorată astfel ca produsul $\nu_0 m$ să rămînă constant. Acceleratoarele ce folosesc această tehnică se numesc *sincrociclotroane*.

Pentru a depăşi limitele legate de costul magnetului putem *varia atît pe B cît şi pe* ν_0 în mod ciclic astfel ca atît ecuaţia 33-17 să fie satisfăcută tot timpul cît şi raza orbitei particulei să rămînă constantă în timpul procesului de accelerare. Aceasta permite folosirea unui magnet inelar în locul celui folosit în mod normal în ciclotron, reducîndu-se astfel mult preţul de cost. Avînd la dispoziţie cele *două* variabile B şi ν_0, este posibil să menţinem *două* egalităţi în timpul procesului de accelerare, una fiind ecuaţia 33-17 iar cealaltă relaţia

$$v=\omega_0 R_0=(2\pi\nu_0)R_0$$

Tabela 33-2

SINCROTRONUL DE PROTONI DE LA CERN

Diametrul orbitei	170,8 m
Secţiunea incintei vidate	14×6,9 cm
Cîmpul magnetic maxim	1,4 T
Variaţia de frecvenţă la o rotaţie	7 M Hz
Numărul de pulsuri pe minut	20/min
Energia maximă a protonului	28 GeV
Energia cîştigată la o rotaţie	54 KeV
Distanţa străbătută de un proton	$8 \cdot 10^4$ km
Numărul de protoni la un impuls	10^{11}

în care R_0 este raza orbitei dorite (fixe). Acceleratoarele ce folosesc această tehnică poartă numele de *sincrotroane*. În tabelul 33-2 sînt date unele caracteristici ale acceleratorului ce folosește aceste principii, construit la Geneva în Elveția de către Consiliul European de Cercetări Nucleare (CERN).

33-8 Experiența lui Thomson

În 1897 J. J. Thomson, lucrînd la Cavendish Laboratory în Cambridge, a măsurat raportul dintre sarcina e a electronului și masa sa m, observînd devierea sa în cîmpuri electrice și magnetice simultane. Se spune de obicei că această experiență istorică a însemnat descoperirea electronului deși H. A. Lorentz și P. Zeeman (1865—1943) măsuraseră, cu un an înainte, aceeași cantitate pentru electronii legați în atom, folosind o metodă complet diferită de cea a lui Thomson.

În figura 33-14 este dată o versiune modernizată a aparatului lui Thomson. Electronii sînt emiși de filamentul incandescent F și accelerați sub diferența de potențial aplicată V. Apoi, ei intră într-o regiune în care se deplasează normal la cîmpul electric $\vec{E}$ și la cîmpul de inducție magnetică $\vec{B}$; $\vec{E}$ și $\vec{B}$ fac între ei un unghi de 90°. Fasciculul devine vizibil sub forma unui punct luminos atunci cînd cade pe ecranul fluorescent S. Întreaga regiune în care se deplasează electronii este vidată pentru a se elimina ciocnirile cu moleculele de aer.

Forța rezultantă asupra unei particule încărcate ce se deplasează într-un cîmp electric și unul magnetic este dată de ecuația 33-4

$$\vec{F}=q_0\vec{E}+q_0\vec{v}\times\vec{B}$$

Din figura 33-14 se vede că particula este deviată în sus de cîmpul elec-

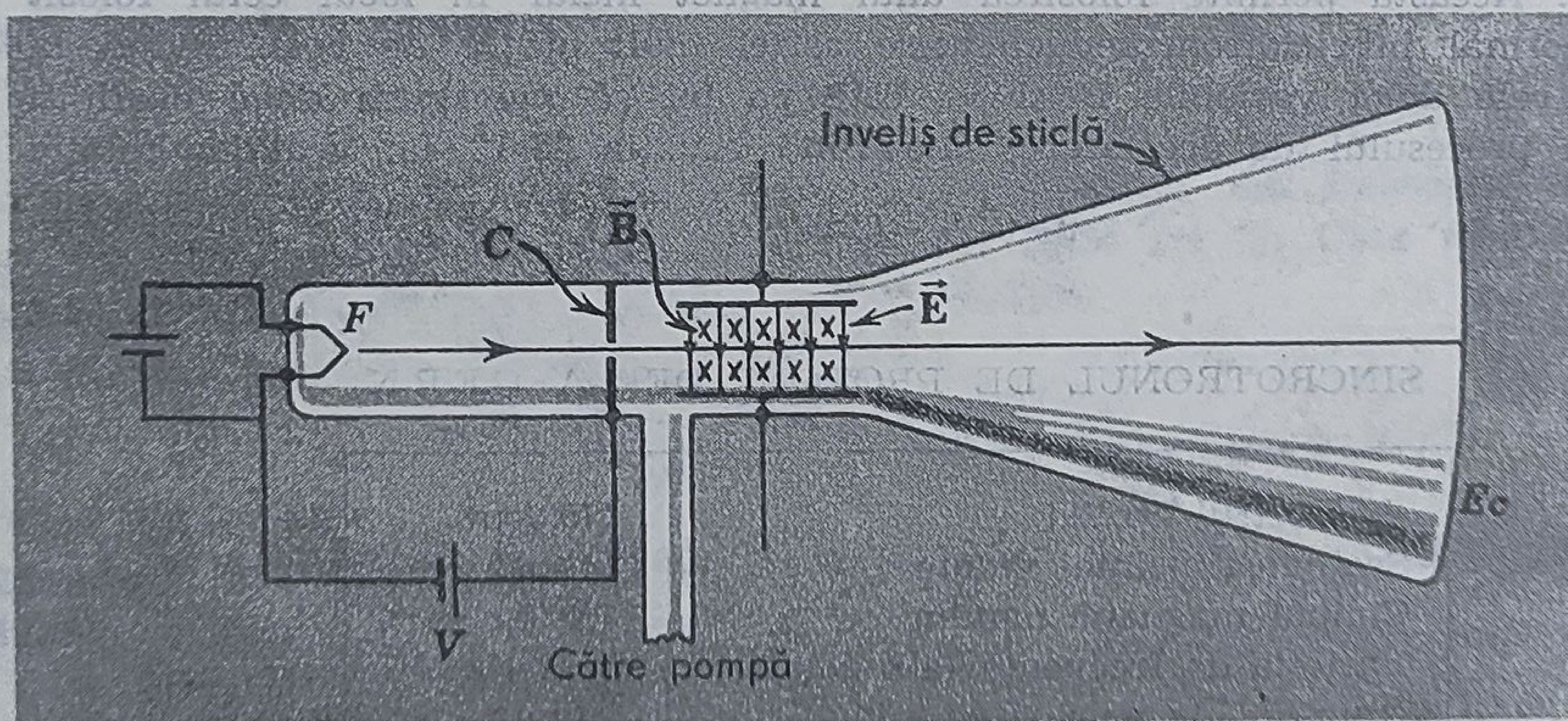


Figura 33-14. Electronii emiși de filamentul incandescent F sînt accelerați în diferența de potențial V și trec prin orificiul din ecranul C. După ce trec printr-o regiune în care sînt prezente cîmpuri electrice și magnetice normale unul pe altul, cad pe ecranul fluorescent Ec.

tric și în jos de cîmpul magnetic. Dacă aceste forțe de deviere sînt egale, și de sens contrar (adică dacă $\vec{F}=0$) această ecuație se reduce la

$$eE=evB$$

sau

$$E=vB \tag{33-19}$$

Astfel, pentru o viteză dată v a electronului, condiția de deviere zero poate fi satisfăcută variind pe E sau B.

Cînd se repetă astăzi experiența lui Thomson, de obicei sub formă de experiență de laborator pentru studenți, se procedează în felul următor*: (a) se notează poziția punctului luminos corespunzător fasciculului nedeviat, cînd atît $\vec{E}$ cît și $\vec{B}$ sînt egali cu zero; (b) se aplică un cîmp electric fix $\vec{E}$ și se măsoară pe ecranul fluorescent devierea produsă; (c) se aplică un cîmp magnetic și se variază valoarea sa pînă ce devierea fasciculului ajunge egală cu zero.

În paragraful 27-5 am văzut că devierea y a unui electron într-un cîmp electric pur (etapa b) măsurată la extremitatea plăcilor de deviere este dată de ecuația 27-9, sau cu mici modificări în notație

$$y=\frac{eEl^2}{2mv^2}$$

unde v este viteza electronului iar l este lungimea plăcilor de deviere; y nu este măsurabil direct, dar poate fi calculat din deplasarea punctului luminos măsurată pe ecran, cunoscîndu-se geometria aparatului. Astfel y, E și l sînt cunoscute; nu cunoaștem raportul e/m și viteza v. Nu putem calcula raportul e/m înainte de a găsi viteza, care este scopul etapei c a experienței.

Cînd (etapa c) forța electrică devine egală și de sens opus forța magnetică, forța totală devine zero și putem scrie (ecuația 33-19)

$$v=\frac{E}{B}$$

Introducînd această ecuație în ecuația pentru y și rezolvînd în funcție de raportul e/m obținem

$$\frac{e}{m}=\frac{2yE}{B^2l^2}$$

în care toate cantitățile din dreapta pot fi măsurate. Valoarea obținută de Thomson pentru e/m este de $1{,}7\cdot10^{11}$ C/kg, în excelentă concordanță cu valoarea actuală de $1{,}75890\cdot10^{11}$ C/kg.

---

* Thomson nu a folosit această metodă de zero, fără îndoială din considerente practice. El aplica cîmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ separat și le varia pînă ce obținea aceeași deviere a fasciculului. Și în acest caz este valabilă ecuația 33-20. Vezi lucrarea originală a lui Thomson: *Philosophical Magazine*, 44, 293 (1897).

Întrebări

1. Care pereche din cei trei vectori din ecuaţia $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ formează întotdeauna un unghi drept? Care pot forma între ei orice unghi?

2. De ce nu definim sensul inducţiei magnetice $\vec{B}$ ca fiind cel al forţei magnetice ce acţionează asupra sarcinii în mişcare?

3. Imaginaţi-vă că sînteţi într-o cameră cu spatele la unul din pereţi şi că un fascicul de electroni ce se deplasează orizontal dinspre peretele din spate spre cel din faţă, este deviat spre dreapta. Care sînt direcţia şi sensul cîmpului de inducţie magnetică ce există în cameră?

4. Dacă un electron nu este deviat la trecerea printr-o regiune dată din spaţiu, putem spune cu siguranţă că în acea regiune nu există cîmp magnetic?

5. Dacă un electron în mişcare este deviat lateral la trecerea printr-o regiune din spaţiu, putem fi siguri că în acea regiune există un cîmp magnetic?

6. Un fascicul de protoni este deviat lateral. Această deviere poate fi produsă de (a) un cîmp electric? (b) un cîmp magnetic? (c) dacă ambele pot produce devierea, cum puteţi spune care din ele este prezent?

7. Sarcina totală dintr-un conductor este egală cu zero, chiar dacă prin el circulă un curent electric. De ce totuşi un cîmp magnetic exercită o forţă asupra sa?

8. Ecuaţia 33-11 ($\vec{M}=\vec{\mu}\times\vec{B}$) ne spune că, momentul cuplului asupra unei spire de curent situată într-un cîmp magnetic exterior este zero dacă unghiul dintre axa spirei şi cîmp este (a) 0° sau (b) 180°. Discutaţi natura echilibrului (adică este stabil, instabil sau indiferent) pentru aceste două poziţii.

9. În exemplul 4, am arătat că lucrul mecanic necesar pentru a roti o spiră de curent cu 180° într-un cîmp magnetic exterior este de $2\mu B$. Este acest rezultat valabil indiferent de orientarea iniţială a spirei?

10. Imaginaţi-vă că, în camera în care vă găsiţi există un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$, vertical, cu sensul în sus. O spiră de curent circulară cu planul său situat orizontal este astfel susţinută încît este liberă să se rotească în jurul unei axe orizontale. Care este sensul curentului în spiră, privit de sus în jos, pentru care spira va fi în echilibru stabil luînd în considerare numai forţele şi cuplurile de origine magnetică?

11. O spiră dreptunghiulară de curent se află într-o orientare oarecare dintr-un cîmp magnetic exterior. Este necesar un lucru mecanic pentru a roti spira în jurul unei axe perpendiculare pe planul său?

12. (a) De ce trebuie să fim atenţi ca la măsurarea diferenţelor de potenţial Hall, punctele x şi y din figura 33-10 să fie exact opuse unul altuia? (b) Dacă unul din contacte este mobil, ce procedeu aţi folosi în găsirea poziţiei lui pentru a fi siguri că cele două puncte sînt situate corect?

13. Un cîmp magnetic uniform umple o regiune cubică din spaţiu. Poate fi proiectat din exterior un electron în acest cub astfel încît să se deplaseze pe o traiectorie circulară închisă în interiorul cubului?

14. Imaginaţi-vă că în camera în care vă găsiţi există un cîmp magnetic uniform cu $\vec{B}$ vertical în jos. Doi electroni încep brusc să se mişte orizontal, din centrul camerei cu aceeaşi viteză, dar în sensuri opuse. (a) Discutaţi mişcarea lor. (b) Discutaţi mişcarea lor în cazul în care o particulă

este un electron iar cealaltă este un pozitron.

15. De ce traiectoriile electronilor de joasă energie din figura 33-4 sînt spirale? Adică, de ce se modifică raza de curbură în cîmpul magnetic constant în care este introdusă camera?

16. Care este principalul rol (a) al cîmpului electric și (b) al cîmpului magnetic într-un ciclotron?

17. Pentru ca experiența lui Thomson de determinare a raportului e/m să reușească (paragraful 33-8) este esențial ca electronii să aibe o viteză perfect constantă?

Probleme

1. Electronii din fasciculul unui tub de televizor au o energie de 12 keV. Tubul este astfel orientat încît electronii se deplasează orizontal de la sud la nord. Componenta verticală a cîmpului magnetic al Pămîntului este îndreptată în jos și are $B=5{,}5\cdot10^{-5}$ Wb/m². (a) În ce direcție va fi deviat fasciculul? (b) Care este accelerația unui electron dat? (c) Cu cît va fi deviat fasciculul după ce parcurge 20 cm prin tubul de televizor?

2. Într-o experiență de fizică nucleară un proton de 1,0 MeV se mişcă într-un cîmp magnetic uniform pe o traiectorie circulară. Ce energie trebuie să aibe (a) o particulă alfa și (b) un deuteron pentru a se mișca pe o aceeași orbită?

3. Un fir lung de 1,0 m prin care trece un curent de 10 A face un unghi de 30° cu un cîmp magnetic uniform cu $B=1{,}5$ Wb/m². Calculați mărimea, direcția și sensul forței ce acționează asupra firului.

4. Un fir lung de 60 cm și de masă 10 g este suspendat de o pereche de conductori de alimentare sub formă de arc într-un cîmp magnetic de inducție 0,40 Wb/m². Care este mărimea și sensul curentului necesar pentru a îndepărta tensiunile mecanice din firele suport? (Vezi figura 33-15).

5. Exprimați inducția magnetică B și fluxul magnetic Φ în funcție de dimensiunile fundamentale M, L, T și Q (masă, lungime, timp și sarcină).

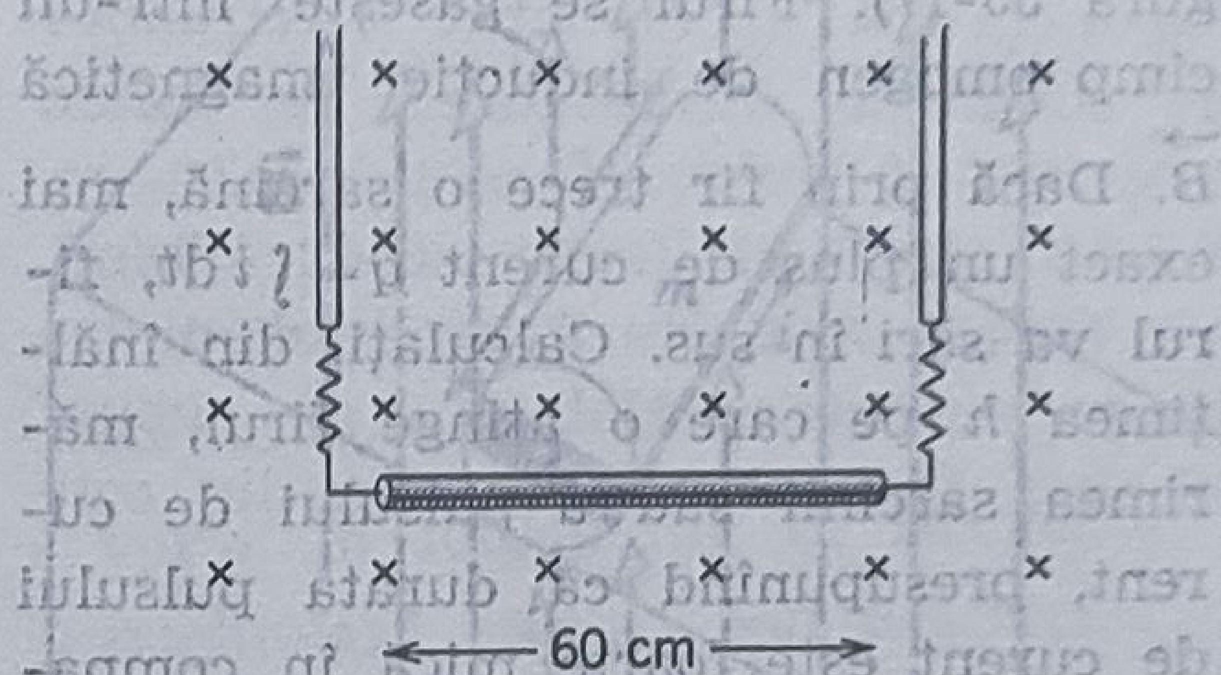


Figura 33-15.

6. Un conductor metalic de masă m alunecă fără frecare pe două șine la distanța d una de cealaltă, ca în figura 33-16. Totul este situat într-un cîmp uniform vertical de inducție magnetică $\vec{B}$. Generatorul G produce un *curent constant* i ce trece printr-una din șine, prin conductor și apoi

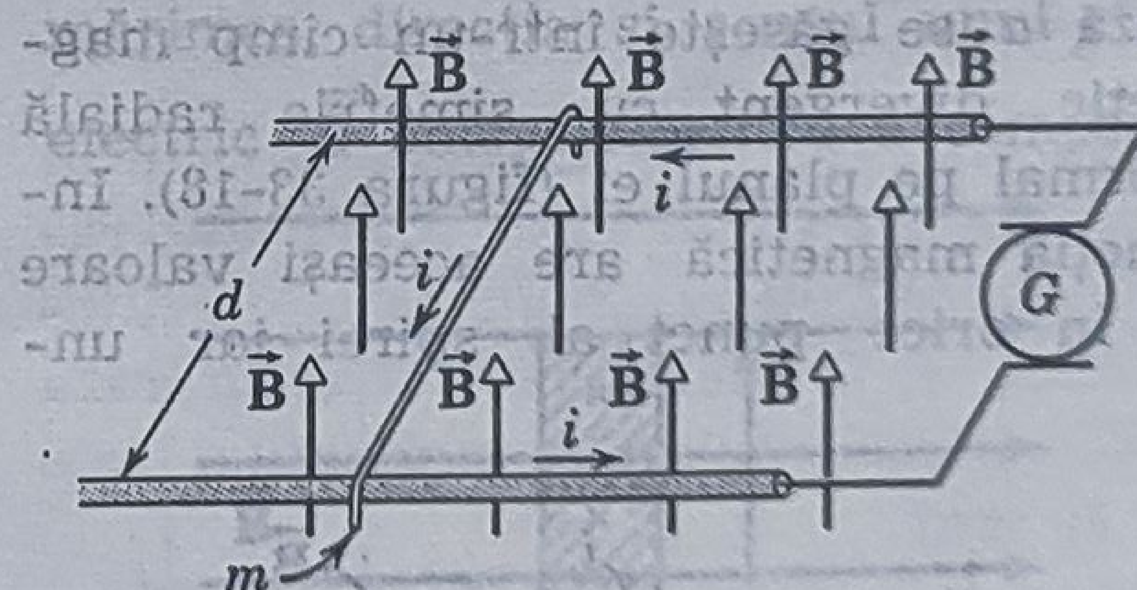


Figura 33-16.

în lungul celeilalte șine înapoi. Găsiți viteza (mărimea și sensul) conductorului în funcție de timp, presupunînd că la $t=0$ se găsea în repaus.

7. Un fir în formă de U, de masă m și lungime l are cele două extre-

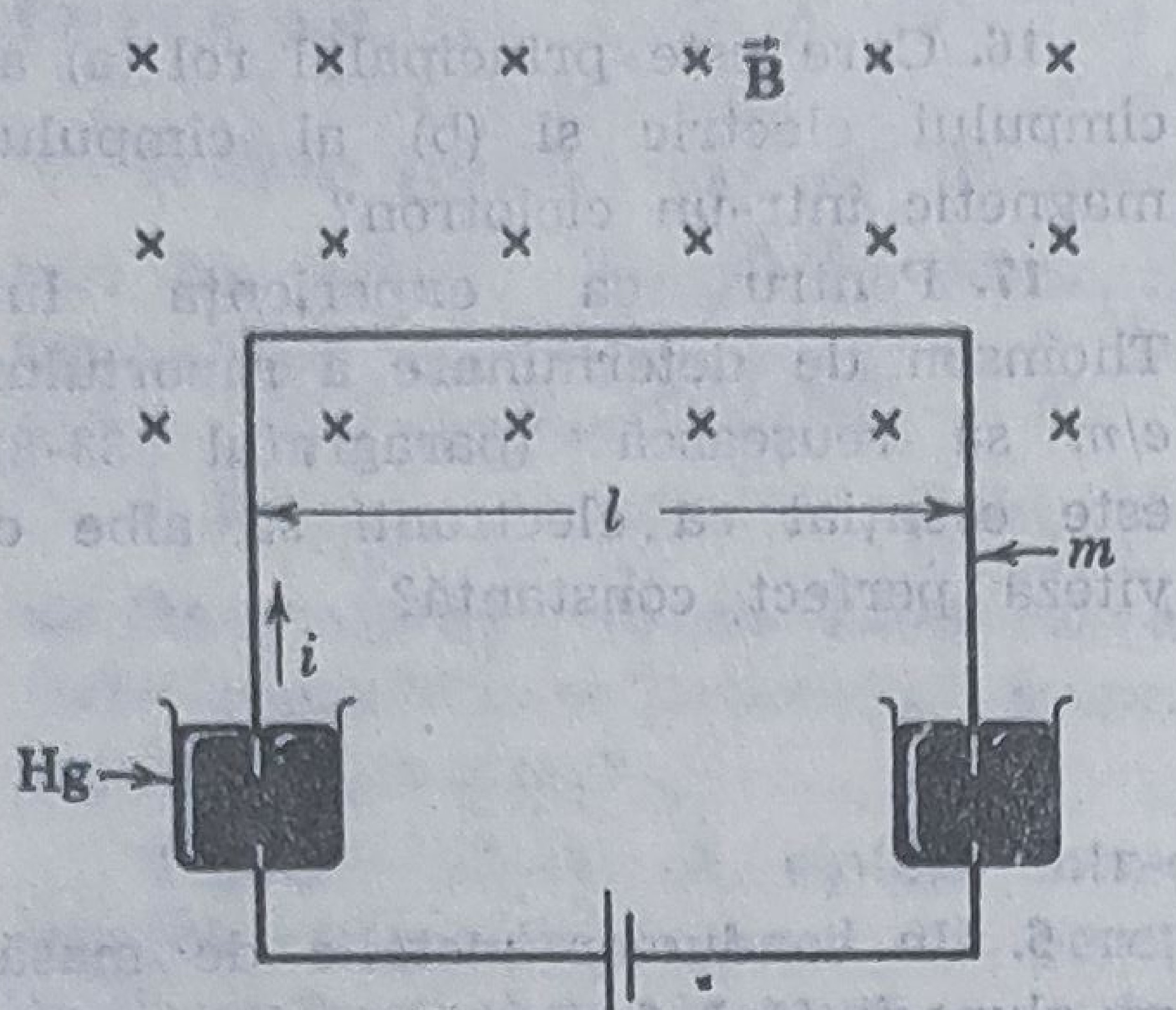


Figura 33-17.

mităţi cufundate în mercur (figura 33-17). Firul se găseşte într-un cîmp omogen de inducţie magnetică $\vec{B}$. Dacă prin fir trece o sarcină, mai exact un plus de curent $q=\int i\,dt$, firul va sări în sus. Calculaţi, din înălţimea h pe care o atinge firul, mărimea sarcinii sau a pulsului de curent, presupunînd că durata pulsului de curent este foarte mică în comparaţie cu durata de mişcare a firului. Folosiţi faptul că impulsul mv este egal cu cantitatea de mişcare $\int F\,dt$. (Indicaţie: încercaţi să găsiţi o legătură între $\int i\,dt$ şi $\int F\,dt$.) Evaluaţi q pentru $B=0{,}1$ Wb/m^2, $m=10$ gr, $l=20$ cm şi $h=3$ m.

8. O spiră de curent circulară de rază a se găseşte într-un cîmp magnetic divergent cu simetrie radială normal pe planul ei (figura 33-18). Inducţia magnetică are aceeaşi valoare B în orice punct al spirei iar unghiul θ dintre B şi normala la planul spirei este acelaşi în orice punct al spirei. Conductorii de alimentare, răsuciţi, nu au nici un efect în problemă. Găsiţi mărimea, direcţia şi sensul forţei exercitată de cîmp asupra spirei cînd prin spiră trece un curent i după cum se indică în figură.

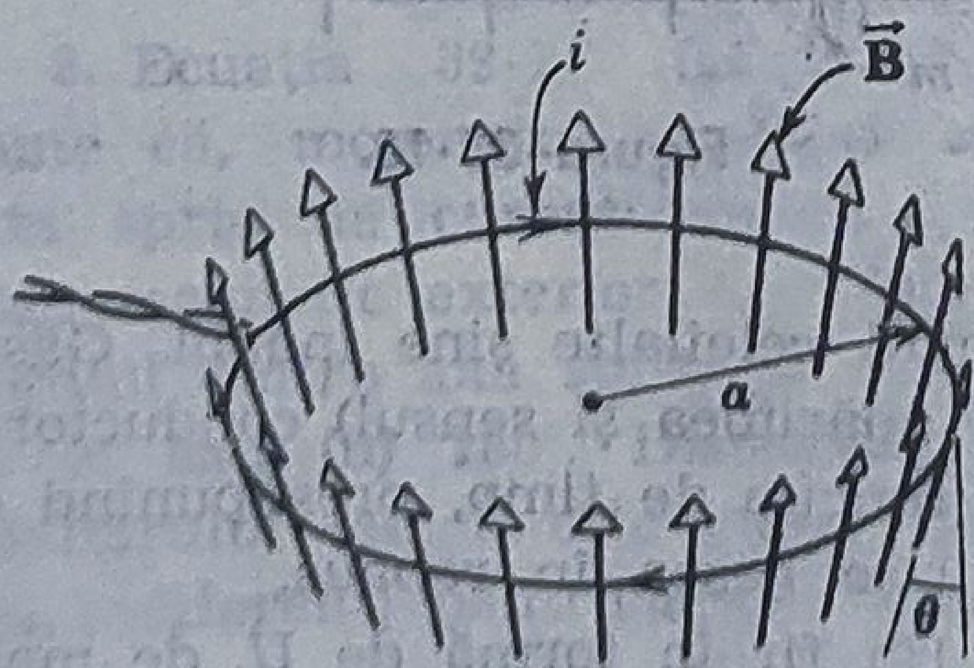


Figura 33-18.

9. O bară de cupru cu greutatea de 0,136 kg se găseşte în repaus pe două şine la distanţa de 0,30 m una de alta. Prin ea trece un curent de 50 A de la o şină spre cealaltă. Coeficientul de frecare este 0,60. Care este valoarea cea mai mică a cîmpului magnetic care va produce alunecarea barei şi care este mărimea şi sensul său?

10. Printr-un conductor de formă arbitrară trece un curent i între punctele a şi b (figura 33-19). Conductorul se găseşte într-un plan normal la un cîmp uniform de inducţie magnetică $\vec{B}$. Arătaţi că forţa asupra conductorului este aceeaşi cu cea asupra unui conductor rectiliniu prin care trece un curent i direct de la a la b. (Indicaţie: Înlocuiţi conductorul printr-o serie de „trepte" paralele şi perpendiculare pe linia dreaptă ce uneşte a cu b).

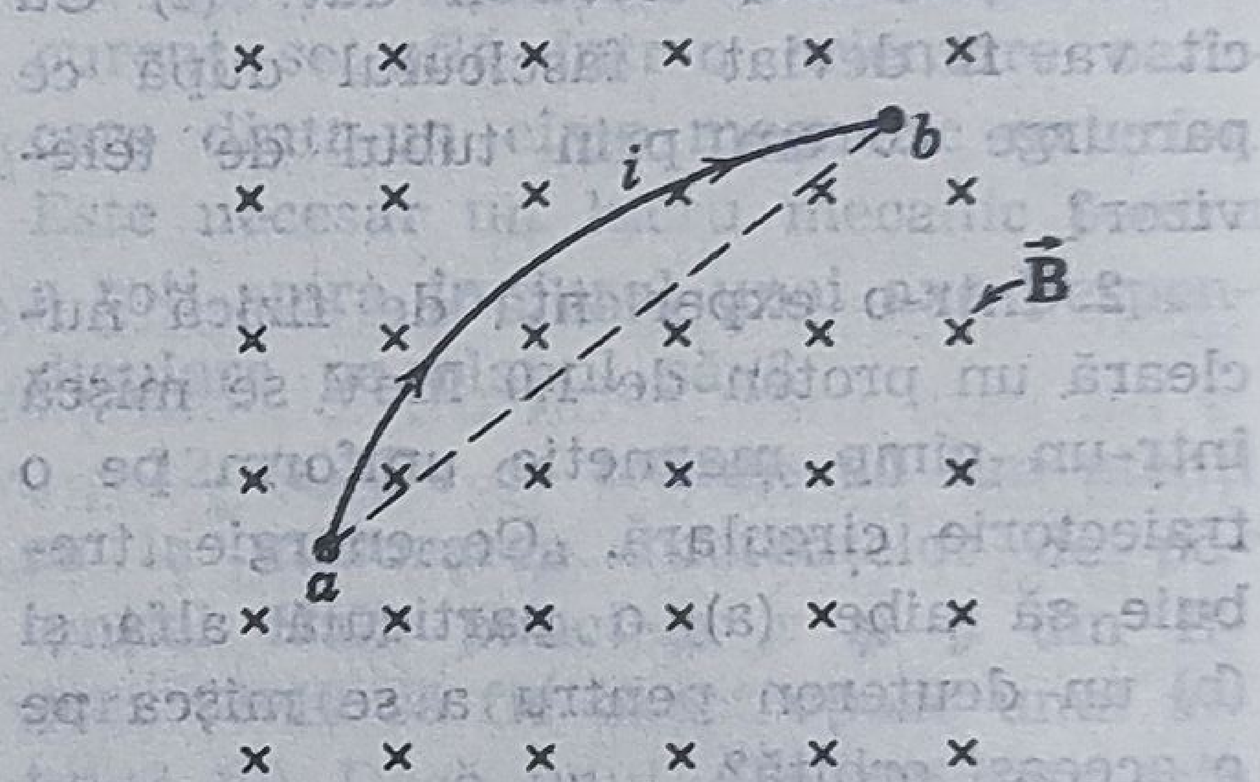


Figura 33-19.

11. În figura 33-20 este dată o bobină formată din 20 de spire dreptunghiulare de 10 cm pe 5,0 cm. Este străbătută de un curent de 0,10 A şi este fixată pe una din laturi. Care este cuplul (mărimea, direcţia şi sensul) ce acţionează asupra bobinei

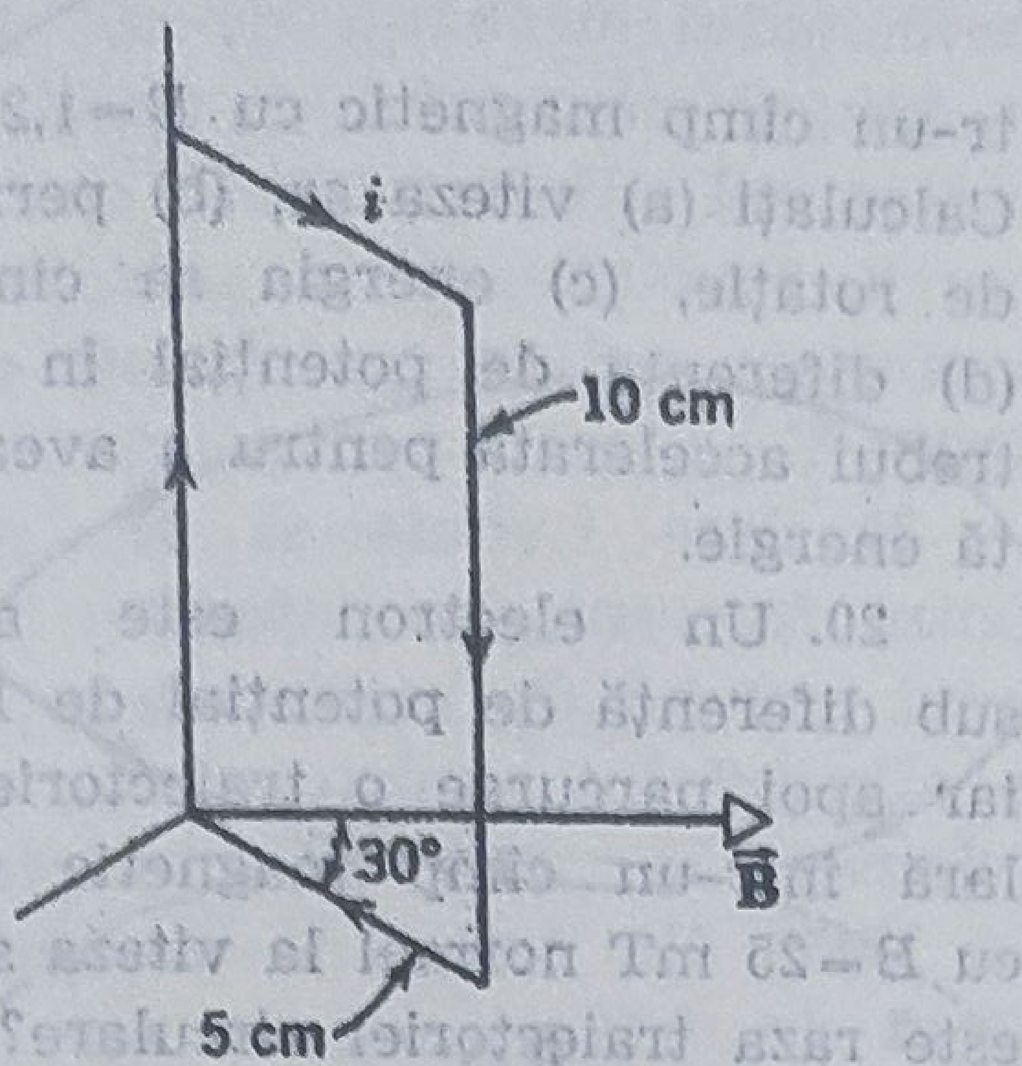


Figura 33-20.

cînd este introdusă într-un cîmp uniform de inducţie magnetică 0,50 Wb/m² ce face un unghi de 30° cu planul său?

12. Arătaţi că relaţia $M = NAiB \sin\theta$ este valabilă pentru spire de curent închise de formă arbitrară. (Indicaţie: Inlocuiţi spira de formă arbitrară printr-un ansamblu de spire lungi, subţiri, adiacente de — aproximativ dreptunghiulare — ce acoperă toată suprafaţa ei, ce sînt echivalente cu ea din punct de vedere al distribuţiei curentului.)

13. Printr-un conductor de lungime L trece un curent i. Arătaţi că dacă-l transformaţi într-o bobină circulară, cuplul exercitat asupra sa de un cîmp magnetic dat va fi maxim atunci cînd bobina este formată numai dintr-o *singură* spiră şi va avea valoarea

$$M = \frac{1}{4\pi} L^2 iB$$

14. Pe un cilindru de lemn cu masa $m = 0{,}25$ kg, raza R şi lungimea $l = 0{,}1$ m sînt înfăşurate longitudinal $N = 10$ spire, astfel ca planul unei spire să conţină axa cilindrului (figura 33-21). Care este valoarea cea mai mică a curentului prin bobină care poate impiedica cilindrul să se rostogolească în jos pe un plan înclinat ce face unghiul θ cu planul orizontal, într-un cîmp vertical de inducţie magnetică de 0,5 Wb/m², dacă planul spirelor este paralel cu planul înclinat?

15. Printr-un conductor de cupru sub formă de bandă de înălţime h şi lăţime w trece un curent i, indicat în figura 33-22. Normal pe bandă se aplică un cîmp uniform de inducţie magnetică B. (a) Calculaţi viteza de transport v_d a electronilor. (b) Care este mărimea, direcţia şi sensul forţei magnetice $\vec{F}$ ce acţionează asupra

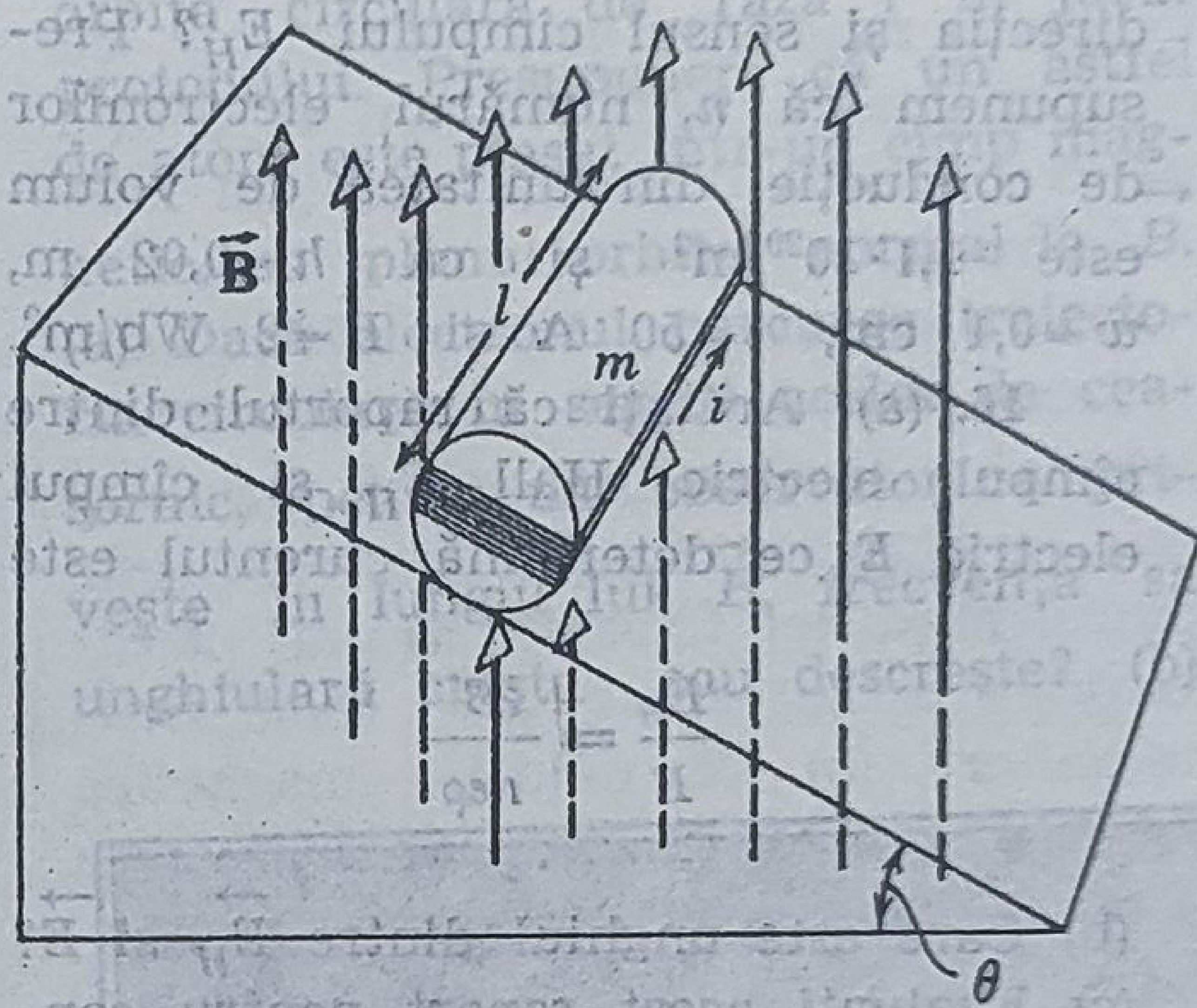


Figura 33-21.

electronilor? (c) Care trebuie să fie mărimea, direcţia şi sensul unui cîmp electric $\vec{E}$ omogen pentru a compensa

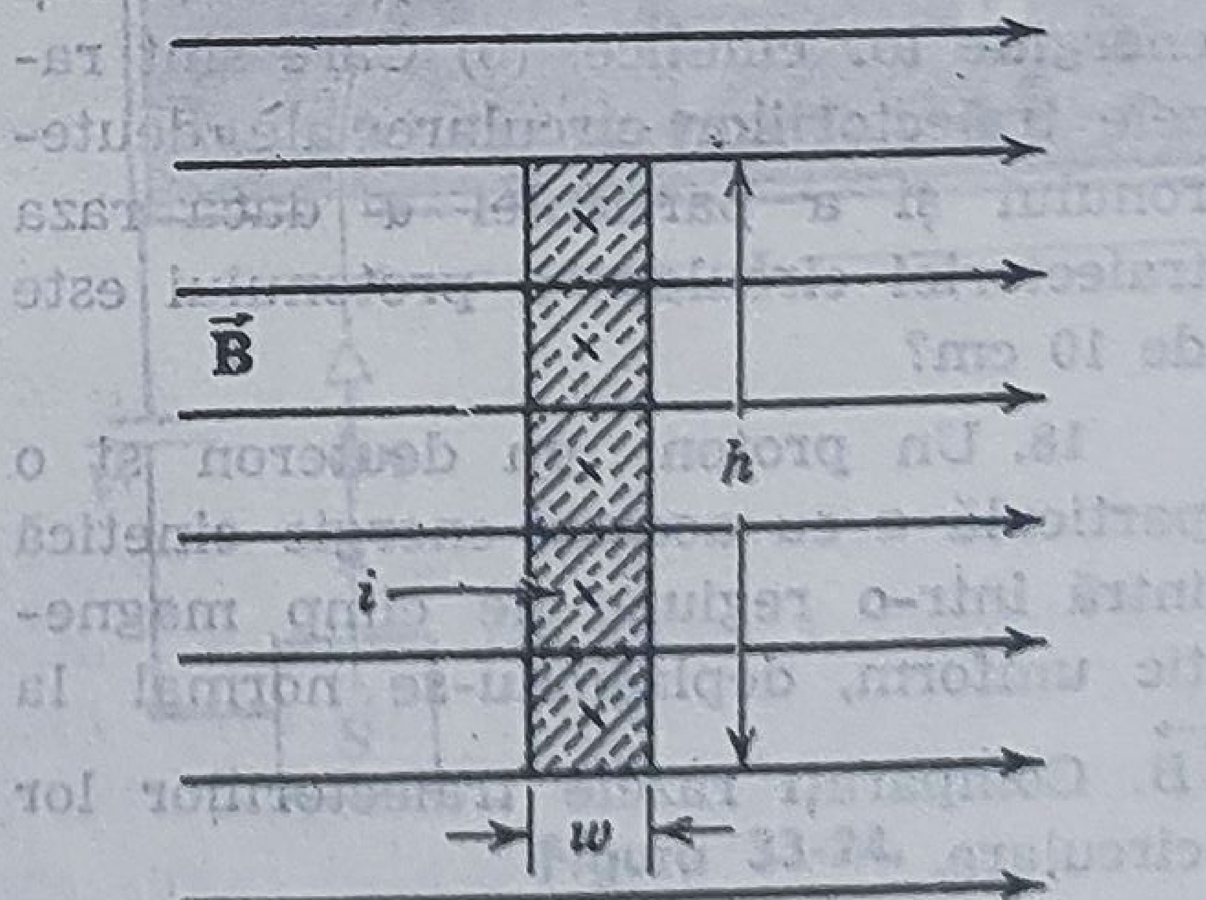


Figura 33-22.

efectul cîmpului magnetic? (d) Care este tensiunea V necesară între cele două laturi ale conductorului pentru a crea acest cîmp $\vec{E}$? Care sînt laturile conductorului între care trebuie aplicată această tensiune? (e) Dacă *din exterior* nu se aplică nici un cîmp electric, electronii vor fi împinși spre una din laturi și astfel vor produce un cîmp electric uniform $\vec{E}_H$ transversal pe conductor pînă ce forțele produse de acest cîmp electric $\vec{E}_H$ vor echilibra forțele magnetice menționate în întrebarea (b). Care este mărimea, direcția și sensul cîmpului $\vec{E}_H$? Presupunem că n, numărul electronilor de conducție din unitatea de volum este $1{,}1 \cdot 10^{29}/\text{m}^3$ și că $h=0{,}02$ m, $w=0{,}1$ cm, $i=50$ A și $B=2$ Wb/m².

16. (a) Arătați că raportul dintre cîmpul electric Hall E_H și cîmpul electric E ce determină curentul este

$$\frac{E_H}{E} = \frac{B}{ne\rho}$$

(b) Care este unghiul dintre $\vec{E}_H$ și $\vec{E}$? (c) Evaluați acest raport pentru condițiile din exemplul 5.

17. Un proton, un deutron și o particulă α, accelerate în aceeași diferență de potențial, intră într-o regiune de cîmp magnetic uniform deplasîndu-se normal la $\vec{B}$. (a) Comparați energiile lor cinetice. (b) Care sînt razele traiectoriilor circulare ale deuteronului și a particulei α dacă raza traiectoriei circulare a protonului este de 10 cm?

18. Un proton, un deuteron și o particulă α cu aceeași energie cinetică intră într-o regiune de cîmp magnetic uniform, deplasîndu-se normal la $\vec{B}$. Comparați razele traiectoriilor lor circulare.

19. O particulă α parcurge o traiectorie circulară de rază 0,45 m într-un cîmp magnetic cu $B=1{,}2$ Wb/m². Calculați (a) viteza sa, (b) perioada sa de rotație, (c) energia sa cinetică și (d) diferența de potențial în care ar trebui accelerată pentru a avea această energie.

20. Un electron este accelerat sub diferență de potențial de 15 000 V iar apoi parcurge o traiectorie circulară într-un cîmp magnetic uniform cu $B=25$ mT normal la viteza sa. Care este raza traiectoriei circulare?

21. Un fascicul de electroni de energie cinetică E_c iese din fereastra unui accelerator. La distanța d de fereastră se află o placă de metal, perpendiculară pe direcția fasciculului. Arătați că putem face ca fasciculul să nu cadă pe placă, dacă aplicăm un cîmp magnetic $\vec{B}$

$$B \geqslant \left(\frac{2mEc}{e^2d^2}\right)^{1/2}$$

unde m și e sînt masa și sarcina electronului. Care trebuie să fie orientarea lui B?

22. Arătați că raza de curbură a traiectoriei unei particule încărcate ce se mișcă normal pe un cîmp magnetic este proporțională cu impulsul său.

23. Ce cîmp magnetic uniform ar fi necesar pentru ca un proton cu viteza $1{,}0 \cdot 10^7$ m/s să se miște pe un cerc de dimensiunea ecuatorului pămîntesc?

24. Un deuteron se mișcă într-un ciclotron într-un cîmp magnetic cu $B=1{,}5$ T pe o orbită cu raza de 2,0 m. Suferind o ciocnire tangențială cu o țintă, deuteronul se descompune cu o pierdere neglijabilă de energie cinetică, într-un proton și un neutron. Discutați mișcarea lor după ciocnire. Presupuneți că energia deuteronului s-a împărțit în mod egal între proton și neutron la descompunere.

25. Un pozitron de 2 keV intră într-un cîmp uniform de inducție $B=0{,}10$ T ce formează un unghi de 89°

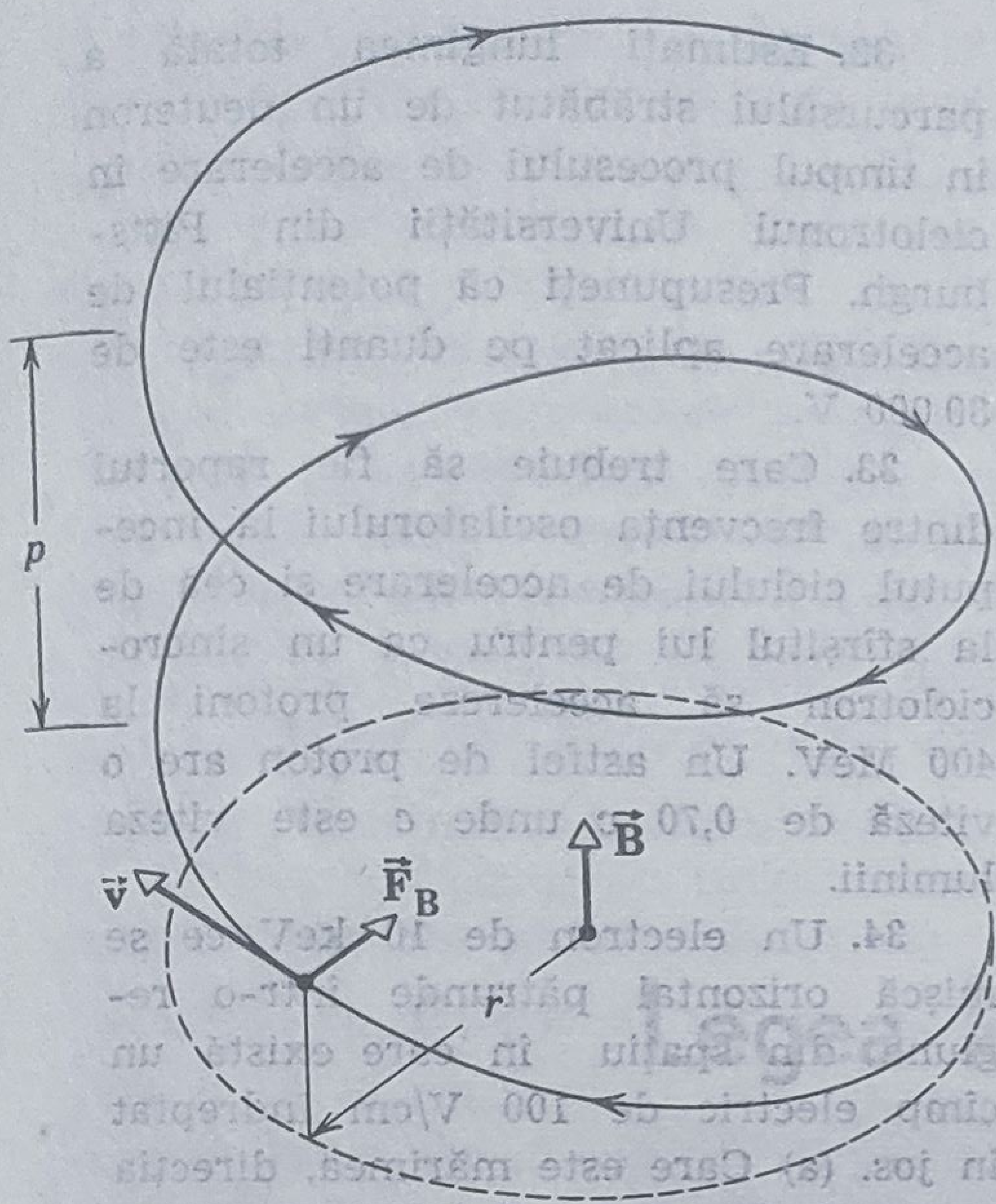


Figura 33-23.

cu viteza sa. Arătați că traiectoria sa va fi elicoidală, cu axa paralelă cu direcția lui $\vec{B}$. Calculați perioada, pasul p și raza r a elicei; vezi figura 33-23.

26. (a) Care este raza traiectoriei circulare pe care se va mişca un electron cu viteza egală cu 0,1 din viteza luminii într-un cîmp magnetic cu $B = 0{,}50$ T. (b) Care este energia sa cinetică?

27. *Spectrometru cu timp de zbor.* S. A. Goudsmit a imaginat o metodă precisă de măsură a masei ionilor grei, ce constă în cronometrarea perioadei lor de rotație într-un cîmp magnetic cunoscut. Un ion de iod o dată ionizat efectuează 7 rotații într-un cîmp de $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ T în aproximativ $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ s. Care este (aproximativ) masa sa în kilograme? În prezent, măsurătorile de masă se efectuează cu o precizie mult mai mare decît ne pot sugera aceste valori aproximative.

28. *Spectrometrul de masă.* În figura 33-24 este dată schema dispozitivului folosit de Dempster pentru măsurarea masei ionilor. În sursa S, o incintă în care are loc o descărcare în gaz, sînt produşi ionii de masă M şi sarcină q ce pot fi considerați în repaus. Un ion accelerat în diferența de potențial V pătrunde în cîmpul de inducție magnetică $\vec{B}$. După ce parcurge în cîmp un semicerc, ionul cade pe placa fotografică pe care este înregistrat, la distanța x de fanta de intrare. Arătați că masa M este dată de

$$M = \frac{B^2 p}{8V} x^2$$

29. *Efectul Zeeman.* În teoria atomului de hidrogen dată de Bohr, se consideră că electronul se mişcă pe o orbită circulară de rază r în jurul protonului. Presupunem că un astfel de atom este plasat într-un cîmp magnetic, cu planul orbitei normal la $\vec{B}$. (a) Dacă electronul parcurge traiectoria circulară în sensul acelor de ceasornic, pentru un observator ce priveşte în lungul lui $\vec{B}$, frecvența sa unghiulară creşte sau descreşte? (b)

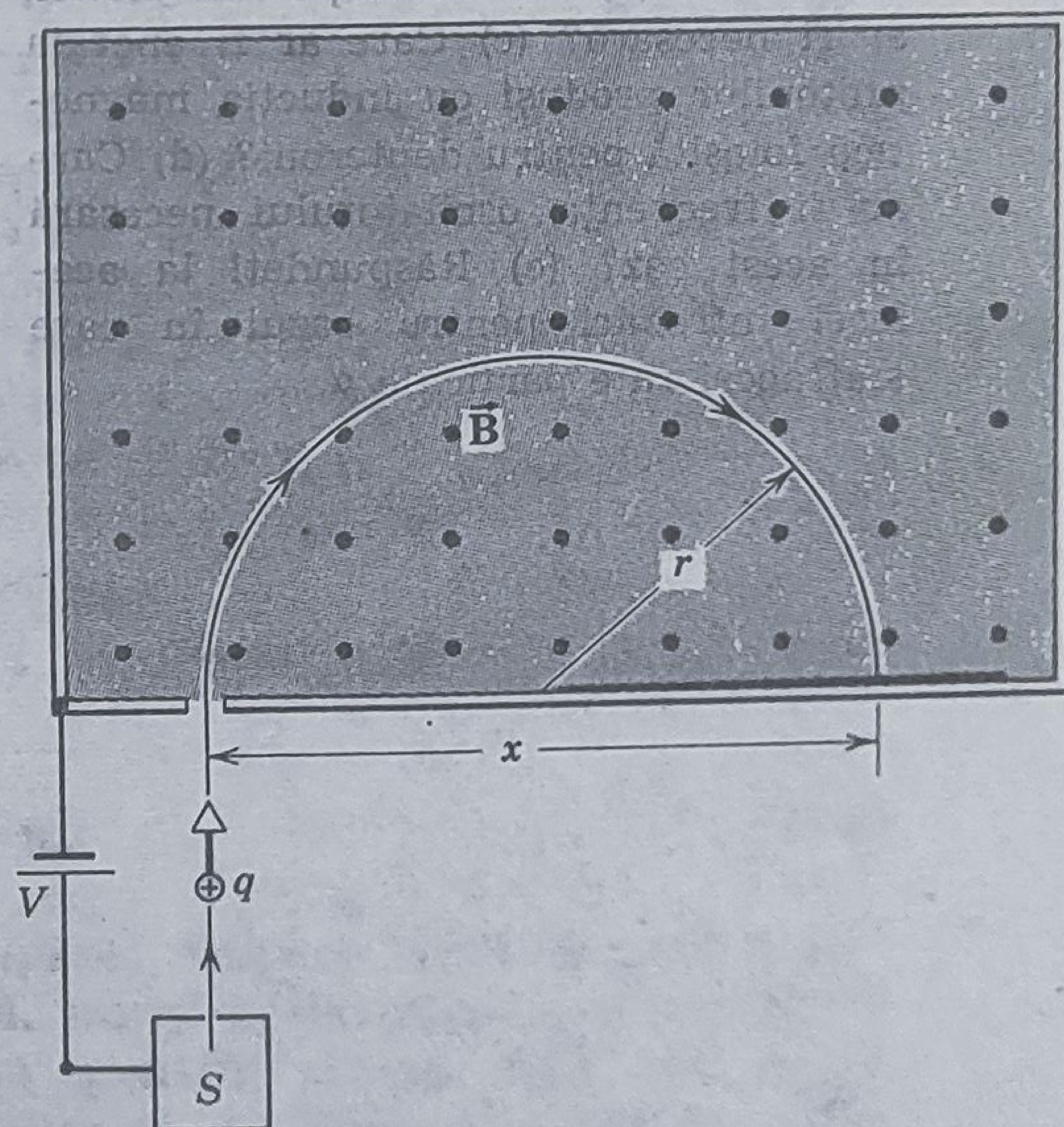


Figura 33-24.

Dar dacă electronul se rotește în sens invers acelor de ceasornic? Presupunem că raza orbitei nu se modifică. [Indicație: Forța centripetă este acum atît de origine electrică ($\vec{F}_E$) cît și de origine magnetică ($\vec{F}_B$).]

30. Arătați că în problema 29 variația frecvenței de rotație produsă de cîmpul magnetic este dată aproximativ de

$$\Delta\nu = \pm \frac{Be}{4\pi m}$$

Astfel de deplasări ale frecvenței au fost într-adevăr observate de Zeeman în 1896. [Indicație: Calculați frecvența de rotație cu cîmp magnetic și fără cîmp magnetic. Deoarece efectul cîmpului magnetic este foarte mic, cu o mică eroare, unii termeni ce conțin pe B pot fi considerați egali cu zero (dar nu toți).]

31. Ciclotronul Universității din Pittsburg este reglat în mod normal pentru a accelera deuteroni. (a) Care este energia protonilor pe care i-ar putea produce folosind aceeași frecvență a oscilatorului ca în cazul deuteronilor? (b) Ce inducție magnetică ar fi necesară? (c) Care ar fi energia protonilor produși cu inducția magnetică folosită pentru deuteroni? (d) Care ar fi frecvența oscilatorului necesară în acest caz? (e) Răspundeți la aceleași întrebări pentru cazul în care sînt accelerate particule α.

32. Estimați lungimea totală a parcursului străbătut de un deuteron în timpul procesului de accelerare în ciclotronul Universității din Pittsburgh. Presupuneți că potențialul de accelerare aplicat pe duanți este de 80 000 V.

33. Care trebuie să fie raportul dintre frecvența oscilatorului la începutul ciclului de accelerare și cea de la sfîrșitul lui pentru ca un sincrociclotron să accelereze protoni la 400 MeV. Un astfel de proton are o viteză de 0,70 c unde c este viteza luminii.

34. Un electron de 10 keV ce se mișcă orizontal pătrunde într-o regiune din spațiu în care există un cîmp electric de 100 V/cm îndreptat în jos. (a) Care este mărimea, direcția și sensul cîmpului (cel mai mic) de inducție magnetică ce permite electronului să-și continue mișcarea orizontală? Neglijați forțele gravitaționale ce sînt mici. (b) Este posibil ca un proton să treacă nedeviat prin această combinație de cîmpuri? Și dacă da, în ce condiții?

35. Un cîmp electric de 1 500 V/m și un cîmp magnetic de 0,40 T acționează asupra unui electron în mișcare astfel ca forța totală asupra lui să fie zero. (a) Calculați viteza v minimă a electronului. (b) Desenați vectorii $\vec{E}$, $\vec{B}$ și $\vec{v}$.

Capitolul 34

Legea lui Ampère

34-1 Legea lui Ampère

O categorie de probleme legate de cîmpul magnetic, cu care ne-am ocupat în capitolul 33, cuprinde forţele exercitate de un cîmp magnetic asupra unei sarcini în mişcare sau asupra unui conductor străbătut de un curent şi cuplul exercitat de cîmp asupra unui dipol magnetic. O a doua categorie cuprinde *producerea* cîmpului magnetic de un conductor străbătut de un curent sau de sarcini în mişcare. Acest capitol se ocupă de această a doua clasă de probleme.

Oersted în 1820 a descoperit efectele magnetice ale curenţilor. Figura 34-1, care arată un fir înconjurat de cîţiva magneţi mici, ilustrează experienţa sa într-o versiune modificată. Dacă curentul prin fir este zero, toţi magneţii se orientează paralel cu cîmpul magnetic al Pămîntului. Cînd un curent intens străbate firul, magneţii se orientează astfel încît sugerează că liniile magnetice de inducţie formează cercuri închise în jurul firului. Această imagine ne devine şi mai clară dacă privim experienţa din figura 34-2, ce arată cum se distribuie pilitura de fier de pe o placă de sticlă orizontală prin centrul căreia trece un conductor străbătut de un curent.

Relaţia cantitativă dintre curentul i, şi cîmpul magnetic $\vec{B}$ o scriem azi sub forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \qquad (34\text{-}1)$$

cunoscută sub numele de *legea lui Ampère*. Ampère fiind adeptul punctului de vedere al acţiunii la distanţă, nu şi-a formulat rezultatele în funcţie de cîmp: aceasta a fost făcută pentru prima dată de Maxwell. Legea lui Ampère, generalizată ulterior de Maxwell, este una din ecuaţiile de bază din electromagnetism (vezi tabela 33-3).

Ne putem da seama de dezvoltarea istorică a legii lui Ampère dacă considerăm o experiență ipotetică, care de fapt este foarte apropiată de experiențele realizate efectiv. Experiența constă în măsurarea lui $\vec{B}$ la

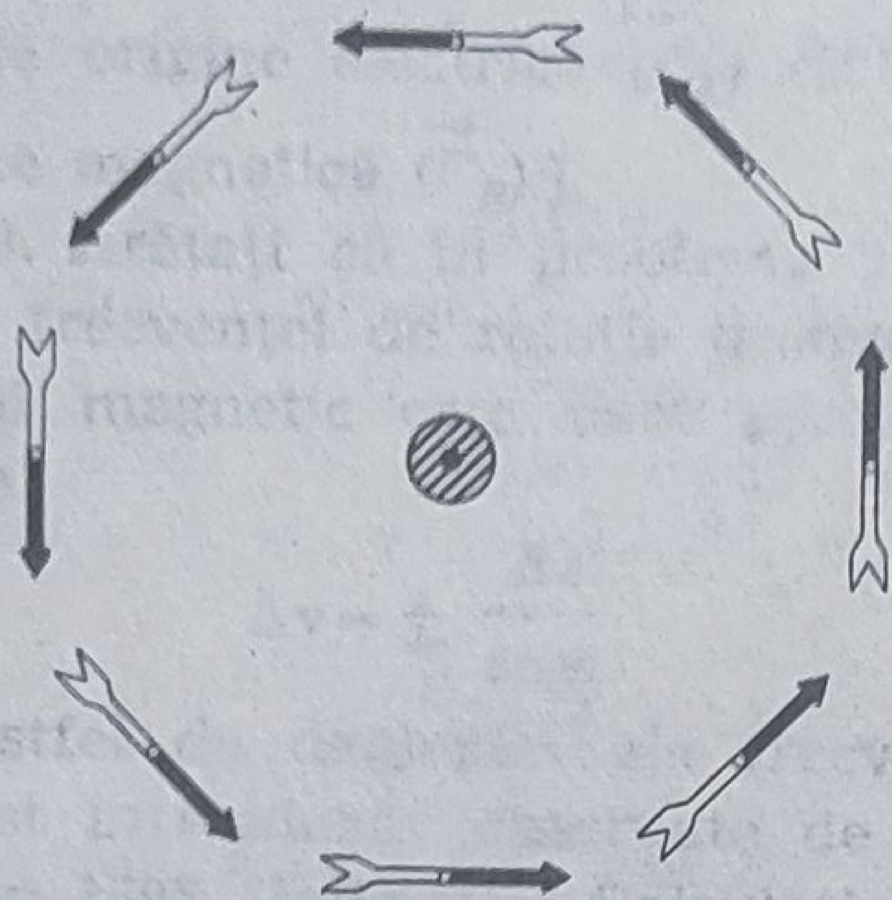


Figura 34-1. Ace magnetice în jurul unui conductor străbătut de un curent intens. Vîrfurile acelor magnetice reprezintă polul lor nord. Curentul, reprezentat prin punctul central iese din pagină. Ca de obicei, sensul curentului este considerat sensul de deplasare al sarcinii pozitive.

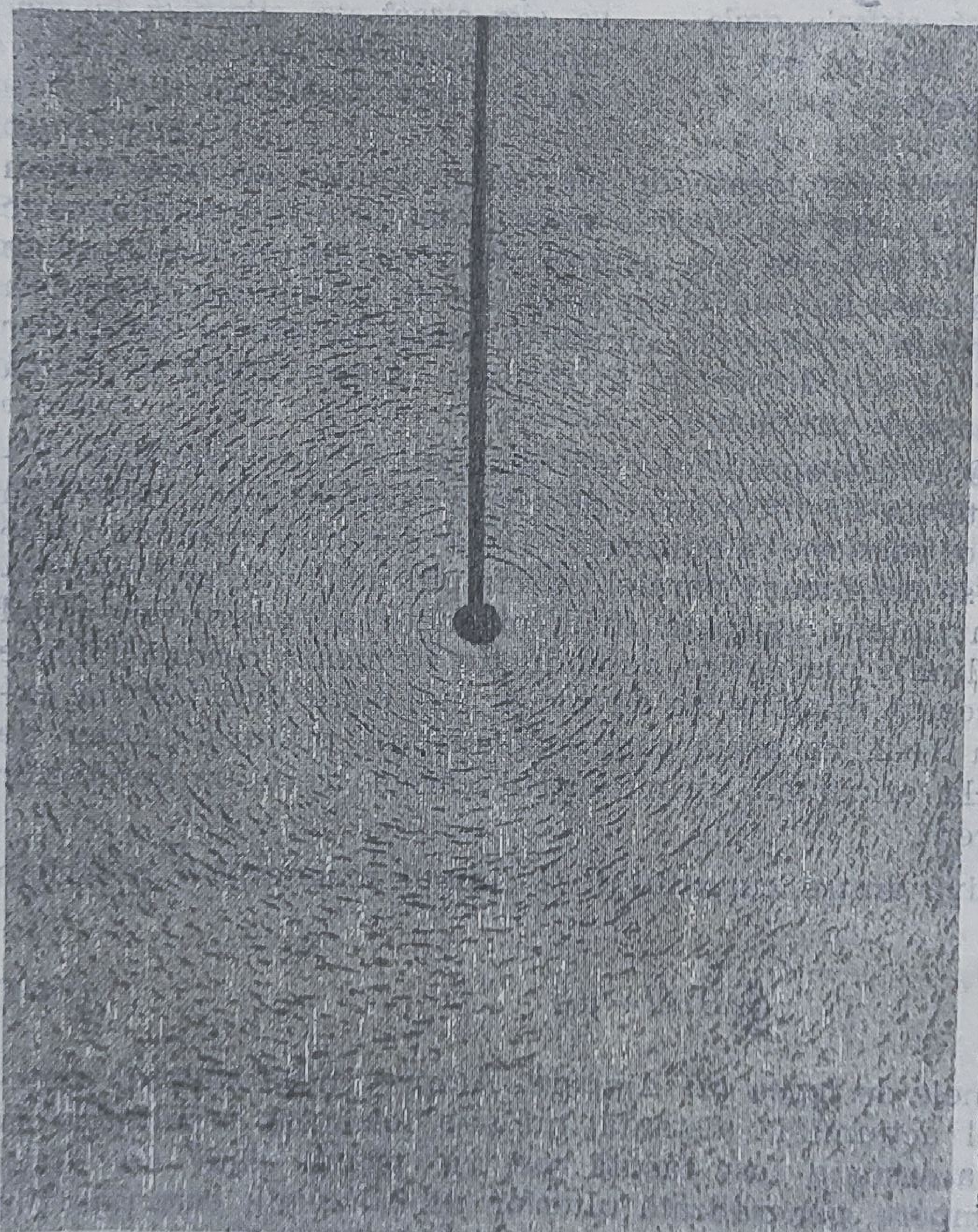


Figura 34-2. Orientarea piliturii de fier în jurul unui fir străbătut de un curent intens. (Prin amabilitatea Comitetului de studiu pentru științe fizice (P.S.S.C.)).

diferite distanțe r de un conductor rectiliu, lung, de secțiune circulară, străbătut de curentul i. Aceasta se poate realiza făcînd cantitativă observația calitativă din figura 34-1.

Să punem un mic ac magnetic la distanța r de fir. Un astfel de ac, un mic dipol magnetic, tinde să se orienteze în cîmpul magnetic exterior, cu polul său nord în sensul lui $\vec{B}$. Din figura 34-1 reiese clar că $\vec{B}$ în punctul dipolului este tangent la cercul de rază r cu centrul pe fir.

Dacă curentul prin conductorul din figura 34-1 își schimbă sensul, toate acele magnetice își vor schimba orientarea cu 180°. Acest rezultat experimental ne conduce la „regula mîinii drepte" de găsire a sensului lui $\vec{B}$ produs de un conductor străbătut de curentul i: *prindeți firul cu mîna dreaptă, cu degetul mare îndreptat în sensul curentului. Degetele curbate în jurul conductorului dau sensul lui* $\vec{B}$.

Să rotim dipolul cu unghiul θ față de poziția sa de echilibru. Pentru aceasta trebuie să exercităm un cuplu din exterior pentru a învinge cuplul $\vec{M}$ ce acționează asupra dipolului și care tinde să-l readucă în poziția sa de echilibru. $\vec{M}$, θ și $\vec{B}$ sînt legați prin ecuația 33-11 ($\vec{M}=\vec{\mu}\times\vec{B}$), care poate fi scrisă sub formă scalară

$$M=\mu B \sin\theta \tag{34-2}$$

unde μ este mărimea momentului magnetic al dipolului, θ fiind unghiul dintre vectorii $\vec{\mu}$ și $\vec{B}$. Chiar dacă nu cunoaștem valoarea lui μ pentru acul magnetic, o putem considera constantă, independentă de poziția sau orientarea acului. Astfel, putem obține o măsură a lui B, măsurînd pe M și θ din ecuația 34-2 pentru diferite distanțe r și pentru diferiți curenți i prin conductor. Rezultatele experimentale pot fi descrise prin relația de proporționalitate

$$B\sim\frac{i}{r} \tag{34-3}$$

Putem transforma această relație de proporționalitate într-o egalitate, introducînd o constantă de proporționalitate. Ca și în cazul legii lui Coulomb și din motive similare (vezi paragraful 26-4) această constantă nu o vom scrie pur și simplu k ci într-o formă mai complicată, și anume $\mu_0/2\pi$, în care μ_0 poartă numele de *permeabilitate magnetică a vidului**. Ecuația 34-3 devine deci,

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{34-4}$$

pe care preferăm să o scriem sub forma

$$(B)\,(2\pi r)=\mu_0 i \tag{34-5}$$

Se recunoaște ușor că membrul stîng al ecuației 34-5 este $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ pentru un contur format dintr-un cerc de rază r centrat pe conductor. $\vec{B}$ are

* μ_0 nu are nici o legătură cu momentul dipolar μ ce apare în ecuația 34-2.

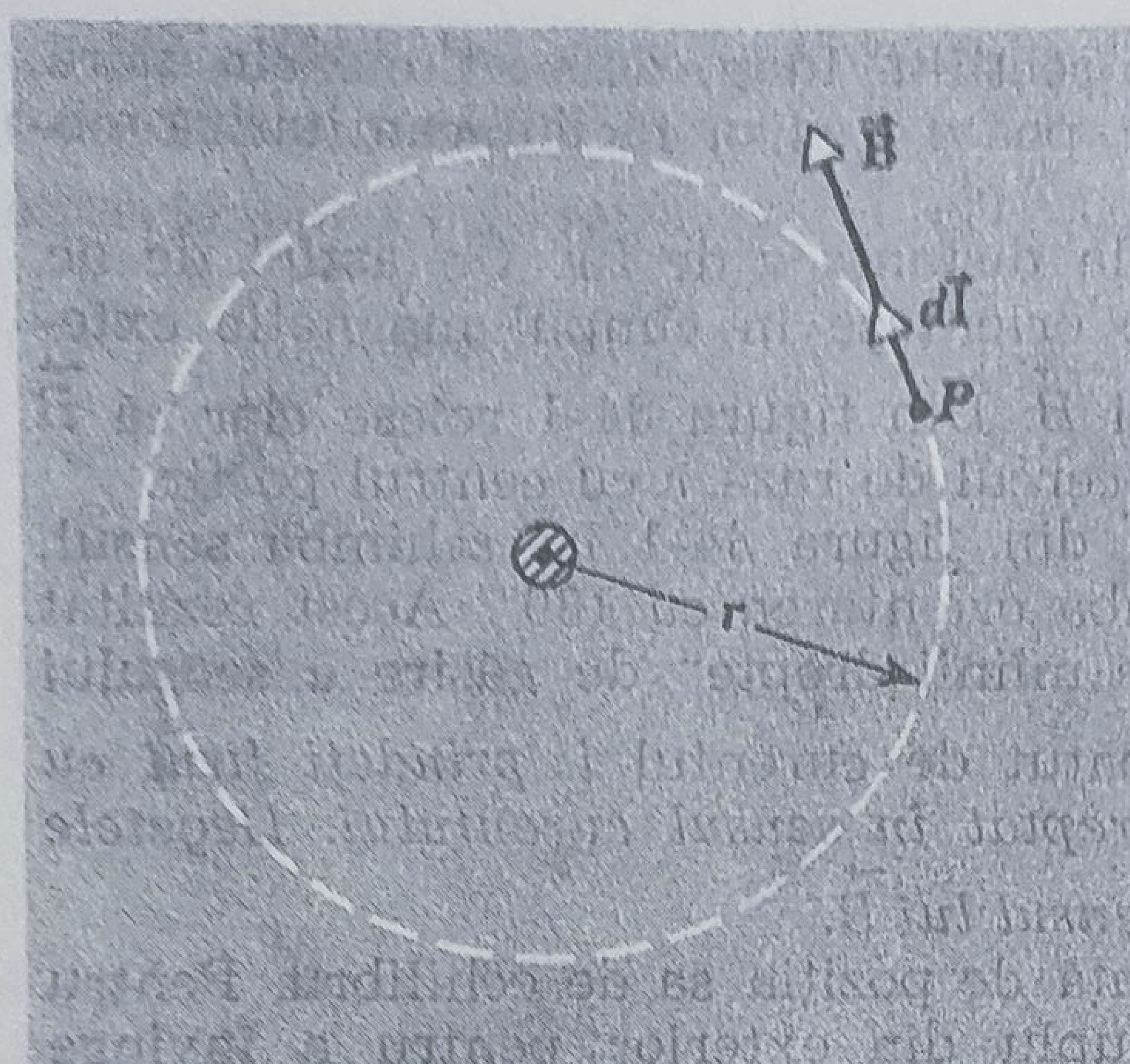


Figura 34-3. Contur circular de integrare în jurul unui conductor. După cum este indicat prin punctul central, curentul i prin fir iese din pagină. Observați că unghiul dintre $\vec{B}$ și $\vec{dl}$ este zero astfel că $\vec{B}\cdot\vec{dl}=B\cdot dl$.

aceeași valoare (constantă) pentru toate punctele de pe acest cerc iar $\vec{dl}$, care este întotdeauna tangent la conturul de integrare, are același sens cu $\vec{B}$, după cum arată figura 34-3. Astfel

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}=\oint Bdl=B\oint dl=(B)\,(2\pi r)$$

$\oint dl$ fiind pur și simplu circumferința cercului. *Pentru acest caz special* putem scrie relația dedusă experimental dintre cîmp și curent sub forma

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0 i \qquad (34\text{-}1)$$

care este legea lui Ampère. O mulțime de alte experiențe arată că ecuația 43-1 este valabilă în general* pentru *orice* configurație de cîmp magnetic, pentru *orice* ansamblu de curenți și pentru *orice* contur de integrare.

Pentru a aplica legea lui Ampère la cazul general, alegem în cîmpul magnetic un *contur curbiliniu închis* după cum este arătat în figura 34-4. Acest contur se împarte în elemente de lungime dl și apoi se evaluează mărimea $\vec{B}\cdot\vec{dl}$ pentru fiecare element în parte. Reamintim că $\vec{B}\cdot\vec{dl}$ are valoarea $Bdl\cos\theta$ și poate fi interpretat ca produsul dintre dl și componenta lui $\vec{B}$ $(=B\cos\theta)$ paralelă cu $\vec{dl}$. Integrala este suma cantităților $\vec{B}\cdot\vec{dl}$ pentru toate elementele conturului închis. Mărimea i din membrul drept al ecuației 34-1 reprezintă curentul *net* (mai exact, $\int\vec{j}\cdot\vec{dS}$) ce trece prin suprafața delimitată de conturul închis.

Valoarea aleasă pentru permeabilitate în legea lui Ampère este

$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \mathrm{Wb/A\cdot m}$$

* Dacă conturul de integrare se găsește într-un cîmp electric variabil în timp, ecuația 34-1 trebuie modificată. În acest capitol presupunem că dacă sînt prezente cîmpuri electrice, ele sînt constante în mărime, direcție și sens.

Aceasta împreună cu permitivitatea ε_0 apar în formulele din electromagnetism cînd se folosește sistemul S.I.

Cititorul se poate întreba de ce ε_0 din legea lui Coulomb este o mărime măsurată pe cînd μ_0 din legea lui Ampère este o mărime aleasă. Răspunsul este că amperul, care este unitatea în S.I. pentru curentul i din legea lui Ampère, se definește pe baza unei metode de laborator, *(balanța de curent)* în care intră forțele exercitate de cîmpul magnetic și în care apare aceeași constantă μ_0. În realitate, după cum vom vedea în amănunt în paragraful 34-4 valoarea curentului definit ca egal cu un amper este astfel luată pentru ca μ_0 să aibă exact valoarea aleasă mai sus. În legea lui Coulomb, pe de altă parte, mărimile $\vec{F}$, q și r sînt astfel măsurate încît constanta ε_0 nu joacă nici un rol. Valoarea acestei constante trebuie aleasă astfel ca membrul stîng al legii Coulomb să fie egal cu membrul drept; deci nu avem nici o posibilitate de alegere.

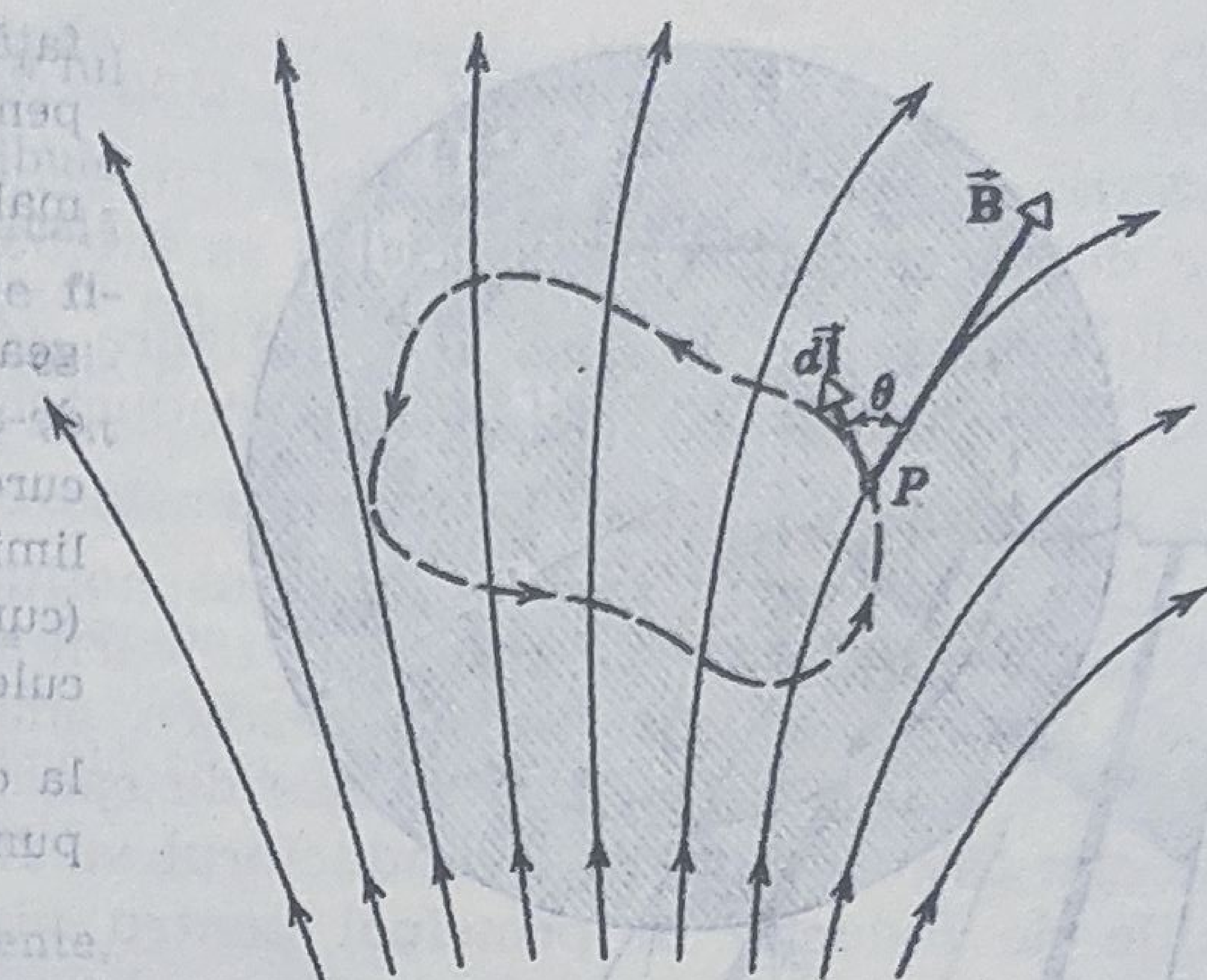


Figura 34.4 Un contur de integrare într-un cîmp magnetic.

34-2 $\vec{B}$ în vecinătatea unui conductor lung

Am văzut că liniile de inducție magnetică produse de un conductor rectiliniu lung străbătut de curentul i sînt cercuri concentrice centrate pe conductor iar B la distanța r de conductor este dat de ecuația 34-4:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{34-4}$$

Putem considera acesta ca un rezultat experimental în concordanță cu legea lui Ampère și care rezultă simplu din ea.

Este interesant să comparăm ecuația 34-4 cu expresia cîmpului electric în vecinătatea unei distribuții lineare, lungi, de sarcină

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \tag{28-7}$$

În ambele cazuri apar în formulă factorii constanți $\mu_0/2\pi$ și $1/2\pi\varepsilon_0$ și mărimi legate de sursele de cîmp și anume i și λ. Rezultă clar că ambele cîmpuri variază cu $1/r$.

Ecuația 28-7 poate fi dedusă din teorema lui Gauss legînd cîmpul electric de pe o suprafață Gauss de sarcina totală din interiorul ei. Integrala (de supra-

faţă) din teorema lui Gauss se calculează pentru o suprafaţă cilindrică ce este normală în orice punct la liniile cîmpului $\vec{E}$.

Ecuaţia 34-4 poate fi dedusă din legea lui Ampère legînd cîmpul magnetic de-a lungul unui contur de integrare de curentul net ce trece prin suprafaţa delimitată de conturul considerat. Integrala (curbilinie) din legea lui Ampère se calculează pentru un contur circular închis la care liniile lui $\vec{B}$ sînt tangente în orice punct.

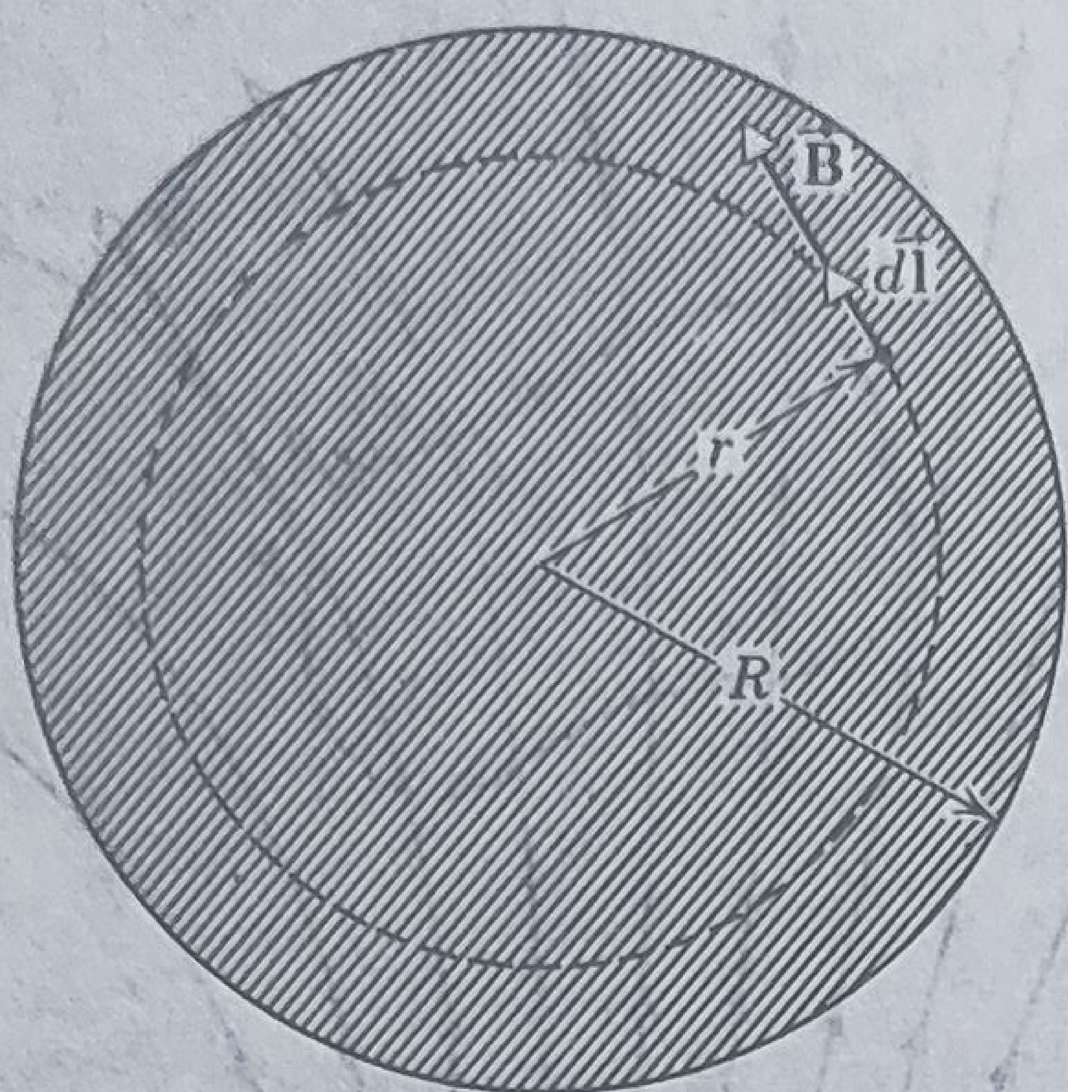


Figura 34-5. Exemplul 1. Un contur circular, de integrare, în interiorul conductorului. Curentul i_0, distribuit uniform în toată secţiunea transversală a firului, iese din pagină.

Exemplul 1. Deduceţi expresia lui $\vec{B}$ la distanţa r de centrul unui conductor cilindric lung de rază R, unde $r < R$. Conductorul este străbătut de curentul i_0, distribuit uniform pe toată secţiunea conductorului.

În figura 34-5 este arătat un contur de integrare circular în interiorul conductorului. Din considerente de simetrie se vede în figură că $\vec{B}$ este tangent la contur. Legea lui Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i$$

dă

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 i_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

deoarece în factorul i din membrul drept este cuprinsă doar acea fracţiune din curentul total, ce trece prin conturul de integrare. Rezolvînd în funcţie de B şi neglijînd indicele din notaţia curentului obţinem

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

La suprafaţa conductorului ($r = R$) această ecuaţie devine identică cu ecuaţia 34-4 pentru $r = R$ ($B = \mu_0 i / 2\pi R$).

Exemplul 2. Printr-o bandă de cupru de lăţime a şi de grosime neglijabilă trece un curent i (figura 34-6). Găsiţi cîmpul magnetic în puctul P normal pe bandă, la distanţa R de centrul ei.

Să împărţim banda în filamente lungi de grosime dx infinit de mică. Fiecare filament poate fi considerat ca un conductor străbătut de curentul di dat de i (dx/a). Contribuţia dB a elementului indicat în figura 34-6 la cîmp în punctul P este dată de ecuaţia 34-4 sub formă diferenţială

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i(dx/a)}{R \sec \theta}$$

Observaţi că vectorul $\vec{dB}$ este normal la linia notată r.

Numai componenta orizontală a lui $\vec{dB}$, şi anume $dB \cos \theta$ contribuie efectiv la cîmp, componenta verticală fiind anulată de cîmpul produs de filamentul situat simetric faţă de origine. Astfel, B în punctul P este dat de integrala (scalară)

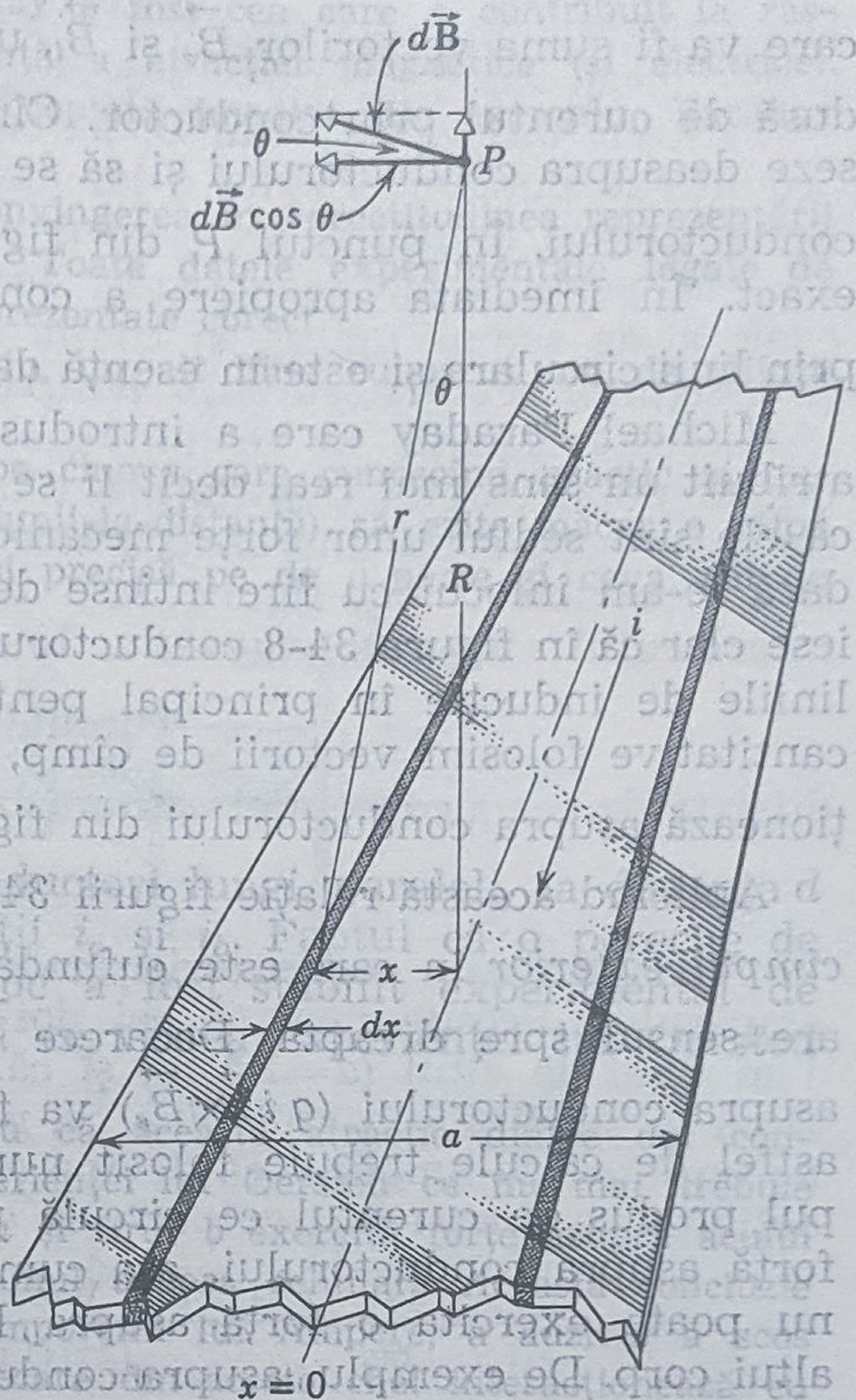


Figura 34-6. Exemplul 2. O bandă de lăţime a străbătută de curentul i.

$$B = \int dB \cos \theta = \int \frac{\mu_0 i (dx/a)}{2\pi R \sec \theta} \cos \theta = $$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \int \frac{dx}{\sec^2 \theta}$$

Variabilele x şi θ nu sînt independente, ele fiind legate prin

$$x = R \operatorname{tg} \theta$$

sau

$$dx = R \sec^2 \theta \, d\theta$$

Limitele de integrare pentru θ sînt $\pm$ arc tg $(a/2R)$ deci expresia lui B devine

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \int \frac{R \sec^2 \theta \, d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\operatorname{arc\,tg}(a/2R)}^{+\operatorname{arc\,tg}(a/2R)} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{2R}$$

Pentru punctele situate la distanţă mare de bandă, unghiul $a/2R$ este mic astfel că putem considera arc tg $\alpha \simeq \alpha$. Astfel, obţinem rezultatul aproximativ

$$B \simeq \frac{\mu_0 i}{\pi a} \left(\frac{a}{2R} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$$

Ne puteam aştepta la acest rezultat deoarece la distanţă mare banda nu poate fi deosebită de un conductor cilindric (vezi ecuaţia 34-4).

34-3 Liniile magnetice de inducţie

În figura 34-7 sînt arătate liniile de inducţie magnetică ce reprezintă cîmpul de inducţie magnetică $\vec{B}$ din jurul unui conductor rectiliniu lung. Observaţi creşterea distanţei dintre linii cu creşterea distanţei de la conductor. Aceasta reprezintă scăderea cu $1/r$ a valorii lui B, scădere indicată de ecuaţia 34-4.

În figura 34-8 sînt date liniile rezultante ale inducţiei magnetice asociate unui curent printr-un conductor orientat normal pe un cîmp exterior uniform $\vec{B_e}$. Inducţia magnetică rezultantă B într-un punct oare-

care va fi suma vectorilor $\vec{B}_e$ și $\vec{B}_i$, unde $\vec{B}_i$ este inducția magnetică produsă de curentul prin conductor. Cîmpurile $\vec{B}_e$ și $\vec{B}_i$ tind să se compenseze deasupra conductorului și să se intensifice unul pe altul dedesubtul conductorului. În punctul P din figura 34-8, $\vec{B}_e$ și $\vec{B}_i$ se compensează exact. În imediata apropiere a conductorului cîmpul este reprezentat prin linii circulare și este în esență dat de $\vec{B}_i$.

Michael Faraday care a introdus noțiunea de linii de inducție le-a atribuit un sens mai real decît li se atribuie de obicei. El și-a imaginat că ele sînt sediul unor forțe mecanice, analoage cu cele ce s-ar produce dacă le-am înlocui cu fire întinse de cauciuc. În această imagine nu reiese clar că în figura 34-8 conductorul va fi împins în sus? Astăzi folosim liniile de inducție în principal pentru vizualizarea lor. Pentru calcule cantitative folosim vectorii de cîmp, descriind, de exemplu, forța ce acționează asupra conductorului din figura 34-8 prin relația $\vec{F}=i\,\vec{l}\times\vec{B}$.

Aplicînd această relație figurii 34-8, reamintim că $\vec{B}$ este întotdeauna *cîmpul exterior* în care este cufundat conductorul, deci este $\vec{B}_e$ și deci are sensul spre dreapta. Deoarece $\vec{l}$ iese din pagină, forța magnetică asupra conductorului ($q\,i\,\vec{l}\times\vec{B}_e$) va fi în adevăr îndreptată în sus. În astfel de calcule trebuie folosit numai cîmpul exterior, deoarece cîmpul produs de curentul ce circulă prin conductor nu poate exercita o forță asupra conductorului, așa cum cîmpul gravitațional al Pămîntului nu poate exercita o forță asupra Pămîntului însăși, ci numai asupra altui corp. De exemplu, asupra conductorului din figura 34-7 nu se exercită nici o forță deoarece nu este prezent nici un cîmp magnetic.

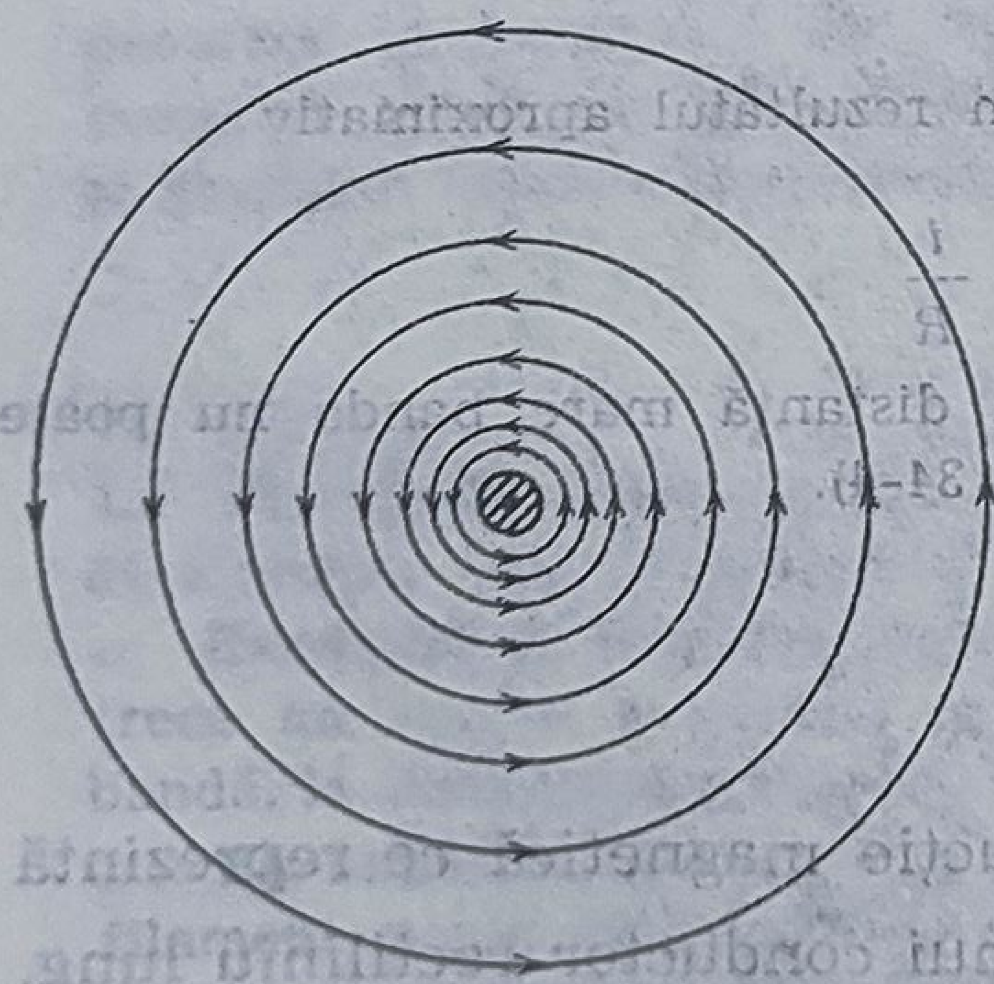


Figura 34-7. Liniile lui $\vec{B}$ din jurul unui conductor cilindric lung. Curentul I, reprezentat prin punctul central, iese din pagină.

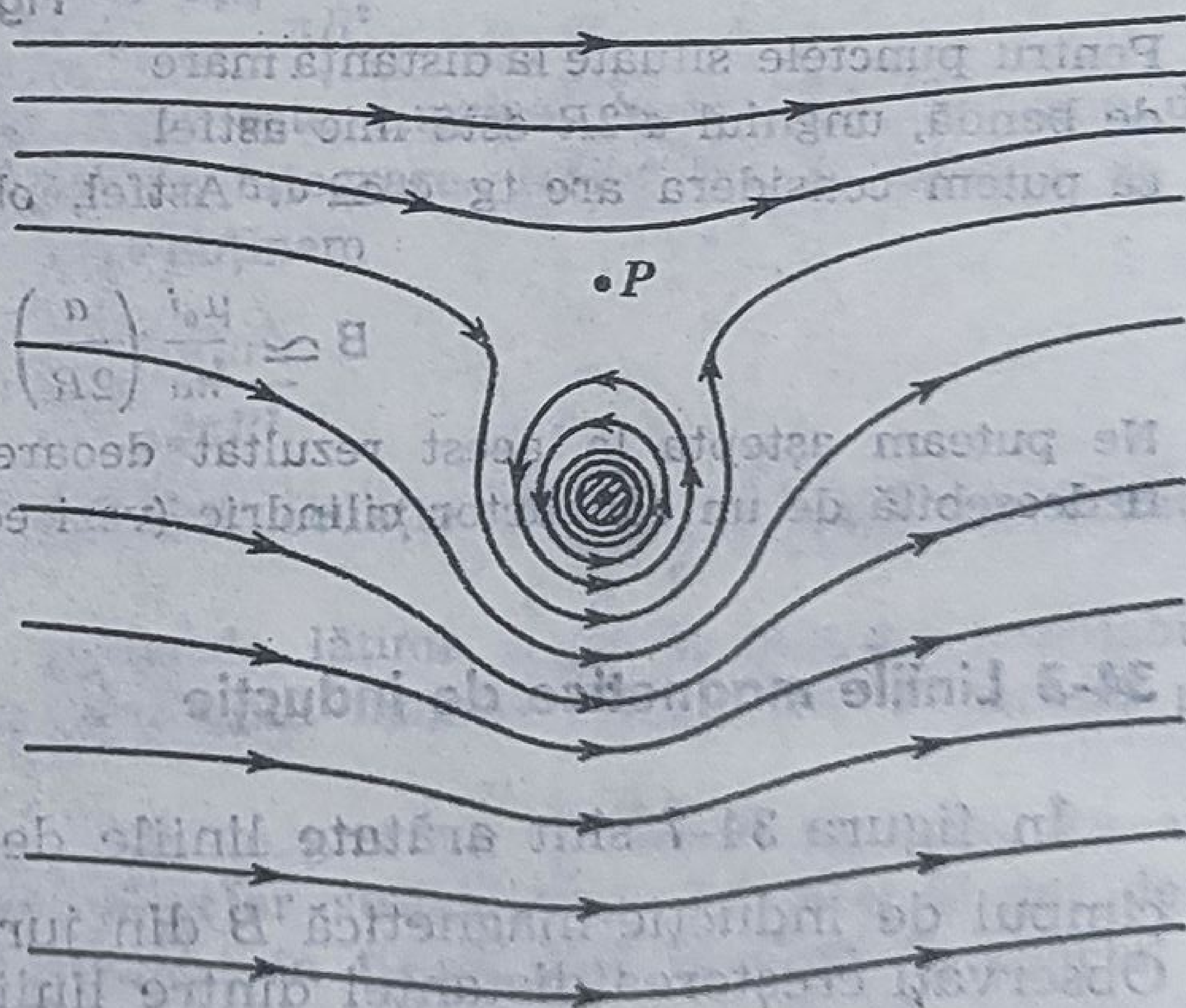


Figura 34-8. Liniile lui $\vec{B}$ în jurul unui conductor lung străbătut de curent, situat într-un cîmp exterior uniform $\vec{B}_e$ cu sensul spre dreapta. Curentul iese din pagină.

Ideea liniilor de inducție a lui Faraday a fost cea care a contribuit la răsturnarea vechii teorii a acțiunii-la-distanță a atracției magnetice (și electrice). Ca multe alte idei noi, ea nu a fost acceptată imediat. De exemplu, Faraday scria în 1851:

„Nu pot să nu-mi exprim din nou convingerea în corectitudinea reprezentării prin linii de forță a acțiunii magnetice. Toate datele experimentale legate de această acțiune și nu cele ipotetice, sînt reprezentate corect."

Pe de altă parte, patru ani mai tîrziu, un alt bine cunoscut om de știință englez, Sir George Airy, a scris:

„Declar că-mi pot imagina cu greu pe cineva care cunoscînd practic și numeric această concordanță (cu teoria acțiunii-la-distanță) să ezite măcar o clipă în a alege între această acțiune simplă și precisă pe de o parte și ceva atît de vag ca liniile de forță, pe de altă parte."

34-4 Doi conductori paraleli

În figura 34-9 sînt arătați doi conductori lungi, paraleli, la distanța d unul de altul și străbătuți de curenții i_a și i_b. Faptul că o pereche de astfel de conductori se atrag reciproc a fost stabilit experimental de Ampère, la numai o săptămînă după ce vestea experienței lui Oersted a ajuns la Paris.

Unii colegi ai lui Ampère considerau că această atracție dintre doi conductori este un rezultat evident al experienței lui Oersted ce nu mai trebuie dovedit. Ei considerau că dacă atît firul a și firul b exercită forțe asupra acului magnetic ei trebuie să exercite forțe și unul asupra celuilalt. Această concluzie este greșită. Cînd Arago, unul din contemporanii lui Ampère, a auzit-o a scos din buzunar două chei și a replicat: „Fiecare din aceste chei interacționează cu un magnet. Credeți că de aceea ele se și atrag reciproc?"

Firul a din figura 34-9 produce un cîmp de inducție $\vec{B}_a$ în toate punctele din jurul său. Mărimea lui $\vec{B}_a$ produs de curentul i_a în punctele celui de-al doilea conductor este, din ecuația 34.4:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Regula mîinii drepte arată că sensul lui $\vec{B}_a$ la firul b este în jos, cum se arată și în figură.

Conductorul b, străbătut de curentul i_b, se găsește cufundat într-un cîmp exterior de inducție magnetică $\vec{B}_a$. Asupra unei porțiuni de lungime l din acest conductor va acționa o forță magnetică laterală ($= i\vec{l} \times \vec{B}$) de mărime

$$F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_b i_a}{2\pi d}, \qquad (34\text{-}6)$$

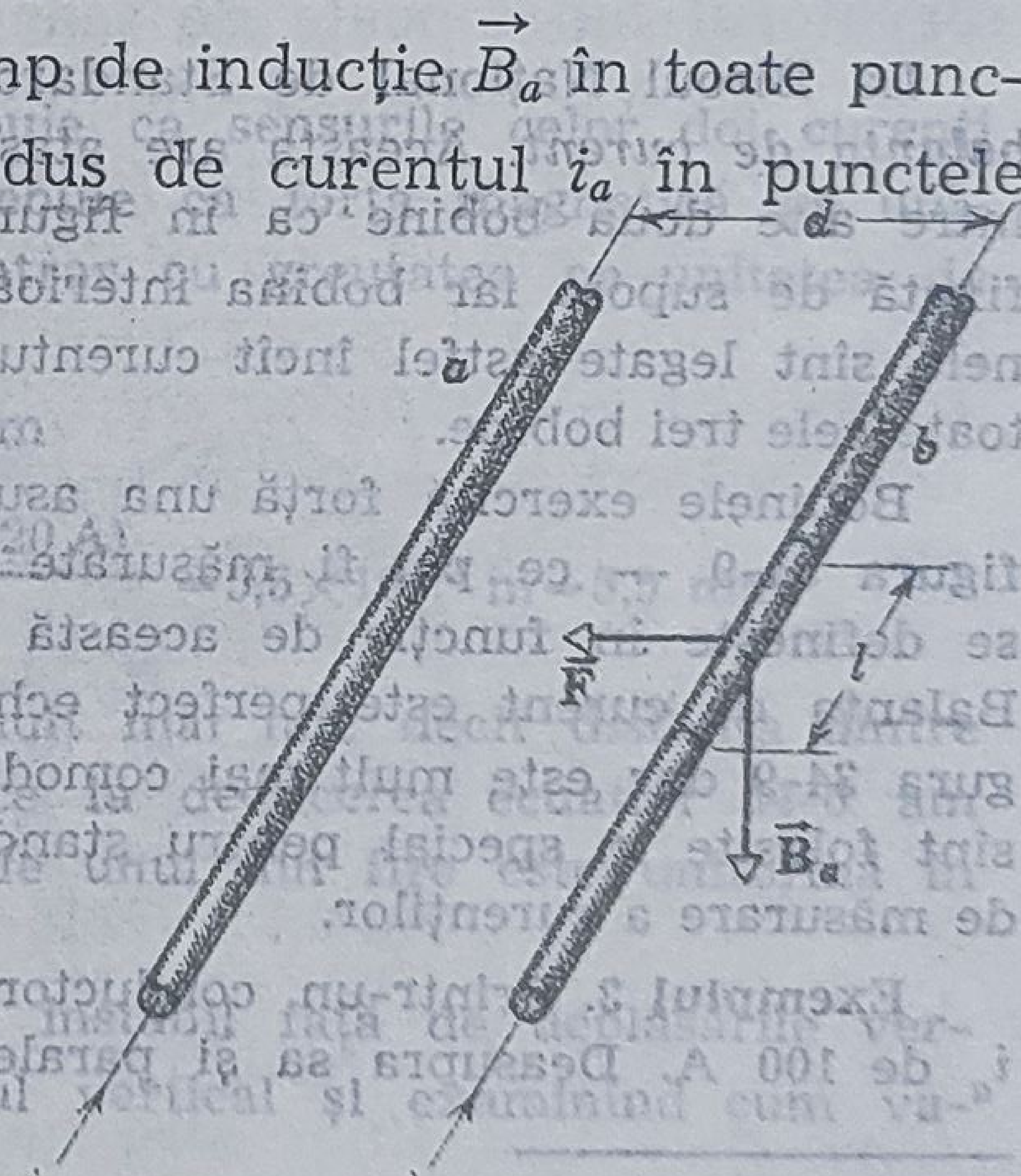


Figura 34-9. Doi conductori paraleli străbătuți de curenți în același sens, se atrag.

Din definiția produsului vectorial se vede că $\vec{F}_b$ se găsește în planul conductorilor și este îndreptat spre stînga în figura 34-9.

Puteam începe cu firul b, să calculăm cîmpul de inducție pe care-l produce în punctele firului a iar apoi să calculăm forța asupra firului a. Forța asupra firului a, are sensul spre dreapta, pentru curenți paraleli. Forțele pe care doi conductori le exercită unul asupra celuilalt sînt egale și de semne opuse, în conformitate cu legea lui Newton a acțiunii și reacțiunii. Pentru curenții antiparaleli, cei doi conductori se resping.

Această discuție ne reamintește de discuția asupra cîmpului electric dintre două sarcini puntiforme din capitolul 27.1. Acolo am văzut că sarcinile acționează una asupra celeilalte prin intermediul cîmpului electric. Conductorii din figura 34-9 acționează unul asupra celuilalt prin intermediul cîmpului *magnetic*. Imaginea noastră despre interacție este

$$\text{curent} \rightleftharpoons \text{cîmp}$$

diferită de cea a concepției acțiunii-la-distanță

$$\text{curent} \rightleftharpoons \text{curent}.$$

Atracția dintre conductorii paraleli lungi este folosită pentru definirea amperului. Presupunem că cei doi conductori se găsesc la distanța de 1 m unul de altul ($d=1{,}0$ m) și că cei doi curenți sînt egali ($i_a=i_b=i$). Dacă se variază curentul pînă ce, măsurînd forța de atracție dintre fire, pe unitatea de lungime, ea devine egală cu $2\cdot10^{-7}$ N/m, acest curent prin definiție va fi egal cu 1 *amper*. Din ecuația 34-6

$$\frac{F}{l}=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}=\frac{(4\pi\cdot10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})\ (1\ \text{A})^2}{(2\pi)\ (1\ \text{m})}=2\cdot10^{-7}\ \text{N/m},$$

rezultatul așteptat*.

La Biroul Național de Standarde măsurătorile standard de curent se fac cu *balanța de curent*. Aceasta are atașată o bobină executată foarte îngrijit așezată între alte două bobine ca în figura 34-10. Perechea exterioară de bobine este fixată de suport iar bobina interioară este suspendată de brațul balanței. Bobinele sînt legate astfel încît curentul ce trebuie măsurat să treacă în serie prin toate cele trei bobine.

Bobinele exercită forța una asupra celeilalte — exact ca firele paralele din figura 34-9 — ce pot fi măsurate punînd greutăți pe talerul balanței. Curentul se definește în funcție de această forță măsurată și de dimensiunile bobinelor. Balanța de curent este perfect echivalentă conductorilor lungi paralelei din figura 34-9 dar este mult mai comod de folosit. Măsurătorile cu balanța de curent sînt folosite în special pentru standardizarea altor metode secundare mai simple de măsurare a curenților.

Exemplul 3. Printr-un conductor lung, orizontal, fixat rigid, trece un curent i_a de 100 A. Deasupra sa și paralel cu el se găsește un conductor subțire prin

---

* Observați că în această relație folosită la definirea amperului apare μ_0. După cum am arătat la pagina 206, lui μ_0 i s-a atribuit valoarea (arbitrară) de $4\pi\cdot10^{-7}$ Wb/A·m iar mărimea curentului pe care l-am definit ca egal cu 1 A este astfel aleasă pentru a produce forța de atracție considerată pe unitatea de lungime.

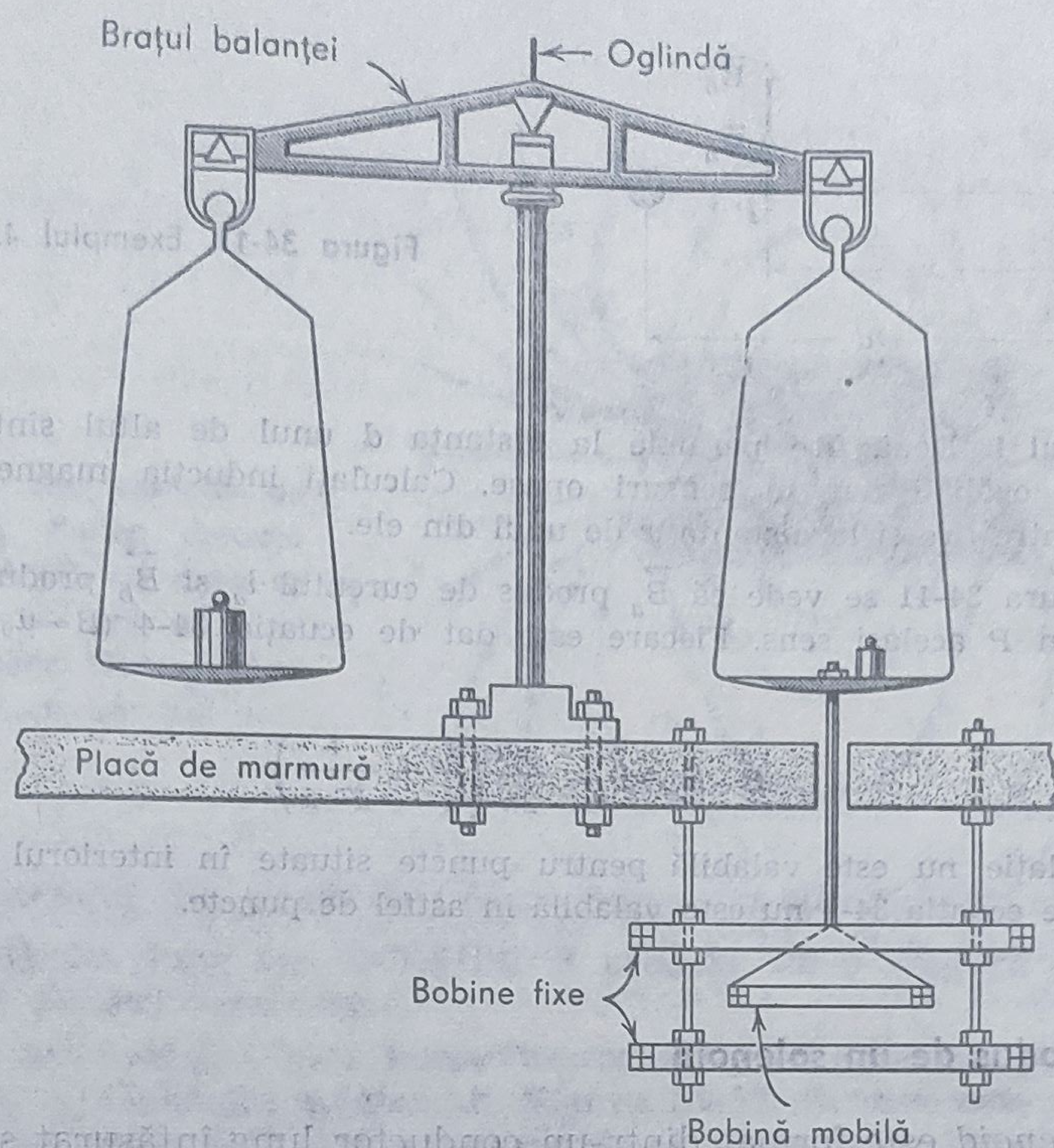


Figura 34-10. Balanța de curent.

care trece un curent i_b de 20 A, de greutate 0,073 N/m. La ce înălțime deasupra firului fix trebuie așezat cel de-al doilea fir pentru a fi susținut de repulsia magnetică?

Pentru a produce o forță de repulsie trebuie ca sensurile celor doi curenți să fie opuse. Pentru realizarea echilibrului trebuie ca forța magnetică pe unitatea de lungime să fie egală și de sens contrar cu greutatea pe unitatea de lungime.

Rezolvînd ecuația 34-6 în funcție de d obținem

$$d = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi\,(F/l)} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m})\,(100\ \mathrm{A})\,(20\ \mathrm{A})}{(2\pi)\,(0{,}073\ \mathrm{N/m})} = 5{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 5{,}5\ \mathrm{mm}.$$

Presupunem că diametrul conductorilor este mult mai mic decît distanța dintre ei. Această presupunere este necesară deoarece la deducerea ecuației 34-6 am presupus tacit că inducția magnetică produsă de unul din fire este uniformă în toate punctele celui de-al doilea fir.

Echilibrul firului suspendat este stabil sau instabil față de deplasările verticale? Aceasta poate fi probată deplasînd firul vertical și examinînd cum variază forțele asupra firului.

Presupunem că firul subțire este suspendat *sub* firul fixat rigid. Cum poate fi făcut să „plutească"? Echilibrul este stabil sau instabil față de deplasările verticale?

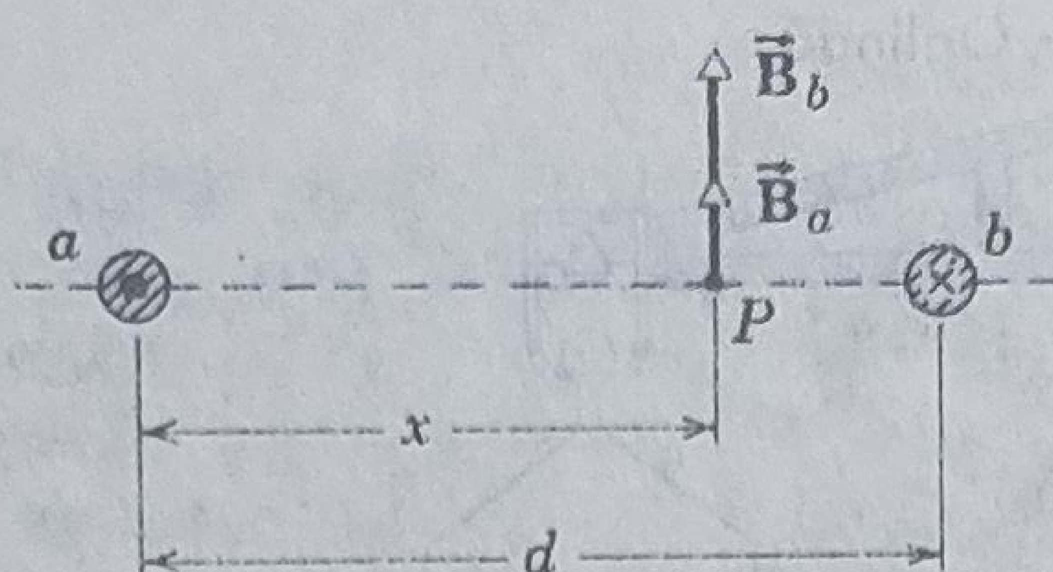


Figura 34-11. Exemplul 4.

Exemplul 4. Două fire paralele la distanţa d unul de altul sînt străbătute de curenţi egali i dar în sensuri opuse. Calculaţi inducţia magnetică pentru punctele dintre fire şi la distanţa x de unul din ele.

Din figura 34-11 se vede că $\vec{B}_a$ produs de curentul i_a şi $\vec{B}_b$ produs de curentul i_b au în P acelaşi sens. Fiecare este dat de ecuaţia 34-4 ($B=\mu_0 i/2\pi r$) astfel că

$$B=B_a+B_b=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)$$

Această relaţie nu este valabilă pentru puncte situate în interiorul conductorilor deoarece ecuaţia 34-4 nu este valabilă în astfel de puncte.

34-5 $\vec{B}$ produs de un solenoid

Un *solenoid* este format dintr-un conductor lung înfăşurat strîns spiră lîngă spiră şi străbătut de un curent i. Presupunem că spirala este foarte lungă în comparaţie cu diametrul său. Care este distribuţia cîmpului de inducţie magnetică $\vec{B}$ produs?

Pentru puncte foarte apropiate de una din spirele solenoidului, observatorul nu-şi poate da seama că firul este curbat sub formă de arc.

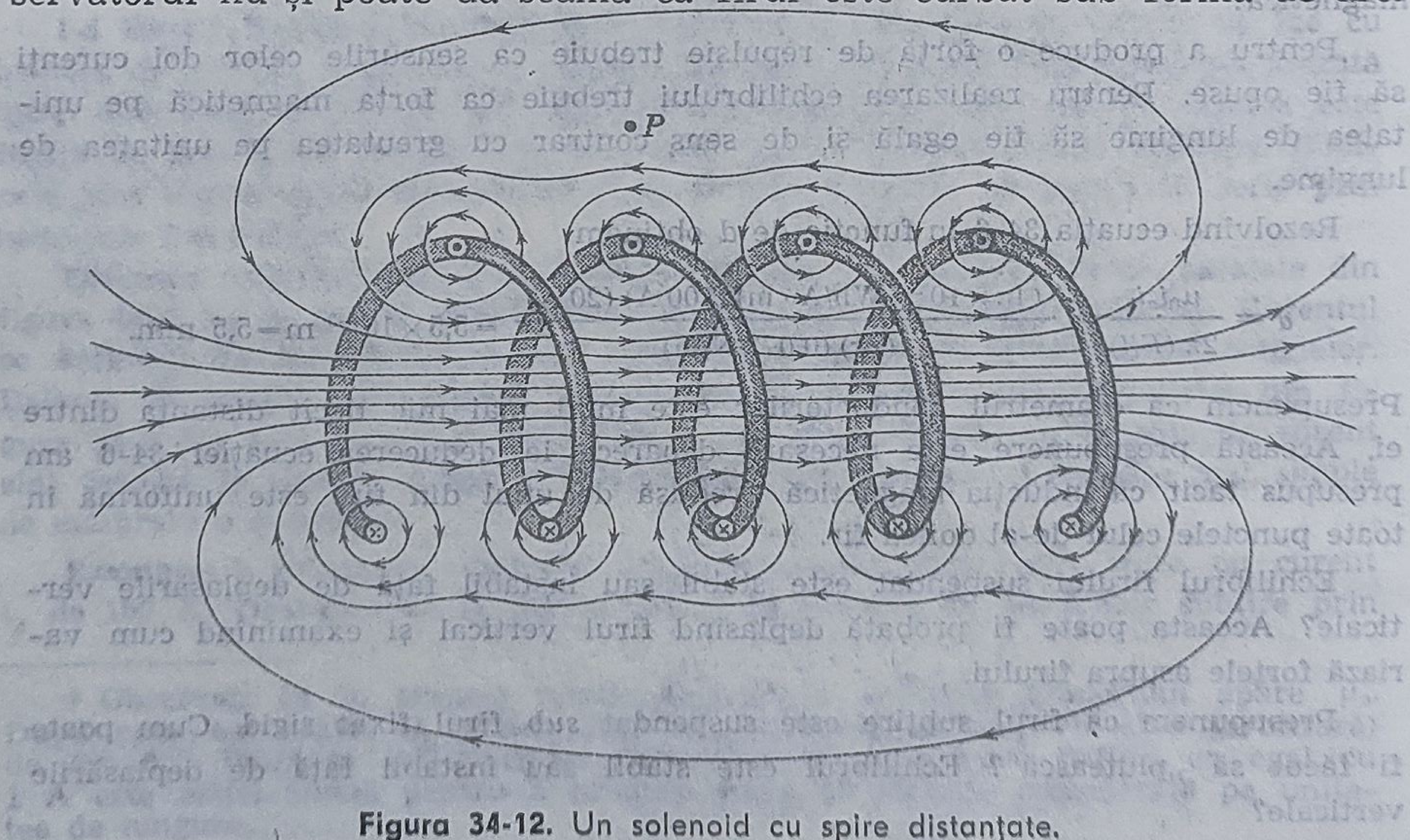


Figura 34-12. Un solenoid cu spire distanţate.

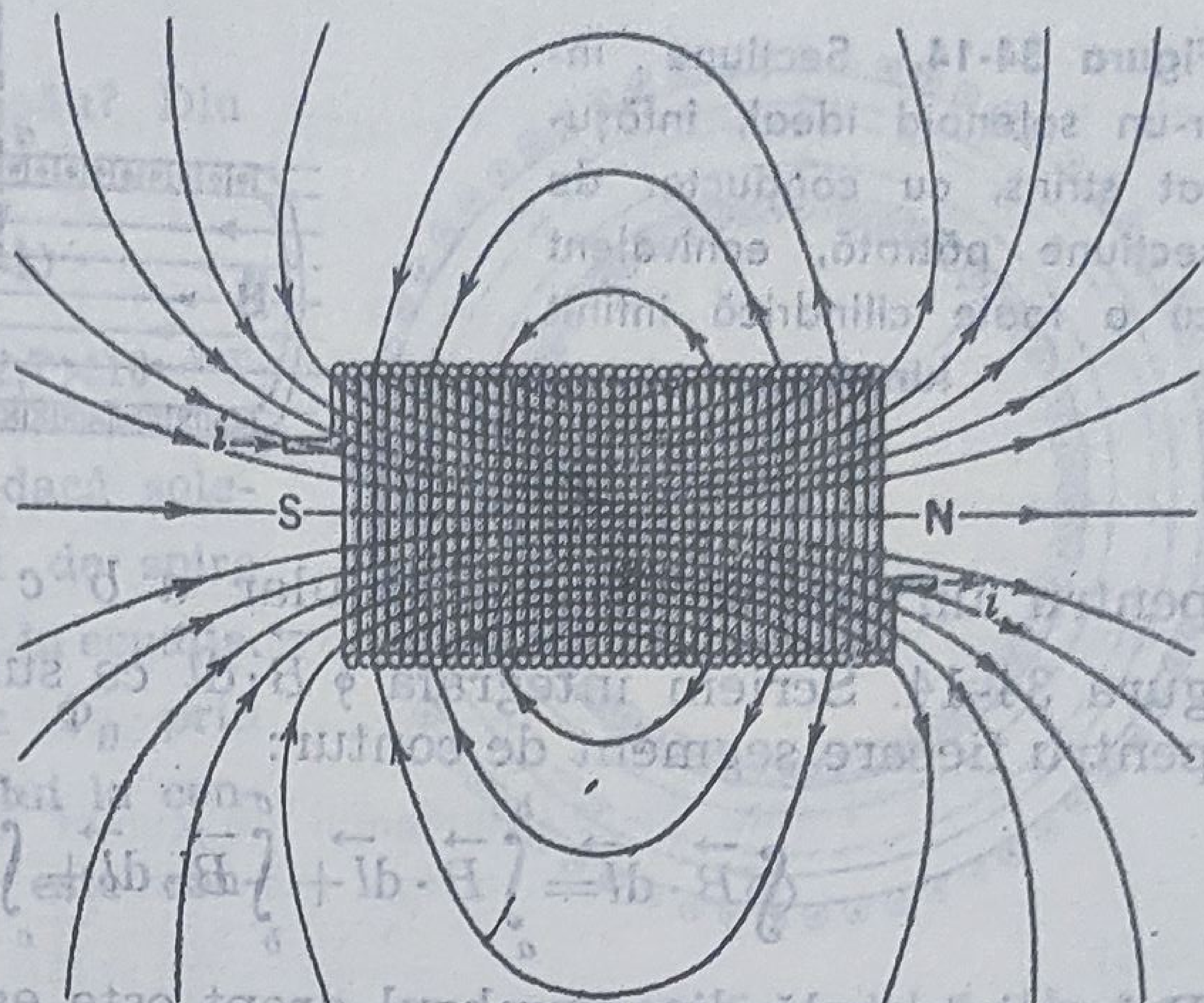


Figura 34-13. Un solenoid de lungime finită. Partea dreapta din care ies liniile de cîmp se comportă ca un pol nord al unui ac magnetic. Partea stînga se comportă ca un pol sud.

Firul se comportă din punct de vedere magnetic aproximativ ca un conductor rectiliniu lung iar liniile lui $\vec{B}$ produse de o singură spiră sînt aproximativ cercuri concentrice.

Cîmpul solenoidului este suma vectorială a cîmpurilor produse de toate spirele ce formează solenoidul. Figura 34-12, în care este arătat un „solenoid" cu spire distanțate, sugerează că între spire cîmpurile tind să se compenseze. Ea sugerează de asemenea că în punctele din interiorul solenoidului și suficient de departe de spire, $\vec{B}$ este paralel cu axa solenoidului. În cazul limită al spirelor înfășurate strîns, spiră lîngă spiră, solenoidul se comportă în esență ca o foaie de curent cilindrică și din considerente de simetrie, afirmația de mai sus devine în mod necesar adevărată. În cele ce urmează vom presupune că este corectă.

Pentru puncte ca de exemplu P din figura 34-12 cîmpul produs în partea superioară a spirelor solenoidului (notate cu ⊙) are sensul spre stînga și tinde să compenseze cîmpul produs în partea inferioară a spirelor solenoidului (notate ⊗) ce are sensul spre dreapta. Pe măsură ce solenoidul se apropie de unul ideal, adică se apropie de configurația unei foi de curent cilindrică infinit de lungă, cîmpul de inducție în punctele din exterior tinde către zero. În practică, presupunerea că în exterior cîmpul este egal cu zero este corectă pentru un solenoid a cărui lungime este mult mai mare decît diametrul și considerăm numai punctele exterioare apropiate de axul solenoidului care sînt departe de capete. Figura 34-13 arată liniile de inducție pentru un solenoid real care este departe de cel ideal, în care lungimea nu este mult mai mare decît diametrul. Chiar și în acest caz distanța dintre liniile de inducție din planul central indică că în exterior cîmpul este mult mai slab decît în interior.

Să aplicăm legea lui Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

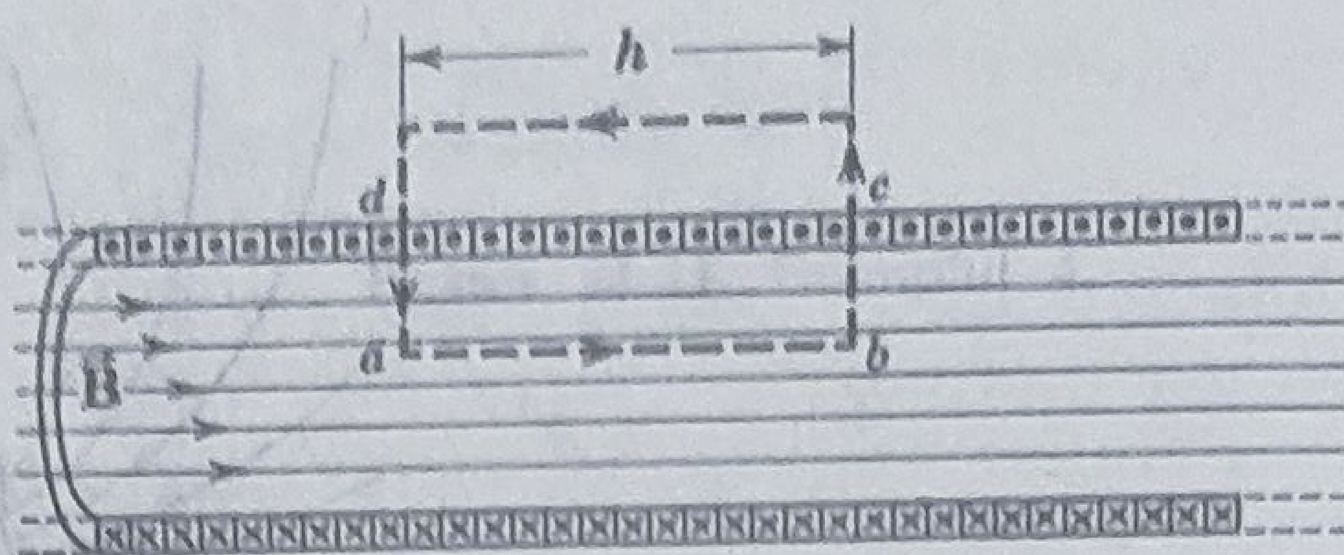


Figura 34-14. Secțiune într-un solenoid ideal, înfășurat strîns, cu conductor de secțiune pătrată, echivalent cu o foaie cilindrică infinit lungă.

pentru un contur dreptunghiular $a\ b\ c\ d$ în solenoidul ideal din figura 34-14. Scriem integrala $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}$ ca suma a patru integrale, cîte una pentru fiecare segment de contur:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_a^b \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_b^c \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_c^d \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_d^a \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

Prima integrală din membrul drept este egală cu $B\,h$ unde B este valoarea inducției magnetice în interiorul solenoidului iar h este lungimea arbitrară a segmentului de la a la b. Observați că segmentul ab deși este paralel cu axa solenoidului nu este obligator să coincidă cu ea.

Integralele a doua și a patra sînt egale cu zero deoarece $\vec{B}$ este normal la fiecare din cele două elemente de parcurs. În acest caz $\vec{B}\cdot\vec{dl}$ este egal cu zero și deci integralele sînt egale cu zero. Cea de a treia integrală, ce cuprinde porțiunea din dreptunghi situată în exteriorul solenoidului este zero deoarece am considerat că $\vec{B}$ este zero la toate punctele din exteriorul unui solenoid ideal.

Astfel $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}$ pentru întregul contur dreptunghiular are valoarea Bh. Curentul net i ce trece prin suprafața delimitată de conturul de integrare nu este același cu i_0 curentul prin solenoid deoarece în conturul de integrare se includ mai mult decît o singură spiră. Fie n *numărul de spire pe unitatea de lungime*

$$i = i_0\ (nh)$$

În acest caz legea lui Ampère devine

$$Bh = \mu_0 i_0 nh$$

sau

$$B = \mu_0 i_0 n \tag{34-7}$$

Deși ecuația 34-7 a fost dedusă pentru un solenoid ideal infinit lung, ea este valabilă și pentru cazul unui solenoid real pentru punctele din interior în apropiere de centru. Ecuația arată că B nu depinde de diametrul sau de lungimea solenoidului și că B este constant pe toată secțiunea solenoidului. Cu ajutorul solenoidului se poate realiza practic un cîmp magnetic uniform de o anumită valoare tot așa cum cu ajutorul unui condensator cu armături plan paralele se poate produce un cîmp electric uniform de o valoare dată.

Exemplul 5. Un solenoid lung de 1,0 m cu diametrul mediu de 3,0 cm este străbătut de un curent de 5,0 A; este format din cinci strate de spire fiecare conținînd cîte 850 de spire.

(a) Care este B în centrul său? Din ecuaţia 34-7

$$B=\mu_0 i_0 n=(4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{Wb/A\cdot m})\ (5{,}0\ \mathrm{A})\ \cdot$$

$$(5\times850\ \mathrm{spire/m})=2{,}7\times10^{-2}\ \mathrm{Wb/m^2}=2{,}7\times10^{-2}\ \mathrm{T}$$

Putem folosi ecuaţia 34-7 chiar dacă solenoidul are mai mult de un strat de spire deoarece diametrul spirelor nu intră în ecuaţie.

(b) Care este fluxul magnetic Φ_B prin secţiunea transversală a solenoidului la centrul său? În măsura în care $\vec{B}$ este constant, putem calcula fluxul din

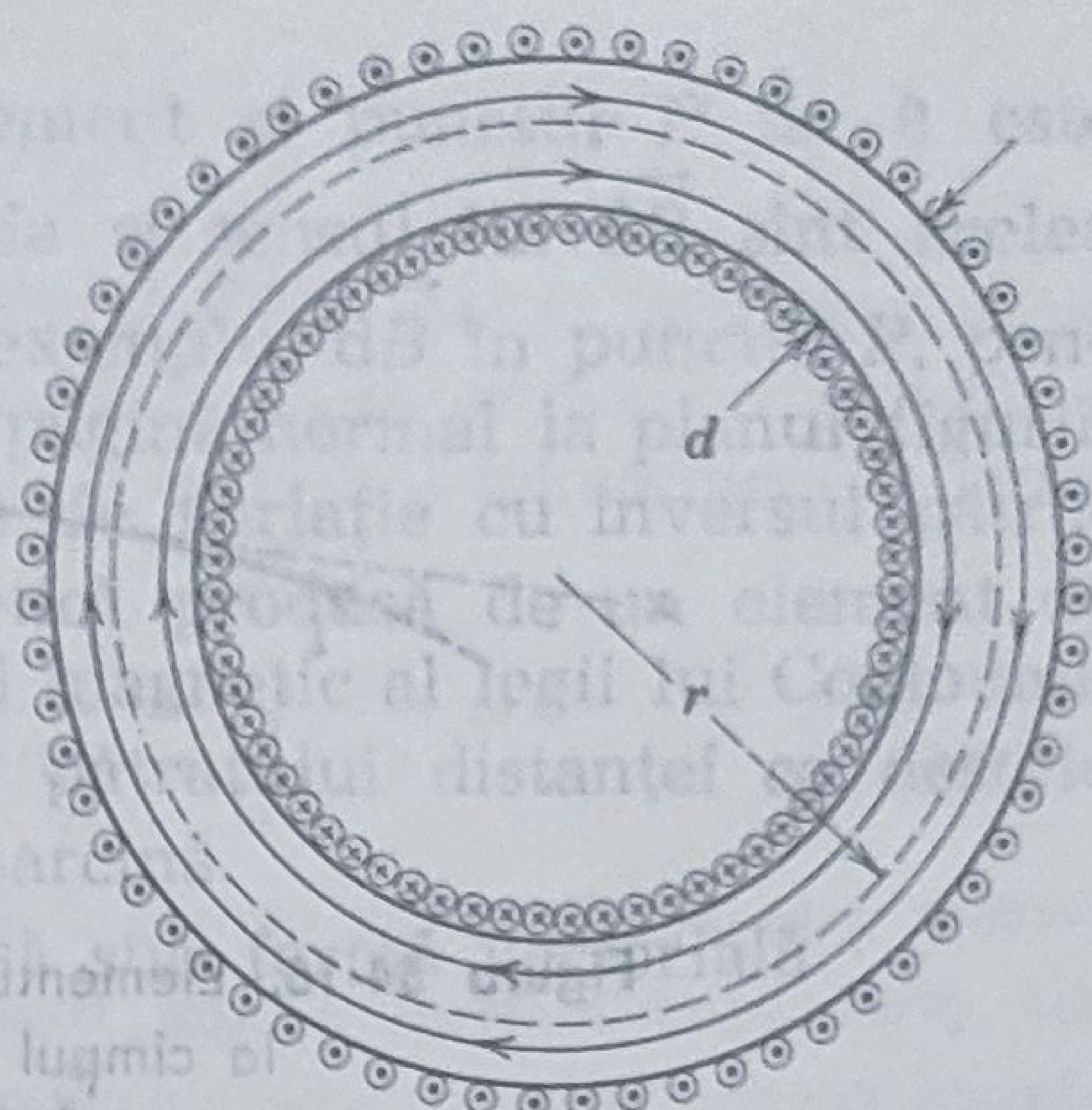


Figura 34-15. Exemplul 6. Un tor.

$$\Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=BA$$

unde A este suprafaţa secţiunii transversale efective. Să presupunem că A este suprafaţa unui disc circular cu diametrul egal cu diametrul mediu al spirelor (3,0 cm). În acest caz suprafaţa efectivă este egală cu $7{,}1\cdot10^{-4}\ \mathrm{m^2}$ şi

$$\Phi_B=BA=(2{,}7\cdot10^{-2}\ \mathrm{T})\ (7{,}1\cdot10^{-4}\ \mathrm{m^2})=1{,}9\times10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

Exemplul 6. *Bobina toroidală.* Bobina toroidală este un solenoid de lungime finită curbat în formă de inel (figura 34-15). Calculaţi pe $\vec{B}$ în punctele din interiorul său.

Din considerente de simetrie liniile lui $\vec{B}$ formează cercuri concentrice în interiorul torului, după cum se vede în figură. Să aplicăm legea lui Ampère unui contur circular de integrare de rază r

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 i$$

sau

$$(B)\ (2\pi r)=\mu_0 i_0 N$$

unde i_0 este curentul ce străbate spirele torului iar N este numărul total de spire. Aceasta dă

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_0 N}{r}$$

Spre deosebire de cazul solenoidului, B nu este constant în toate punctele secţiunii transversale a torului. Arătaţi, folosind legea lui Ampère, că B este zero în punctele din exteriorul unui tor ideal.

34-6 Legea lui Biot şi Savart

Legea lui Ampère poate fi folosită la calculul cîmpurilor magnetice numai dacă simetria distribuţiei curenţilor este suficient de ridicată pentru a permite evaluarea simplă a integralei curbilinii $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}$. Această cerinţă limitează folosirea legii în problemele practice. Nu înseamnă că legea nu mai este valabilă ci pur şi simplu că folosirea ei devine dificilă.

Similar, în electrostatică, teorema lui Gauss poate fi folosită la calculul cîmpurilor electrice numai dacă simetria distribuţiei de sarcină

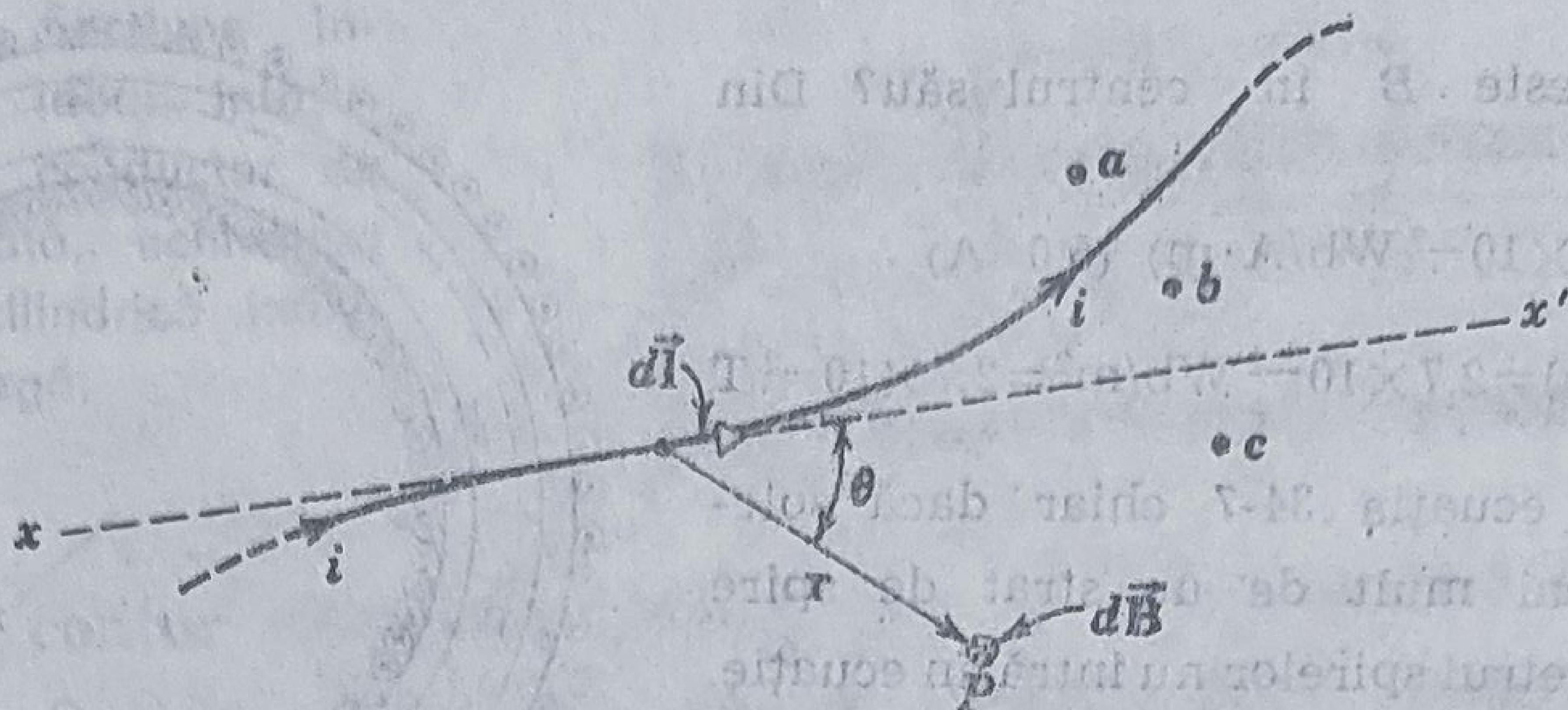


Figura 34-16. Elementul de curent $d\vec{l}$ are contribuţia $d\vec{B}$ la cîmpul magnetic din punctul P.

este suficient de ridicată pentru a permite evaluarea simplă a integralei de suprafaţă $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Putem folosi, de exemplu, teorema lui Gauss la calculul cîmpului electric produs de o bară lungă uniform încărcată dar folosirea ei la cazul unui dipol electric devine incomodă deoarece în acest caz simetria nu este suficient de ridicată.

Pentru a calcula pe $\vec{E}$, produs de o distribuţie *oarecare* de sarcină, într-un punct dat, împărţim distribuţia în *elemente de sarcină* dq şi (vezi paragraful 27-4) folosim legea lui Coulomb pentru a calcula contribuţia $d\vec{E}$ la cîmp a fiecărui element în punctul considerat. Găsim cîmpul $\vec{E}$ în acest punct adunînd, mai exact, integrînd contribuţiile $d\vec{E}$ la cîmp pentru întreaga distribuţie.

Vom descrie acum un procedeu similar de calcul al lui $\vec{B}$ produs de o distribuţie oarecare de curenţi într-un punct oarecare. Împărţim distribuţia de curenţi în *elemente de curent* şi folosind legea lui Biot şi Savart (pe care o vom da mai jos) calculăm contribuţia $d\vec{B}$ la cîmp a fiecărui element de curent, în punctul considerat. Găsim cîmpul $\vec{B}$ în acest punct integrînd contribuţiile la cîmp ale întregii distribuţii.

În figura 34-16 este dată o distribuţie oarecare de curent formată dintr-un conductor curb străbătut de curentul i. Este arătat un element oarecare de curent; el este format dintr-un segment de lungime $d\vec{l}$ din conductorul străbătut de curentul i. Direcţia sa este aceea a tangentei la conductor (linia punctată). Un element de curent nu poate exista ca o cantitate izolată deoarece curentul trebuie să intre într-un fel în element printr-unul din capete şi trebuie să iasă prin celălalt. Putem considera totuşi circuitul real ca fiind format dintr-un mare număr de elemente de curent puse cap la cap.

Fie P punctul în care dorim să cunoaştem inducţia magnetică $d\vec{B}$ produsă de acest element de curent. Din legea lui Biot şi Savart, mărimea lui dB este

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2} \qquad (34\text{-}8)$$

unde $\vec{r}$ este vectorul distanţă dintre element şi punctul P iar θ este unghiul dintre acest vector şi $d\vec{l}$. Direcţia şi sensul lui $d\vec{B}$ sînt aceleа ale vectorului $d\vec{l} \times \vec{r}$. În figura 34-16, de exemplu, $d\vec{B}$ în punctul P, pentru elementul de curent indicat, intră în pagină normal la planul figurii. De observat că ecuaţia 34-8 fiind o lege de variaţie cu inversul pătratului distanţei ce descrie inducţia magnetică produsă de un element de curent poate fi considerată ca echivalentul magnetic al legii lui Couloumb care este o lege de variaţie cu inversul pătratului distanţei ce descrie cîmpul electric produs de un element de sarcină.

Legea lui Biot şi Savart poate fi scrisă sub formă vectorială

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (34\text{-}9)$$

Sub formă scalară, această formulare se reduce la ecuaţia 34-8. Ea dă informaţii complete despre direcţia şi sensul lui $d\vec{B}$, care sînt aceleaşi cu ale vectorului $d\vec{l} \times \vec{r}$.

Cîmpul rezultant în punctul P se găseşte integrînd ecuaţia 34-9

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \qquad (34\text{-}10)$$

unde integrala este o integrală vectorială.

Exemplul 7. *Un conductor rectiliniu lung.* Exemplificăm legea lui Biot şi Savart aplicînd-o la calculul lui $\vec{B}$ produs de un curent i printr-un conductor rectiliniu lung. Am discutat pe larg această problemă în paragraful 34-1 în legătură cu legea lui Ampère.

În figura 34-17, care este o imagine laterală a conductorului, se vede un element tipic de curent $d\vec{x}$. Mărimea contribuţiei $d\vec{B}$ a acestui element la cîmpul magnetic în P se găseşte din ecuaţia 34-8

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \sin\theta}{r^2}$$

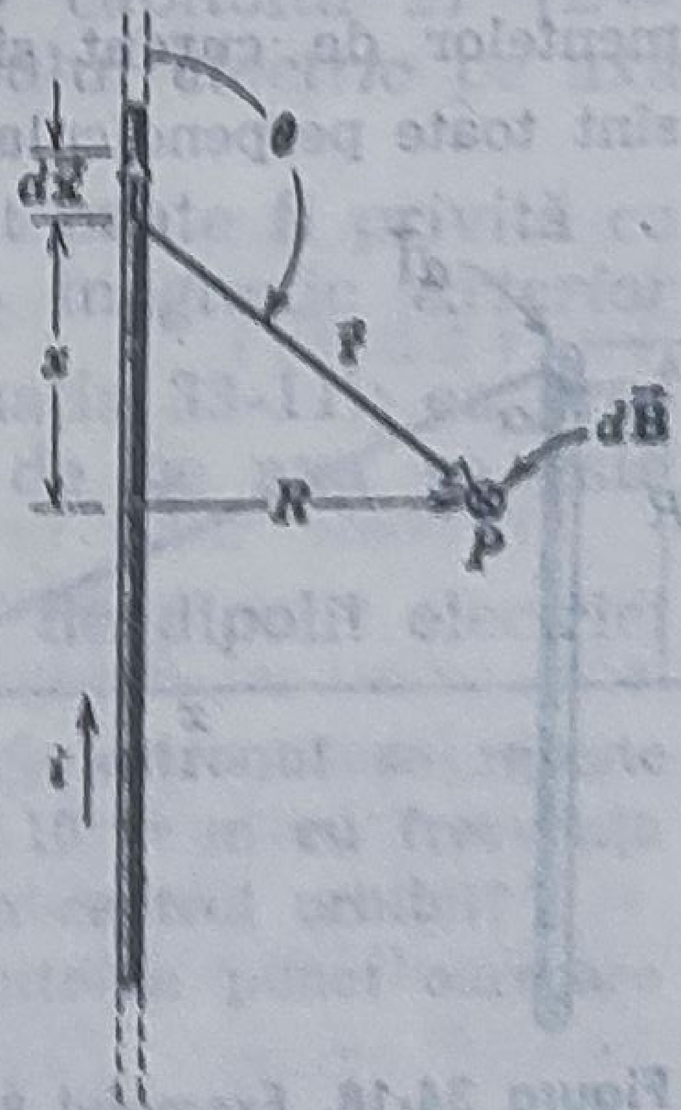


Figura 34-17. Exemplul 7.

Contribuţiile $d\vec{B}$ în punctul P a tuturor elementelor au aceeaşi direcţie şi sens şi anume, intră în planul figurii normal pe pagină. Astfel integrala vectorială din ecuaţia 34-10 se reduce la o integrală scalară

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\sin\theta \, dx}{r^2}.$$

Aici x, θ şi r nu sînt independente, fiind legate prin (vezi figura 34-17)

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

şi

$$\sin\theta\,[-\sin(\pi-\theta)] = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

astfel că expresia lui B devine

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left|\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Acesta este rezultatul la care am ajuns mai înainte la rezolvarea acestei probleme (vezi ecuaţia 34-4). Legea Bior-Savart conduce întotdeauna la rezultate ce sînt în concordanţă cu legea lui Ampère şi cu experienţa.

Această problemă ne reaminteşte de echivalentul ei electrostatic. Am dedus expresia lui $\vec{E}$ produs de o bară lungă încărcată, folosind teorema lui Gauss (paragraful 28,6); aceeaşi problemă am rezolvat-o şi prin metode de integrare, folosind legea lui Coulomb (paragraful 27-4).

Exemplul 8. *O spiră circulară de curent.* În figura 34-18 este dată o spiră circulară de rază R prin care trece un curent i. Calculaţi pe $\vec{B}$ în puncte situate pe axa sa.

Vectorul $d\vec{l}$ pentru un element de curent situat în partea superioară a spirei iese din pagină, perpendicular pe ea. Unghiul θ dintre $d\vec{l}$ şi $\vec{r}$ este de 90° iar planul format de $d\vec{l}$ şi $\vec{r}$ este normal pe pagină. Vectorul $d\vec{B}$ corespunzător acestui element este normal pe acest plan şi deci este situat în planul figurii, normal pe $\vec{r}$, după cum se vede din figură.

Să descompunem pe dB în două componente: una, $d\vec{B}_{||}$ în lungul axei spirei şi cealaltă, $d\vec{B}_{\perp}$ normală pe axă. La inducţia totală $\vec{B}$ în punctul P contribuie numai $d\vec{B}_{||}$. Aceasta, deoarece componentele $d\vec{B}_{||}$ corespunzătoare tuturor elementelor de curent sînt în lungul axei şi se adună direct; componentele $d\vec{B}_{\perp}$ sînt toate perpendiculare pe axă dar avînd sensuri diferite, rezultanta lor pentru o spiră completă este zero, din considerente de simetrie. Astfel

$$B = \int dB_{||}$$

unde integrarea se efectuează simplu scalar peste toate elementele de curent.

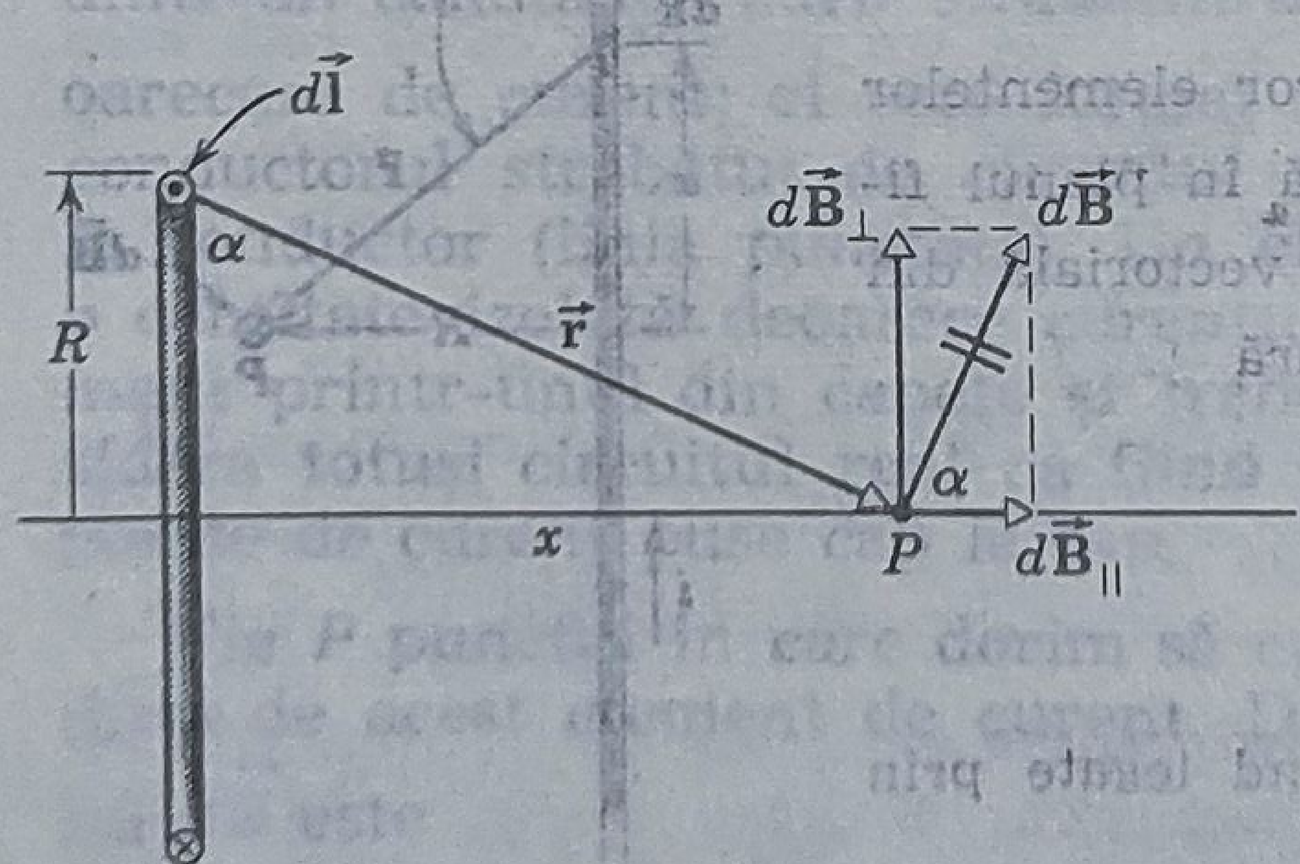


Figura 34-18. Exemplul 8. Un inel de rază R, străbătut de curentul I.

Pentru elementul de curent indicat în figura 34-18, din legea Biot-Savart (ecuaţia 34-8) avem

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{dl\,\sin 90°}{r^2}$$

Avem de asemenea $dB_{||} = dB\cos\alpha$.

Combinîndu-le obținem $dB_{||} = \dfrac{\mu_0 i \cos\alpha \, dl}{4\pi r^2}$

Din figura 34-18 se vede că r și α nu sînt independente. Să le exprimăm pe fiecare în funcție de o nouă variabilă x, distanța de la centrul spirei la punctul P. Relația este

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

și

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Introducînd aceste valori în expresia lui $dB_{||}$ obținem

$$dB_{||} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2+x^2)^{3/2}} \, dl$$

Observați că i, R și x au aceeași valoare pentru toate elementele de curent. Integrînd această ecuație și observînd că $\int dl$ este chiar circumferința spirei $(=2\pi R)$, obținem

$$B = \int dB_{||} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2+x^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \qquad (34\text{-}11)$$

Dacă în exemplul 8 punem $x \gg R$, deci dacă nu luăm în considerare punctele din apropierea spirei, ecuația 34-11 se reduce la

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}$$

Amintindu-se că πR^2 este suprafața A a spirei și considerînd o bobină cu N spire, putem scrie această ecuație

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(NiA)}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$$

unde μ este *momentul magnetic dipolar* al spirei de curent. Acest rezultat ne reamintește de cel obținut la problema 10 capitolul 27 $[E = (1/2\,\pi\varepsilon_0)\,(p/x^3)]$ care este formula intensității cîmpului *electric* pe axa dipolului *electric.*

Astfel, am arătat pe două căi, că o spiră de curent poate fi privită ca un dipol magnetic: cînd este plasată într-un cîmp magnetic *exterior* asupra sa acționează un cuplu egal cu $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ (ecuația 33-11); ea produce un cîmp magnetic propriu care în punctele de pe axa sa este dat de ecuația dedusă mai înainte.

În tabela 34-1 sînt însumate unele mărimi legate de dipolii electrici și magnetici.

Exemplul 9. În modelul Bohr al atomului de hidrogen electronul se rotește în jurul nucleului pe o traiectorie circulară cu raza de $5{,}1 \cdot 10^{-11}$ m cu frecvența ν de $6{,}8 \cdot 10^{15}$ rotații/s. (a) Care este valoarea lui B produs în centrul orbitei?

Curentul este dat de cantitatea de sarcină ce trece printr-un punct oarecare de pe orbită în unitatea de timp și este dat de

$$i = e\nu = (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C})\ (6{,}8 \cdot 10^{15}/\text{s}) = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{A}$$

Tabela 34.1

ECUAȚII CARACTERISTICE DIPOLILOR

Proprietatea	Tipul de dipol	Ecuația
Cuplu în cîmp exterior	electric	$\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}$
	magnetic	$\vec{M}=\vec{\mu}\times\vec{B}$
Energia într-un cîmp exterior	electric	$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$
	magnetic	$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$
Cîmpul la distanță mare în lungul axei dipolului	electric	$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}$
	magnetic	$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{x^3}$
Cîmpul la distanță mare normal pe axa dipolului	electric	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}$
	magnetic	$B=\frac{\mu^0}{4\pi}\frac{\mu}{x^3}$

B în centrul orbitei este dat de ecuația 34-11 pentru $x=0$

$$B=\frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 i}{2R}=\frac{(4\pi\cdot10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1,1\cdot10^{-3}\text{A})}{2(5,1\cdot10^{-11}\text{m})}=14\ \text{Wb/m}^2=14\ \text{T}$$

(b) Care este momentul magnetic dipolar echivalent? Din ecuația 33-10

$$\mu=NiA=(1)\ (1,1\cdot10^{-3}\ \text{A})\ (\pi)\ (5,1\cdot10^{-11}\ \text{m})^2=9,0\times10^{-24}\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

Întrebări

1. Poate trece conturul de integrare pe care aplicăm legea lui Ampère *printr-un* conductor?

2. Presupunem că alegem un contur de integrare în jurul unui cablu ce conține douăsprezece conductori străbătuți de curenți diferiți (unii în sensuri opuse). Cum se calculează i din legea lui Ampère în acest caz?

3. Aplicați calitativ legea lui Ampère celor trei contururi din figura 34-19.

4. Mărimea lui $\vec{B}$ este constantă în lungul unei linii de inducție dată?

5. Discutați și comparați teorema lui Gauss și legea lui Ampère.

6. O țeavă de cupru lungă este străbătută de un curent. Există un

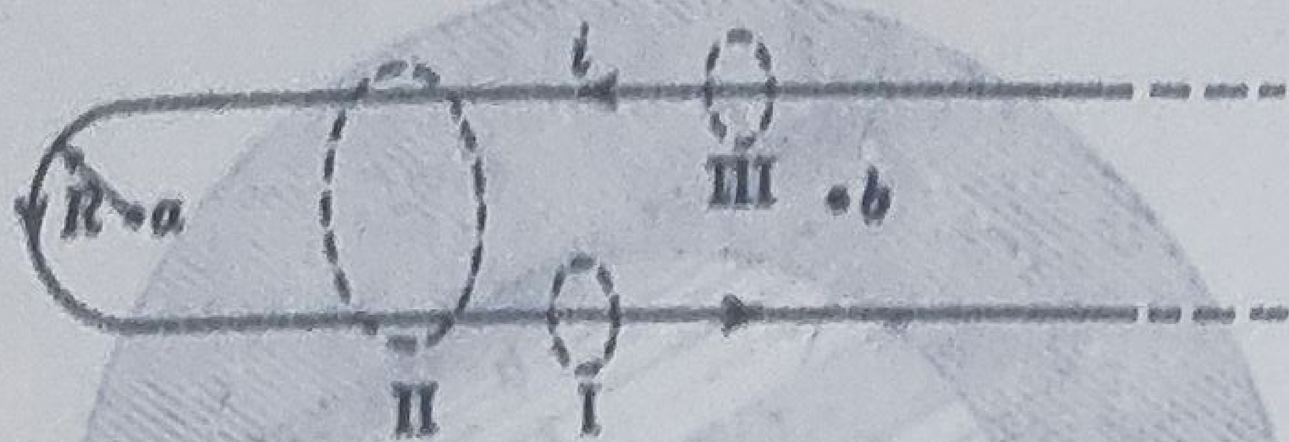


Figura 34-19.

cîmp magnetic (a) în interiorul (b) în exteriorul țevii?

7. Ecuația 34-4 ($B=\mu_0 i/2\pi r$) arată că în punctele din apropierea unui conductor lung străbătut de un curent se stabilește un cîmp magnetic intens. Dacă există un curent i și un cîmp magnetic $\vec{B}$, de ce asupra conductorului nu acționează o forță, conform ecuației $\vec{F}=i\vec{l}\times\vec{B}$?

8. În electronică, adesea firele străbătute de curenți egali dar de sensuri opuse sînt răsucite împreună pentru a reduce astfel efectele lor magnetice la distanțe mari. De ce este eficace acest procedeu?

9. Un fascicul de protoni de 20 MeV iese dintr-un ciclotron. Există un cîmp magnetic asociat acestui fascicul?

10. Verificați cum este echilibrul firului „plutitor" din exemplul 3 față de deplasările *orizontale*. Considerați cazul cînd firul plutește atît deasupra cît și dedesubtul firului fix.

Discutați rezultatele obținute pentru echilibrul firului pentru ambele poziții ale firului față de deplasările pe verticală și orizontală.

11. Explicați calitativ forțele de interacție dintre conductorii paraleli străbătuți de curenți paraleli sau antiparaleli folosind imaginea liniilor de inducție ale lui Faraday.

12. Comentați această afirmație: „Inducția magnetică în exteriorul unui solenoid lung nu poate fi zero cel puțin datorită faptului că forma elicoidală a bobinajului conduce la apariția unui cîmp în punctele exterioare, ce are o componentă asemănătoare cu cel produs de un fir rectiliniu așezat în lungul axei solenoidului".

13. Printr-un arc vertical de a cărui extremitate inferioară este atîrnată o greutate se trece un curent; ce se va întîmpla?

14. Este valabilă ecuația 34-7 ($B=\mu_0 i n$) pentru un solenoid cu secțiune pătrat?

15. Care sînt direcția și sensul cîmpului magnetic în punctele a, b și c din figura 34-16 produs de elementul de curent indicat?

16. Fie o spiră de curent circulară străbătută de curentul i. $\vec{B}$ este uniform în punctele din interiorul spirei?

17. Discutați asemănările și deosebirile dintre legea lui Coulomb și legea Bio-Savart.

18. Ecuația 34-9 dă legea Biot-Savart sub formă vectorială. Scrieți echivalentul său electrostatic [adică, ecuația 27-6 sau $dE=dq/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$] sub formă vectorială.

19. Cum puteți măsura momentul magnetic dipolar al unui ac magnetic?

20. Pe ce se bazează afirmația că o spiră de curent este un dipol magnetic?

Probleme

1. Printr-un conductor de cupru neizolat cu diametrul de 2,54 mm poate trece un curent de 50 A fără să se supraîncălzească. Care este B la suprafața firului, pentru acest curent?

2. Un inginer topograf lucrează cu o busolă la 6,096 m sub o linie electrică de putere prin care trece un curent constant de 100 A. Va influența aceasta sensibil indicația busole?

Componenta orizontală a cîmpului magnetic pămîntesc în acest loc este de 20 μ T.

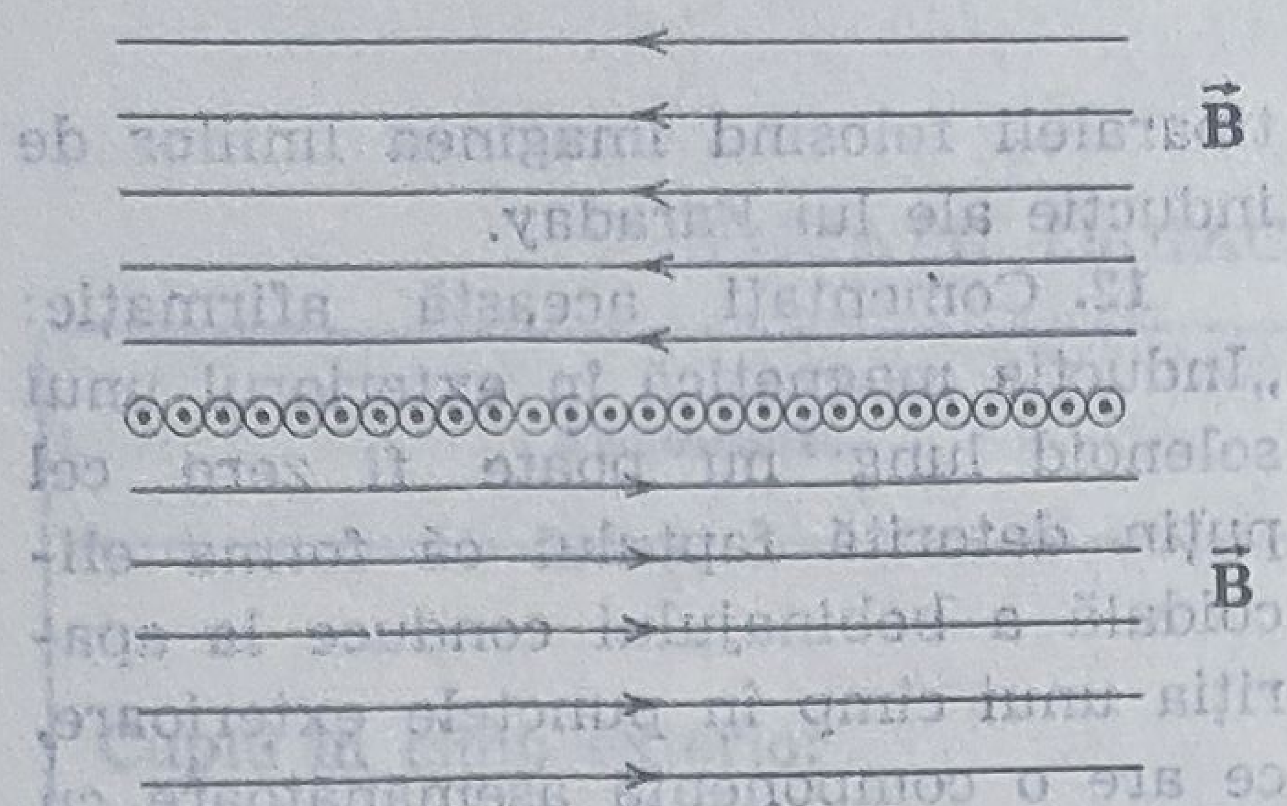


Figura 34-20.

3. Printr-un fir rectiliniu lung trece un curent de 50 A. Un electron ce se mişcă cu 10^7 m/s trece la 5,0 cm de fir. Ce forţă va acţiona asupra electronului dacă viteza sa este îndreptată (a) spre fir, (b) paralel cu firul, (c) normal pe direcţiile din (a) şi (b)?

4. Un conductor este format dintr-un număr infinit de fire adiacente, infinit de lungi prin care trece curentul i. Arătaţi că liniile lui $\vec{B}$ sînt cele indicate în figura 34-20 şi că B într-un punct oarecare din faţa unei foi infinite de curent va fi dat de

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 ni$$

unde n este numărul de fire pe unitatea de lungime. Rezolvaţi atît prin aplicarea directă a legii lui Ampère cît şi considerind această problemă ca un caz limită al exemplului 2.

5. În figura 34-21 este dat un conductor cilindric gol de raze a şi b prin care trece un curent i uniform distribuit în toate punctele secţiunii sale. (a) Arătaţi că, pentru puncte din interiorul corpului conductorului (adică pentru $a<r<b$) B este dat de

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2-a^2)}\frac{r^2-a^2}{r}$$

Verificaţi formula pentru cazul limită $a=0$. (b) Reprezentaţi pe $B(r)$ pentru r variind de la $r=0$ la $r\to\infty$

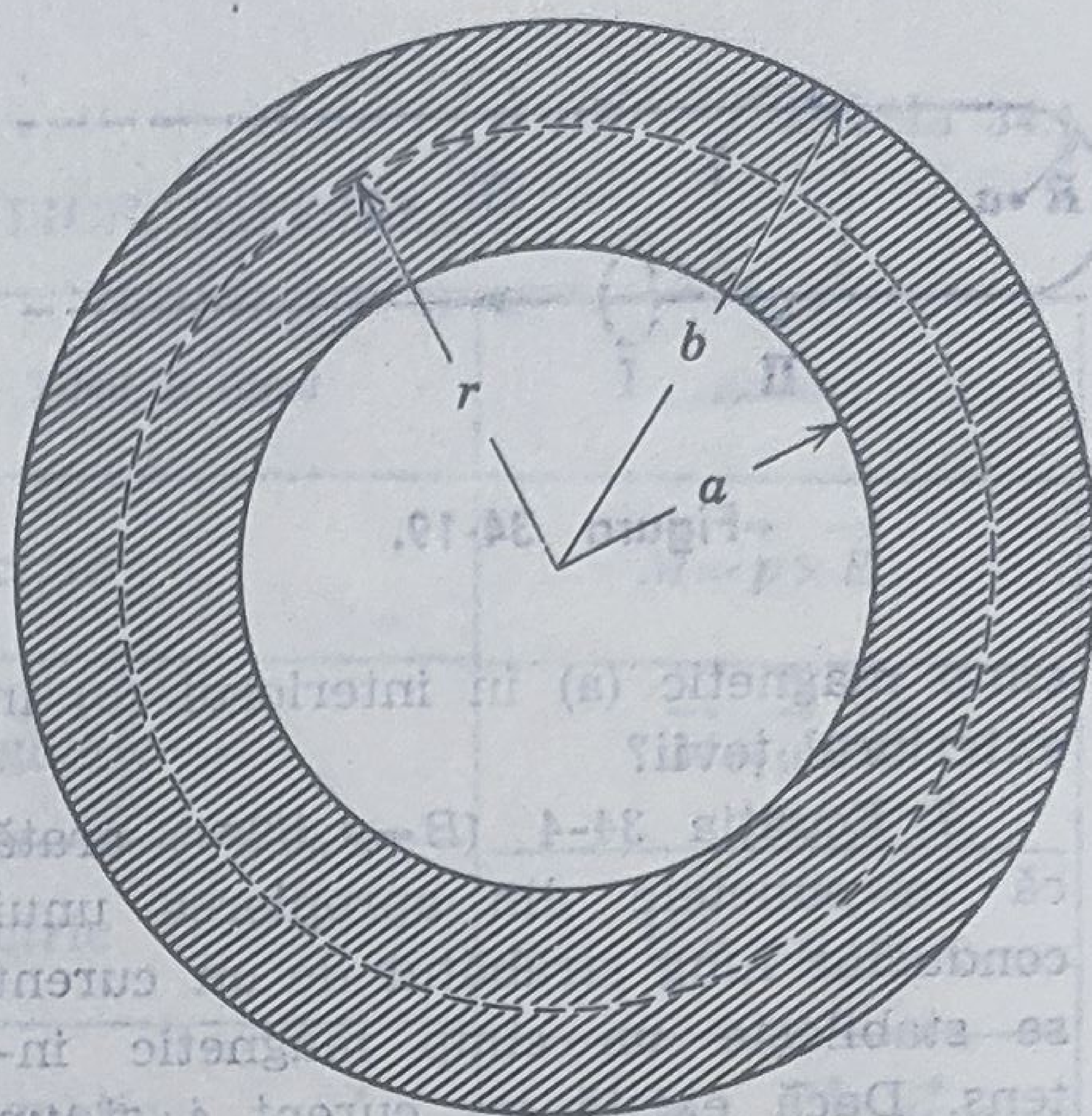


Figura 34-21.

6. Un cablu coaxial lung este format din doi conductori coaxiali cu dimensiunile arătate în figura 34-22.

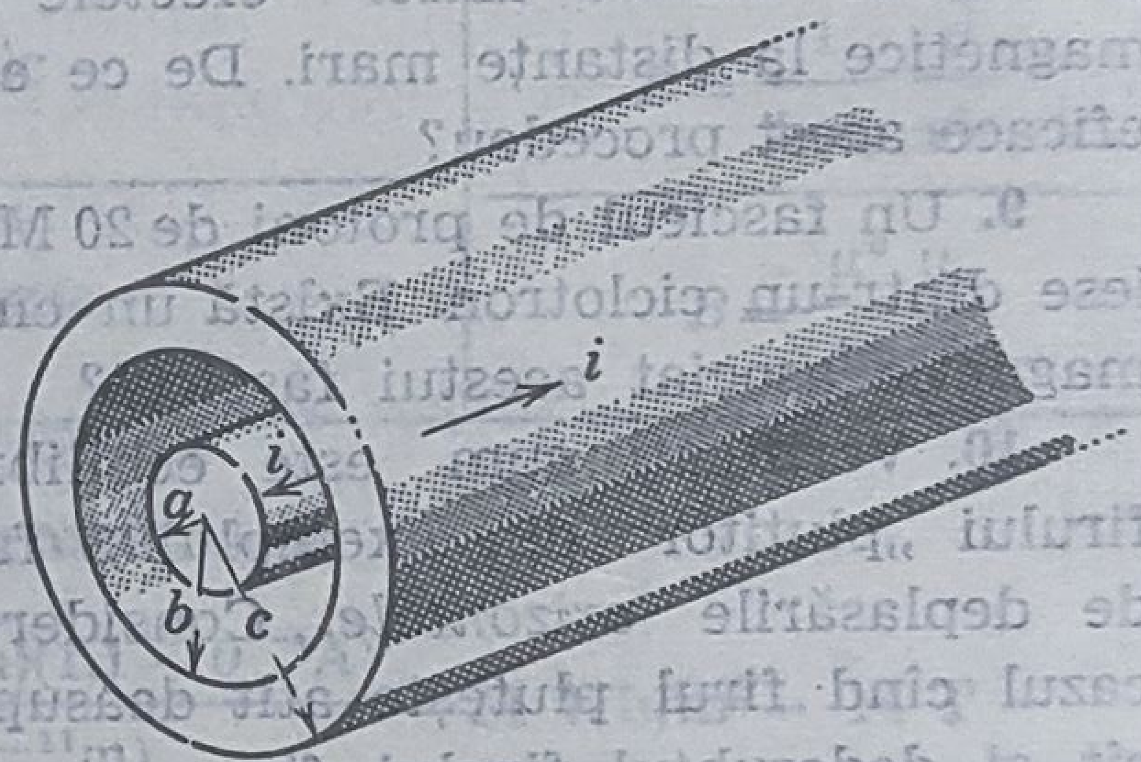


Figura 34-22.

Conductorii sînt străbătuţi de curenţi egali dar de sensuri opuse. a) Găsiţi inducţia magnetică B la distanţa r, în conductorul interior ($r<a$). (b) Găsiţi pe B între cei doi conductori ($a<r<b$). (c) Găsiţi pe B în interiorul conductorului exterior ($b<r<c$). (d) Găsiţi pe B în exteriorul cablului ($r>c$).

7. Printr-un fir lung de cupru trece un curent de 10 A. Calculaţi fluxul magnetic pe metru de fir pentru o suprafaţă plană S din interiorul firului (vezi figura 34-23).

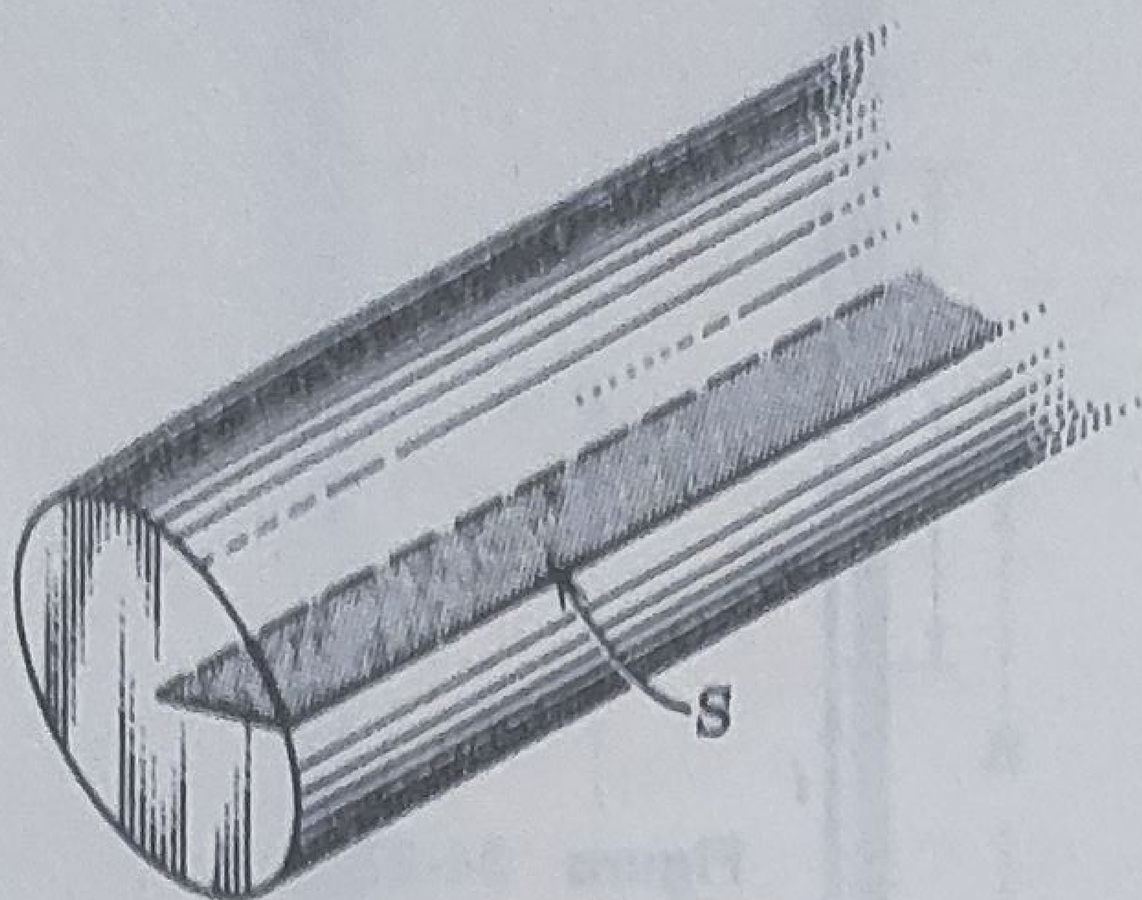


Figura 34-23.

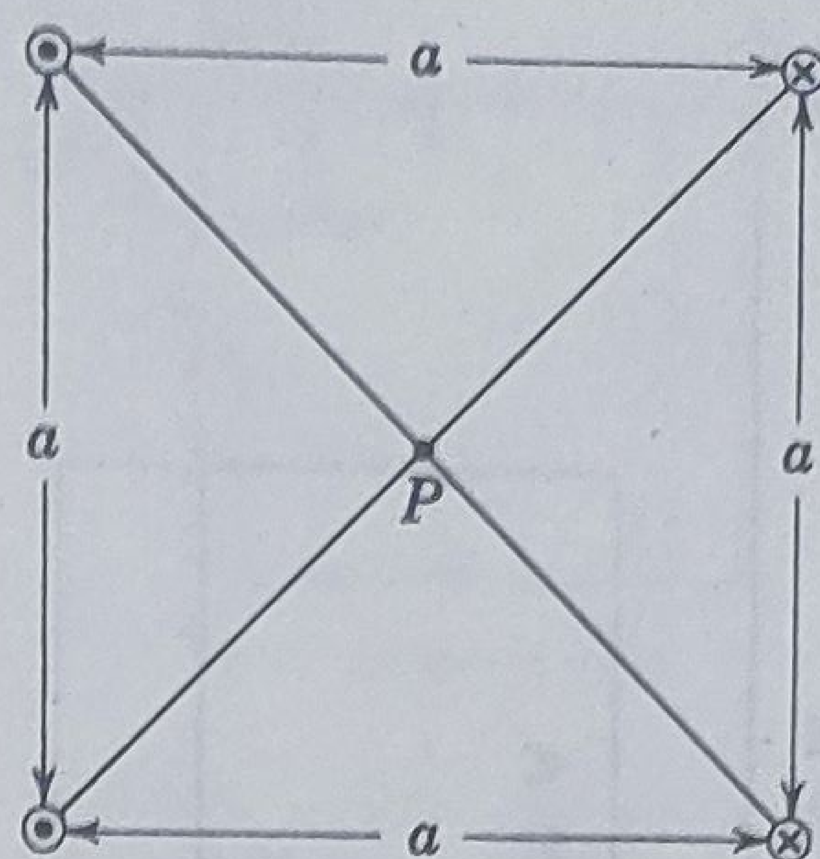


Figura 34-25.

8. Două fire lungi, paralele, de cupru cu diametrul de 2,54 mm sînt străbătute în sensuri opuse de un curent de 10 A. (a) Calculați fluxul pe metru, ce există în spațiul dintre axele firelor dacă centrele lor sînt la distanța de 2,0 cm unul de altul. (b) Ce fracțiune de flux se găsește în interiorul firelor? (c) Repetați calculul din (a) pentru cazul curenților paraleli.

9. Un fir lung străbătut de un curent de 100 A este plasat într-un cîmp magnetic uniform exterior de 5 mT. Firul este normal pe acest cîmp exterior. Localizați punctele în care cîmpul magnetic *rezultant* este egal cu zero.

10. Două fire lungi situate la distanța d unul de altul sînt străbătute de curenți antiparaleli egali i ca în figura 34-24. Arătați că B în punctul P situat la distanțe egale de ambele fire, este dat de

$$B = \frac{2\mu_0 i d}{\pi(4R^2 + d^2)}$$

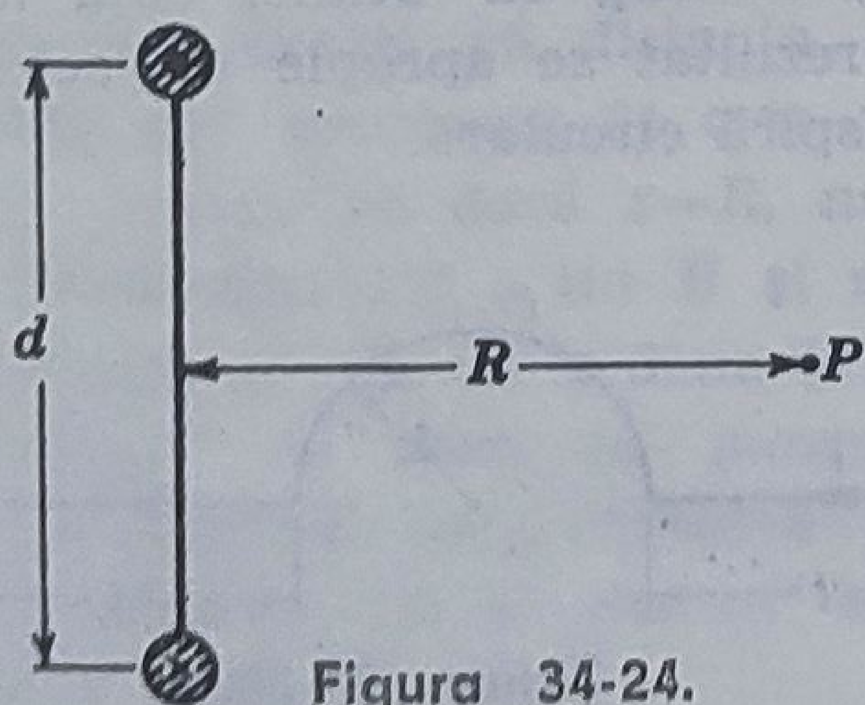


Figura 34-24.

11. Patru fire lungi de cupru cu diametrul de 2,54 mm sînt paralele între ele, secțiunea lor transversală formînd un pătrat cu latura de 20 cm. Prin fiecare fir trece un curent de 20 A în sensul indicat în figura 34-25. Care sînt mărimea direcției și sensul lui $\vec{B}$ în centrul pătratului?

12. Care sînt mărimea, direcția și sensul forței pe metru ce acționează asupra firului din stînga jos din problema 11?

13. În figura 34-26 este arătat un fir lung prin care trece un curent de 30 A. Spira dreptunghiulară este străbătută de un curent de 20 A. Calculați forța rezultantă ce acționează asupra spirei. Presupuneți că $a = 1,0$ cm, $b = 8,0$ cm și $l = 30$ cm.

14. Deduceți ecuația solenoidului (ecuația 34-7) pornind de la expresia cîmpului pe axa unei spire circulare (exemplul 8). (Indicație: împărțiți solenoidul într-o serie de spire de curent de grosime infinit mică și integrați).

15. O spiră de curent pătrată de latură a este străbătută de curentul i.

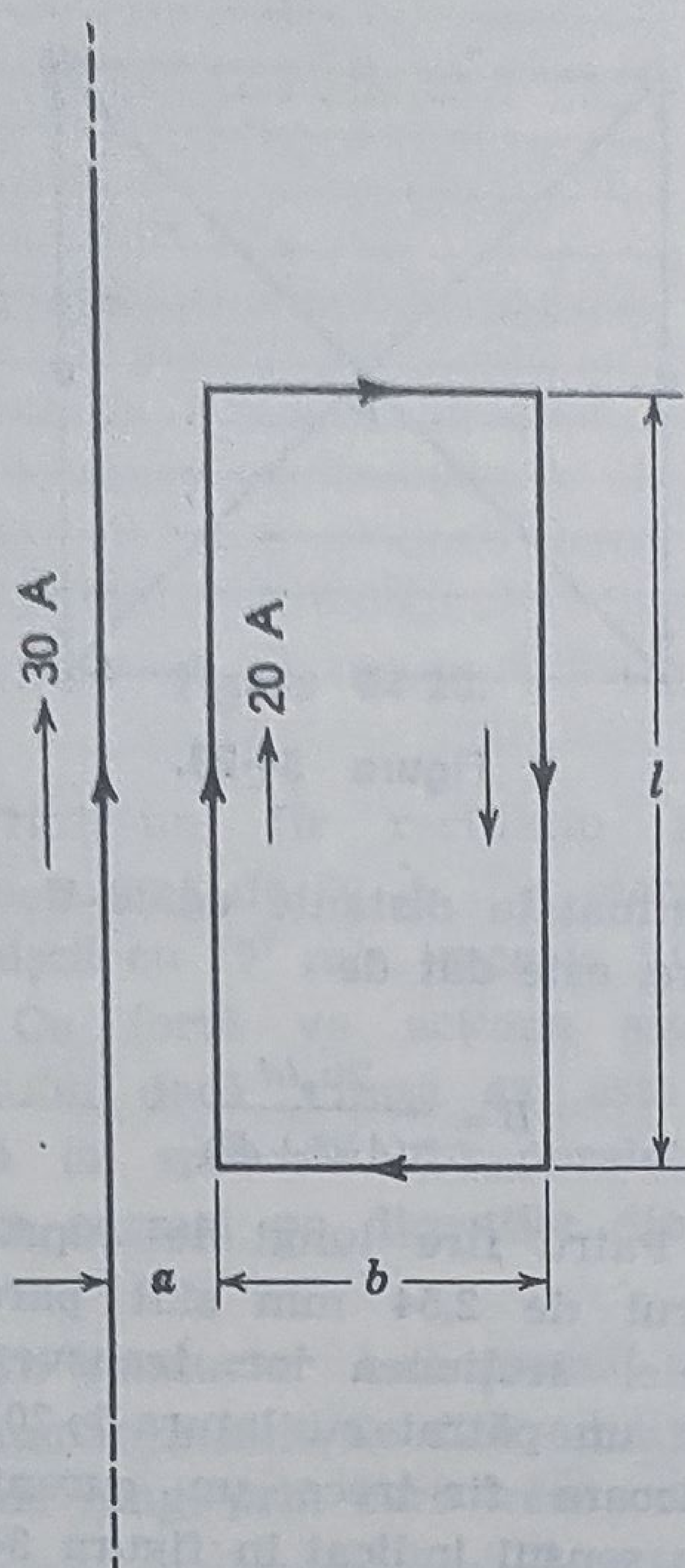


Figura 34-26.

Arătați că mărimea lui B în centrul ei este dată de

$$B=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

16. O spiră de curent pătrată de latură a este străbătută de curentul i. (a) Arătați că B într-un punct de pe axa spirei la distanța x de centrul ei este dat de

$$B=\frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4x^2+a^2)(4x^2+2a^2)^{1/2}}.$$

(b) Pentru $x=0$ aceasta se reduce la rezultatul din problema 15? (c) Pentru punctele situate la distanța pentru care $x \gg a$ spira pătrată de curent se comportă ca un dipol? Dacă da, care este momentul dipolului?

17. Printr-un segment de lungime l dintr-un fir rectiliniu trece curentul i.

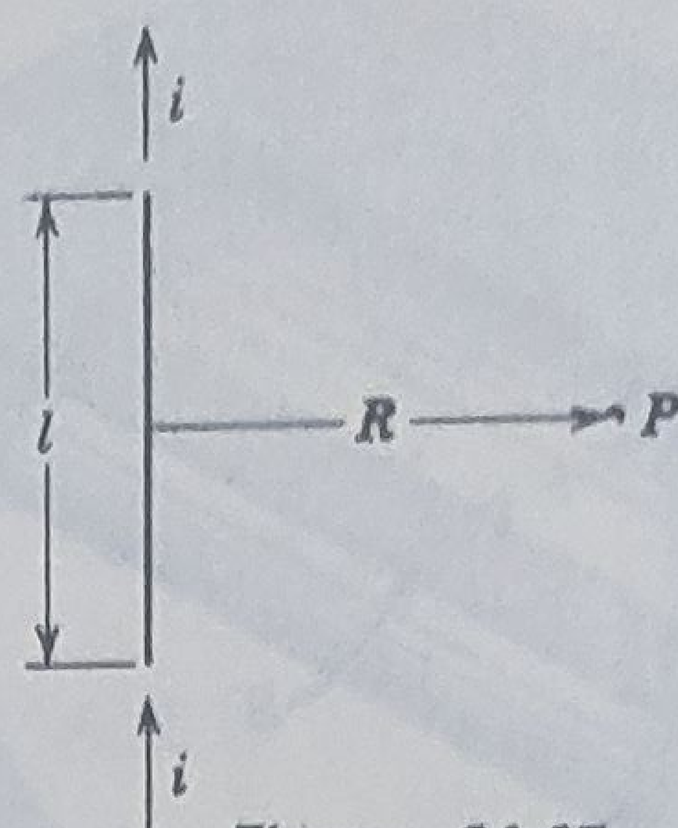


Figura 34-27.

(a) Arătați că mărimea cîmpului de inducție $\vec{B}$ produs de acest segment la distanța R de segment în lungul mediatoarei (vezi figura 34-27) este dată de

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\frac{l}{(l^2+4R^2)^{1/2}}$$

(b) Cînd $l \to \infty$ această expresie se reduce la un rezultat previzibil?

18. Firul din figura 34-28 este străbătut de curentul i. Care este inducția magnetică în centrul C al semicercului produsă de (a) fiecare segment rectiliniu de lungime l, (b) segmentul semicircular de rază R și (c) de întregul fir?

19. (a) Un fir în formă de poligon regulat cu n laturi este înscris într-un cerc de rază a. Dacă curentul prin acest fir este i, arătați că inducția magnetică în centrul cercului este dată de

$$B=\frac{\mu_0 n i}{2\pi a}\operatorname{tg}(\pi/n)$$

(b) Arătați că atunci cînd $n \to \infty$ acest rezultat se apropie de cel pentru o spiră circulară.

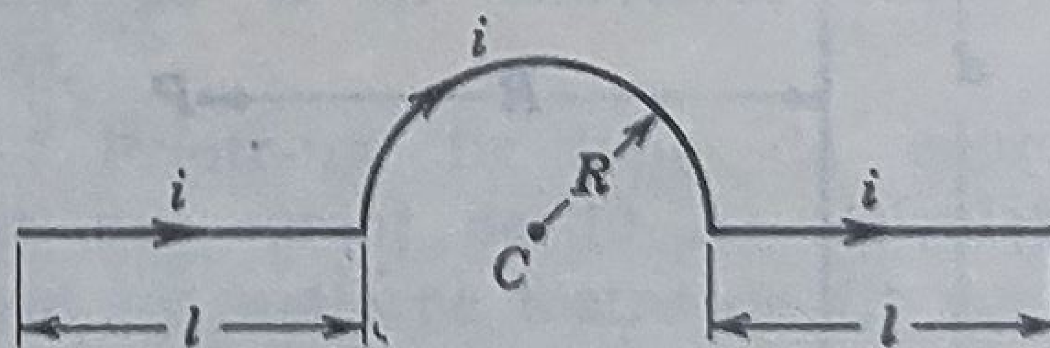


Figura 34-28.

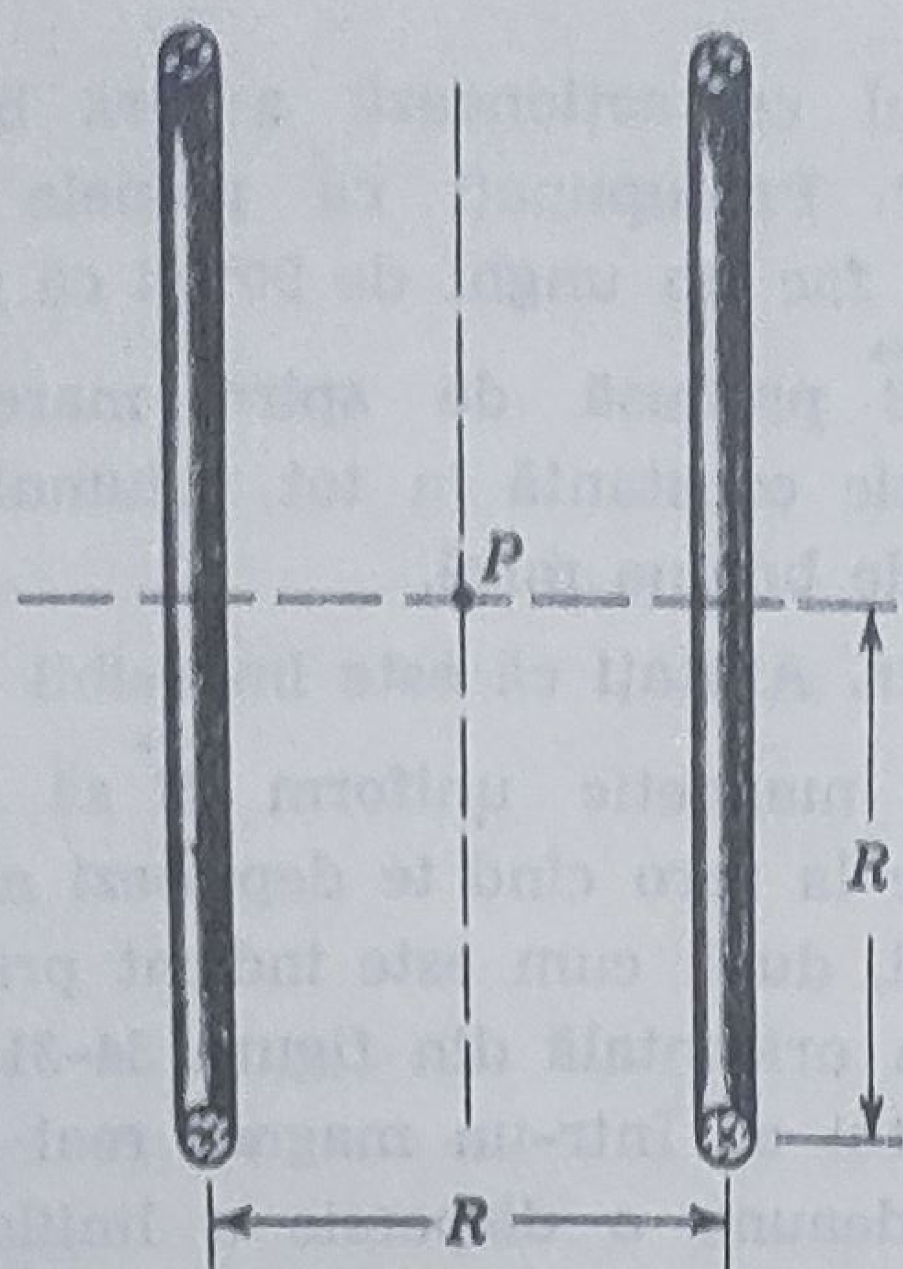


Figura 34-29.

20. (a) Arătați că B în centrul unui dreptunghi de lungime l și lățime d, străbătut de curentul i, este dat de

$$B = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{(l^2+d^2)^{1/2}}{ld}$$

(b) La ce se reduce B pentru $l \gg d$? Vă puteați aștepta la acest rezultat?

21. *Bobinele lui Helmholtz.* Două bobine cu cîte 300 de spire sînt așezate una față de alta la o distanță egală cu raza lor, ca în figura 34-29. Luînd R=5,0 cm și i=50 A reprezentați pe B în funcție de distanța x în lungul axei comune pentru intervalul de la x=−5 cm la x=+5 cm, luînd x=0 în punctul P. (Astfel de bobine produc un cîmp de inducție B deosebit de uniform în punctele din jurul lui P.)

22. Considerați că distanța dintre bobinele din problema 21 este variabilă z. Arătați că dacă z=R, nu numai prima derivată a lui B și anume (dB/dz) dar și cea de a doua (d^2B/dz^2) este egală cu zero în punctul P. Aceasta explică uniformitatea lui B în vecinătatea lui P pentru această distanță dintre bobine.

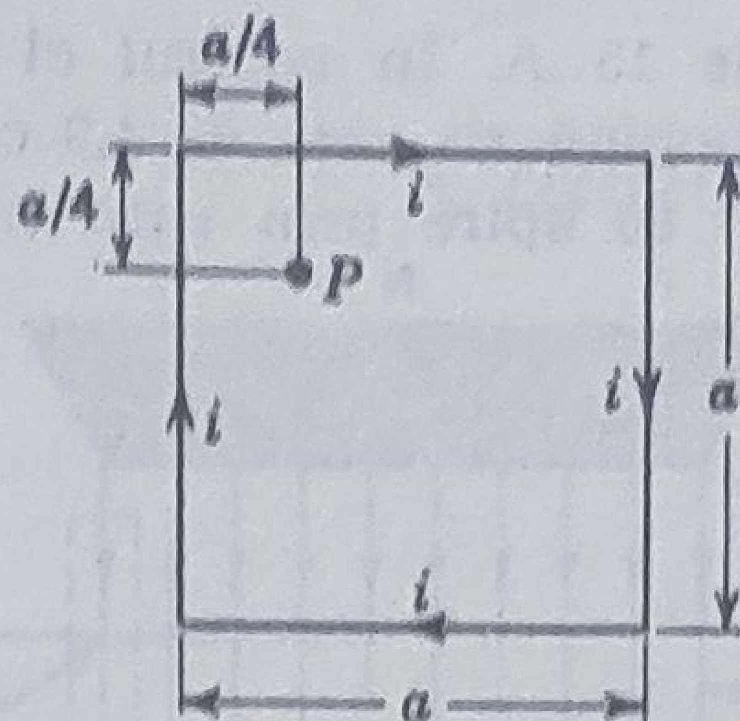


Figura 34-30.

23. Un „ac de păr" lung este obținut prin îndoirea unui fir după cum este arătat în figura 34-19. Care sînt mărimea, direcția și sensul lui $\vec{B}$ în punctul a dacă prin fir trece un curent de 10 A? Dar în punctul b? Luați R=0,50 cm.

24. Calculați pe $\vec{B}$ în punctul P din figura 34-30. Presupuneți că i=10 A și a=8,0 cm.

25. O sarcină q este uniform distribuită pe suprafața unui disc de plastic de rază R. Dacă discul se rotește în jurul axei sale cu o frecvență unghiulară ω, arătați că (a) inducția în centrul discului este

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

și (b) momentul magnetic dipolar al discului este

$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}$$

(Indicație: un disc ce se rotește este echivalent cu o serie de spire de curent concentrice; vezi exemplul 8.)

26. Vi se dă un fir de lungime l prin care poate trece un curent. Din fir puteți forma un cerc sau un pătrat. În care caz valoarea lui B în punctul central este mai mare?

27. O spiră circulară de cupru cu raza de 10 cm este străbătută de un

curent de 15 A. În centrul ei se găsește o bobină cu raza de 1,0 cm, formată din 50 spire prin care trece un

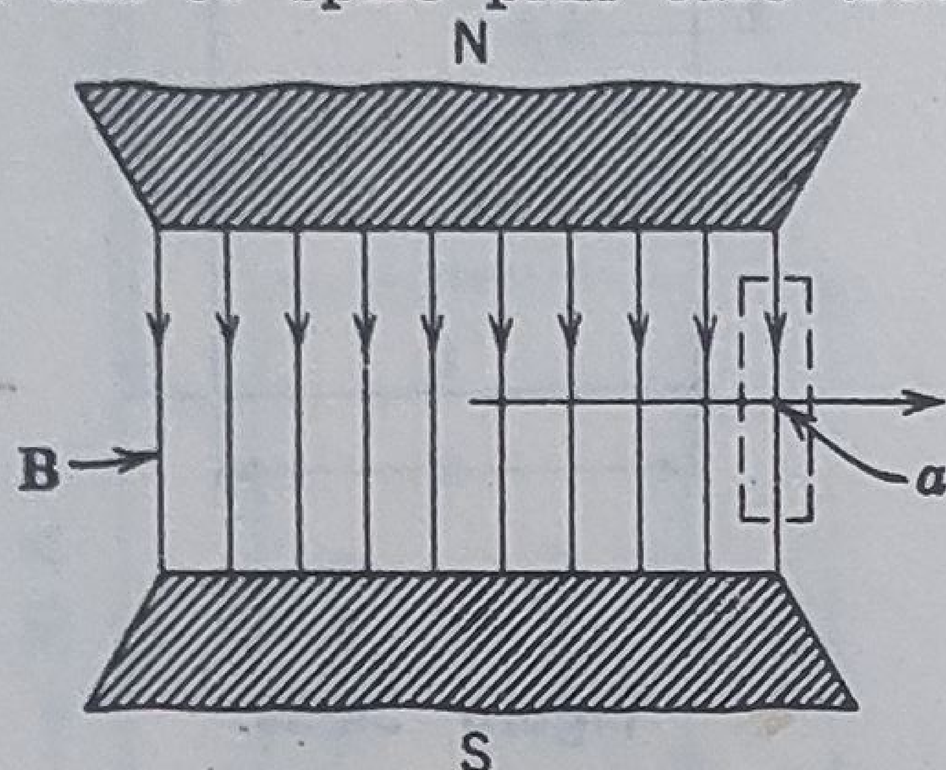


Figura 34-31.

curent de 1,0 A. (a) Care este inducția magnetică $\vec{B}$ pe care spira mare o produce în centrul său? (b) Care este cuplul ce acționează asupra bobinei mici? Presupuneți că planele celor două fac un unghi de 90° și că inducția $\vec{B}$ produsă de spira mare este practic constantă în tot volumul ocupat de bobina mică.

28. Arătați că este imposibil ca un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ să scadă brusc la zero cînd te deplasezi normal pe el, după cum este indicat prin săgeata orizontală din figura 34-31 (vezi punctul a). Într-un magnet real apare întotdeauna o dispersie a liniilor de inducție, care înseamnă că $\vec{B}$ tinde către zero treptat. (Indicație: aplicați legea lui Ampère conturului dreptunghiular indicat prin linia punctată).

Capitolul 35

Legea lui Faraday

35-1 Experiențele lui Faraday

În cazul unor legi fizice este greu de găsit experiențe care să conducă direct și convingător la formularea lor. Teorema lui Gauss, de exemplu, s-a conturat încet ca factorul comun cu ajutorul căruia toate experiențele din electrostatică au putut fi interpretate și corelate. În capitolul 28 am considerat indicat întîi să formulăm teorema lui Gauss și apoi să descriem experiențele pe care se bazează.

Legea lui Faraday, a inducției electromagnetice, care este una din ecuațiile fundamentale din electromagnetism (vezi tabela 38-3), se deosebește prin aceea că există o serie de experiențe simple din care legea poate fi — și a fost — dedusă direct. Astfel de experiențe au fost efectuate de Michael Faraday în Anglia în 1831 și de Joseph Henry în Statele Unite aproximativ în același timp.

În figura 35-1 este arătată o bobină ale cărei capete sînt legate la un galvanometru. În mod normal nu ne așteptăm ca acest instrument să fie deviat deoarece s-ar părea că în circuit nu există nici o tensiune electromotoare; dar dacă apropiem de bobină un magnet în formă de

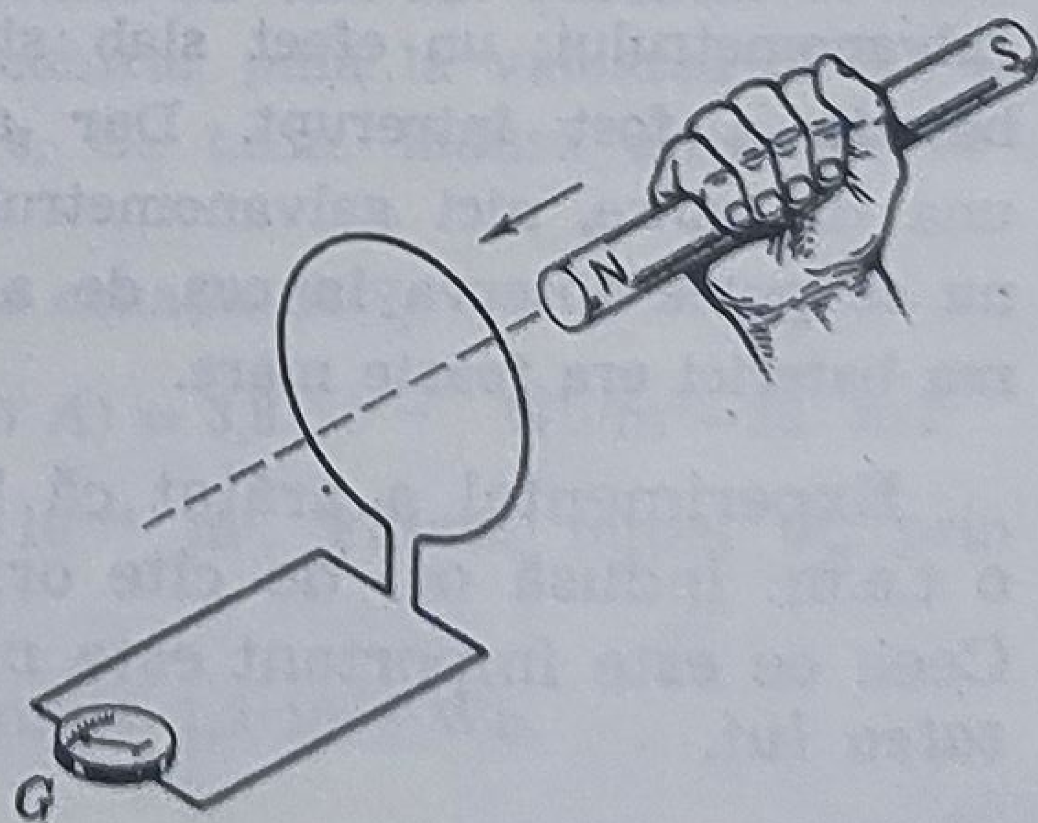


Figura 35-1. Acul galvanometrului G suferă o deviație atunci cînd magnetul este deplasat în raport cu spira.

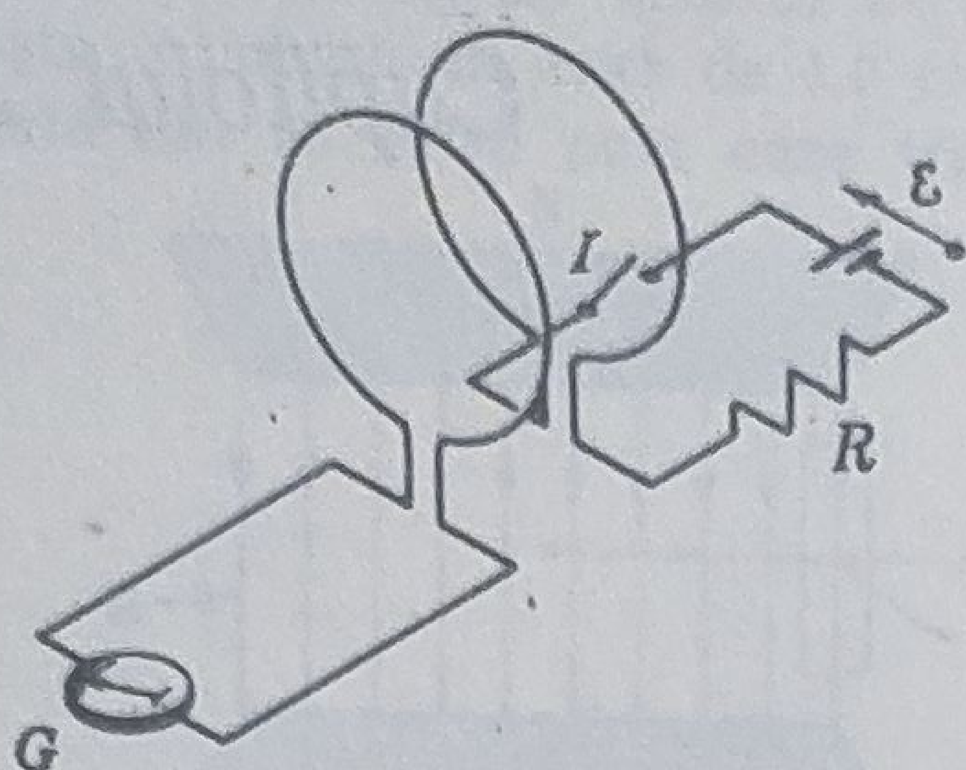


Figura 35-2. Acul galvanometrului *G* suferă o deviație momentană atunci cînd întrerupătorul *I* este închis sau deschis.

bară, cu polul său nord îndreptat spre bobină, se petrece un lucru remarcabil. *În timp ce magnetul se mișcă*, galvanometrul deviază, indicînd că prin bobină trece un curent. Dacă magnetul se află în repaus față de bobină, galvanometrul nu deviază. Dacă îndepărtăm magnetul de bobină, galvanometrul deviază din nou, dar în sens opus, fapt ce arată că, acum curentul prin bobină are sens opus. Dacă folosim polul sud al magnetului în locul polului nord, experiența decurge așa cum am descris-o dar sensul devierilor galvanometrului este inversat. Experiențele duc la concluzia că *ceea ce contează este deplasarea relativă a magnetului și a bobinei.* Nu contează dacă magnetul se deplasează spre bobină sau bobina spre magnet.

Curentul ce apare în această experiență poartă numele de *curent de inducție* și spunem că este determinat de o *tensiune electromotoare indusă*. Faraday a reușit ca din astfel de experiențe să determine legea ce dă mărimea și direcția lor. Aceste t.e.m. sînt foarte importante în practică. Mai mult ca sigur că lumina din camera în care citiți această carte este produsă de t.e.m. indusă de către un generator electric industrial.

Un alt dispozitiv experimental folosit este arătat în figura 35-2. Bobinele sînt așezate una lîngă alta și sînt în repaus una față de cealaltă. Cînd se închide întrerupătorul *I*, în bobina din dreapta se stabilește un curent constant și galvanometrul deviază pentru o clipă; cînd întrerupătorul se deschide, întrerupîndu-se astfel curentul, galvanometrul din nou este deviat pentru o clipă, dar în sens opus. În această experiență nu se deplasează nici un obiect macroscopic. Iată cuvintele lui Faraday:

> Cînd s-a realizat contactul s-a observat un efect brusc și foarte slab asupra galvanometrului; un efect slab similar s-a observat și atunci cînd contactul cu bateria a fost întrerupt. Dar atunci cînd curentul continua să treacă prin una din spire, nici galvanometrul nu devia și nici un alt efect de tip inductiv nu se putea observa în cea de a doua bobină cu toate că am verificat că puterea bateriei era foarte mare.

Experimental a arătat că în bobina din stînga din figura 35-2 apare o t.e.m. indusă ori de cîte ori curentul din bobina din dreapta variază. Ceea ce este important este *viteza de variație a curentului și nu intensitatea lui.*

35-2 Legea lui Faraday pentru inducție

Faraday a intuit că factorul comun important în experiențele precedente este variația fluxului Φ_B de inducție magnetică prin bobina din stînga. Acest flux poate fi produs de un magnet în formă de bară sau de o bobină. Legea lui Faraday pentru inducția magnetică spune că t.e.m. $\mathscr{E}$ indusă într-un circuit este egală cu viteza de variație a fluxului prin acel circuit luată cu semn schimbat. Dacă viteza de variație a fluxului se ia în Weber/secundă, t.e.m. $\mathscr{E}$ va fi în volți. Sub formă de ecuație

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (35\text{-}1)$$

Această ecuația se numește *Legea lui Faraday pentru inducție.* Semnul minus indică *sensul* t.e.m. induse, problemă ce va fi discutată în paragraful următor 35-3.

Aplicînd ecuația 35-1 unei bobine formată din N spire, rezultă că în fiecare spiră apare o t.e.m. iar aceste t.e.m. trebuiesc însumate. Dacă bobina este înfășurată atît de strîns încît putem considera că fiecare spiră ocupă aceeași regiune din spațiu, atunci fluxul va fi același prin fiecare spiră. Fluxul este același prin fiecare spiră și în cazul solenoidului ideal sau al bobinei toroidale ideale (vezi paragraful 34-5). T.e.m. indusă în toate aceste tipuri de bobine este dată de

$$\mathscr{E}=-N\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \qquad (35\text{-}2)$$

unde $N\Phi_B$ este o măsură a multiplicării fluxului în acest dispozitiv.

Figurile 35-1 și 35-2 sugerează că există cel puțin două căi prin care putem varia fluxul printr-un circuit și astfel putem induce o t.e.m în acel circuit. Dacă privim fenomenul numai din punct de vedere al bobinei legate de galvanometru nu putem spune care din cele două metode au fost folosite; putem spune doar că a existat o variație de flux prin suprafața bobinei. Fluxul printr-un circuit poate fi variat și prin modificarea formei lui, adică comprimîndu-l sau întinzîndu-l.

Exemplul 1. Un solenoid lung cu diametrul de 3,0 cm este format din 200 spire/cm și este străbătut de un curent de 1,5 A. În centrul lui plasăm o bobină cu diametrul de 2,0 cm cu 100 spire bobinate strîns. Bobina este astfel orientată încît $\vec{B}$ în centrul solenoidului să fie paralel cu axa sa. Curentul în solenoid este redus la zero iar apoi crescut în sens contrar pînă la valoarea de 1,5 A cu o viteză constantă într-un interval de 0,050 s. Ce t.e.m. indusă apare în bobină, determinată de această variație de curent?

Inducția B în centrul solenoidului este dată de ecuația 34-7

$$B=\mu_0 ni=(4\pi\cdot10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})\ (200\cdot10^2\ \text{spire/m})\ (1{,}5\ \text{A})=3{,}8\cdot10^{-2}\ \text{Wb/m}^2=38\ \text{mT}$$

Suprafața bobinei (nu a solenoidului) este $3{,}1\cdot10^{-4}\ \text{m}^2$. Fluxul inițial Φ_B prin fiecare spiră a bobinei este dat de

$$\Phi_B=BA=(3{,}8\cdot10^{-2}\ \text{Wb/m}^2)\ (3{,}1\cdot10^{-4}\ \text{m}^2)=1{,}2\cdot10^{-5}\ \text{Wb}.$$

Fluxul variază de la valoarea inițială de $1{,}2\cdot10^{-5}$ Wb la valoarea finală de $-1{,}2\cdot10^{-5}$ Wb. *Variația* de flux $\Delta\Phi_B$ pentru fiecare spiră a bobinei în perioada de 0,050 s este deci de două ori valoarea inițială. T.e.m. indusă este dată de

$$\mathscr{E}=-\frac{N\Delta\Phi_B}{\Delta t}=-\frac{(100)(2\cdot1{,}2\cdot10^{-5}\text{Wb})}{0{,}050\text{s}}=-4{,}8\cdot10^{-2}\text{V}=-48\text{mV}.$$

Semnul minus se referă la *sensul* t.e.m. după cum vom explica în cele ce urmează.

35-3 Legea lui Lenz

Pînă acum nu am specificat sensul t.e.m. Deși sensul t.e.m. poate fi găsit printr-o analiză matematică a legii lui Faraday, preferăm să-l deducem din legea conservării energiei, care în acest context ia forma de legea lui Lenz: *sensul curentului indus este astfel încît el se va opune variației care l-a produs**. Semnul minus din Legea lui Faraday sugerează această opunere. În mecanică, legea conservării energiei ne permite adesea să tragem concluzii asupra sistemelor mecanice fără să le analizăm în amănunt. Vom face același lucru și aici.

Legea lui Lenz se referă la *curenți* induși, ceea ce înseamnă că ea se aplică numai la circuite închise. Dacă circuitul este deschis, putem raționa în funcție de ce s-ar întîmpla dacă el ar fi închis, găsind astfel sensul t.e.m. induse.

Să considerăm prima experiență a lui Faraday, descrisă în paragraful 35-1. În figura 35-3 este arătat polul nord al unui magnet și o secțiune transversală într-o spiră de curent din apropierea lui. Cînd apropiem magnetul de spiră, în spiră apare un curent indus. Care este sensul lui?

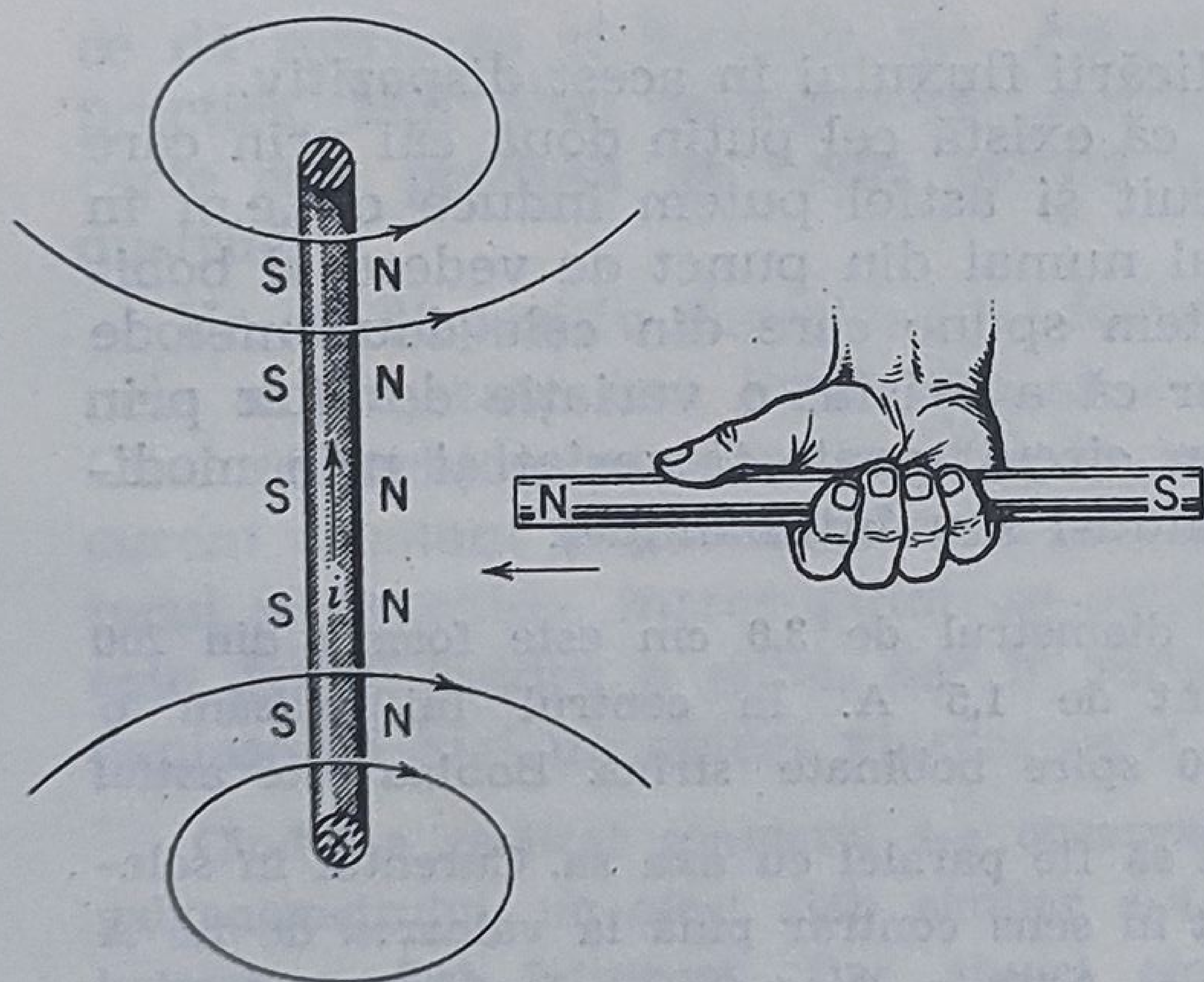


Figura 35-3. Atunci cînd magnetul este deplasat spre spiră, curentul indus are sensul indicat, producînd un cîmp magnetic ce se opune deplasării magnetului.

O spiră de curent produce la distanță mare de ea un cîmp magnetic analog celui produs de un dipol magnetic: una din fețele spirei fiind polul nord iar fața opusă fiind polul sud. Polul nord, ca și în cazul magneților în formă de bară, este acea față din care ies liniile lui $\vec{B}$. Dacă, așa cum spune legea lui Lenz, spira din figura 35-3 trebuie să se opună apropierii magnetului de ea, atunci fața

* Heinrich Friedrich Lenz (1804—1865) a dedus această lege în 1834. Și Faraday a descoperit cum se determină sensul t.e.m. induse dar el nu a exprimat rezultatele sale atît de succint ca Lenz.

dinspre magnet a spirei trebuie să devină pol nord. Cei doi poli nord — unul al spirei de curent și altul al magnetului — se vor respinge reciproc. Pentru ca cîmpul magnetic produs de spiră să iasă prin fața din dreapta a spirei, regula mîinii drepte ne spune că sensul curentului în spiră trebuie să fie cel indicat în figură. Sensul curentului este în sens invers acelor de ceasornic, dacă privim în lungul magnetului spre spiră.

Cînd apropiem magnetul de spiră (sau spira de magnet), apare un curent indus. Conform legii lui Lenz, această apropiere este „variația" ce produce curentul indus și, în acord cu această lege, curentul indus se va opune „apropierii". Dacă depărtăm magnetul de spiră, curentul indus se va opune „depărtării" prin apariția unui pol *sud* pe fața din dreapta a spirei din figura 35-3. Pentru ca fața din dreapta să devină pol sud, curentul trebuie să aibe sens invers celui din figura 35-3. Astfel, va exista o tendință opusă mișcării fie că apropiem, fie că depărtăm magnetul.

Asupra agentului exterior ce produce deplasarea magnetului, apropiindu-l sau depărtîndu-l de spiră, va acționa întotdeauna o forță ce se va opune acestei deplasări. Astfel, agentul exterior va trebui să execute un lucru mecanic. Din legea conservării energiei rezultă că acest lucru mecanic executat asupra sistemului trebuie să fie exact egal cu căldura joule produsă în spiră deoarece acestea două sînt singurele transformări de energie ce se produc în sistem. Dacă deplasăm magnetul mai rapid, lucrul mecanic va trebui executat cu o viteză mai mare și viteza de încălzire joule va crește corespunzător. Dacă întrerupem spira și apoi repetăm experiența, nu va apare nici un curent indus, nici încălzire joule, nici nu va acționa o forță asupra magnetului și nici nu va fi necesar un lucru mecanic pentru a-l deplasa. Va exista o t.e.m. în spiră dar ca și în cazul unei baterii conectate la un circuit deschis, nu va circula un curent.

Dacă curentul din figura 35-3 ar avea sens *opus* celui indicat, fața dinspre magnet a spirei va fi pol sud, deci va atrage magnetul sub formă de bară spre spiră. Pentru ca el să înceapă să se deplaseze va fi nevoie doar de o ușoară atingere, iar apoi el se va mișca singur. Magnetul va fi accelerat spre spiră, energia lui cinetică crescînd cu timpul. În același timp în spiră se produce căldură joule cu o viteză ce crește cu timpul. Acesta ar fi un perpetuum mobile. Este inutil să spunem că nu se poate întîmpla în realitate.

Să aplicăm legea lui Lenz figurii 35-3 într-un alt mod. În figura 35-4 sînt arătate liniile lui $\vec{B}$ pentru un magnet în formă de bară*. În acest punct de vedere „variația" înseamnă creșterea lui Φ_B prin spiră, creștere produsă de apropierea magnetului. Curentul indus se opune acestei variații prin producerea unui cîmp ce tinde să se opună creșterii fluxului la apropierea magnetului. Astfel cîmpul produs de curentul indus trebuie să aibe sensul de la stînga spre dreapta prin planul spirei, în concordanță cu concluzia noastră anterioară.

---

* În această problemă intervin două cîmpuri de inducție magnetică $\vec{B}$: unul legat de spira de curent, iar celălalt de magnetul sub formă de bară. Studentul va trebui să verifice întotdeauna despre care din ele este vorba.

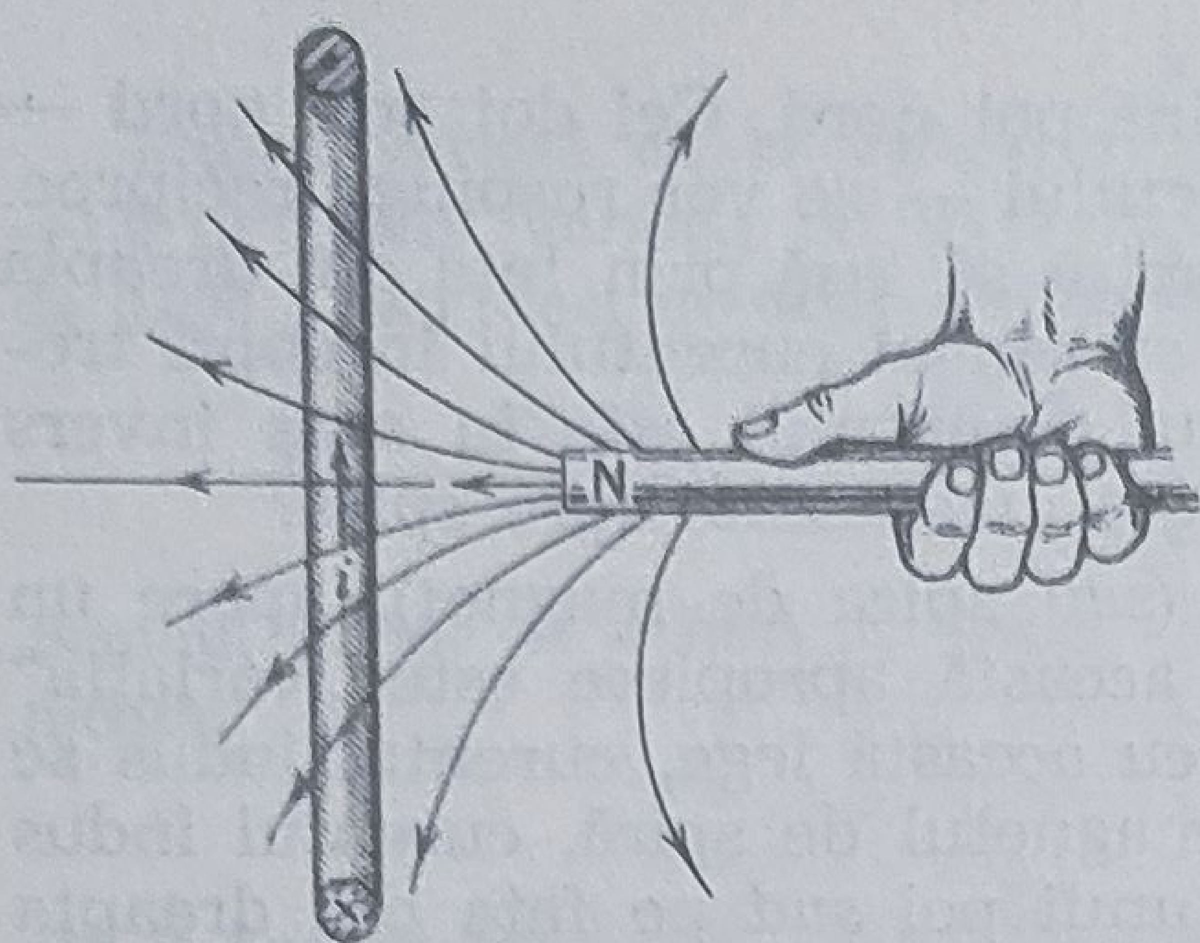


Figura 35-4. Apropiind magnetul de spiră, mărim pe Φ_B prin spiră.

Ceea ce este important aici nu este faptul că, cîmpul indus se opune *cîmpului* magnetului ci că el se opune *variației*, care în acest caz înseamnă *creșterea* lui Φ_B prin spiră. Dacă îndepărtăm magnetul, reducem pe Φ_B prin spiră. Cîmpul indus se va opune acum acestei descreșteri a lui Φ_B (adică, variației), *intensificînd* cîmpul magnetului. În ambele cazuri cîmpul indus se opune variației ce i-a dat naștere.

35-4 Inducția. Un studiu cantitativ

Deși exemplul din figura 35-4 este ușor de înțeles calitativ, el nu poate fi folosit la obținerea unor concluzii cantitative. Să considerăm deci figura 35-5 în care este dată o spiră dreptunghiulară de lățime l, situată cu una din extremități într-un cîmp uniform $\vec{B}$ normal pe planul spirei. Acest cîmp de inducție $\vec{B}$ poate fi produs în spațiul dintre polii unui electromagnet mare de felul celui din figura 33-2. Prin linii punctate sînt indicate limitele cîmpului. Experiența constă din a deplasa spira spre dreapta cu o viteză constantă v.

Observați că situația descrisă în figura 35-5 nu diferă în esență de cea din figura 35-4. În ambele cazuri o spiră de curent și un magnet se

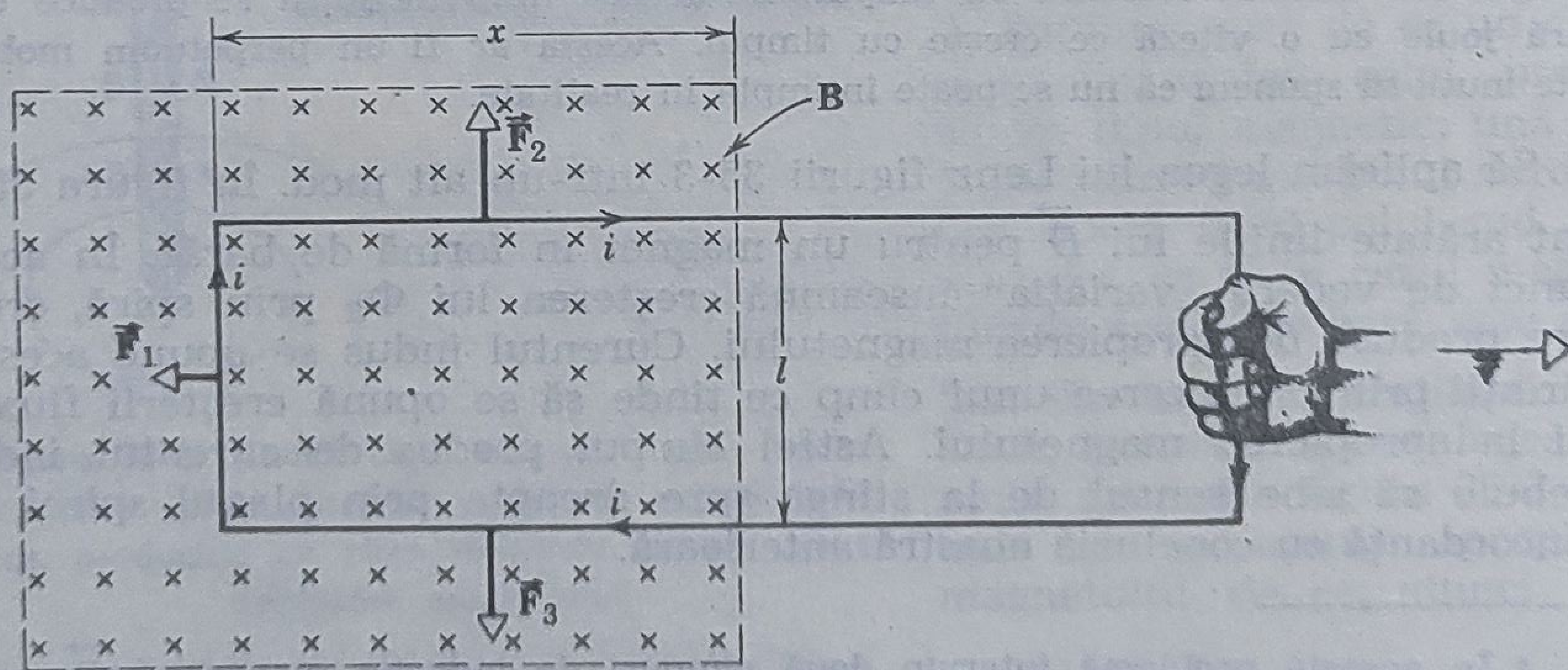


Figura 35-5. O spiră dreptunghiulară este scoasă cu viteza v din cîmpul magnetic.

află în mişcare relativă; în ambele cazuri fluxul cîmpului produs de magnet prin spiră este variat în timp.

Fluxul Φ_B prin spira din figura 35-5 este

$$\Phi_B = Blx$$

unde lx este aria porţiunii din spiră în care B nu este zero. T.e.m. se găseşte din legea lui Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} = Blv \qquad (35\text{-}3)$$

unde am pus — dx/dt egal cu viteza v cu care spira este scoasă din cîmpul magnetic. Observaţi că singura dimensiune a spirei care intră în ecuaţia 35-3 este lungimea l a laturii din stînga spirei. După cum vom vedea mai tîrziu, putem considera că t.e.m. indusă, din figura 35-5, poate fi considerată ca localizată aici. O astfel de t.e.m. produsă prin deplasarea unui conductor printr-un cîmp magnetic, se numeşte uneori *t.e.m. de mişcare.*

T.e.m. Blv produce prin spiră un curent dat de

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R} \qquad (35\text{-}4)$$

unde R este rezistenţa spirei. Din legea lui Lenz rezultă că acest curent (deci şi $\mathcal{E}$) trebuie să fie în sensul acelor de ceasornic în figura 35-5; el se opune „variaţiei" (scăderii lui Φ_B) prin producerea unui cîmp paralel cu cîmpul exterior prin spiră.

Curentul ce trece prin spiră face ca asupra celor trei conductori să acţioneze forţele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$, conform ecuaţiei 33-6 a

$$\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B} \qquad (35\text{-}5)$$

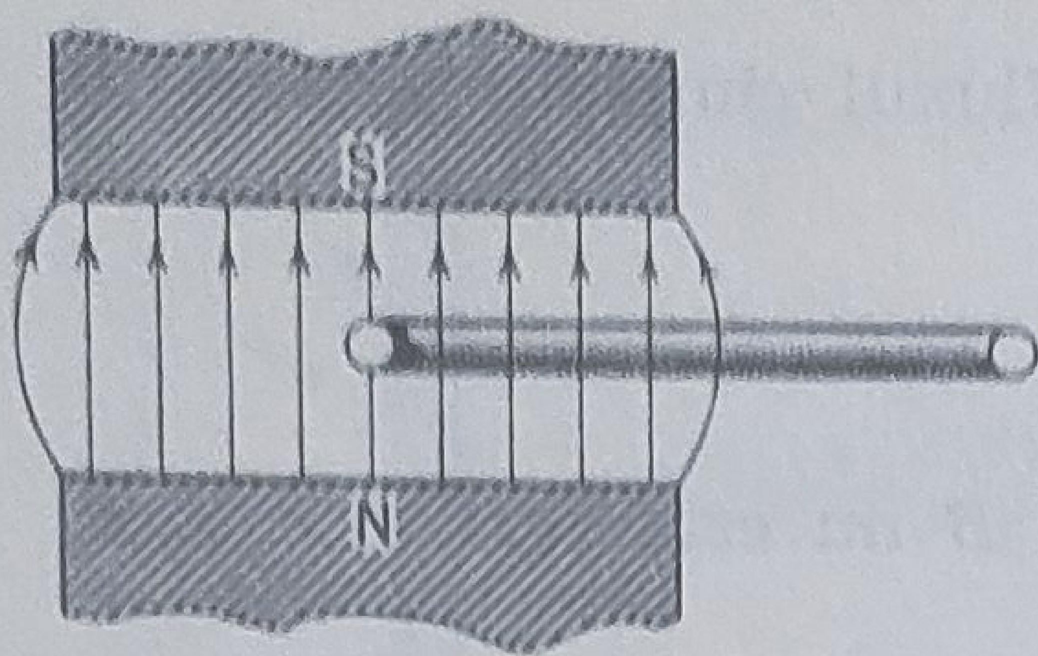
Deoarece $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$ sînt egale şi de sens contrar, ele se compensează reciproc; mărimea lui $\vec{F}_1$ care este forţa ce se opune acţiunii noastre de a deplasa spira este dată de ecuaţiile 35-5 şi 35-4

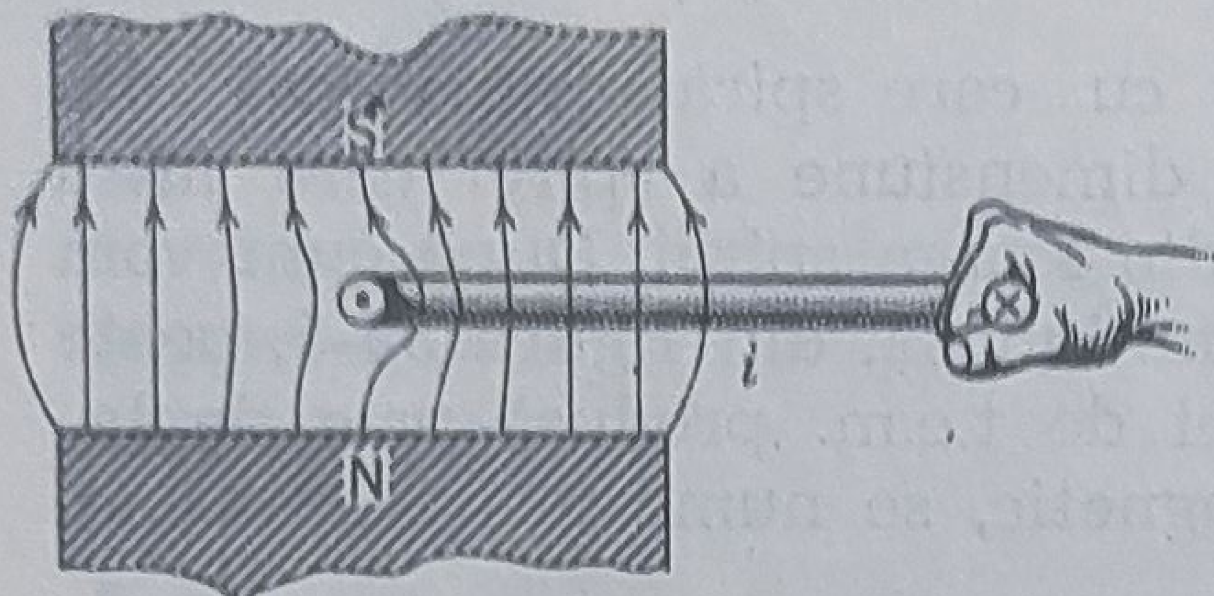
$$F_1 = ilB \sin 90° = \frac{B^2l^2v}{R}$$

Agentul exterior ce deplasează spira trebuie să execute un lucru mecanic constant în unitatea de timp

$$P = F_1 v = \frac{B^2l^2v^2}{R} \qquad (35\text{-}6)$$

Din legea conservării energiei rezultă că în rezistor va trebuie să apară cu aceeaşi viteză o căldură joule. Ne-am folosit în calculele noastre de legea conservării energiei atunci cînd am scris expresia curentului (ecuaţia 35-4). Vă reamintiţi că relaţia $i = \mathcal{E}/R$ pentru circuitele formate dintr-un singur ochi este o consecinţă directă a acestei legi. Astfel, ne aşteptăm ca scriind expresia căldurii joule produsă în spiră în unitatea





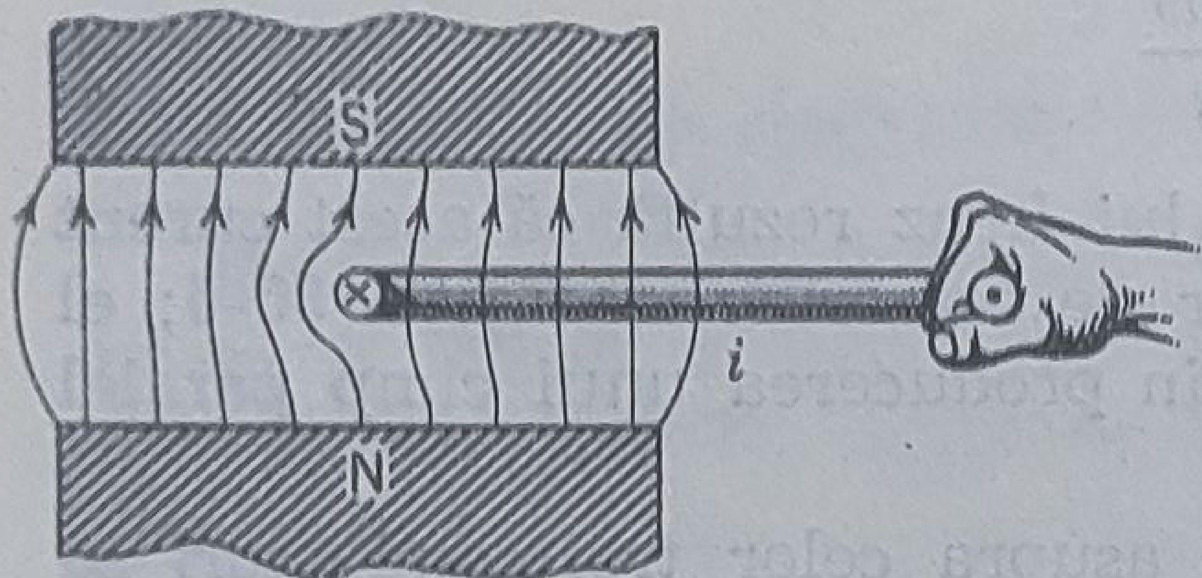


Figura 35-6. Privire laterală a unei spire dreptunghiulare situată într-un cîmp magnetic, în cazul în care spira este (a) în repaus, (b) scoasă din cîmp și (c) introdusă în cîmp.

de timp să obținem un rezultat identic cu ecuația 35-6. Reamintindu-ne ecuația 35-4, scriem

$$P_J = i^2R = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2l^2v^2}{R}$$

care este într-adevăr rezultatul așteptat. Acest exemplu este o ilustrare cantitativă a transformării energiei mecanice (lucrul mecanic efectuat de agentul exterior) în energie electrică (t.e.m. indusă) și, în final, în energie termică (încălzire joule).

În figura 35-6 este dată o secțiune longitudinală a spirei în cîmp. În figura 35-6 a, spira este în repaus; în figura 35-6 b o deplasăm spre dreapta; iar în figura 35-6 c o deplasăm spre stînga. Liniile de inducție din aceste figuri reprezintă *cîmpul rezultant* obținut prin adunarea vectorială a cîmpului $\vec{B}_0$ produs de magnet și a cîmpului $\vec{B}_i$ produs de curentul indus în spiră, dacă există. Aceste linii sugerează în mod convingător că agentul ce deplasează spira trebuie întotdeauna să învingă o forță de opunere.

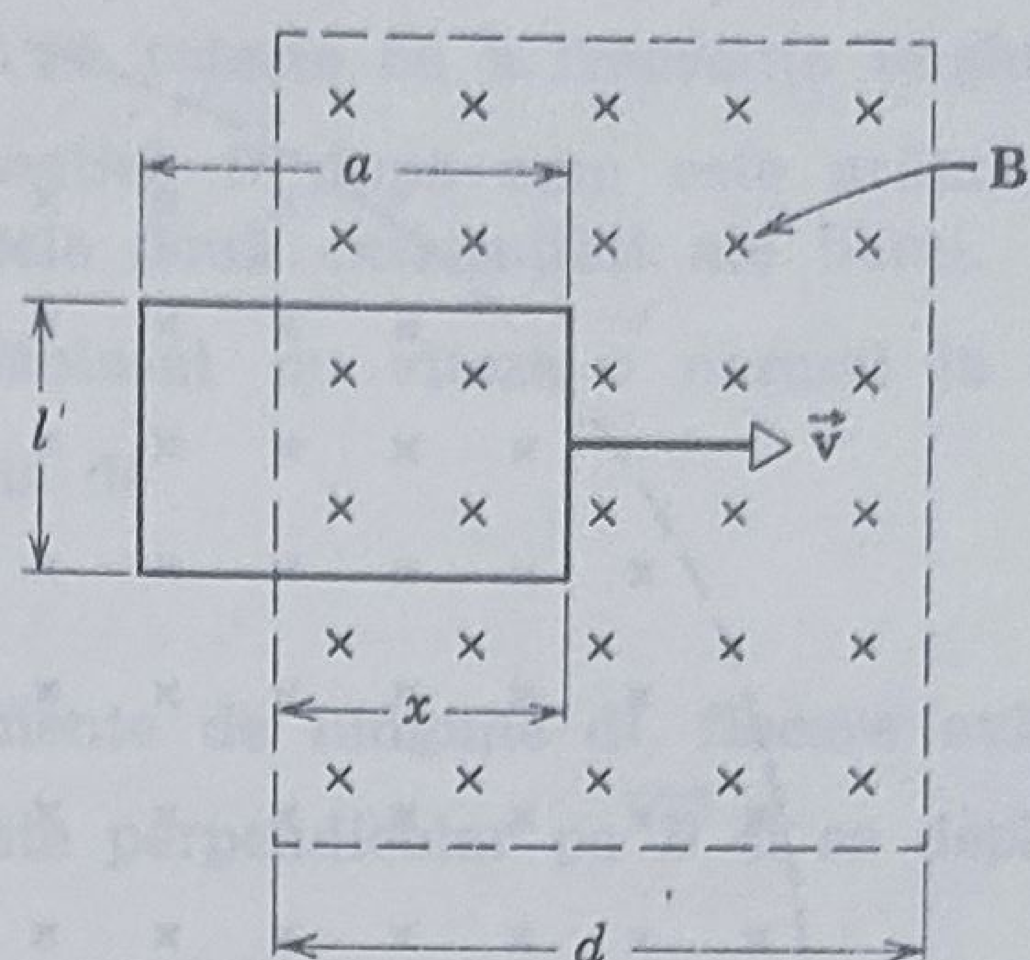
Exemplul 2. O spiră dreptunghiulară de rezistență R, lățime l și lungime a este deplasată cu viteză constantă v printr-o regiune din spațiu de grosime d în care există un cîmp uniform de inducție $\vec{B}$ produs de un magnet (vezi figura 35-7).

(a) Reprezentați fluxul Φ_B prin spiră în funcție de poziția spirei x. Presupuneți că $l=4$ cm, $a=10$ cm, $d=15$ cm, $R=16\ \Omega$, $B=2{,}0$ T și $v=1{,}0$ m/s.

Cînd spira nu este în cîmp fluxul Φ_B este zero; cînd ea se găsește complet în cîmp, fluxul este Bla; cînd spira intră în cîmp este Blx iar cînd spira iese din cîmp fluxul este $Bl[a-(x-d)]$. Aceste concluzii, pe care studentul le va verifica, sînt arătate grafic în figura 35-8-a.

(b) Reprezentați t.e.m. indusă $\mathcal{E}$.

Figura 35-7. Exemplul 2. O spiră dreptunghiulară este deplasată cu viteza v într-un cîmp magnetic. Poziția spirei este dată de x, distanța dintre extremitatea stîngă a cîmpului $\vec{B}$ și latura din dreapta a spirei.



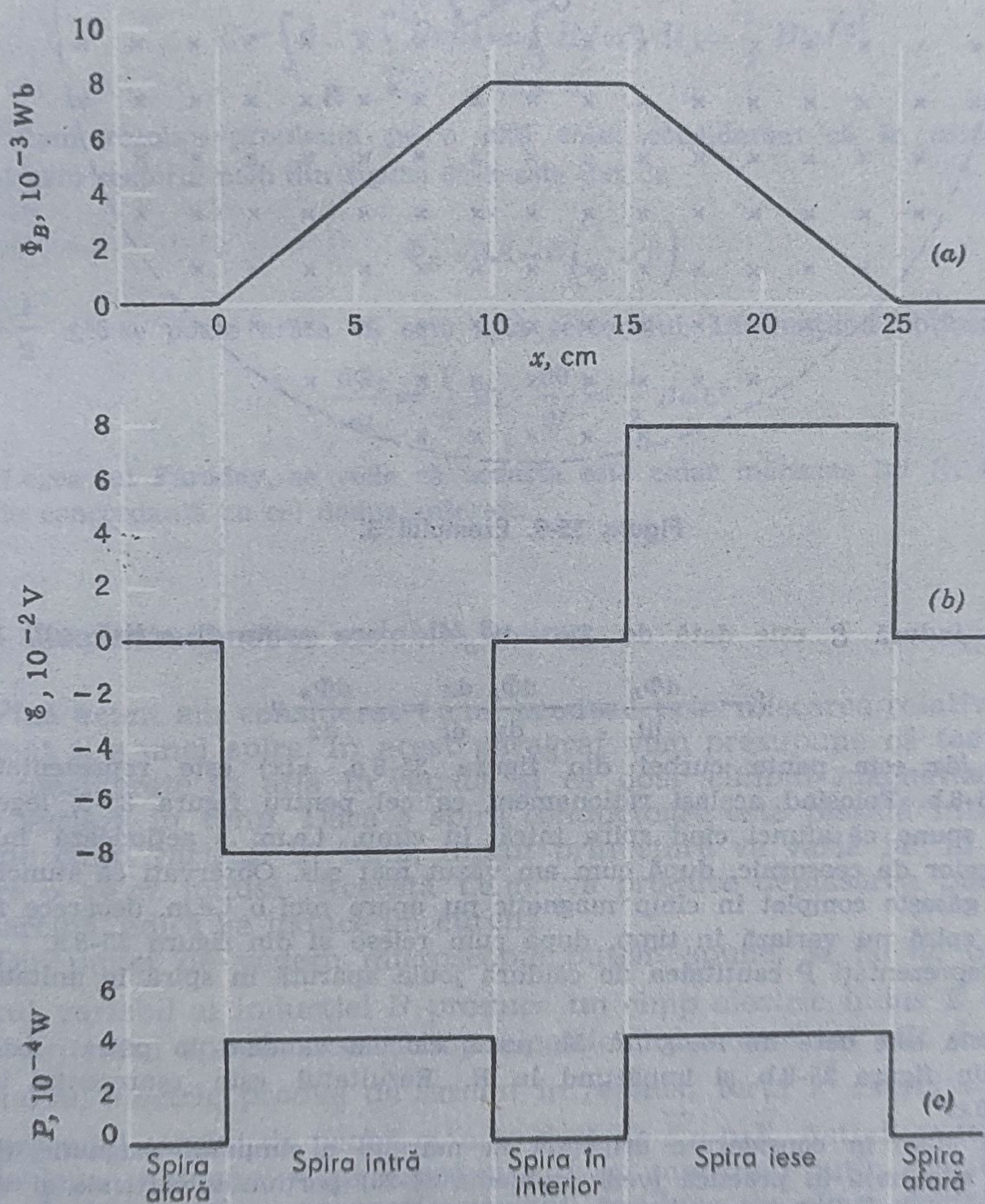


Figura 35-8. Exemplul 2.

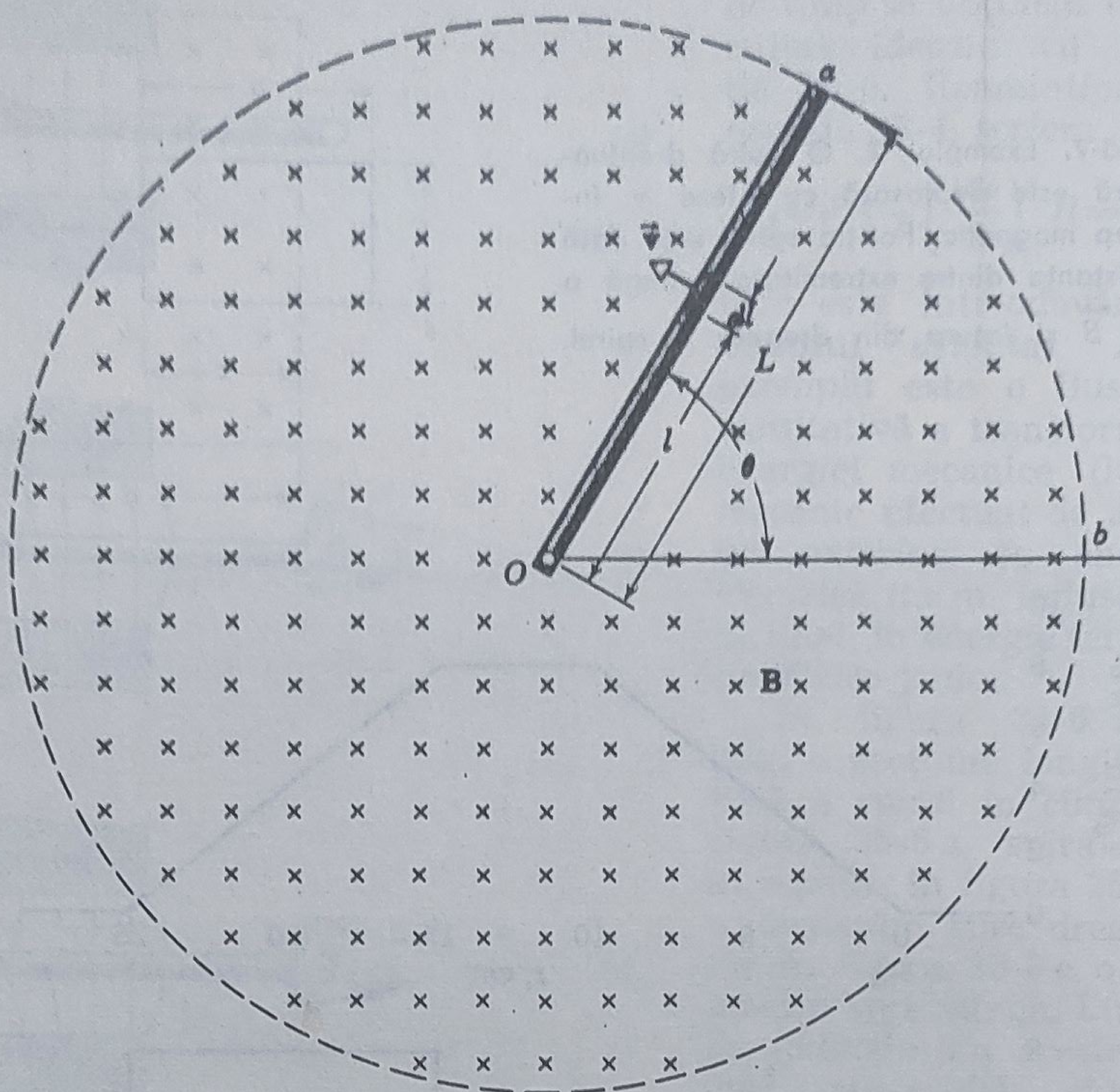


Figura 35-9. Exemplul 3.

T.e.m. indusă $\mathcal{E}$ este dată de $\mathcal{E}=-\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$, care poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}x}v$$

unde $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}x$ este panta curbei din figura 35-8 a. $\mathcal{E}(x)$ este reprezentată în figura 35-8 b. Folosind acelaşi raţionament ca cel pentru figura 35-5, legea lui Lenz ne spune că atunci cînd spira intră în cîmp, t.e.m. $\mathcal{E}$ acţionează în sens invers acelor de ceasornic, după cum am văzut mai sus. Observaţi că atunci cînd spira se găseşte complet în cîmp magnetic nu apare nici o t.e.m. deoarece fluxul Φ_B prin spiră nu variază în timp, după cum reiese şi din figura 35-8 a.

(c) Reprezentaţi P cantitatea de căldură joule apărută în spiră în unitatea de timp.

Aceasta este dată de $P=\mathcal{E}^2/R$. Se poate calcula ridicînd la pătrat ordonata curbei din figura 35-8 b şi împărţind la R. Rezultatul este reprezentat în figura 35-8 c.

Dacă luăm în considerare dispersia la margini a cîmpului magnetic, ce nu poate fi eliminată în practică (vezi problema 34-28) porţiunile verticale şi variaţiile reprezentate prin unghiuri drepte din figura 35-8 trebuiesc înlocuite prin curbe line. Ce modificări trebuiesc aduse curbelor din figura 35-8 dacă circuitul spirei este deschis?

Exemplul 3. O bară de cupru de lungime L se rotește cu a frecvență unghiulară ω într-un cîmp uniform de inducție magnetică $\vec{B}$ după cum este arătat în figura 35-9. Găsiți t.e.m. $\mathcal{E}$ dezvoltată între cele două extremități ale barei.

Dacă un conductor de lungime $d\vec{l}$ este deplasat cu viteza $\vec{v}$ normal la un cîmp $\vec{B}$, apare o t.e.m. $d\mathcal{E}$ (vezi ecuația 35-3) dată de

$$d\mathcal{E} = Bv\,dl$$

Bara din figura 35-9 poate fi împărțită în elemente de lungime dl, fiecare avînd viteza lineară v egală cu ωl. Fiecare element este perpendicular pe $\vec{B}$ și se deplasează normal la $\vec{B}$ astfel că

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^L Bv\,dl = \int_0^L B(\omega l)\,dl = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

Putem rezolva problema pe o altă cale: considerăm că în orice moment fluxul prin sectorul aOb din figura 35-9 este dat de

$$\Phi_B = BA = B\left(\frac{1}{2}L^2\theta\right)$$

unde $\frac{1}{2}L^2\theta$ se poate arăta că este aria sectorului. Diferențiind obținem

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2}BL^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

Din Legea lui Faraday, se vede că aceasta este chiar mărimea lui $\mathcal{E}$, rezultat ce este în concordanță cu cel dedus anterior.

35-5 Cîmpuri magnetice variabile în timp

Pînă acum am considerat t.e.m. produse prin mișcarea relativă a unui magnet și a unei spire. În acest paragraf vom presupune că toate obiectele considerate se află în repaus și că doar cîmpul magnetic este cel care variază în timp. Dacă o spiră conductoare este plasată într-un astfel de cîmp variabil în timp, fluxul prin spiră va varia iar în spiră va apare o t.e.m. indusă. Această t.e.m. va produce deplasarea purtătorilor de sarcină, adică va induce un curent.

Din punct de vedere microscopic putem spune, la fel de corect, că fluxul variabil al inducției $\vec{B}$ produce un cîmp electric indus $\vec{E}$ în punctele din jurul spirei. Acest cîmp electric indus este tot atît de real ca și cîmpul electric produs de sarcini în repaus; forța $\vec{F}$ exercitată de ele asupra unei sarcini de probă q_0 este dată de $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Astfel, putem reformula legea inducției a lui Faraday într-un mod mai puțin cantitativ dar mai plastic: *un cîmp magnetic variabil produce un cîmp electric.*

Pentru a ne fixa aceste idei să considerăm figura 35-10 în care este arătat un cîmp uniform de inducție $\vec{B}$ normal pe planul paginii. Presu-

punem că mărimea lui $\vec{B}$ crește cu o viteză constantă dB/dt egală în fiecare punct. Aceasta se poate realiza dacă intensitatea curentului din bobina electromagnetului ce produce cîmpul crește în timp în mod corespunzător.

Fluxul prin cercul de rază oarecare r, din figura 35-10, la un moment dat, este Φ_B. Deoarece fluxul variază în timp, în spiră va apare o t.e.m. indusă dată de $\mathcal{E}=-d\Phi_B/dt$. Cîmpul electric $\vec{E}$ indus în diferite puncte din spiră trebuie, din considerente de simetrie, să fie tangent la spiră. Astfel, liniile de forță electrice produse de cîmpul magnetic variabil sînt în acest caz cercuri concentrice.

Dacă considerăm o sarcină de probă q_0 ce se mișcă pe cercul din figura 35-10, lucrul mecanic W efectuat asupra ei la o rotație este, conform definiției t.e.m., $\mathcal{E} q_0$. Sau, pe de altă parte, el este egal cu $(q_0E)(2\pi r)$, unde q_0E este forța ce acționează asupra sarcinii iar $2\pi r$ este distanța de-a lungul căreia acționează forța. Egalînd cele două expresii pentru W și simplificînd pe q_0 obținem

$$\mathcal{E} = E\, 2\pi r \qquad (35.7)$$

Pentru un caz mai general ca cel din figura 35-10, trebuie să scriem

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (35\text{-}8)$$

Dacă evaluăm această integrală pentru condițiile din figura 35-10, obținem imediat ecuația 35-7. Combinînd ecuația 35-8 cu ecuația 35-1 ($\mathcal{E}=-d\Phi_B/dt$), legea de inducție a lui Faraday poate fi scrisă sub forma

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (35\text{-}9)$$

formă sub care este exprimată în tabela 38-3.

Exemplul 4. Presupunem că B din figura 35-10 crește cu viteza dB/dt. Fie R raza regiunii cilindrice în care considerăm că există cîmpul magnetic. Care este

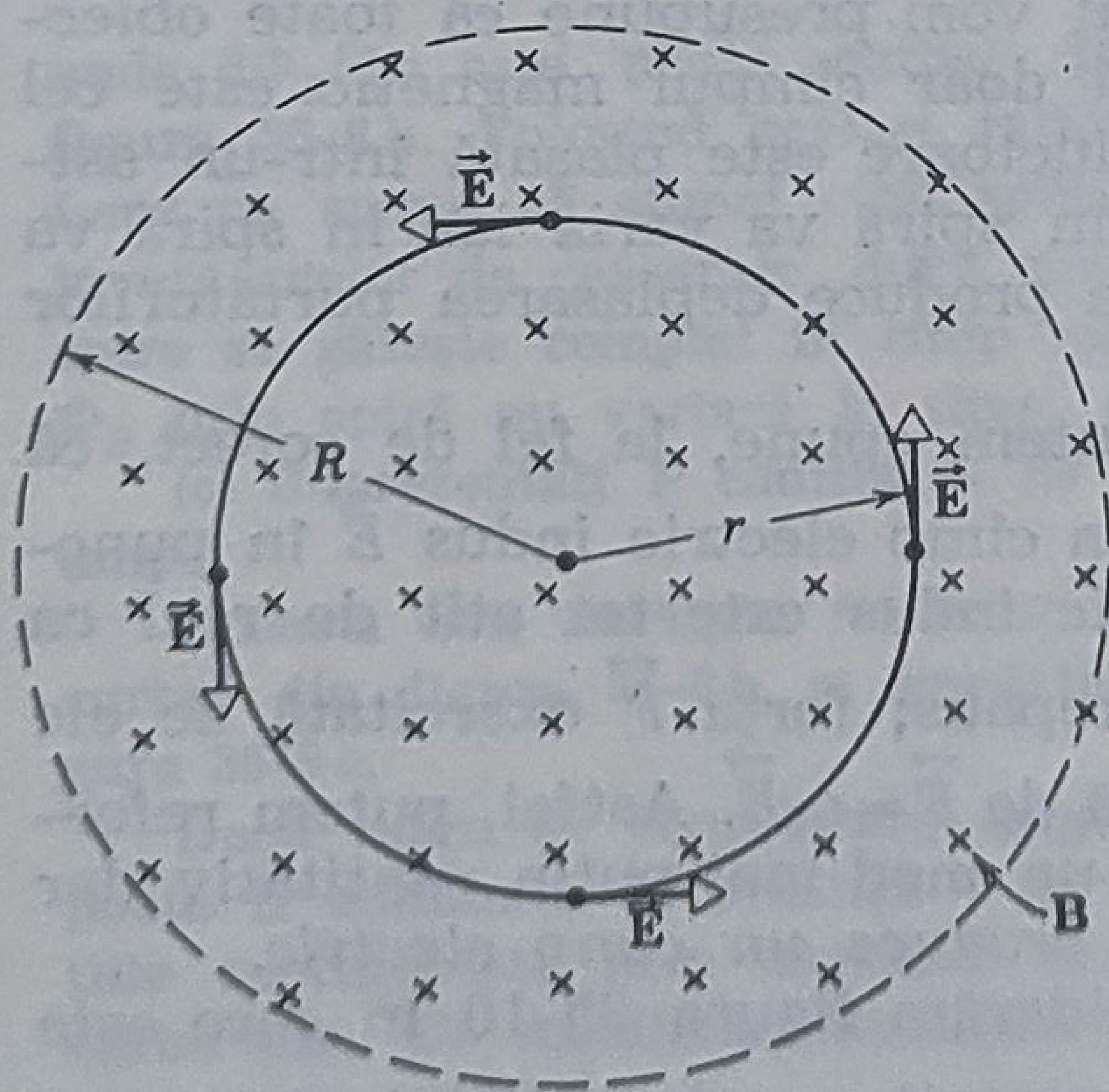


Figura 35-10. Cîmpul electric indus în patru puncte, produs de un cîmp magnetic crescător.

mărimea cîmpului electric $\vec{E}$ în punctele de pe un cerc de rază oarecare r? Presupunem că $dB/dt=0{,}10$ T/s și $R=10$ cm.

(a) Pentru $r<R$, fluxul Φ_B prin spiră este

$$\Phi_B=B(\pi r^2)$$

Introducînd în legea lui Faraday (ecuația 35-9).

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$$

obținem

$$(E)(2\pi r)=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-(\pi r^2)\frac{dB}{dt}$$

De unde E este

$$E=-\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}$$

Semnul minus arată că E, cîmpul electric indus, se *opune* variației cîmpului magnetic. Observați că $E(r)$ depinde de dB/dt și nu de B. Introducînd valori numerice, mărimea lui E este, pentru $r=5$ cm

$$E=\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}=\left(\frac{1}{2}\right)(5\times10^{-2}\text{m})\left(\frac{0{,}10\text{Wb}}{\text{m}^2\cdot\text{s}}\right)=2{,}5\times10^{-3}\text{V/m}$$

(b) Pentru $r>R$, fluxul prin spiră este

$$\Phi_B\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=B(\pi R^2)$$

Această ecuație este adevărată deoarece $\vec{B}\cdot d\vec{S}$ este zero pentru punctele spirei situate în afara limitei efective a cîmpului magnetic.

Din legea lui Faraday (ecuația 35-9)

$$(E)(2\pi r)=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-(\pi R^2)\frac{dB}{dt}$$

De unde E este

$$E=-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r}\frac{dB}{dt}$$

Pentru $r=R$ aceste două expresii pentru $E(r)$ duc la același rezultat după cum și este de așteptat. În figura 35-11 este reprezentată mărimea lui $E(r)$ pentru valorile numerice date.

Pentru a aplica legea lui Lenz figurii 35-10, să ne imaginăm o spiră circulară de curent plasată concentric în cîmp. Deoarece Φ_B prin spiră crește, curentul indus în spiră va tinde să se opună acestei „variații" producînd un cîmp magnetic propriu ce iese normal din planul spirei. Astfel, curentul indus i trebuie să fie în sens invers acelor de ceasornic; aceasta înseamnă că și liniile cîmpului electric indus $\vec{E}$, care produce curentul, trebuie să fie în sens invers acelor de ceasornic. Dacă cîmpul magnetic din figura 35-10 ar *scădea* în timp, curentul indus și liniile de

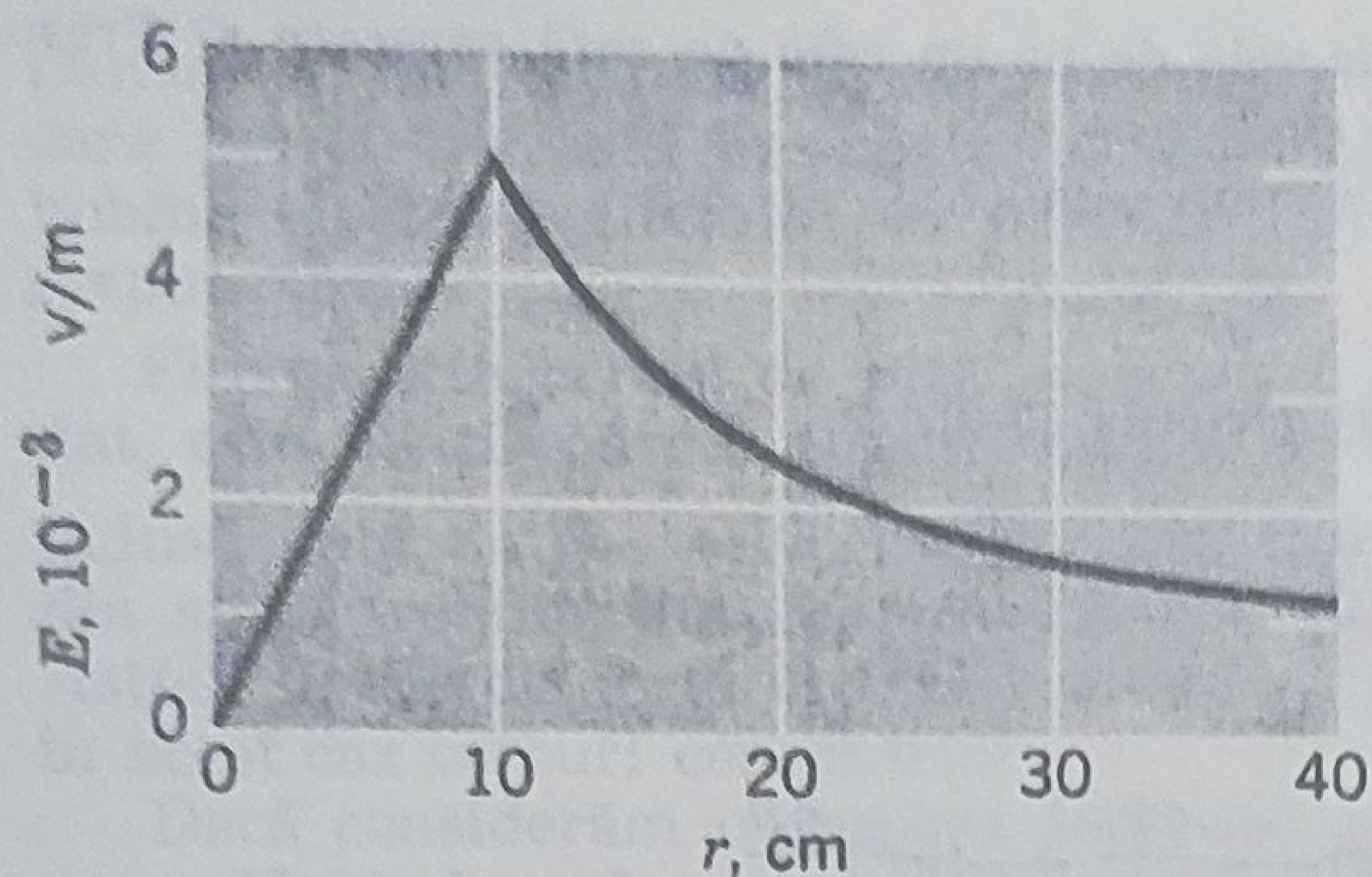


Figura 35-11. Exemplul 4. Dacă s-ar lua în considerare scăderea lentă la margine a cîmpului magnetic din figura 35-10, curba ar prezenta o rotunjire a maximului ascuţit pentru $r=R(=10\text{ cm})$.

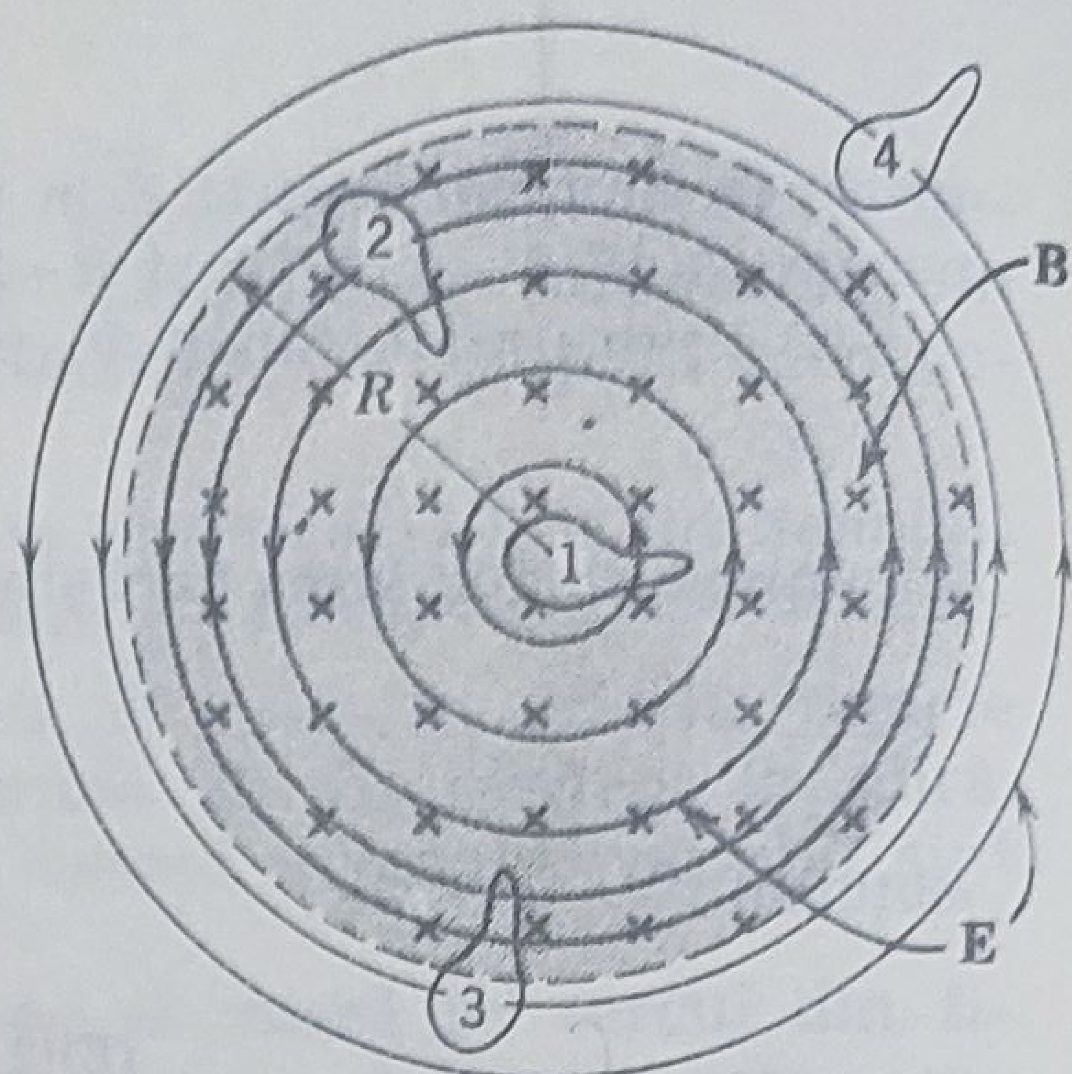


Figura 35-12. Sînt indicate liniile circulare ale lui $\vec{E}$ produs de un cîmp magnetic crescător. Cele patru curbe sînt contururi imaginare pe care poate fi calculată t.e.m.

forţă ale cîmpului electric indus $\vec{E}$ ar fi în sensul acelor de ceasornic, deci din nou opunîndu-se *variaţiei* lui Φ_B.

În figura 35-12 sînt indicate patru din multele contururi posibile cărora le putem aplica legea lui Faraday. T.e.m. indusă $\mathcal{E}$ este aceeaşi pentru contururile 1 şi 2 deoarece aceste contururi sînt situate complet în cîmpul magnetic variabil şi deci $d\Phi_B/dt$ are aceeaşi valoare. Observaţi că deşi t.e.m. $\mathcal{E}$ $(=\oint\vec{E}\cdot d\vec{l})$ este aceeaşi pentru aceste două contururi, distribuţia cîmpului electric $\vec{E}$ în jurul perimetrului fiecărei curbe este diferită, după cum este indicat de liniile de forţă ale cîmpului electric. T.e.m. pentru conturul 3 este mai mică deoarece Φ_B şi $d\Phi_B/dt$ pentru acest contur sînt mai mici, iar t.e.m. indusă în conturul 4 este zero.

Cîmpul electric indus produs în procesul de inducţie nu este asociat unor sarcini ci unei variaţii a fluxului magnetic. Deşi ambele feluri de cîmp electric exercită forţe asupra sarcinilor, între ele există o diferenţă. Cea mai simplă manifestare a acestei diferenţe este faptul că liniile lui $\vec{E}$ asociat unei variaţii de flux magnetic pot forma curbe închise (vezi figura 35.12) pe cînd liniile lui $\vec{E}$ asociat unor sarcini nu, ele putînd fi reprezentate întotdeauna ca pornind dintr-o sarcină pozitivă şi terminîndu-se pe o sarcină negativă.

Ecuaţia 29-5, care defineşte diferenţa de potenţial dintre două puncte a şi b, este

$$V_b-V_a=\frac{W_{ab}}{q_0}=-\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Am insistat asupra faptului că dacă dorim ca potenţialul să aibe sens fizic această integrală (şi deci şi W_{ab}) trebuie să aibe aceeaşi valoare indiferent de drumul ce uneşte a cu b. Am arătat că aceasta este adevărat pentru toate cazurile examinate în capitolele precedente.

Un caz special interesant este cînd a și b coincid. Conturul ce le unește este acum o curbă închisă; V_a trebuie să fie identic cu V_b și această ecuație se reduce la

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{35-10}$$

Totuși, cînd este prezentă o variație de flux magnetic, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ sigur *nu* este zero, ci conform legii lui Faraday (vezi ecuația 35-9), este $-d\Phi_B/dt$. Cîmpurile electrice asociate sarcinilor staționare sînt *conservative;* cele asociate cîmpurilor magnetice variabile sînt *neconservative;* vezi paragraful 8.2. Potențialul electric ce poate fi definit numai pentru forțele conservative, *nu are sens în cazul cîmpurilor electrice produse prin inducție.*

35-6 Betatronul

Betatronul este un dispozitiv ce se folosește pentru a produce electroni de viteze mari, în cîmpuri electrice induse produse de o variație de flux magnetic. El este o ilustrare excelentă a „realității" acestor cîmpuri induse. Electronii de mare energie pot fi folosiți pentru cercetări fundamentale în domeniul fizicii sau pentru a produce radiații X folosite în terapia cancerului și în industrie.

În figura 35-13 este arătat betatronul de 100-MeV al Companiei General Electric. La această energie viteza electronului este 0,999986 c,

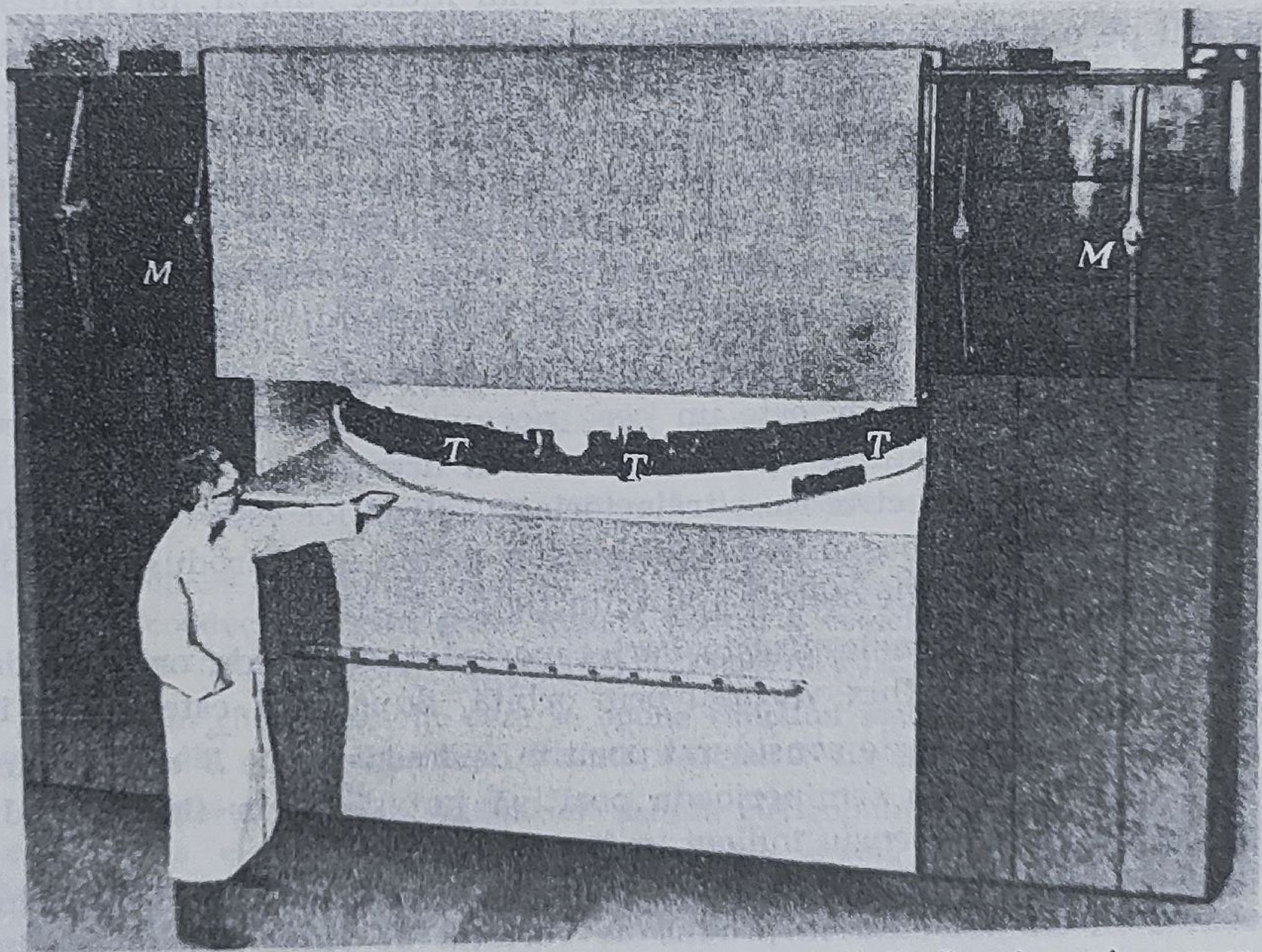


Figura 35-13. Un betatron de 100 MeV. *M* indică magnetul, iar *T* regiunea în care se află „torul". (Prin amabilitatea Companiei General Electric).

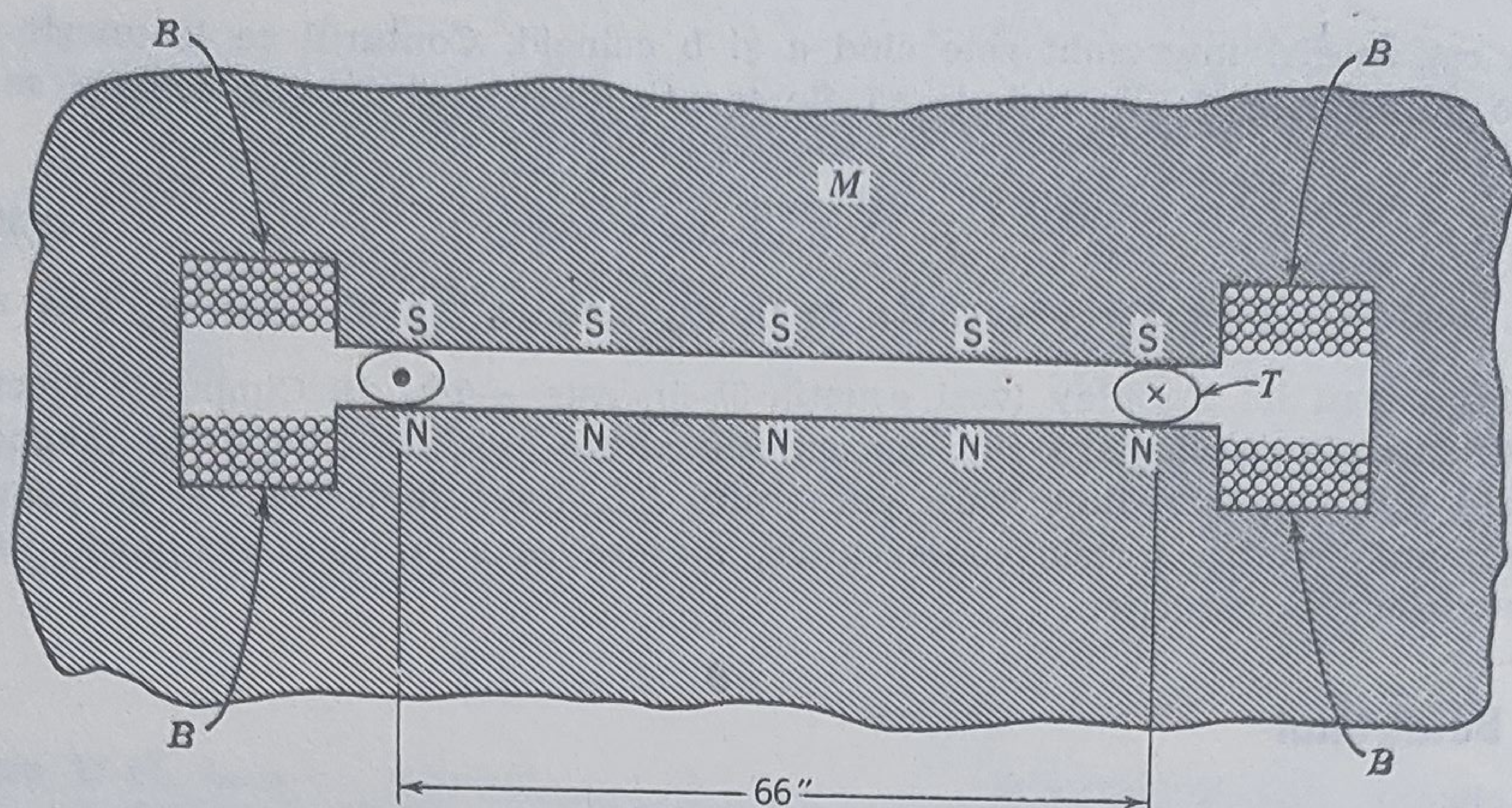


Figura 35-14. Secțiune transversală printr-un betatron; se văd: magnetul *M*, bobinele *B* și torul *T*. Electronii ies din pagină în partea din stînga și intră în dreapta.

unde *c* este viteza luminii. De aceea la analiza modului său de funcționare trebuie folosită mecanica relativistă. În figura 35-14 este dată o secțiune transversală verticală prin partea centrală a betatronului, parte indicată de omul din figura 35-13.

Într-un betatron, cîmpul magnetic are mai multe funcții: (a) ghidează electronii pe o traiectorie circulară; (b) accelerează electronii de-a lungul acestei traiectorii; (c) menține constantă raza orbitei pe care se mișcă electronii; (d) introduce electronii pe orbită și apoi după ce au atins energia dorită îi scoate de pe orbită; și (e) produce o forță ce se opune oricărei tendințe a electronilor de a părăsi orbita atît pe verticală cît și radial. Este remarcabil că este posibil ca toate acestea să se realizeze printr-o geometrie și un control adecvate a cîmpului magnetic.

Electronii se mișcă în interiorul unui tor vidat de sticlă, notat cu *T* în figura 35-14. Orbita lor este un cerc normal pe planul figurii. Electronii ies din plan în stînga (.) și intră în el în dreapta (x). În betatronul Companiei General Electric raza traiectoriei electronilor este de 83,82 cm. Fluxul magnetic ce trece prin planul acestei orbite este produs de bobinele *B* și de magnetul de oțel de 130 t din figura 35-13.

Curentul prin bobinele *B* este variat periodic, de 60 de ori/secundă, pentru a produce un flux variabil prin orbită, după cum este arătat în figura 35-15. Aici Φ_B este considerat pozitiv cînd sensul lui $\vec{B}$ este în sus, ca în figura 35-14. În semiperioada pozitivă notată *ac* în figura 35-15 electronii se rotesc în sensul indicat în figura 35-14.

Studentul va verifica aceasta (vezi paragraful 33-6). Electronii sînt accelerați de cîmpul electric produs de variația de flux. Sensul acestui cîmp indus depinde de semnul variației $d\Phi_B/dt$ și trebuie ales astfel încît să accelereze și nu să decelereze electronii. Deci, pentru accelerare

poate fi folosită numai jumătate din semiperioada pozitivă din figura 35-15 şi anume ab.

Valoarea medie a lui $d\Phi_B/dt$ pe durata sfertului de perioadă ab este panta liniei punctate

$$\frac{d\Phi_B}{dt}=\frac{1{,}8\,\text{Wb}}{4{,}2\times 15^{-3}\,\text{s}}=430\ \text{V}.$$

Aceasta reprezintă, din legea lui Faraday (ecuaţia 35-1) şi valoarea t.e.m. în volţi. Astfel, energia electronului creşte cu cîte 430 eV la fiecare rotaţie pe orbită în această variaţia de flux. Dacă electronul cîştigă o energie de numai 430 eV la o rotaţie, el trebuie să facă aproximativ 230 000 de rotaţii pentru a atinge valoarea de 100 MeV. Pentru o orbită cu raza de 83,82 cm, aceasta corespunde unui parcurs lung de aproximativ 1 200 km.

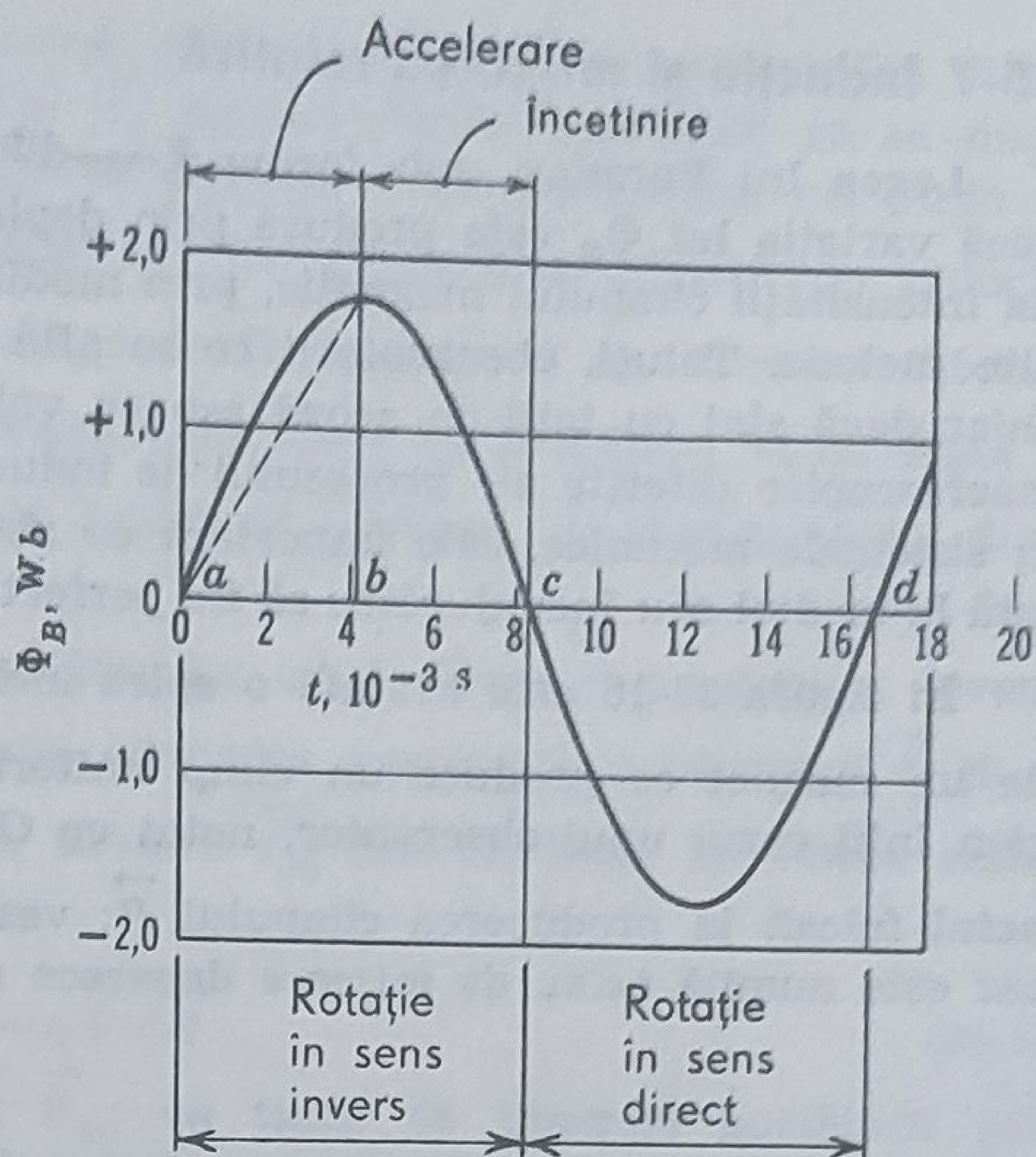


Figura 35-15. Fluxul prin orbita unui betatron pe durata unei perioade. Rotirea electronilor în sensul dorit (invers acelor de ceasornic, văzut de sus în figura 35-14) este posibilă numai în semiperioada *ac*.

Betatronul ne furnizează un bun exemplu al faptului că noţiunea de potenţial electric îşi pierde sensul în cazul cîmpurilor electrice, produse prin inducţie. Dacă există un potenţial, trebuie să fie adevărat că $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ pentru orice contur închis, după cum arată ecuaţia 35-10. Totuşi, în betatron, această integrală evaluată pe conturul orbitei este sigur *diferită* de zero, şi este egală în cazul nostru cu 430 V. Aceasta nu trebuie să ne facă să credem că legea conservării energiei nu mai este valabilă în cazul betatronului. Cîştigul de energie cinetică al electronului ce se roteşte pe orbită (430 eV/rotaţie) trebuie să fie furnizat de o sursă de energie. În adevăr, acest cîştig de energie cinetică vine de la generatorul ce alimentează bobinele magnetului, producînd cîmpul magnetic variabil. Energia este transmisă electronului prin intermediul acestui cîmp variabil.

Exemplul 5. Care este sfertul de perioadă de „accelerare" pentru betatronul din figura 35-13?

Să presupunem că în intervalul ab din figura 35-15, Φ_B prin orbită *creşte*. După o spiră conductoare este astfel plasată pentru a coincide cu orbita, în spiră apare un curent indus ce se opune tendinţei de creştere a lui Φ_B. Aceasta înseamnă că se produce un cîmp magnetic care se opune cîmpului magnetului mare. Deci $\vec{E}$ trebuie să iasă din planul figurii în dreapta inelului T din figura 35-14 şi intră în plan în stînga. Forţa ($-e\vec{E}$) ce acţionează asupra electronului are sens opus lui $\vec{E}$ deoarece sarcina electronului este negativă. Astfel, sensul forţei tangenţiale ce acţionează asupra electronului este acelaşi cu sensul de rotaţie pe orbită al electronului; aceasta înseamnă că viteza electronului va creşte, aşa precum doream. Studentul va face aceeaşi analiză cu atenţie presupunînd (incorect, după cum va rezulta) că intervalul de accelerare este bc în figura 35-15 şi nu ab.

35-7 Inducția și mișcarea relativă

Legea lui Faraday, sub forma $\mathscr{E} = -d\Phi_B/dt$ dă corect t.e.m. indusă indiferent dacă variația lui Φ_B este produsă prin deplasarea spirei, a magnetului, prin variația intensității cîmpului magnetic, prin modificarea formei spirei de curent sau prin alte metode. Totuși, observatorii ce se află în mișcare relativă unul față de altul, chiar dacă sînt cu toții de acord asupra valorii numerice a t.e.m., vor da descrieri macroscopice diferite ale procesului de inducție. În sistemele electromagnetice, ca și în sistemele mecanice, este important ca starea de mișcare a observatorului raportată la mediul său înconjurător să fie perfect clară.

În figura 35-16 este arătată o spiră închisă ce este deplasată cu viteza $\vec{v}$ față de un magnet ce produce un cîmp uniform $\vec{B}$ în regiunea indicată. Să considerăm întîi cazul unui observator, notat cu O, ce se găsește *în repaus față de magnetul* folosit la producerea cîmpului $\vec{B}$; vezi figura 35-16 a. T.e.m. indusă în acest caz este numită *t.e.m. de mișcare* deoarece spira se mișcă față de acest observator.

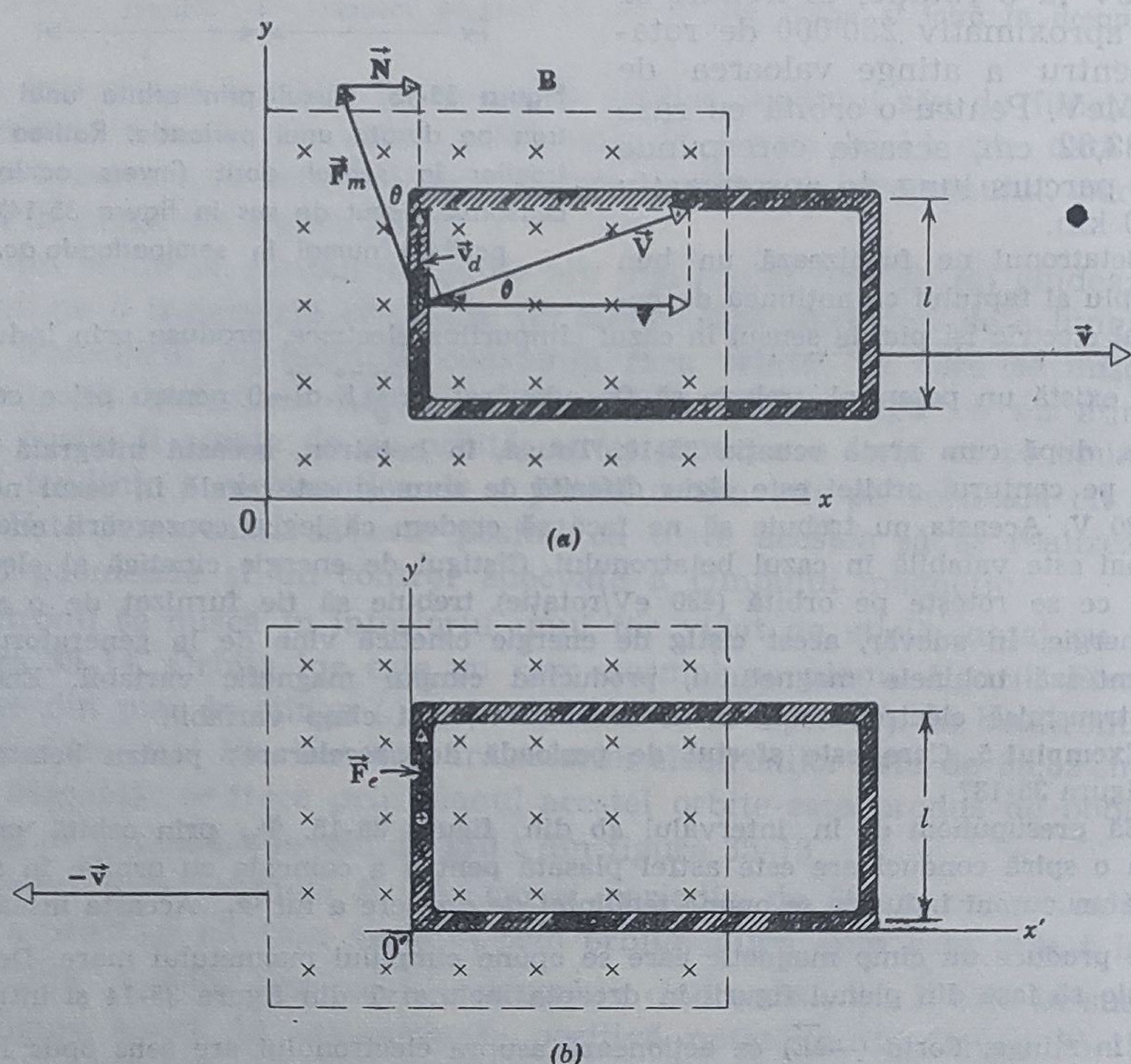


Figura 35-16. O spiră conductoare închisă, în mișcarea relativă în raport cu un cîmp magnetic. a) Un observator O, fix în raport cu magnetul ce produce cîmpul $\vec{B}$, vede spira deplasîndu-se spre dreapta. b) Un observator O', fix în raport cu spira, vede magnetul deplasîndu-se spre stînga.

Să considerăm un purtător de sarcină pozitivă, în centrul extremității stîngi a spirei de curent. Pentru observatorul O, această sarcină, obligată să se miște spre dreapta împreună cu spire, este o sarcină q ce se deplasează, cel puțin în momentul cînd spira a fost pusă în mișcare, cu viteza $\vec{v}$ în cîmpul de inducție magnetică $\vec{B}$. Deci, asupra ei acționează o forță magnetică de deviere laterală dată de ecuația 33-3 a ($\vec{F}=q\,\vec{v}\times\vec{B}$). Această forță face ca purtătorii să se miște în sus în lungul conductorului, astfel că ei capătă și o viteză de transport $\vec{v}_d$, după cum este arătat în figura 35-16 a.

Viteza de echilibru rezultantă a purtătorului, cînd viteza $\vec{v}$ a spirei a devenit constantă este acum $\vec{V}$ și o găsim prin adunarea vectorială a vitezelor $\vec{v}$ și $\vec{v}_d$ din figura 35-16 a. Forța magnetică de deviere $\vec{F}_m$ este normală pe viteza rezultantă $\vec{V}$ a purtătorului și este dată de

$$\vec{F}_m=q\,\vec{V}\times\vec{B} \tag{35-13}$$

Să considerăm numai acțiunea forței $\vec{F}_m$: ea tinde să împingă purtătorii prin peretele din stînga al conductorului. Deoarece acest lucru nu se întîmplă trebuie ca peretele să exercite o forță normală $\vec{N}$ asupra purtătorilor (vezi figura 35-16 a) care va face ca $\vec{v}_d$ să ajungă paralelă cu axa firului; cu alte cuvinte, $\vec{N}$ compensează exact componenta orizontală a lui $\vec{F}_m$, lăsînd numai componenta $\vec{F}_m$ cos θ, a cărei direcție este în lungul conductorului. Această componentă a forței asupra purtătorului este compensată la rîndul ei de forța medie $\overline{\vec{F}_i}$ datorată ciocnirilor interne pe care le suferă purtătorul în timp ce se deplasează cu viteza (constantă) v_d în lungul firului.

Energia cinetică a purtătorului de sarcină ce se deplasează prin fir rămîne constantă. Aceasta este în concordanță cu faptul că forța rezultantă ce acționează asupra purtătorului de sarcină $(=\vec{F}_m+\overline{\vec{F}_i}+\vec{N})$ este zero. Lucrul mecanic efectuat de $\vec{F}_m$ este zero deoarece forțele magnetice acționînd normal la viteza unei sarcini în mișcare, nu execută un lucru mecanic asupra acestei sarcini. Astfel, lucrul mecanic (negativ) executat asupra purtătorului de forța internă medie de ciocnire $\vec{F}_i$ trebuie să fie compensat exact de lucrul mecanic (pozitiv) efectuat asupra purtătorului de forța $\vec{N}$. Deci $\vec{N}$ este exercitat de agentul ce deplasează spira prin cîmpul magnetic și energia mecanică cheltuită de acest agent apare sub formă de căldură în spiră, după cum am văzut în paragraful 35-4.

Să calculăm lucrul mecanic dW efectuat asupra purtătorului în timpul dt de forța $\vec{N}$; el este

$$dW=N(vdt) \tag{35-14}$$

în care vdt este distanța cu care s-a deplasat spira (și purtătorul) spre dreapta în figura 35-16 a, în timpul dt. Putem scrie pentru N (vezi figura 35-16 a și ecuația 35-13).

$$N=F_m \sin\theta=(qVB)(v_d/V)=qBv_d \tag{35-15}$$

Substituind ecuația 35-15 în ecuația 35-14 obținem

$$dW=(qBv_d)(vdt)=(qBv)(v_d dt)=qBvdl \tag{35-16}$$

în care dl ($=v_d dt$) este distanța pe care o parcurge purtătorul de-a lungul conductorului în timpul dt.

Lucrul mecanic executat asupra purtătorului la o parcurgere completă a spirei se găsește integrînd ecuația 35-16 de-a lungul spirei și este

$$W=\oint dW=qBvl \qquad (35\text{-}17)$$

Aceasta deoarece contribuțiile la lucrul mecanic a segmentului superior și a celui inferior al spirei au semne opuse și se anulează reciproc iar lucrul mecanic pe porțiunile spirei, situate în afara cîmpului magnetic este zero.

Un agent ce execută un lucru mecanic asupra purtătorilor de sarcină, producînd în acest fel un curent printr-o spiră de curent închisă, poate fi considerat ca o t.e.m.

Putem scrie, folosind ecuația 35-17

$$\mathcal{E}=\frac{W}{q}=\frac{qBvl}{q}=Blv \qquad (35\text{-}18)$$

care este, evident, identic cu rezultatul obținut din legea de inducție a lui Faraday; vezi ecuația 35-3. Astfel t.e.m. de mișcare este legată direct de devierea laterală a unei particule încărcate ce se mișcă într-un cîmp magnetic.

Să luăm în considerație acum situația din figura 35-16 pentru un observator *O′ în repaus față de spiră.* Pentru acest observator, magnetul se deplasează spre stînga în figura 36-16 b cu viteza $-\vec{v}$, iar sarcina q este în repaus din punct de vedere al mișcării de la stînga la dreapta. Totuși O', ca și O, observă că sarcina este antrenată în sensul acelor de ceasornic de-a lungul spirei și măsoară aceeași t.e.m. $\mathcal{E}$ ca și O. O' explică aceasta, din punct de vedere microscopic, postulînd că magnetul ce se mișcă induce în spiră un cîmp electric $\vec{E}$. Acest cîmp indus $\vec{E}$ are aceeași origine ca și cîmpurile induse discutate în paragraful 35-5 și exercită asupra purtătorului de sarcină o forță dată de $q\vec{E}$.

Cîmpul indus $\vec{E}$ ce există numai în extremitatea din stînga a spirei, este asociat cu o t.e.m. $\mathcal{E}$ și generează un curent în spira închisă. Observați că, în orice spiră închisă în care există un curent, trebuie să existe un cîmp electric intern în fiecare punct în care se deplasează sarcinile. Dar aceste cîmpuri electrice sînt produse de t.e.m. ca și în cazul unei spire închise legate la o baterie și *nu* sînt induse de mișcarea magnetului. Doar acest cîmp indus $\vec{E}$ este cel pe care îl asociem cu t.e.m. prin relația (ecuația 35-8)

$$\mathcal{E}=\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

care se reduce la

$$\mathcal{E}=El \qquad (35\text{-}19)$$

în acest caz. Aceasta deoarece atît în porțiunea superioară cît și în cea inferioară a spirei prin deplasarea în cîmp nu apare un cîmp electric *indus*. Același lucru este valabil și pentru partea din spiră situată în exteriorul cîmpului magnetic.

T.e.m. date de ecuația 35-19 și 35-18 trebuie să fie identice deoarece deplasarea relativă a spirei și a magnetului este identică în cele două cazuri arătate în figura 35-16. Egalînd aceste relații obținem

$$El=Blv$$

sau

$$E=vB \tag{35-20 a}$$

În figura 35-16 b vectorul $\vec{E}$ are sensul în sus, în lungul axei extremităţii stîngi a spirei de curent deoarece acesta este sensul în care se deplasează sarcinile pozitive. Direcţia şi sensul vectorilor $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ sînt arătaţi clar în această figură. Vedem deci, că ecuaţia 35-20 a este în concordanţă cu relaţia vectorială mai generală

$$\vec{E}=\vec{v}\times\vec{B} \tag{35-20 b}$$

Am verificat ecuaţia 35-20 b doar pentru cazul special din figura 35-16; cu toate acestea ea se dovedeşte a fi valabilă şi în cazul general, indiferent de unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{B}$.

O experienţă efectuată în 1926 de fizicianul german Wilhelm Wien (1864—1928) dă un suport experimental descrierii noastre a efectului mişcării unui observator asupra naturii cîmpurilor electrice şi magnetice pe care le observă. Lungimea de undă a radiaţiilor emise de atomii situaţi într-un cîmp electric este puţin diferită de cea a atomilor situaţi într-un cîmp magnetic. Atomul poate fi astfel folosit ca o probă pentru a examina natura acestor cîmpuri. Wien a trimis un fascicul de atomi cu viteza $\vec{v}$ printr-un cîmp magnetic $\vec{B}$. Distribuţia lungimilor de undă a radiaţiilor emise a fost identică cu cea pe care ar fi avut-o radiaţiile emise de un atom în repaus situat (a) într-un cîmp magnetic $\vec{B}$ şi (b) într-un cîmp electric indus $\vec{E}$ dat de ecuaţia 35-20 b.

Interpretăm ecuaţia 35-20 b în următorul fel: observatorul O în repaus faţă de magnet, „simte" doar cîmpul magnetic. Forţa asupra lui este produsă de mişcarea sarcinilor prin $\vec{B}$. Observatorul O' fixat de purtătorul de sarcină „simte" un cîmp electric $\vec{E}$ şi atribuie cîmpului electric forţa asupra sarcinii (iniţial în repaus faţă de el). O consideră că forţa este de origine pur magnetică iar O' că ea este de origine pur electrică. Din punctul de vedere al lui O, t.e.m. indusă este dată de $\oint(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$. Din punctul de vedere al lui O', aceeaşi t.e.m. indusă este dată de $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}$, unde $\vec{E}$ este vectorul electric (indus) pe care îl observă în lungul circuitului.

Pentru un al treilea observator O'' pentru care atît magnetul cît şi spira sînt în mişcare, forţa ce tinde să mişte sarcinile în lungul spirei nu este nici pur electrică nici pur magnetică, ci este cîte puţin din amîndouă. În concluzie, în ecuaţia

$$\vec{F}/q=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$$

diferiţii observatori evaluează diferit mărimile $\vec{E}$, $\vec{B}$ şi $\vec{v}$ dar ca rezultat, toţi observatorii ajung la acelaşi $\vec{F}/q$ şi obţin aceeaşi valoare pentru t.e.m. indusă în spiră (aceasta depinzînd doar de mişcarea relativă). Adică, forţa totală este aceeaşi pentru toţi observatorii, dar fiecare observator estimează în mod diferit forţele magnetice şi electrice separate ce contribuie la aceeaşi forţă totală.

Exemplul 7. Presupuneţi că în figura 35-16 $B=2{,}0$ T, $l=20$ cm şi $v=1{,}0$ m/s. Calculaţi (a) cîmpul electric indus observat de O' şi (b) t.e.m. indusă în spiră.

(a) Cîmpul electric, care este observat numai de observatorul O', este asociat cu magnetul în mişcare iar mărimea sa este dată de (vezi ecuaţia 35-20 a)

$$E = vB$$

$$= (1{,}0\ \text{m/s})(2{,}0\ \text{Wb/m}^2)$$

$$= 2{,}0\ \text{V/m}$$

(b) Observatorul O calculează t.e.m. indusă (de mişcare) din

$$\mathcal{E} = Blv$$

$$= (2{,}0\ \text{Wb/m}^2)(1{,}0 \times 10^{-1}\ \text{m})(1{,}0\ \text{m/s})$$

$$= 0{,}20\ \text{V}$$

Pentru observatorul O' t.e.m. nu este de mişcare şi el va folosi relaţia

$$\mathcal{E} = El$$

$$= (2{,}0\ \text{V/m})(1{,}0 \times 10^{-1}\ \text{m})$$

$$= 0{,}20\ \text{V}$$

Aşa cum şi trebuie, ambii observatori sînt de acord asupra valorii numerice a t.e.m.

Întrebări

1. Polul nord al unui magnet se îndepărtează de un inel metalic ca în figura 35-17. Care este sensul curentului în inel?

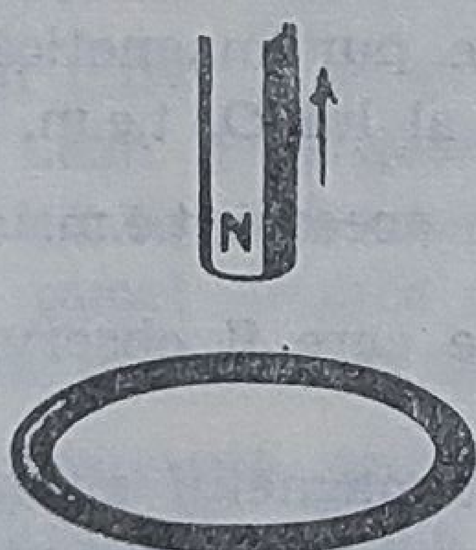


Figura 35-17.

2. *Curenţi turbionari**. O placă de cupru se găseşte într-un cîmp magnetic, ca în figura 35-18. Dacă încercăm să o scoatem din cîmp sau să o introducem mai mult, apare automat o forţă ce opune o rezistenţă. Explicaţi originea sa. (Indicaţie: În placă sînt induşi curenţi, numiţi curenţi turbionari astfel încît să se opună deplasării ei).

3. *Ecranare electromagnetică*. Considerăm o placă conductoare perpendiculară pe un cîmp magnetic $\vec{B}$, ca în figura 35-19. (a) Dacă $\vec{B}$ variază brusc, în punctul P nu se simte imediat întreaga *variaţie*. Explicaţi. (b) Dacă rezistivitatea acestei plăci este zero, *variaţia* nu va fi simţită niciodată, în P. Explicaţi. (c) Dacă $\vec{B}$ variază periodic cu o frecvenţă mare iar conductorul este dintr-un material de rezistivitate mică, regiunea din jurul lui P este aproape complet ecranată faţă de *variaţiile* de flux. Explicaţi. (d) Poate fi folosit un astfel de conductor ca ecran pentru cîmpurile magnetice statice? Explicaţi.

4. *Amortizarea magnetică*. O bandă de cupru este fixată ca un pendul în

* sau curenţi Foucault, în literatura noastră (N.T.).



Figura 35-18.



Figura 35-19.



Figura 35-20.

jurul lui O (vezi figura 35-20). El oscilează liber într-un cîmp magnetic normal la pagină. Dacă în bandă se fac crestături ca în figură, ea poate oscila liber în cîmp. Dacă este înlocuită cu o bandă fără crestături, mişcarea oscilatorie este puternic amortizată. Explicaţi. (Indicaţie: folosiţi legea lui Lenz; consideraţi traiectoriile pe care trebuie să se mişte purtătorii de sarcină din bandă pentru ca să se opună mişcării benzii).

5. Considerăm două spire conductoare faţă în faţă la distanţa d una de cealaltă (figura 25-21). Un observator priveşte în lungul axei lor comune. Brusc, în spira mare se stabileşte un curent i în sensul acelor de ceasornic. (a) Care este sensul curentului indus în spira mică? (b) Care este direcţia şi sensul forţei (dacă



Figura 35-21.

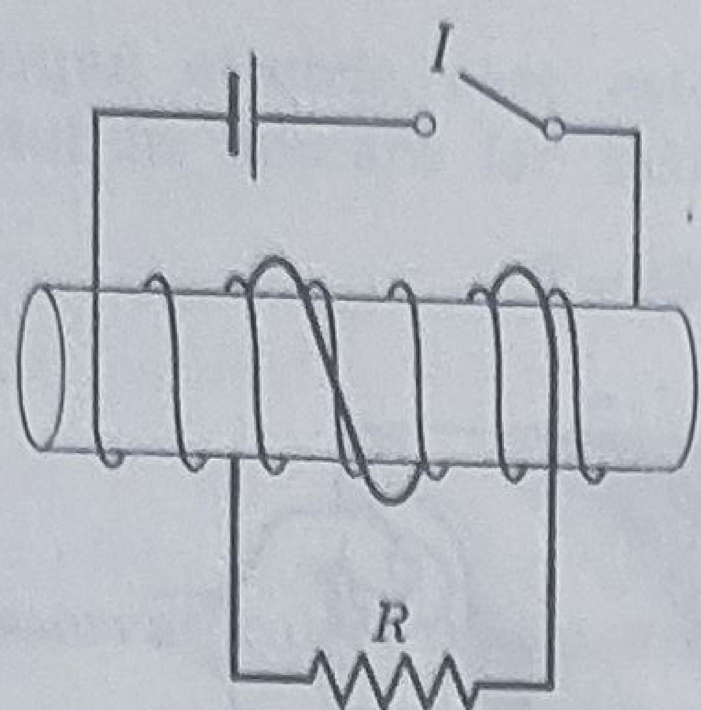


Figura 35-22.

există) ce acționează asupra spirei mici?

6. Care este sensul curentului, dacă există, prin rezistorul R din figura 35-22 (a) imediat după ce întrerupătorul I este închis, (b) la un interval de timp după ce I a fost închis și (c) imediat după ce I este deschis? (d) Care extremitate a bobinei acționează ca pol nord, cînd întrerupătorul I este ținut închis?

7. Un solenoid străbătut de un curent este deplasat spre o spiră de curent, ca în figura 35-23. Care este sensul curentului prin spiră dacă privim spre ea după cum este arătat?

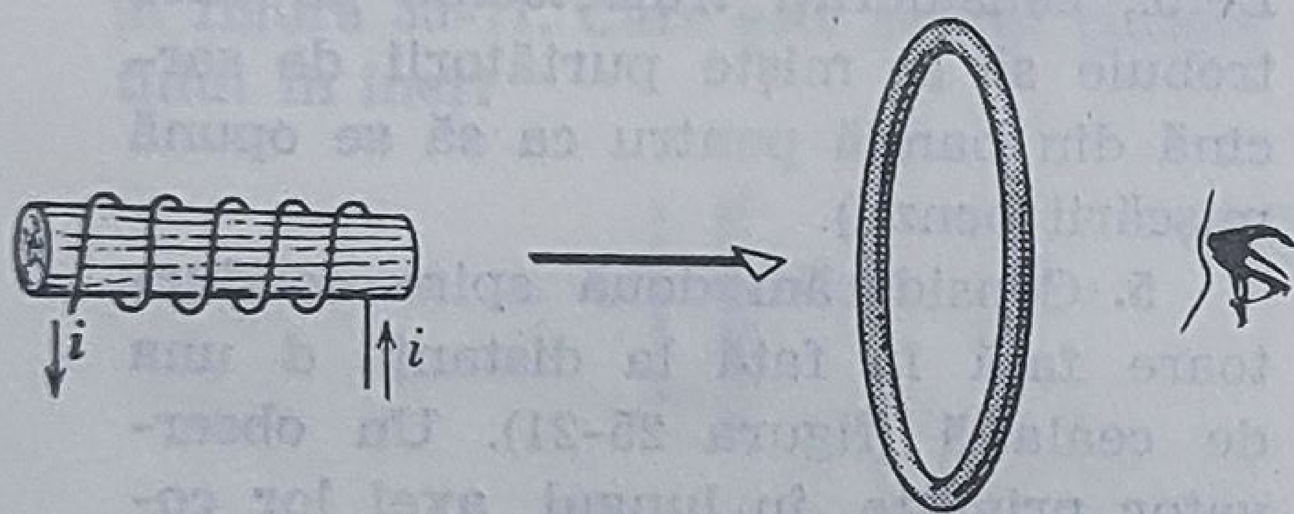


Figura 35-23.

8. Care este sensul curentului indus în circuitul din dreapta cînd rezistența R din circuitul din stînga din figura 35-24 crește?

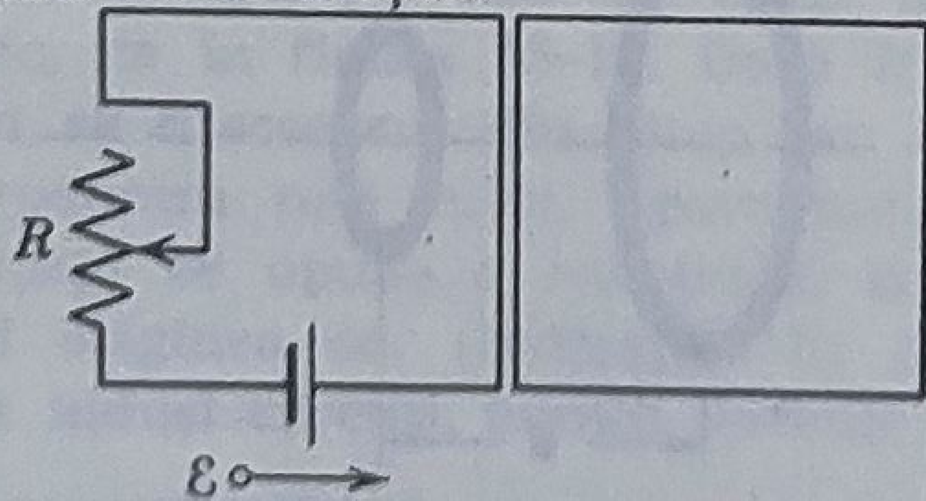


Figura 35-24.

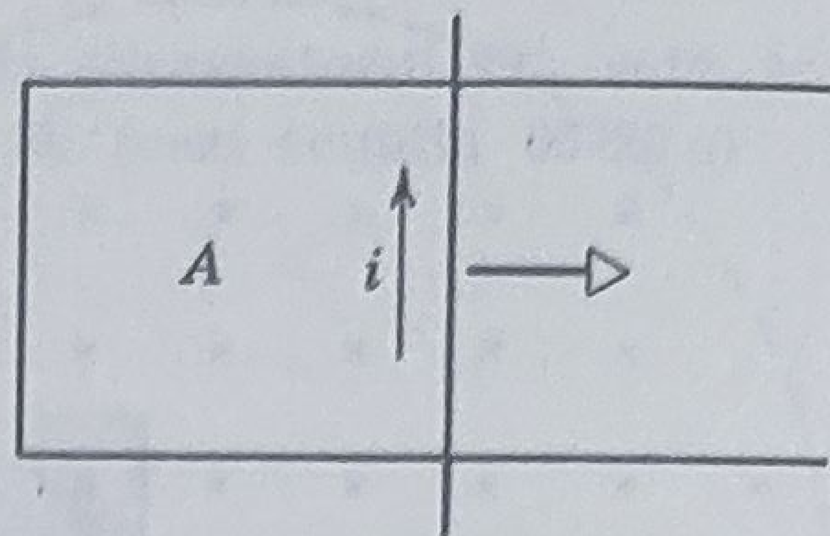


Figura 35-25.

9. Conductorul mobil din figura 35-25 este deplasat spre dreapta, producînd un curent indus după cum este arătat. Care este sensul lui $\vec{B}$ în regiunea A?

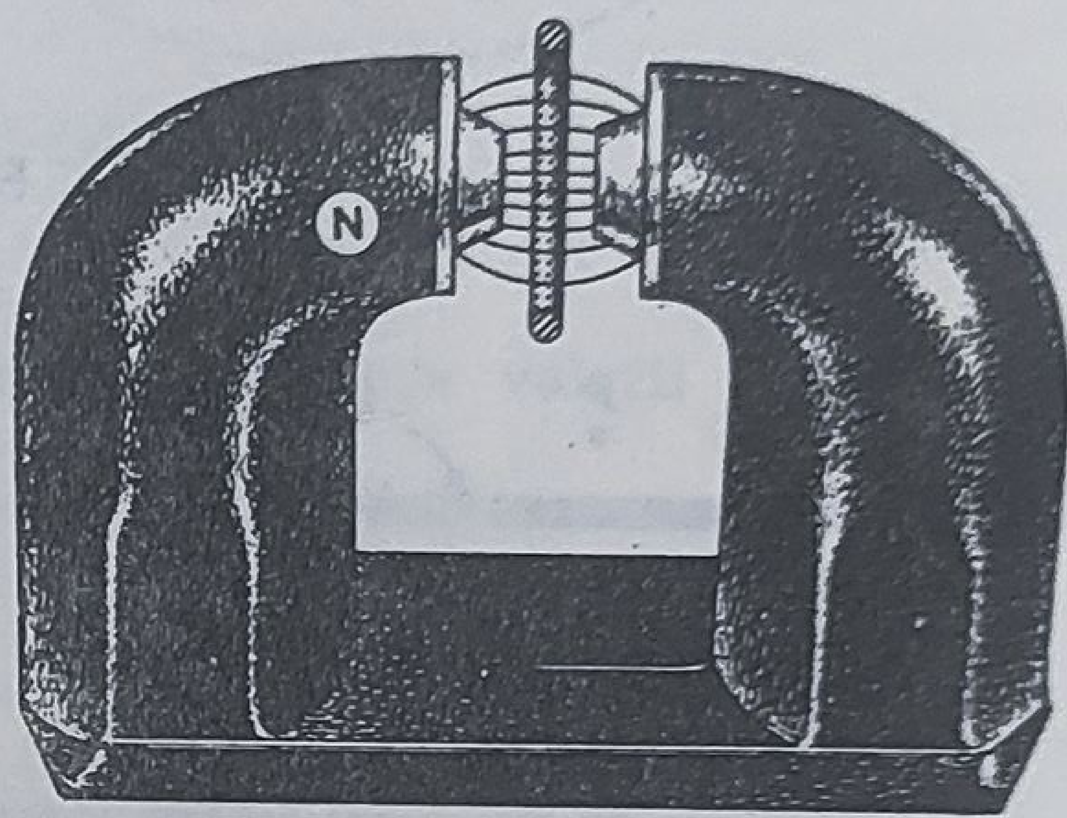


Figura 35-26.

10. Spira din figura 35-26 este scoasă dintre polii magnetului deplasînd-o vertical în sus. (a) Care este sensul curentului indus? (b) Este necesară o forță pentru a îndepărta spira? (c) Depinde cantitatea totală de căldură joule produsă la îndepărtarea spirei de timpul scurs la îndepărtarea ei?

11. Un magnet este lăsat să cadă printr-un tub vertical, lung de cupru. Arătați că, magnetul va atinge o viteză finală constantă, chiar dacă neglijăm rezistența aerului.

12. Un magnet este lăsat să cadă din tavan, de-a lungul axei unei spire de cupru așezată orizontal pe podea. Dacă căderea magnetului este fotografiată cu o cameră de luat vederi, ce diferențe se vor observa (dacă există) dacă (a) spira se află la tem-

peratura camerei şi (b) dacă spira este în zăpadă carbonică?

13. Două inele, unul de cupru şi altul de lemn de aceleaşi dimensiuni sînt astfel aşezate ca prin ambele să existe aceeaşi variaţie de flux magnetic. Comparaţi cîmpurile electrice induse în fiecare.

14. În ce condiţii pot fi identice t.e.m. induse de-a lungul contururilor 1 şi 2 din figura 35-12? Cîmpul electric indus în preajma conturului 1 este mult mai mic decît cel din preajma conturului 2, după cum se vede şi din distanţa dintre liniile de forţă. Vezi şi figura 35-11.

15. Într-un betatron electronii se rotesc în sens invers acelor de ceasornic, privind de sus. Care trebuie să fie direcţia şi sensul cîmpului magnetic şi cum trebuie el să varieze în timp pentru ca electronii să fie acceleraţi?

16. De ce poate fi folosit betatronul la accelerare doar un sfert de perioadă?

17. Pentru ca electronii de pe orbita unui betatron să capete o mişcare în spirală spre exterior, trebuie ca fluxul central să crească sau să descrească? Presupuneţi că pe orbită $\vec{B}$ rămîne în esenţă nemodificat.

18. Ciclotronul face parte din categoria *acceleratorilor de rezonanţă.* Pentru funcţionarea betatronului este importantă rezonanţa?

Probleme

1. În jurul unui cilindru de fier cu secţiunea de 0,001 m^2 se bobinează 100 spire de sîrmă de cupru izolată şi se leagă la un rezistor. Rezistenţa totală a circuitului astfel format este de 10 Ω. Dacă inducţia magnetică în fier pe axa bobinei variază de la 1 T într-un sens la 1 T în celălalt sens, care este sarcina ce trece prin circuit?

2. O bobină cu 100 spire din sîrmă de cupru de rezistenţă 5,0 Ω, ce formează un circuit închis, este plasată în *exteriorul* unui solenoid ca cel din exemplul 1 (vezi figura 35-27). Ce curent apare în bobină dacă curentul prin solenoid este variat ca în acel exemplu?

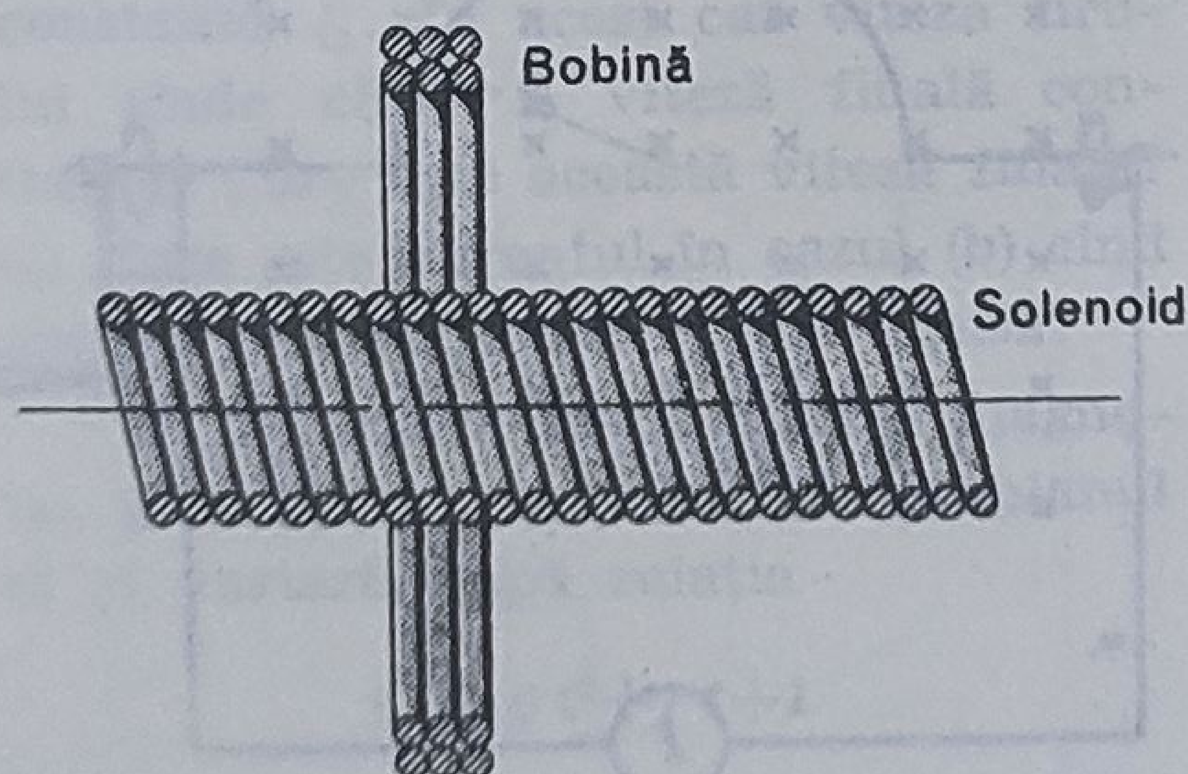


Figura 35-27.

3. O spiră circulară cu diametrul de 10 cm este plasată într-un cîmp magnetic uniform de 0,5 T ce face un unghi de 30° cu normala la planul ei. Spira efectuează o mişcare de precesie astfel ca normala ei să se rotească în jurul direcţiei cîmpului cu o viteză constantă de 100 rotaţii/minut; unghiul dintre normală şi direcţia cîmpului rămîne constant (=30°) în timpul acestui proces. Ce t.e.m. apare în spiră?

4. Un cîmp uniform de inducţie $\vec{B}$ este normal la planul unui inel circular cu diametrul de 10 cm format din sîrmă de cupru cu diametrul 2,54 mm. Cu ce viteză trebuie să varieze $\vec{B}$ în timp pentru ca în inel să apară un curent indus de 10 A?

5. Mărimea unui cîmp uniform de inducţie $\vec{B}$ variază cu o viteză constantă dB/dt. Vi se dă o cantitate de cupru de masă m din care să trageţi un fir de rază r cu care să formaţi o

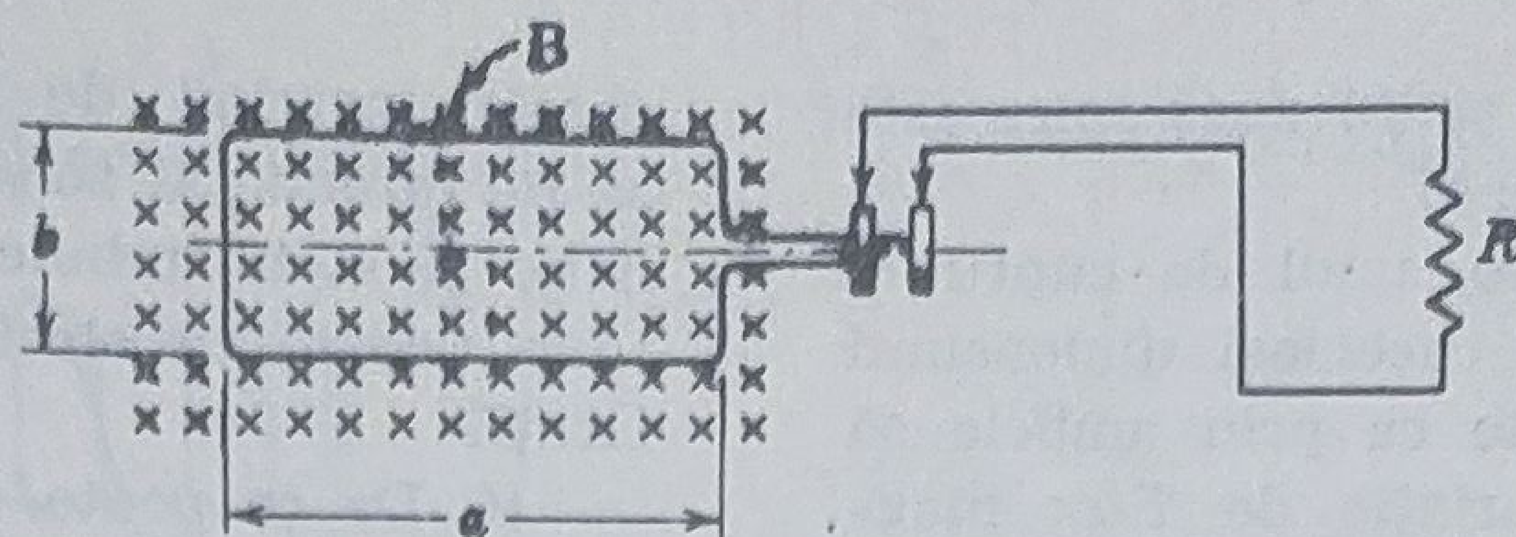


Figura 35-28.

spiră circulară de rază R. Arătați că i, curentul indus în spiră nu depinde de dimensiunile firului sau ale spirei și că este dat de (presupunînd $\vec{B}$ normal la spiră):

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta} \frac{dB}{dt}$$

unde ρ este rezistivitatea iar δ densitatea cuprului.

6. Se dă un fir de cupru lung de 50 cm cu diametrul de 1 mm din care se formează o spiră circulară. Spira se introduce normal într-un cîmp magnetic uniform ce crește în timp cu viteza constantă de 0,01 T/s. Care este căldura joule generată în spiră în unitatea de timp?

7. Un mic magnet în formă de bară este trecut rapid printr-o spiră în lungul axei sale. Descrieți cantitativ (a) curentul indus și (b) viteza de încălzire Joule în funcție de poziția centrului magnetului. Presupuneți că magnetul este introdus în spiră cu polul său nord înainte și că viteza de deplasare a magnetului este constantă. Considerați curentul indus pozitiv dacă are sensul acelor de ceasornic privind în lungul traiectoriei magnetului.

8. *Generatorul de curent alternativ.* O bobină dreptunghiulară cu N spire, de lungime a și lățime b este rotită cu frecvența ν într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\vec{B}$, ca în figura 35-28. (a) Arătați că în bobină apare o t.e.m. indusă egală cu:

$$\mathcal{E} = 2\pi\nu NbaB \sin 2\pi\nu t = \mathcal{E}_0 \sin 2\pi\nu t$$

Aceasta este principiul generatorului de curent alternativ (alternator). (b) Proiectați o bobină care să producă o t.e.m. cu $\mathcal{E}_0 = 150$ V cînd se rotește cu 60 rotații/secundă într-un cîmp de inducție magnetică de 0,5 T.

9. Un conductor rigid îndoit în formă de semicerc cu raza R este rotit cu frecvența ν într-un cîmp uniform de inducție $\vec{B}$, ca în figura 35-29. Care sînt amplitudinea și frecvența tensiunii și curentului indus dacă rezistența internă a instrumentului I este R_I iar rezistența restului circuitului este neglijabil de mică?

10. Un disc de cupru circular cu diametrul de 10 cm se rotește cu 1 800 rotații/minut în jurul unei axe ce trece prin centrul său, normală pe disc. Perpendicular pe disc se află un cîmp uniform de inducție $B = 1$ T. Ce diferență de potențial se dezvoltă între axa discului și marginea sa?

11. O bară de cupru se deplasează cu viteza $\vec{v}$ paralel cu un fir lung

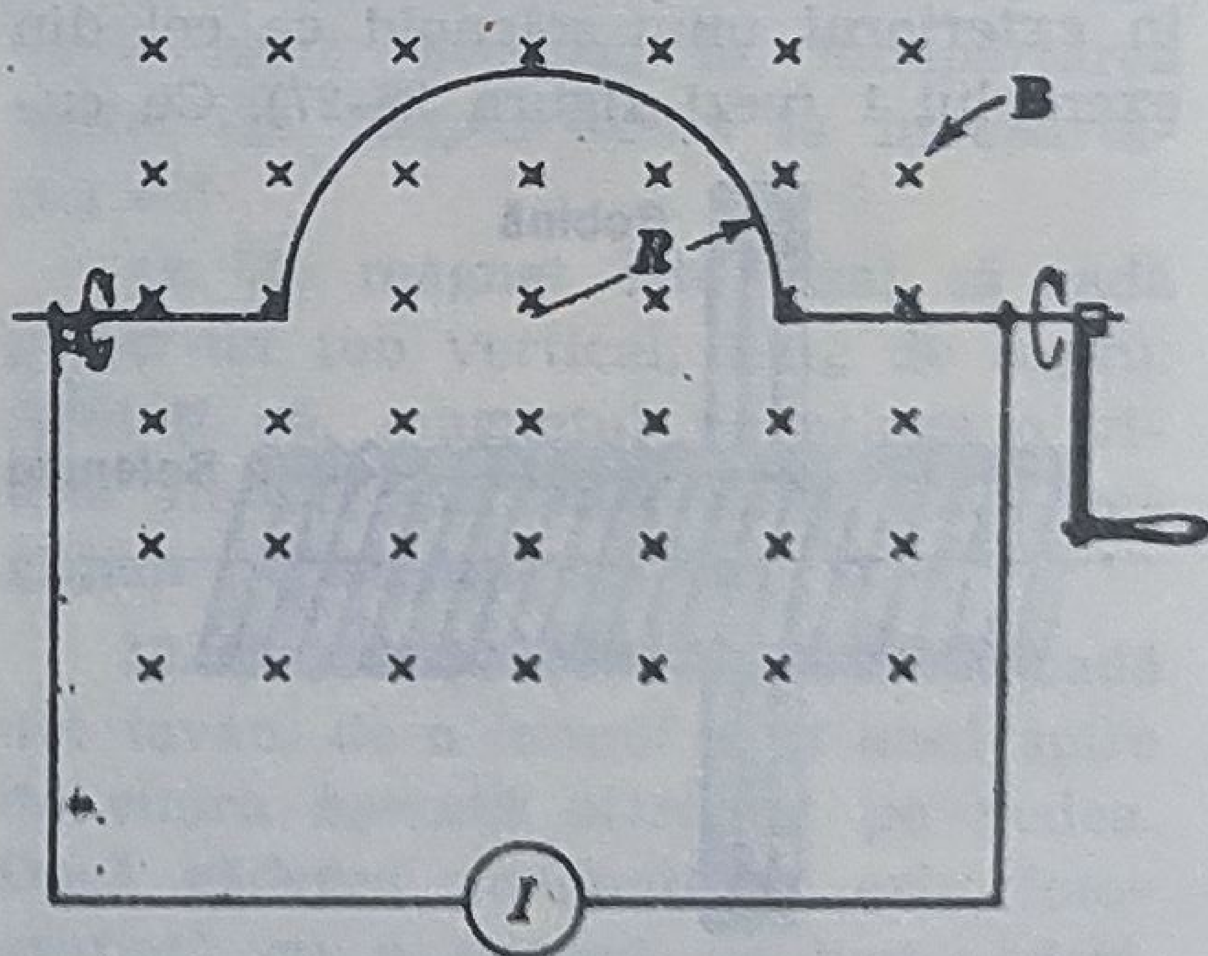


Figura 35-29.

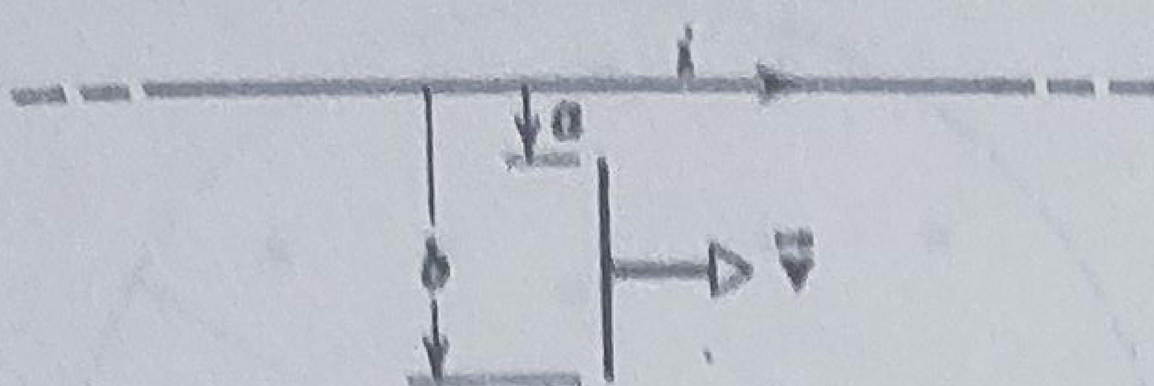


Figura 35-30.

rectiliniu prin care trece curentul i (figura 35-30). Calculați t.e.m. indusă în bară, presupunînd că $v=5{,}0$ m/s, $i=100$ A, $a=1{,}0$ cm și $b=20$ cm.

12. Un fir de metal de masă m alunecă fără frecare pe două șine situate la distanța d una de alta, ca în figura 35-31. Totul se află într-un cîmp uniform vertical de inducție $\vec{B}$.

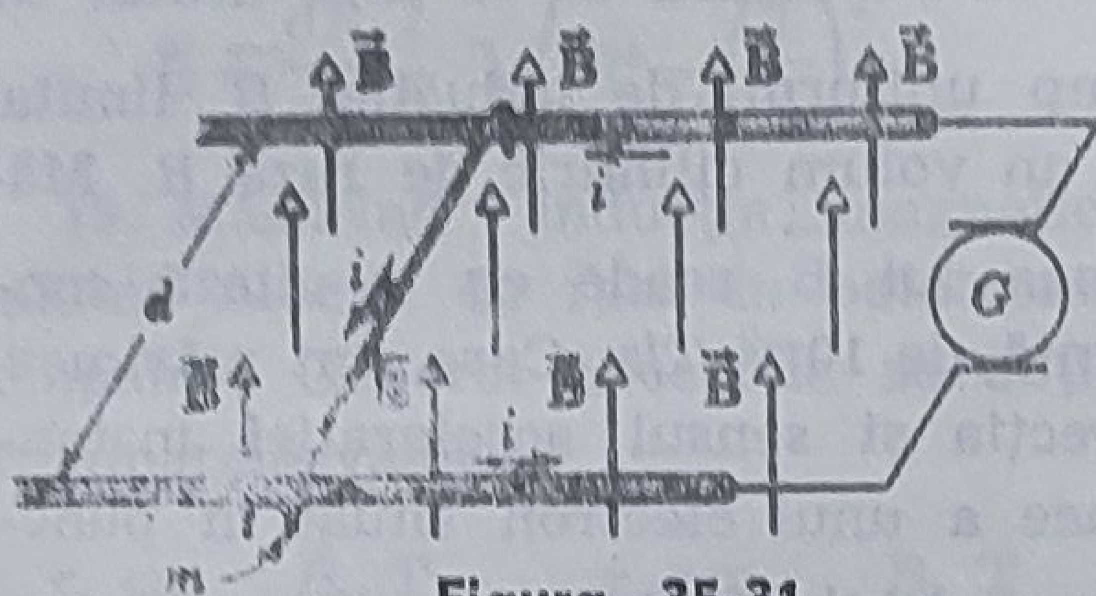


Figura 35-31.

(a) Generatorul G debitează un *curent constant* i de-a lungul unei șine, prin fir și înapoi prin cealaltă șină. Determinați mărimea, direcția și sensul vitezei firului în funcție de timp presupunînd că în momentul inițial $t=0$ se găsea în repaus. (b) Generatorul se înlocuiește cu o baterie cu *t.e.m. constantă* $\mathcal{E}$. În acest caz viteza firului tinde către o viteză finală constantă. Care este această viteză finală? (c) Care este curentul în cazul (b) cînd această viteză finală a fost atinsă?

13. În figura 35-32 fluxul magnetic prin spiră intră normal la planul ei și variază după relația

$$\Phi_B=6\,t^2+7\,t+1$$

unde Φ_B este în mWb (1 mWb$=10^{-3}$ Wb) și t în secunde. (a) Care

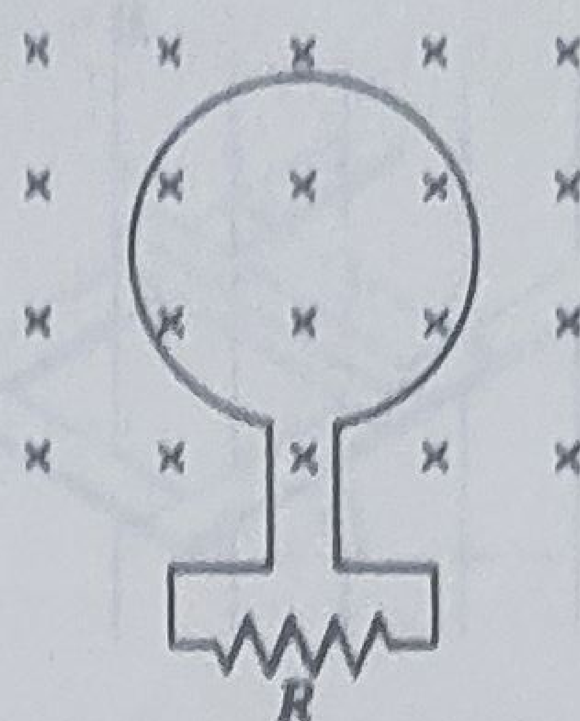


Figura 35-32.

este valoarea t.e.m. induse în spiră cînd $t=2$ s? (b) Care este sensul curentului prin R?

14. În figura 35-33 o bară conductoare AB face contact cu șinele de metal AD și BC situate la 50 cm una de cealaltă într-un cîmp magnetic uniform de inducție 1,0 T normal la planul hîrtiei — după cum este indicat. Rezistența totală a circuitului $ABCD$ este 0,4 Ω (presupusă constantă). (a) Care este mărimea, direcția și sensul t.e.m. induse în bară dacă ea este deplasată spre stînga cu viteza de 8 m/s? (b) Care este forța necesară pentru a menține bara în mișcare? (c) Comparați viteza cu care forța $\vec{F}$ efectuează lucrul mecanic cu viteza de producere a căldurii în circuit.

15. Un fir cu secțiune pătrată de lungime l, masă m și rezistența R alunecă fără frecare în jos pe două șine conductoare de rezistență neglijabilă, ca în figura 35-34. Șinele sînt unite la extremitatea lor inferioară printr-o altă șină paralelă cu firul, fără rezistență, astfel că firul și șinele

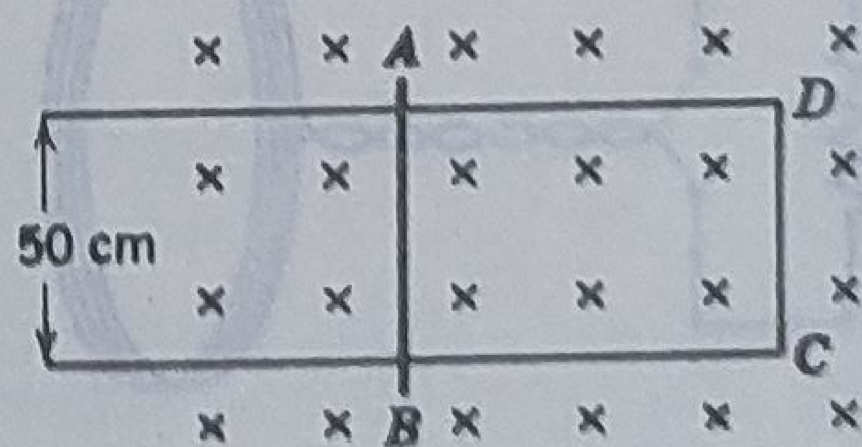


Figura 35-33.

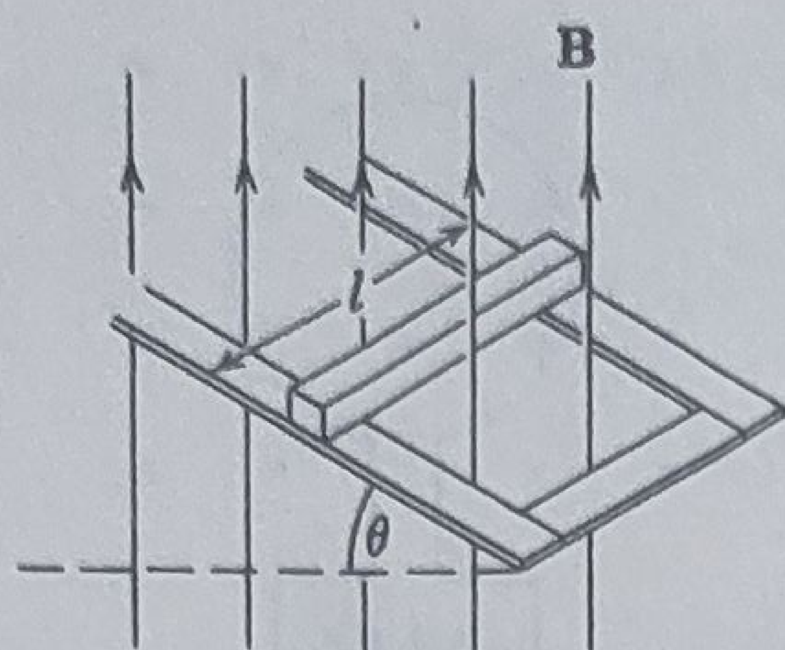


Figura 35-34.

formează o spiră conductoare dreptunghiulară închisă. Planul şinelor face unghiul θ cu orizontala. Totul se găseşte într-un cîmp vertical uniform de inducţie magnetică $\vec{B}$. (a) Arătaţi că firul atinge o viteză constantă de mărime

$$V=\frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$$

(b) Arătaţi că acest rezultat este în concordanţă cu legea conservării energiei. (c) Se produce vreo modificare dacă sensul lui $\vec{B}$ este în jos şi nu în sus?

16. Arătaţi că dacă fluxul de inducţie magnetică prin bobina cu N spire din figura 35-35 variază într-un fel oarecare de la Φ_1 la Φ_2, atunci sarcina q ce trece prin circuitul de rezistenţă totală R este dat de

$$q=\frac{N(\Phi_2-\Phi_1)}{R}$$

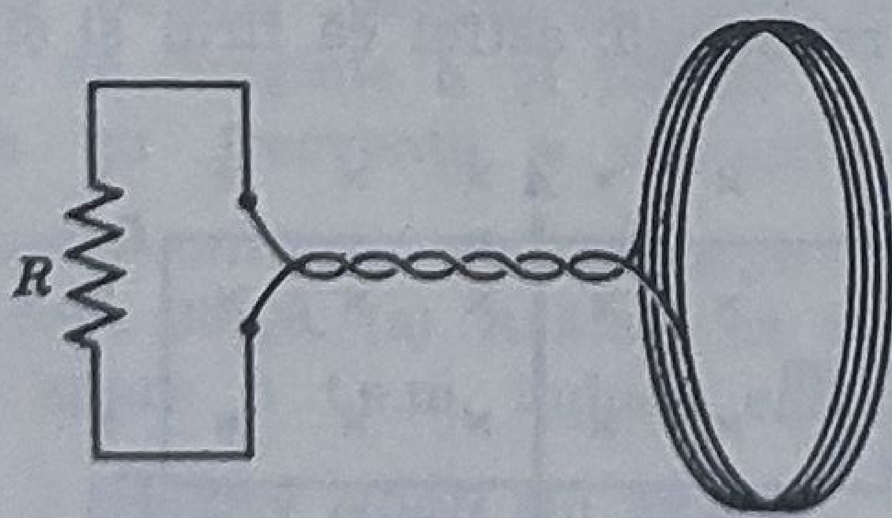


Figura 35-35.

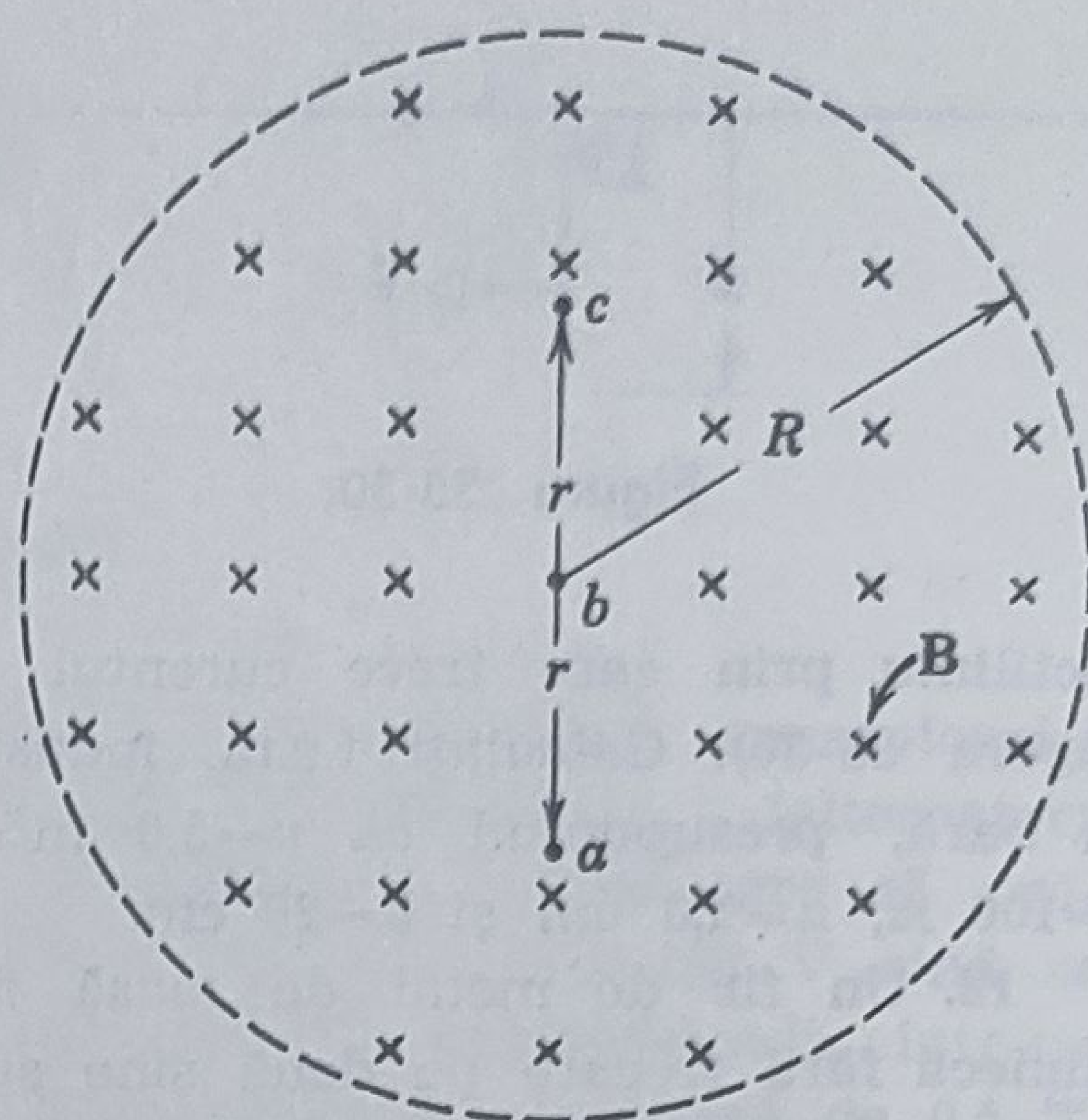


Figura 35-36.

17. În figura 35-36 este arătat un cîmp uniform de inducţie $\vec{B}$ limitat la un volum cilindric de rază R. Mărimea lui $\vec{B}$ scade cu o viteză constantă de 10^{-2} T/s. Care sînt mărimea, direcţia şi sensul acceleraţiei instantanee a unui electron situat în punctele a, b şi c? Presupuneţi $r=5{,}0$ cm. Dispersia cîmpului la marginea volumului cilindric nu modifică răspunsul atît timp cît există simetrie axială în jurul axei normale prin b.

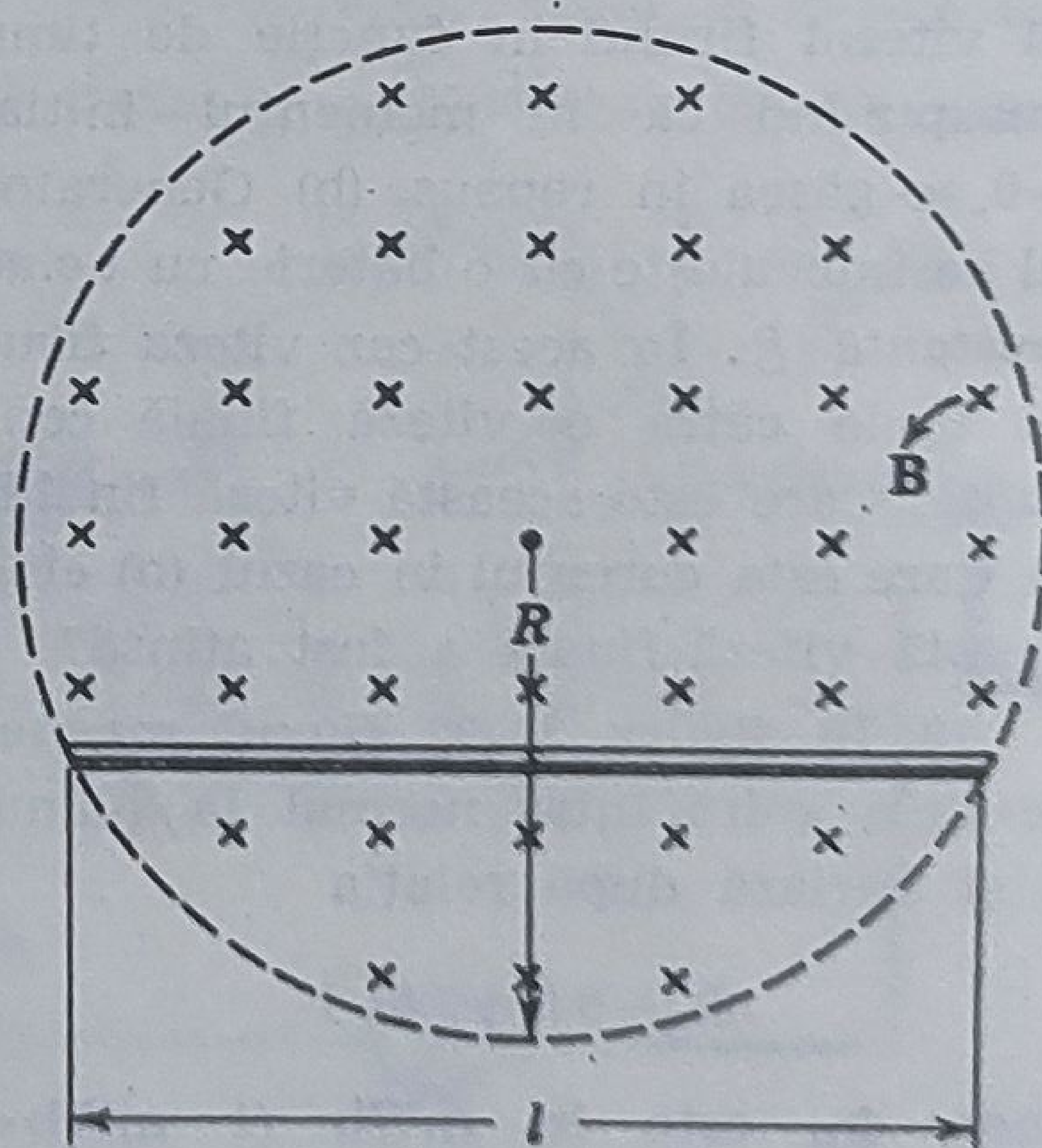


Figura 35-37.

Figura 35-38.

18. Un cîmp magnetic uniform de inducție $\vec{B}$ umple un volum cilindric de rază $\vec{R}$. O bară metalică de lungime l este plasată ca în figura 35-37. Dacă B variază cu viteza dB/dt, arătați că t.e.m. produsă de cîmpul magnetic variabil între capetele barei este dată de

$$\mathcal{E}=\frac{dB}{dt}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

19. Măsurînd inducția magnetică maximă funcție de rază în betatronul Companiei General Elecertic se obțin următoarele valori:

r, cm	B, T	r, cm	B, T
0	0,400	81,2	0,409
10,2	0,950	83,7	0,400
68,2	0,950	88,9	0,381
73,2	0,528	91,4	0,372
75,2	0,451	93,5	0,360
77,3	0,428	95,5	0,340

Arătați prin analiză grafică că relația $\vec{B}=2\,B_R$ este satisfăcută pentru o orbită de rază $R=84$ cm. (Indicație: Observați că $\overline{B}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R B(r)(2\,\pi r)dr$ și evaluați grafic integrala.

20. Arătați că într-un condensator plan încărcat, cîmpul electric $\vec{E}$ nu poate scădea brusc la zero cînd te deplasezi normal pe el, după cum este arătat prin săgeată în figura 35-38 (vezi punctul a). În condensatorii reali există întotdeauna o dispersie a liniilor de forță, ceea ce înseamnă că $\vec{E}$ scade lent spre zero. Vezi problema 34-28. (Indicație: Aplicați legea lui Faraday conturului dreptunghiular indicat prin linia punctată).

Capitolul 36

Inductanţa

36-1 Inductanţa

Dacă două bobine se află una în apropierea celeilalte, curentul i dintr-una din bobine va produce un flux Φ_B prin cealaltă. Dacă acest flux este variat prin modificarea curentului, în cea de a doua bobină va apare o t.e.m. indusă, conform legii lui Faraday. Totuşi pentru producerea unui efect inductiv nu sînt necesare obligatoriu două bobine. O t.e.m. de inducţie apare în bobină cînd variază, chiar *curentul prin ea.* Aceasta poartă numele de *autoinducţie*, iar t.e.m. produsă este numită *t.e.m. autoindusă.* Ea ascultă de legea de inducţie a lui Faraday la fel ca orice altă t.e.m. indusă.

Să considerăm o bobină bobinată strîns, un tor sau regiunea centrală dintr-un solenoid lung. În toate aceste trei cazuri, fluxul Φ_B prin fiecare spiră produs de un curent i este aproximativ acelaşi pentru fiecare spiră Legea lui Faraday pentru astfel de bobine (ecuaţia 35-2)

$$\mathcal{E}=-\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \tag{36-1}$$

arată că produsul $N\Phi_B$ (N fiind numărul de spire) este mărimea caracteristică importantă pentru inducţie. Pentru o bobină dată, presupunînd că prin apropiere nu se află materiale feromagnetice ca de exemplu fier, această mărime este proporţională cu i

$$N\Phi_B=Li \tag{36-2}$$

în care L, constanta de proporţionalitate, se numeşte *inductanţa bobinei**.

Din legea lui Faraday (vezi ecuaţia 36-1) t.e.m. indusă poate fi scrisă ca

$$\mathcal{E}=-\frac{d(N\Phi_B)}{dt}=-L\frac{di}{dt} \tag{36-3 a}$$

---

* L se mai numeşte şi autoinductanţă sau inductanţă proprie (N.T.).

Scrisă sub forma

$$L = -\frac{\mathscr{E}}{di/dt} \qquad (36\text{-}3\ b)$$

această relație poate fi considerată ca ecuație de definiție pentru inductanța unei bobine de formă și dimensiuni oarecare, cu bobinare compactă sau nu, fie că în apropiere se găsesc materiale feromagnetice sau nu. Este analoagă relației de definiție pentru capacitate

$$C = \frac{q}{V}$$

Figura 36-1. În *a)* curentul *i scade* iar în *b) crește*. În ambele cazuri, t.e.m. autoindusă $\mathscr{E}_L$ se opune *variației*.

Dacă în apropiere nu se află obiecte de fier sau materiale similară, L depinde numai de geometria bobinei. Într-o *bobină* (notată cu ⟟⟟⟟⟟) existența *cîmpului magnetic* este elementul fundamental, corespunzător existenței cîmpului *electric* într-un *condensator*.

Unitatea de măsură pentru inductanță (din ecuația 36-3 *b*) este V·s/A și poartă numele de *henry*

$$1\ \text{H} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A}$$

Unitatea de măsură pentru inductanță a primit numele fizicianului american, contemporan cu Faraday, Joseph Henry (1797—1878). Henry a descoperit legea inducției, independent, aproximativ în același timp cu Faraday. În practică se folosesc și unitățile milihenry ($1\ \text{mH} = 10^{-3}\ \text{H}$) și microhenry ($1\ \mu\text{H} = 10^{-6}\ \text{H}$).

Sensul t.e.m. autoinduse poate fi găsit din legea lui Lenz. Presupunem că printr-o bobină trece un curent constant i produs de o baterie. Să reducem brusc (bateria) t.e.m. din circuit la zero. Imediat curentul i va începe să scadă; această *scădere* a curentului este în limbajul legii lui Lenz, „variația" căreia trebuie să i se opună autoinducția. Pentru a se opune scăderii curentului, t.e.m. indusă trebuie să aibe același sens ca și curentul, ca în figura 36-1 *a*. Cînd curentul prin bobină crește, legea lui Lenz arată că t.e.m. autoindusă are sens *opus* curentului, ca în figura 36-1 *b*. În ambele cazuri t.e.m. indusă se opune *variației* curentului. Semnul minus din ecuația 36-3 arată că $\mathscr{E}$ și di/dt au sensuri opuse, L fiind întotdeauna o mărime pozitivă.

36-2 Calculul inductanței

S-a dovedit că este posibil calculul direct al capacității în funcție de factorii geometrici pentru cîteva cazuri speciale ca de exemplu cel al condensatorului plan. Analog este posibil calculul autoinductanței L pentru cîteva cazuri speciale.

Pentru o bobină cu înfășurare compactă, în apropierea căreia nu se găsesc materiale feromagnetice, din ecuația 36-2, avem

$$L=\frac{N\Phi_B}{i} \tag{36-4}$$

Să aplicăm această ecuația la calculul lui L pentru o porțiune de lungime l din centrul unui solenoid lung. Mărimea $N\Phi_B$ pentru porțiunea de lungime l din solenoid este

$$N\Phi_B=(nl)(BA)$$

unde n este numărul de spire pe unitatea de lungime, B este inducția magnetică în interiorul solenoidului iar A este aria secțiunii transversale. Din ecuația 34-7, B este dat de

$$B=\mu_0 ni$$

Combinînd aceste ecuații obținem

$$N\Phi_B=\mu_0\, n^2\, liA$$

În final, inductanța, din ecuația 36-4, este

$$L=\frac{N\Phi_B}{i}=\mu_0\, n^2\, lA \tag{36-5}$$

Inductanța unei porțiuni l dintr-un solenoid este proporțională cu volumul ei (lA) și cu pătratul numărului de spire pe unitatea de lungime. Observați că depinde numai de factori geometrici. Era de așteptat această proporționalitate cu n^2. Dacă numărul de spire pe unitatea de lungime se dublează, se dublează nu numai numărul *total* N de spire ci și fluxul Φ_B *prin fiecare spiră* se dublează. Astfel pentru mărimea $N\Phi_B$ apare un factor patru și deci un factor patru și pentru inductanță (ecuația 36-4).

Exemplul 1. Deduceți o expresie pentru inductanța unui tor cu secțiunea transversală dreptunghi, ca acela din figura 36-2. Considerați $N=10^3$, $a=5{,}0$ cm, $b=10$ cm și $h=1{,}0$ cm.

Liniile lui $\vec{B}$ pentru tor sînt cercuri concentrice. Aplicînd legea lui Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 i$$

unui contur circular de rază r obținem

$$(B)(2\pi r)=\mu_0 i_0 N$$

unde N este numărul de spire iar i_0 este curentul în spirele torului; reamintim că în legea lui Ampère i este curentul *total* ce trece prin conturul de integrare. Rezolvînd obținem pentru B

$$B=\frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}$$

Figura 36-2. Exemplul 1. Secţiune transversală printr-un tor; se văd curentul prin spire şi cîmpul magnetic.

Fluxul Φ_B prin secţiunea transversală a torului este

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b (B)(h dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 i_0 N h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 i_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

unde $h\,dr$ este aria fişiei elementare indicate în figură.

Inductanţa rezultă din ecuaţia 36-4

$$L = \frac{N\Phi_B}{i_0} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Introducînd valorile numerice obţinem

$$L = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m})(10^3)^2 (1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})}{2\pi} \ln \frac{10 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} =$$

$$= 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb/A} = 1{,}4\ \mathrm{mH}.$$

36-3 Circuitul LR

În paragraful 32-8 am văzut că dacă se introduce brusc o t.e.m. $\mathscr{E}$ (de exemplu folosind o baterie) într-un ciruit format dintr-un ochi ce conţine un rezistor R şi un condensator C, sarcina nu ajunge imediat la valoarea finală de echilibru ($= C\mathscr{E}$) ci tinde către ea după o lege exponenţială descrisă de ecuaţia 32-15

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/\tau_c}) \tag{36-6}$$

Întîrzierea în creşterea sarcinii este descrisă de *constanta de timp capacitivă* τ_c, definită din

$$\tau_c = RC \tag{36-7}$$

Dacă în acelaşi circuit, t.e.m. $\mathscr{E}$ de la baterie este deconectată brusc, sarcina nu scade la zero imediat ci tinde către zero după o lege exponenţială descrisă de ecuaţia 32-18 *b*

$$q = C\mathscr{E} e^{-t/\tau_c} \tag{36-8}$$

Aceeaşi constantă de timp τ_c descrie atît scăderea sarcinii cît şi creşterea ei.

Figura 36-3. Un circuit *LR*.

O întîrziere analoagă în creşterea sau descreşterea curentului se produce dacă un circuit format dintr-un singur ochi ce conţine un rezistor R şi o bobină L este conectat sau deconectat brusc la o sursă de t.e.m. $\mathscr{E}$. Cînd comutatorul C din figura 36-3 este închis în poziţia a, de exemplu, curentul prin rezistor începe să crească. Dacă bobina nu ar fi prezentă, curentul ar creşte rapid către o valoare constantă $\mathscr{E}/R$. Din cauza prezenţei bobinei, în circuit apare o t.e.m. autoindusă $\mathscr{E}_L$; conform legii lui Lenz, această t.e.m. se opune *creşterii* curentului, ceea ce înseamnă că ea are polaritate inversă t.e.m. $\mathscr{E}$ a bateriei. În acest fel rezistorul răspunde diferenţei dintre cele două t.e.m., una constantă $\mathscr{E}$ produsă de baterie, şi cealaltă variabilă $\mathscr{E}_L$ $(=-L\, di/dt)$ produsă prin autoinducţie. Atît timp cît această a doua t.e.m. este prezentă, curentul prin rezistor va fi mai mic decît $\mathscr{E}/R$.

Cu scurgerea timpului, viteza de creştere a curentului scade şi t.e.m. autoindusă $\mathscr{E}_L$, care este proporţională cu di/dt devine mai mică. Astfel, apare o întîrziere şi curentul din circuit tinde asimptotic către valoarea $\mathscr{E}/R$.

Cînd comutatorul C din figura 36-3 este adus în poziţia a, circuitul se reduce la acela din figura 36-4. Să aplicăm legea a doua a lui Kirchoff, pornind din punctul x din această figură, mergînd în jurul ochiului în sensul acelor de ceasornic. Pentru un curent cu sensul indicat în figură, potenţialul în punctul x va fi mai mare decît în punctul y, ceea ce înseamnă că la capetele rezistorului există o diferenţă de potenţial $-iR$. Potenţialul în punctul y este mai mare decît în punctul z, deoarece atunci cînd curentul este crescător, t.e.m. indusă se va opune *creşterii* curentului, avînd sensul indicat. Astfel la traversarea bobinei de la y la z se observă o scădere a potenţialului egală cu $-L\, di/dt$. La traversarea bateriei de la z la x se observă o creştere a potenţialului egală cu $+\mathscr{E}$. Legea a doua a lui Kirchoff dă astfel

$$-iR-L\frac{di}{dt}+\mathscr{E}=0$$

sau

$$L\frac{di}{dt}+iR=\mathscr{E} \qquad (36\text{-}9)$$

Ecuaţia 36-9 este o *ecuaţie diferenţială* ce conţine variabila i şi derivata sa de ordinul întîi di/dt. Căutăm o astfel de funcţie $i(t)$ care intro-

Figura 36-4. Circuitul din figura 36-3, imediat după ce comutatorul C a fost pus în poziţia *a*.

dusă împreună cu derivata sa de ordinul întîi în ecuaţia 36-9, să satisfacă ecuaţia.

Deşi există reguli de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale (şi ecuaţia 36-9 poate într-adevăr fi rezolvată uşor prin integrare directă după rearanjarea ei) adesea ne este mai simplu să ghicim soluţia, ghidaţi de considerente fizice şi de experienţa anterioară. Soluţiile propuse pot fi încercate introducîndu-le în ecuaţia diferenţială şi văzînd dacă ea se reduce la o identitate.

Afirmăm că soluţia ecuaţiei 36-9 este

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-Rt/L}) \tag{36-10}$$

Pentru a verifica această soluţie prin substituţie, întîi trebuie să găsim prima sa derivată di/dt, care este

$$\frac{di}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{L}e^{-Rt/L} \tag{36-11}$$

Substituind i şi di/dt în ecuaţia 36-9 obţinem o identitate, aşa cum studentul poate verifica uşor. Astfel, ecuaţia 36-10 este o soluţie a ecuaţiei 36-9. În figura 36-5 este arătat cum variază cu timpul diferenţele de potenţial V_R la capetele rezistorului ($=iR$; vezi ecuaţia 36-10) şi V_L la capetele bobinei ($=L\,di/dt$; vezi ecuaţia 36-11) pentru diferite valori date ale lui $\mathcal{E}$, L şi R. Studentul va compara cu atenţie această figură cu figura corespunzătoare pentru un circuit RC (figura 32-11).

Putem scrie ecuaţia 36-10 sub forma

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-t/\tau_L}) \tag{36-12}$$

în care τ_L, *constanta de timp inductivă*, este dată de

$$\tau_L=L/R \tag{36-13}$$

Observaţi corespondenţa dintre ecuaţiile 36-12 şi 36-6.

Pentru a arăta că mărimea τ_L ($=L/R$) are dimensiunile unui timp, scriem

$$\frac{1\text{ henry}}{\text{ohm}}=\frac{1\text{ henry}}{\text{ohm}}\left(\frac{1\text{ volt}\cdot\text{secundă}}{1\text{ henry}\cdot\text{amper}}\right)\left(\frac{1\text{ ohm}\cdot\text{amper}}{1\text{ volt}}\right)=1\text{ secundă}$$

Prima paranteză este un factor de transformare bazat pe ecuaţia de definiţie pentru inductanţă [$L=-\mathcal{E}/(di/dt)$; ecuaţia 36-3 b]. Al doilea factor de transformare este bazat pe relaţia $V=iR$.

Semnificaţia fizică a constantei de timp reiese din ecuaţia 36-12. Dacă punem în această ecuaţia $t=\tau_L=L/R$, ea se reduce la

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-1})=(1-0{,}37)\frac{\mathcal{E}}{R}=0{,}63\frac{\mathcal{E}}{R}$$

Astfel, constanta de timp τ_L reprezintă intervalul de timp după care curentul din circuit va atinge 1/e (aproximativ 37%) din valoarea sa de echilibru (vezi figura 36-5).

Dacă comutatorul C din figura 36-3 este trecut în poziţia b, după ce a fost lăsat în a un timp suficient de lung pentru ca, curentul să ajungă

Figura 36-5. Presupunem că în figura 36-3: $R=2\,000\ \Omega$, $L=4$ H și $\mathcal{E}=10$ V. In aceste condiții a) indică variația lui i în funcție de t la stabilirea curentului, după ce comutatorul C a fost pus în poziția a și b) variația lui V_L cu t. Constanta de timp este $L/R=2{,}0\cdot10^{-3}$s.

la valoarea sa de echilibru $\mathcal{E}/R$, efectul este de a scoate bateria din circuit. Ecuația diferențială ce dă scăderea curentului din circuit poate fi găsită punînd $\mathcal{E}=0$ în ecuația 36-9

$$L\frac{di}{dt}+iR=0 \qquad (36\text{-}14)$$

Studentul poate verifica substituind că soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/\tau_L} \tag{36-15}$$

Ca şi în cazul circuitului RC comportarea circuitului din figura 36-3 poate fi studiată din punct de vedere experimental cu ajutorul oscilografului catodic. Dacă comutatorul c din această figură este comutat periodic între a şi b, t.e.m. aplicată alternează între valoarea $\mathcal{E}$ şi 0. Dacă bornele unui oscilograf sînt conectate în punctele b şi c din figura 36-3 pe ecranul oscilografului va apare variaţia acestei t.e.m. ca în figura 36-6 c. În practică R şi L ale unei bobine nu pot fi separate; noi am presupus un rezistor „ideal" şi o „bobină" ideală.

Dacă bornele oscilografului sînt legate la capetele rezistorului, pe ecranul oscilografului va fi reprezentată variaţia curentului din circuit (figura 36-6 a), deoarece căderea de potenţial pe R, care determină devierea pe oscilograf, este dată de $V_R=iR$. În timpul intervalelor notate *cresc* în figura 36-6 curentul creşte iar variaţia (vezi ecuaţia 36-12) este dată de

$$V_R(=iR)=\mathcal{E}(1-e^{-t/\tau_L})$$

În timpul intervalelor notate *descr*, curentul este descrescător şi V_R (vezi ecuaţia 36-15) este dat de

$$V_R(=iR)=\mathcal{E}e^{-t/\tau_L}$$

Observaţi că atît creşterea cît şi descreşterea curentului sînt întîrziate.

Dacă bornele oscilografului sînt conectate la capetele bobinei, pe ecran va fi reprezentată diferenţa de potenţial de la capetele ei în funcţie de timp (figura 36-6 b). Cînd curentul este crescător, ecuaţia de variaţie (vezi ecuaţia 36-11) trebuie să fie dată de

$$V_L\left(=L\frac{di}{dt}\right)=\mathcal{E}e^{-t/\tau_L}$$

Cînd curentul este descrescător, V_L este dat în funcţie de derivata în timp ecuaţiei 36-15 şi este

$$V_L\left(=L\frac{di}{dt}\right)=-\mathcal{E}e^{-t/\tau_L}$$

Observaţi că semnul lui V_L în cazul curentului crescător (di/dt pozitiv) este opus celui din cazul în care curentul este descrescător (di/dt negativ); acelaşi lucru este valabil şi pentru t.e.m. indusă $\mathcal{E}_L[=-L(di/dt)=-V_L]$.

Figura 36-6. Imaginea pe osciloscop a variaţiei cu timpul a: a) căderii de potenţial V_R la capetele rezistorului, b) a căderii de potenţial V_L la capetele bobinei şi c) t.e.m. aplicată $\mathcal{E}$. În timpul intervalelor notate *cresc*, curentul creşte; în timpul celor notate *descr* curentul scade. Comparaţi cu figura 32-13.

Examinînd figura 36-3 se observă că însumînd în orice moment curbele a și b se obține curba c. Ne puteam aștepta la acest rezultat deoarece este o consecință a legii a doua a lui Kirchhoff.

Exemplul 2. Un solenoid are o inductanță de 50 H și o rezistență de 30 Ω Care este intervalul de timp necesar pentru ca mărimea curentului să atingă jumătate din valoarea sa de echilibru, dacă solenoidul este conectat la o baterie de 100 V?

Valoarea de echilibru a curentului se atinge cînd $t \to \infty$; din ecuația 36-12 rezultă că este $\mathcal{E}/R$. Dacă curentul este egal cu jumătate din această valoare în momentul de timp t_0, această ecuație devine

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-t0/\tau L}\right)$$

Rezolvînd în funcție de t_0 obținem

$$t_0-\tau_L \ln 2-0{,}69\frac{L}{R}$$

Punînd τ_L-L/R și folosind valorile date, aceasta se reduce la

$$t_0=0{,}69\ \tau_L-0{,}69\left(\frac{50\text{H}}{30\Omega}\right)-1{,}2\text{ s.}$$

36-4 Energia și cîmpul magnetic

Am văzut în paragraful 30-7 că energia poate fi înmagazinată în cîmpul electric; energia pe unitatea de volum fiind dată, în vid, de

$$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

unde E este intensitatea cîmpului electric în punctul dat. Deși această formulă a fost dedusă pentru cazul condensatorului plan, ea este valabilă pentru orice configurație de cîmp electric.

Energia poate fi înmagazinată și într-un cîmp magnetic. De exemplu, două fire străbătute de curenți în același sens se atrag reciproc și pentru a le îndepărta trebuie executat un lucru mecanic. Putem considera că această energie cheltuită este înmagazinată în cîmpul magnetic dintre fire și din jurul lor. Se poate recăpăta energia înmagazinată în cîmp dacă firele sînt lăsate să revină la poziția lor inițială. În cazul electrostatic același raționament a fost aplicat la îndepărtarea a două sarcini de semne opuse iar în cazul gravitațional la îndepărtarea a două mase.

Pentru a deduce o expresie cantitativă a energie înmagazinate în cîmpul magnetic, să considerăm figura 36-4 în care este dată o sursă de t.e.m. $\mathcal{E}$ conectată la un rezistor R și la o bobină L

$$\mathcal{E}i-i^2R+Li\frac{di}{dt} \tag{36-9}$$

este ecuația diferențială ce descrie creșterea curentului în acest circuit. Accentuăm că această ecuație este o consecință directă a legii a doua a lui Kirchhoff iar legea a doua a lui Kirchhoff la rîndul ei *este o expri-*

mare a legii conservării energiei pentru circuite formate dintr-un singur ochi. Dacă înmulţim ambii membri ai ecuaţiei 36-9 cu i, obţinem

$$\mathcal{E}i=i^2R+Li\frac{di}{dt} \tag{36-16}$$

care are următoarea interpretare fizică în funcţie de lucru mecanic şi energie:

1. Dacă o sarcină dq parcurge sursa de t.e.m. $\mathcal{E}$ din figura 36-4 în timpul dt, sursa efectuează un lucru mecanic asupra ei, egal cu $\mathcal{E}\,dq$. *Puterea* cheltuită în acest proces este $(\mathcal{E}\,dq)/dt$, sau $\mathcal{E}\,i$. Astfel, membrul stîng al ecuaţiei 36-16 reprezintă *energia furnizată circuitului în unitatea de timp de către sursa de t.e.m.*

2. Al doilea membru al ecuaţiei 36-16 reprezintă energia apărută *în unitatea de timp sub formă de căldură joule în rezistor.*

3. Energia ce nu apare sub formă de căldură joule, trebuie conform ipotezei noastre, să fie înmagazinată în cîmpul magnetic. Deoarece ecuaţia 36-16 reprezintă o formulare a legii de conservare a energiei pentru circuitele LR, ultimul termen trebuie să reprezintă *viteza* dU_B/dt *cu care energia este înmagazinată în cîmpul magnetic,* sau

$$\frac{dU_B}{dt}=Li\cdot\frac{di}{dt} \tag{36-17}$$

Putem scrie aceasta sub forma $dU_B=Li\ di$

Integrînd se obţine

$$U_B=\int_0^{U_B} dU_B=\int_0^{i} Li\,di=\frac{1}{2}Li^2 \tag{36-18}$$

care reprezintă energia magnetică totală înmagazinată într-o inductanţă L străbătută de curentul i.

Această relaţie poate fi comparată cu expresia energiei asociate unui condensator C de sarcină q

$$U_E=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Aici energia este înmagazinată într-un cîmp electric. În ambele cazuri expresia energiei înmagazinate a fost obţinută prin egalarea ei cu lucrul mecanic ce trebuie efectuate pentru a produce cîmpul.

Exemplul 3. O bobină are o inductanţă de 5,0 H şi o rezistenţă de 20 Ω. Care este energia înmagazinată în cîmpul magnetic după ce curentul a atins valoarea sa maximă $\mathcal{E}/R$ dacă la capetele ei s-a aplicat o t.e.m. de 100 V?

Curentul maxim este dat de

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{100\text{V}}{20\Omega}=5{,}0\text{ A}$$

Energia înmagazinată este dată de ecuaţia 36-18:

$$U_B=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}(5{,}0\text{ H})(5{,}0\text{ A})^2=63\text{ J.}$$

Observați că, pentru această bobină constanta de timp $(=L/R)$ este 0,25 s. După cîte constante de timp se va înmagazina în cîmp *jumătate* din această energie de echilibru?

Exemplul 4. O bobină de 3,0 H este legată în serie cu un rezistor de 10 Ω, iar la capetele lor se aplică brusc o t.e.m. de 3,0 V. După 0,30 s (care este egal cu constanta de timp inductivă) după ce contactul a fost făcut: (a) care este energia furnizată de baterie în unitatea de timp?

Curentul este dat de ecuația 36-12.

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}\,(1-e^{-t/\tau_L})$$

care la $t=0{,}30$ s $(=\tau_L)$ are valoarea

$$i=\left(\frac{3{,}0\text{V}}{10\Omega}\right)(1-e^{-1})=0{,}189\ \text{A}$$

$P_{\mathscr{E}}$, energia furnizată de baterie în unitatea de timp este

$$P_{\mathscr{E}}=\mathscr{E}i=(3{,}0\text{V})\,(0{,}189\text{A})=0{,}567\text{W}$$

(b) Care este energia în unitatea de timp ce apare în rezistor sub formă de căldură joule? Aceasta este dată de

$$P_J=i^2R=(0{,}189\ \text{A})^2(10\,\Omega)=0{,}357\ \text{W}$$

(c) Care este P_B energia este înmagazinată în cîmpul magnetic în unitatea de timp? Aceasta este dată de ultimul termen din ecuația 36-16. Pentru aceasta trebuie să cunoaștem di/dt. Diferențiind ecuația 36-12 se obține

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)\left(\frac{R}{L}\right)e^{-t/\tau_L}=\frac{\mathscr{E}}{L}\,e^{-t/\tau_L}$$

La $t=\tau_L$ avem

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{3{,}0\text{V}}{3{,}0\text{H}}\right)e^{-1}=0{,}37\ \text{A/s}$$

Din ecuația 36-17, mărimea căutată este

$$P_B=\frac{dU_B}{dt}=Li\frac{di}{dt}$$

$$=(3{,}0\ \text{H})(0{,}189\ \text{A})(0{,}37\ \text{A/s})$$

$$=0{,}210\ \text{W}$$

Observați că, așa cum cere legea conservării energiei (vezi ecuația 36-16)

$$P_{\mathscr{E}}=P_J+P_B$$

sau

$$0{,}567\ \text{W}=0{,}357\ \text{W}+0{,}210\ \text{W}$$

$$=0{,}567\ \text{W}$$

36-5 Densitatea de energie și cîmpul magnetic

Vom deduce acum o expresie pentru *densitatea* de energie u într-un cîmp magnetic. Considerăm o secțiune de lungime l din centrul unui solenoid foarte lung; volumul acestei porțiuni de solenoid este Al. Energia înmagazinată trebuie să fie toată situată numai în acest volum, deoarece cîmpul magnetic în exteriorul unui astfel de solenoid este practic egal cu zero. Mai mult, energia înmagazinată trebuie să fie uniform distribuită în volumul solenoidului deoarece cîmpul magnetic este uniform în toate punctele din interior. Astfel, putem scrie

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

sau, deoarece

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2$$

$$u_B = \frac{\frac{1}{2} Li^2}{Al}$$

Pentru a exprima aceasta în funcție de cîmpul magnetic, putem scrie pe L din această ecuație, folosind relația $L = \mu_0 n^2 lA$ (ecuația 36-5). De asemenea, putem scoate pe i din ecuația 34-7 ($B = \mu_0 in$) și să-l introducem în această ecuație. În final obținem

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \tag{36-19}$$

Această ecuație dă densitatea de energie înmagazinată într-un punct oarecare (în vid sau într-o substanță nemagnetică) în care inducția magnetică este $\vec{B}$. Această ecuație este valabilă pentru orice configurație de cîmp magnetic deși a fost dedusă pentru cazul special al unui solenoid. Comparați ecuația 36-19 cu ecuația 30-27

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (k=1) \tag{36-20}$$

care dă densitatea de energie (în vid) în orice punct dintr-un cîmp electric. Observați că atît u_B cît și u_E sînt proporționali cu pătratul mărimii cîmpului corespunzător, B sau E.

Față de cîmpul magnetic solenoidul joacă un rol similar celui jucat de condensatorul plan față de cîmpul electric. Ambele pot fi folosite la producerea unui cîmp uniform într-o regiune bine definită din spațiu și la deducerea pe o cale simplă a unor proprietăți ale acestor cîmpuri.

Exemplul 5. Un *cablu coaxial* lung (figura 36-7) este format din doi cilindri concentrici de raze a și b. Un curent constant i trece prin conductorul central și se întoarce prin conductorul exterior. Calculați energia înmagazinată în cîmpul magnetic dintre conductori pentru o porțiune de cablu de lungime l.

Figura 36-7. Exemplul 5. Secțiune transversală printr-un cablu coaxial; este indicat curentul constant din conductorul central și din cel exterior.

În spațiul dintre cei doi conductori, legea lui Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

duce la

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 i$$

sau

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Legea lui Ampère arată și că pentru punctele din afara conductorului exterior cîmpul magnetic este zero (de ce?). Cîmp magnetic există și în *interiorul* fiecărui conductor dar pe noi ne interesează acum numai energia înmagazinată *între* conductori.

Densitatea de energie în punctele dintre conductori este din ecuația 36-19

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2},$$

Considerăm un element de volum dV format dintr-un strat cilindric de raze r și $r+dr$ și de lungime l. Energia dU conținută în el este

$$dU = u dV = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r}(2\pi r l)(dr) = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\frac{dr}{r}$$

Energia magnetică totală înmagazinată se găsește integrînd

$$U = \int dU = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 r}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

care este expresia căutată.

Exemplul 6. Comparați energia necesară pentru a produce într-un cub cu latura de 10 cm (a) un cîmp electric uniform de 10^5 V/m și (b) un cîmp magnetic uniform de 1 T. Deși ambele cîmpuri sînt suficient de mari ele pot fi produse ușor în laborator.

(a) În cazul electric avem, unde V_0 este volumul cubului,

$$U_E = u_E V_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V_0$$

$$= (0,5)(8,9\cdot10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2)(10^5\ V/m)^2(0,1\ m)^3 = 4,5\cdot10^{-5}\ J.$$

(b) În cazul magnetic, din ecuația 36-19, avem

$$U_B = u_B V_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} V_0 = \frac{(1T)^2(0,1\ m)^3}{(2)(4\pi\cdot10^{-7}Wb/A\cdot m)} = 400\ J$$

În cazul cîmpurilor cu care se lucrează în mod normal în laborator, în cîmpul magnetic se înmagazinează o cantitate mult mai mare de energie decît în cel electric, raportul fiind de 10^7 în acest exemplu. Și invers, o energie mult mai mare este necesară pentru a produce un cîmp magnetic de mărime uzuală în laborator decît este necesară pentru a produce un cîmp electric de mărime uzuală similară.

Întrebări

1. Două bobine sînt conectate în serie. Inductanța lor echivalentă depinde de poziția lor relativă?

2. Este inductanța pe unitatea de lungime a unui solenoid în centrul său (a) aceeași, (b) mai mică sau (c) mai mare decît inductanța pe unitatea de lungime la capetele sale?

3. Doi solenoizi A și B de aceeași lungime și diametru, au un singur strat de spire ce se ating una de alta, grosimea izolației fiind neglijabilă. Solenoidul A este format din multe spire din sîrmă subțire iar solenoidul B din mai puține spire dar din sîrmă mai groasă. (a) Care din solenoizi are inductanța mai mare? (b) Care din solenoizi are constanta de timp inductivă mai mare?

4. Dacă fluxul ce trece prin fiecare spiră a unei bobine este același, inductanța bobinei poate fi calculată din $L = N\Phi_B/i$ (ecuația 36-4). Cum poate fi calculat L în cazul unei bobine pentru care această presupunere nu mai este valabilă?

5. Dacă curentul printr-o sursă de t.e.m. are același sens cu t.e.m., energia sursei scade; dacă curentul are sens opus t.e.m. (ca în cazul încărcării unei baterii) energia sursei crește. Pot fi aplicate aceste afirmații bobinei din figura 36-1 a și 36-1 b?

6. Arătați că dimensiunile celor două expresii ale lui L, $N\Phi_B/i$ (ecuația 36-4) și $\mathcal{E}/(di/dt)$ (ecuația 36-3 b) sînt aceleași.

7. Ni se dau N spire legate în serie. Cum trebuiesc aranjate spirele pentru ca autoinductanța obținută să aibe valoare maximă?

8. Depinde timpul necesar pentru ca i, curentul dintr-un circuit LR dat să atingă o anumită valoare din valoarea sa de echilibru, de mărimea t.e.m. aplicate?

9. Printr-o bobină cu o constantă de timp inductivă foarte mare se stabilește un curent constant. Cînd curentul este întrerupt cu ajutorul unui comutator, un arc puternic tinde să apară între contactele sale. Explicați. (Observație: întreruperea curentului poate fi foarte periculoasă în circuitele cu inductanță mare).

10. Poate fi t.e.m. autoindusă într-un circuit LR ca cel din figura 36.4 mai mare decît t.e.m. a bateriei?

11. Într-un circuit LR ca cel din figura 36-4 curentul prin rezistență este *întotdeauna* același cu cel prin bobină?

12. În circuitul din figura 36-3 t.e.m. autoindusă are valoare maximă în momentul în care întrerupătorul este în poziția a. Cum de este posibil acest lucru de vreme ce în acest moment curentul prin bobină este zero?

13. Dați cîteva exemple pentru a arăta că energia poate fi înmagazinată într-un cîmp magnetic.

14. Întrerupătorul din figura 36-3 este comutat din a în b. Ce se petrece cu energia înmagazinată în bobină?

15. Într-un tor densitatea de energie este mai mare în apropierea razei interioare sau în apropierea razei exterioare?

Probleme

1. Printr-o bobină de 10 H trece un curent de 2,0 A. Cum putem, obține o t.e.m. de inducție de 100 V în această bobină?

2. Două inductanțe L_1 și L_2 legate în serie sînt separate printr-o mare distanță. (a) Arătați că inductanța echivalentă L este L_1+L_2. (b) De ce trebuie ca distanța dintre ele să fie mare?

3. Arătați că dacă două bobine de inductanță egală L sînt conectate în paralel, inductanța echivalentă a combinației este $\frac{1}{2}L$. Distanța dintre bobine este mare.

4. Două fire lungi paralele a căror centre se găsesc la distanța d unul de altul sînt străbătute de curenți egali dar de sensuri opuse. Arătați că, neglijînd fluxul prin fire, inductanța unei porțiuni de lungime l dintr-o astfel de pereche de fire este dată de

$$L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

unde a este raza firelor. Vezi exemplul 4, capitolul 34.

5. Un solenoid lung și subțire poate fi îndoit sub formă de inel pentru a forma un tor. Arătați că dacă solenoidul este suficient de lung și de subțire ecuația ce dă inductanța unui tor (vezi exemplul 1) se reduce la aceea corespunzătoare unui solenoid (ecuația 36-5).

6. Un solenoid lung de 2,0 m, cu diametrul de 4,0 cm are un singur strat de spire din sîrmă de cupru cu diametrul de 2,54 mm. Care este inductanța pe unitatea de lungime pentru porțiunea centrală a solenoidului? Presupunem că spirele adiacente se ating și că grosimea izolației este neglijabilă.

7. Inductanța unei bobine cu 400 de spire bobinate strîns este de 8 m H. Care este fluxul magnetic prin bobină pentru un curent de $5\cdot10^{-3}$ A?

8. Pe un miez de lemn în formă de tor cu secțiune transversală pătrat, cu raza interioară de 10 cm iar cea exterioară de 12 cm este bobinat un strat de sîrmă cu diametrul de 1 mm (rezistență 49 Ω /m). Care sînt (a) inductanța și (b) constanta de timp inductivă? Neglijați grosimea izolației.

9. Curentul dintr-un circuit LR atinge o treime din valoarea sa de echilibru în 5,0 s. Care este constanta de timp inductivă?

10. Cîte „constante de timp" trebuie să așteptăm pentru ca, într-un circuit LR curentul să atingă 0,1 procente din valoarea sa de echilibru?

11. Întrerupătorul din figura 36-3 este comutat din b în a. Arătați că după un interval de timp egal cu o constantă de timp inductivă (a) energia totală transformată în căldură joule în rezistor este $0{,}168\,\mathcal{E}^2\tau_L/R$ și

că (b) energia înmagazinată în cîmpul magnetic este $0,200\ \varepsilon^2 \tau_L/R$. (c) Arătați că energia de echilibru înmagazinată în cîmpul magnetic este $0,500\ \varepsilon^2 \tau_L/R$.

12. Arătați că τ_L constanta de timp inductivă poate fi definită și ca timpul necesar pentru ca într-un circuit LR curentul să ajungă la valoarea sa de echilibru *dacă ar continua să crească cu viteza sa inițială.*

13. O diferență de potențial de 50 V este aplicată brusc unei bobine cu $L=50$ m H și $R=180\ \Omega$. Care este viteza cu care crește curentul după 0,001 s?

14. O bobină cu o inductanță de 2,0 H și o rezistență de 10 Ω este conectată brusc la o baterie cu rezistență internă zero și cu $\mathcal{E}=100$ V. După un interval de 0,1 s de la conectare, care este (a) energia înmagazinată în cîmpul magnetic în unitatea de timp? (b) căldura joule apărută în unitatea de timp? (c) energia furnizată de baterie în unitatea de timp?

15. O bobină cu o inductanță de 2,0 H și o rezistență de 10 Ω este conectată brusc la o baterie cu $\mathcal{E}=100$ V cu rezistență internă zero. (a) Care este curentul de echilibru? (b) Care este energia înmagazinată în cîmpul magnetic cînd prin bobină trece acest curent?

16. Arătați că atunci cînd comutatorul C din figura 36-3 este comutat din a în b toată energia înmagazinată în inductor apare sub formă de căldură joule în rezistor.

17. O spiră de curent circulară cu raza de 5,0 cm este străbătută de un curent de 100 A. Care este densitatea de energie în centrul spirei?

18. Care este densitatea de energie magnetică în centrul orbitei circulare a electronului atomului de hidrogen (vezi exemplul 9 capitolul 34)?

19. Un fir conductor lung este străbătut de un curent i, uniform distribuit în toată secțiunea sa transversală. Arătați că energia magnetică pe unitatea de lungime înmagazinată *în* fir este egală cu $\mu_0 i^2/16\pi$. Observați că nu depinde de diametrul firului.

20. Arătați că autoinductanța unei porțini de lungime l dintr-un fir lung, asociată numai fluxului din interiorul firului este $\mu_0 l/8\pi$. Presupunem curentul uniform distribuit, ca în problema 19.

21. Cablul coaxial din exemplul 5 are dimensiunile: $a=1,0$ mm, $b=4,0$ mm și $c=5,0$ mm (c este raza suprafeței exterioare a conductorului exterior). Prin conductorul interior trece un curent de 10 A iar prin conductorul exterior trece un curent de întoarcere egal dar de sens contrar. Calculați și comparați energia magnetică înmagazinată pe metrul de lungime de cablu (a) în conductorul central (b) în spațiul dintre conductori și (c) în conductorul exterior.

22. Un fir de cupru cu diametrul de 2,54 mm este străbătut de un curent de 10 A. Calculați (a) densitatea de energie magnetică și (b) densitatea de energie electrică la suprafața firului. Rezistența firului pe unitatea de lungime este $3,28\cdot10^{-3}\ \Omega$ /m.

23. Care trebuie să fie intensitatea unui cîmp electric uniform pentru a avea aceeași densitate de energie cu aceea a unui cîmp magnetic de 0,5 T?

Capitolul 37

Proprietăţile magnetice ale materiei

37-1 Poli şi dipoli

În electricitate *sarcina izolată* q este cea mai simplă entitate ce poate exista. Dacă două astfel de sarcini de semn opus sînt aduse una lîngă alta, ele formează un *dipol electric* caracterizat prin momentul electric dipolar $\vec{p}$. În magnetism se pare că nu există „poli" magnetici izolaţi care să corespundă sarcinilor electrice izolate. Cea mai simplă entitate magnetică este *dipolul magnetic* caracterizat prin momentul magnetic dipolar $\vec{\mu}$. În tabela 34-1 sînt însumate unele caracteristici ale dipolilor electrici şi magnetici.

O spiră de curent, un magnet în formă de bară şi un solenoid de lungime finită sînt exemple de dipoli magnetici. Momentele lor magnetice dipolare pot fi măsurate plasînd dipolul într-un cîmp magnetic exterior $\vec{B}$, măsurînd cuplul $\vec{M}$ ce acţionează asupra lui şi calculînd $\vec{\mu}$ din ecuaţia 33-11

$$\vec{M}=\vec{\mu}\times\vec{B} \tag{37-1}$$

Sau, putem măsura pe $\vec{B}$ produs de dipol într-un punct în lungul axei sale la distanţa r (mare) de centrul său şi să calculăm pe μ din expresia din tabela 34-1

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{r^3} \tag{37-2}$$

Figura 37-1, în care este arătată pilitură de fier răspîndită pe o foaie de hîrtie sub care se află un magnet în formă de bară, sugerează că acest dipol poate fi considerat ca format din doi „poli" la distanţa d unul de altul. Totuşi, toate încercările de a izola aceşti poli au eşuat. Dacă mag-

netul este spart, ca în figura 37-2, fragmentele sînt tot dipoli şi nu poli izolaţi*. Dacă descompunem un magnet în electronii şi nucleele din care sînt formaţi atomii săi vom constata că şi aceste particule fundamentale sînt de fapt tot dipoli. Figura 37-3 scoate în evidenţă deosebirile între structura cîmpului electric şi magnetic al electronului liber.

Toţi electronii au *un moment cinetic de „spin"* caracteristic, în jurul unei axe proprii, care au valoarea

$$L_S = 0{,}52723 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Acesta este sugerat în figura 37-3, *b* prin vectorul $\vec{L}_s$. O astfel de sarcină care se roteşte în jurul unei axe proprii poate fi considerată din punct de vedere clasic ca fiind formată din spire de curent infinit de mici. Fiecare din aceste spire este un mic dipol magnetic, al cărui moment este dat de (ecuaţia 33-10).

$$\mu = Ni\,A \qquad (37\text{-}3)$$

unde i este curentul echivalent în fiecare spiră infinit mică şi A este suprafaţa spirei. Numărul de spire, N, este egal cu unitatea pentru fiecare spiră. Momentul magnetic dipolar al sarcinii ce se roteşte poate fi găsit integrînd peste momentele spirelor de curent infinit de mici din care este formată; vezi problema 2.

Deşi acest model al unui electron ce se roteşte în jurul unei axe proprii este prea mecanicist şi nu este în acord cu

Figura 37-1. Un magnet în formă de bară este un dipol magnetic. Pilitura de fier sugerează liniile lui $\vec{B}$ din figura 37-4 a (Prin amabilitatea Comitetului de Studii a Ştiinţelor Fizice (P. S. S. C.)).

Figura 37-2. Dacă un magnet în formă de bară este spart, fiecare fragment devine un mic dipol.

* Polii magnetici izolaţi (monopolii) au fost presupuşi că există de către P. A. M. Dirac (1931) şi pînă în prezent nici o teorie nu interzice existenţa lor. (N.T.).

Figura 37-3. a) Liniile lui $\vec{E}$ și b) ale lui $\vec{B}$ corespunzătoare unui electron. Momentul magnetic dipolar al electronului $\vec{\mu}_l$ are opus vectorului moment cinetic de spin $\vec{L}_s$.

fizica cuantică modernă, rămîne adevărat că momentele magnetice dipolare ale particulelor elementare sînt strîns legate de momentele lor cinetice intrinseci.

Acele particule și nuclee a căror moment cinetic de spin este zero (particula α, pionul, nucleul de $_{16}O$ etc.) nu au moment magnetic dipolar. Momentul magnetic „intrinsec" sau „de spin" al electronului trebuie deosebit de orice alt moment magnetic pe care îl poate avea ca urmare a mișcării sale *orbitale* în atom; vezi exemplul 2.

Exemplul 1. Imaginați o metodă de măsură a lui μ pentru un magnet în formă de bară.

(a) Plasați magnetul într-un cîmp magnetic exterior uniform $\vec{B}$, ce face unghiul θ cu $\vec{\mu}$. Mărimea cuplului ce acționează asupra magnetului (vezi ecuația 37-1) este dată de

$$M=\mu B \sin \theta$$

Deci, măsurînd pe M, B și θ obținem pe μ.

(b) O a doua metodă este să suspendăm magnetul de centrul său de masă și să-l lăsăm să oscileze în jurul poziției sale de echilibru stabil în cîmpul exterior $\vec{B}$. În cazul oscilațiilor *mici*, $\sin\theta$ poate fi înlocuit cu Θ și ecuația dată mai sus devine

$$M=(\mu B)\,\theta=-k\,\theta$$

unde k este o constantă. Semnul minus a fost pus pentru a arăta că M reprezintă momentul unui *cuplu de revenire*. Deoarece M este proporțional cu θ, condiția de mișcare oscilatorie armonică simplă este îndeplinită. Frecvența ν este dată de inversul ecuației 15-24

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu B}{I}}$$

Măsurînd pe ν, B și I putem găsi pe μ din această ecuație.

Exemplul 2. Un electron ce se mișcă într-un atom pe o orbită pe care o presupunem circulară, de rază r se comportă ca o mică spiră de curent și are un *moment magnetic dipolar orbital** notat în mod obișnuit cu μ_l. Deduceți o relație între μ_l și *momentul cinetic orbital* L_l.

---

* Acesta nu trebuie confundat cu momentul dipolar magnetic μ_s legat de spirul electronului, care este și el prezent.

În legea a doua a lui Newton ($F=ma$) introducem pe F din legea lui Coulomb

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=ma=\frac{mv^2}{r}$$

sau

$$v=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}} \tag{37-4}$$

Viteza unghiulară ω este dată de

$$\omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}$$

Curentul pe orbită este dat de viteza cu care sarcina trece printr-un punct oarecare

$$i=e\nu=e\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)=\sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}}$$

Momentul dipolar orbital μ_l este dat de ecuaţia 37-3 dacă punem $N=1$ şi $A=\pi r^2$

$$=NiA=(1)\sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}}(\pi r^2)=\frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}} \tag{37-5}$$

Momentul cinetic orbital L_l este

$$L_l=(mv)r$$

Combinînd cu ecuaţia 37-4 obţinem

$$L_l=\sqrt{\frac{e^2mr}{4\pi\varepsilon_0}}$$

În final, eliminînd pe r din această ecuaţie şi ecuaţia 37-5 obţinem

$$\mu_l=L_l\left(\frac{e}{2m}\right)$$

care arată că momentul orbital magnetic al electronului este proporţional cu momentul său cinetic orbital.

Pentru $r=5{,}1\cdot10^{-11}$ m, valoarea ce corespunde stării normale a hidrogenului, avem din ecuaţia 37-5

$$\mu_l=\frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}}=\frac{(1{,}6\times10^{-19}\mathrm{C})^2}{4}\sqrt{\frac{5{,}1\times10^{-11}\mathrm{m}}{(\pi)(8{,}9\cdot10^{-12}\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(9{,}1\cdot10^{-31}\mathrm{kg})}}=$$

$$=9{,}1\times10^{-24}\mathrm{A\cdot m^2}$$

37-2 Teorema lui Gauss pentru magnetism

Teorema lui Gauss pentru magnetism, care este una din ecuaţiile de bază din electromagnetism (vezi tabela 38-3) este o formulare matematică a concluziei la care se pare că ne forţează să ajungem toate rezul-

Figura 37-4. Liniile lui $\vec{B}$ pentru a) un magnet în formă de bară și b) pentru un solenoid scurt. c) Liniile lui $\vec{E}$ pentru un dipol electric. La distanțe suficient de mari toate cele trei cîmpuri sînt asemănătoare cu cel al unui dipol. Cele patru curbe punctate reprezintă intersecția cu planul figurii a suprafețelor Gauss închise. Observați că Φ_B este zero pentru a) sau b). Φ_E este zero pentru suprafețele de tipul II din c), suprafețe ce nu conțin sarcină, dar Φ_E este diferit de zero pentru suprafețe de tipul I.

tatele din magnetism și anume că, *nu există poli magnetici izolați.* Această ecuație afirmă că fluxul Φ_B prin orice suprafață Gauss *închisă* trebuie să fie zero

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (37\text{-}6)$$

unde integrala trebuie luată pe întreaga suprafață închisă. Să comparăm aceasta cu teorema lui Gauss pentru electricitate, care este

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \qquad (37\text{-}7)$$

Faptul că membrul drept al ecuației 37-6 este egal cu zero pe cînd membrul drept al ecuației 37-7 nu, înseamnă că în magnetism nu există un analog al sarcinii libere q din electricitate.

În figura 37-4 a este arătată o suprafață Gauss ce închide una din extremitățile unui magnet în formă de bară. Se observă că majoritatea liniilor lui $\vec{B}$ intră în suprafață în porțiunea ei din interiorul magnetului și ies din suprafață, în porțiunea din exteriorul megnetului. Există astfel un flux spre interior (sau negativ) în interiorul magnetului și un flux spre exterior (sau pozitiv) în exteriorul lui. Fluxul total pentru întreaga suprafață este egal cu zero. Studentul interesat va găsi în paragraful 37-7 o discuție mai completă a considerentelor pentru care liniile lui $\vec{B}$ pentru un magnet în formă de bară au forma indicată.

În figura 37-4 b este arătată o suprafață similară pentru cazul unui solenoid de lungime finită, care, ca și magnetul în formă de bară, este tot un dipol magnetic. Și aici Φ_B este egal cu zero. Din figurile 37-4 a și b se vede clar că $\vec{B}$ nu are „surse"; adică nu există puncte din care să iasă liniile lui $\vec{B}$. De asemenea, nu există „puțuri" pentru $\vec{B}$; adică, nu există puncte către care $\vec{B}$ converge. Cu alte cuvinte, *nu există poli magnetici liberi.*

Figura 37-4 c arată o suprafață Gauss (I) ce înconjoară capătul pozitiv al unui dipol electric. În acest caz există un flux net al liniilor lui $\vec{E}$. $\vec{E}$ are o „sursă"; aceasta este sarcina q. Dacă q este negativ, avem un „puț" pentru $\vec{E}$ deoarece liniile lui $\vec{E}$ se termină pe sarcinile negative. Pentru suprafețe de tipul II din figura 37-4 c pentru care sarcina din interior este zero, fluxul lui $\vec{E}$ pentru întreaga suprafață este de asemenea zero.

37-3 Paramagnetismul

Fenomenele magnetice pe care le întîlnim în viața de toate zilele reprezintă un capitol important dar special al magnetismului numit *feromagnetism;* îl vom discuta în paragraful 37-5. Aici vom discuta o formă mai slabă de magnetism numită *paramagnetism.*

Pentru majoritatea atomilor și ionilor, efectele magnetice ale electronilor, considerînd atît mișcarea de spin cît și mișcarea orbitală, se com-

pensează exact astfel încît atomul sau ionul nu este magnetic. Aceasta este valabil pentru gazele inerte ca de exemplu neonul și pentru ioni* ca de exemplu Cu^{+}, din care este format cuprul obișnuit. Aceste materiale nu prezintă paramagnetism. Pentru alți atomi sau ioni efectele magnetice ale electronilor nu se compensează, astfel că atomul în întregime posedă un moment magnetic dipolar $\vec{\mu}$. Ca exemple pot fi date așa-numitele elemente de tranziție, spre exemplu Mn^{++}, pămînturile rare, ca de exemplu Gd^{+++} și actinidele, ca de exemplu U^{++++}.

Dacă o probă formată din N atomi, fiecare de moment magnetic dipolar $\vec{\mu}$, este plasată într-un cîmp magnetic, dipolii atomici elementari tind să se alinieze în cîmp. În cazul unei alinieri perfecte proba va avea un moment magnetic dipolar total egal cu $N\vec{\mu}$. În realitate acest proces de aliniere este perturbat serios de ciocnirile ce au loc între atomi în cazul cînd proba este un gaz sau de vibrațiile termice, dacă proba este un solid. Putem să apreciem importanța acestui efect de agitație termică comparînd două energii: una $\left(=\frac{3}{2}kT\right)$ este energia cinetică medie de translație a unui atom de gaz la temperatura T; cealaltă $(=2\mu B)$ este diferența în energie dintre un atom aliniat în cîmpul magnetic și altul antiparalel cu cîmpul. După cum se arată în exemplul 3, efectul ciocnirilor este foarte mare pentru temperaturi și cîmpuri obișnuite. Cînd este plasată într-un cîmp magnetic exterior proba dobîndește un moment magnetic, dar în mod obișnuit acest moment este mult mai mic decît momentul maxim posibil $N\mu$.

Exemplul 3. Un gaz paramagnetic, a cărui atomi (vezi exemplul 2) au un moment magnetic dipolar de aproximativ 10^{-23} A·m², este plasat într-un cîmp magnetic exterior egal cu 1 T. Calculați și comparați U_T, energia cinetică medie de translație $\left(=\frac{3}{2}kT\right)$ și U_B energia magnetică $(=2\mu B)$ la temperatura camerii $(T=300°\text{ K})$

$$U_T=\frac{3}{2}kT=\left(\frac{3}{2}\right)(1{,}38\times10^{-23}\text{ J/°K})(300°\text{ K})=6\times10^{-21}\text{ J}$$

$$U_B=2\mu B=(2)(10^{-23}\text{ A}\cdot\text{m}^2)(1\text{ T})=2\times10^{-23}\text{ J}$$

Deoarece U_T este egal cu 300 U_B, vedem că schimbul de energie prin ciocniri împiedică serios alinierea dipolilor în cîmpul exterior.

Dacă o probă dintr-o substanță paramagnetică este plasată într-un cîmp magnetic neuniform, cum este cel din vecinătatea polului unui magnet puternic, ea va fi atrasă către regiunea de cîmp mai mare, adică către pol. Putem înțelege aceasta desenînd o situație analoagă cazului electric, din figura 37-5, care arată o probă dielectrică (o sferă) într-un cîmp electric neuniform. Forța electrică rezultantă are în figură sensul spre dreapta și este

$$F_e=q(E+\Delta E)-q(E-\Delta E)=q(2\Delta E)$$

---

* Cu^{+} arată că un electron al atomului de cupru a fost îndepărtat; Al^{+++} arată că din atomul de aluminiu au fost îndepărtați trei electroni, etc.

care poate fi scrisă sub forma

$$F_e = \frac{(q\Delta x)}{\Delta x} 2\Delta E = p\left(\frac{2\Delta E}{\Delta x}\right) \simeq p\left(\frac{dE}{dx}\right)_{max}$$

Aici p $(=q\Delta x)$ este momentul electric dipolar indus al sferei. La limită, pentru o sferă foarte mică, $(2\Delta E/\Delta x)$ tinde către $(dE/dx)_{max}$, care reprezintă gradientul cîmpului electric în centrul sferei.

În cazul magnetic corespunzător, avem prin analogie

$$F_m = \mu\left(\frac{dB}{dx}\right)_{max} \tag{37-8}$$

Astfel, putem afla momentul magnetic dipolar $\vec{\mu}$ al unei probe paramagnetice mici, măsurînd forța magnetică F_m ce acționează asupra ei atunci cînd este plasată într-un cîmp magnetic neuniform de gradient $(dB/dx)_{max}$ cunoscut. *Magnetizarea* $\vec{M}$ este definită ca momentul magnetic al unității de volum

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{V}$$

unde V este volumul probei, Magnetizarea este un vector deoarece $\vec{\mu}$, momentul dipolar al probei este un vector.

În 1895 Pierre Curie (1859—1906) a dedus pe cale experimentală că magnetizarea M a unei probe paramagnetice este direct proporțională cu B, valoarea efectivă a inducției magnetice în care este plasată proba și invers proporțională cu temperatura

$$M = C\frac{B}{T} \tag{37-9}$$

Figura 37-5. O sferă dielectrică într-un cîmp electric neuniform.

Figura 37-6. Raportul M/M_{max} pentru o sare paramagnetică (alaun de crom și potasiu) pentru diferite cîmpuri magnetice și diferite temperaturi. Curba ce trece prin punctele experimentale este o curbă teoretică calculată folosind fizica modernă. (Din măsurătorile lui W. E. Henry).

în care C este o constantă. Această ecuaţie este cunoscută sub numele de *legea lui Curie*. Această lege este corectă din punct de vedere fizic, deoarece creşterea lui B produce alinierea dipolilor elementari din probă, deci creşterea lui M pe cînd creşterea lui T perturbă această aliniere, adică duce la scăderea lui M. Legea lui Curie este bine verificată experimental cu condiţia ca raportul B/T să nu fie prea mare.

M nu poate creşte nelimitat, aşa cum s-ar putea crede din legea lui Curie, ci trebuie să tindă către o valoare maximă M_{max} ($=\mu N/V$) ce corespunde unei alinieri complete a celor N dipoli conţinuţi în volumul V al probei. În figura 37-6 este arătat acest efect de saturare pentru o probă de $CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$. Proprietăţile paramagnetice ale acestei sări se datoresc numai ionilor de crom, toate celelalte elemente fiind inerte din punct de vedere paramagnetic. Pentru a atinge 99,5% din valoarea de saturaţie, cîmpul magnetic aplicat trebuie să fie de 5 T iar temperatura egală cu 1,3°K. Observaţi că pentru condiţii mult mai uşor de obţinut experimental, ca de exemplu, pentru $B=1$ T şi $T=10$°K, abscisa din figura 37-6 atinge doar valoarea de 1,0. Astfel că legea lui Curie este bine verificată experimental pentru această valoare şi pentru toate valorile mai mici ale raportului B/T. Curba ce trece prin punctele experimentale din această figură este calculată teoretic folosind fizica cuantică modernă; concordanţa cu experienţa este excelentă.

37-4 Diamagnetismul

În anul 1846 Michael Faraday a descoperit că o probă de bismut este *respinsă* cînd este apropiată de unul din polii unui magnet puternic. El a numit astfel de substanţe *diamagnetice*. Diamagnetismul, deşi prezent în toate substanţele, este un efect atît de slab încît prezenţa sa este mascată în substanţele formate din

Figura 37-7. a) Un electron atomic ce se mişcă pe o orbită. b) Un electron ce se mişcă în sens opus. c) Introducerea unui cîmp magnetic produce *scăderea* vitezii lineare a electronului în cazul a) adică $v_1 < v_0$. d) Cîmpul magnetic produce *creşterea* vitezii lineare a electronului în cazul b), adică $v_2 > v_0$.

atomi ce au un moment magnetic dipolar net, adică în substanţele paramagnetice sau feromagnetice.

Figurile 37-7 a şi b arată un electron dintr-un atom diamagnetic ce se mişcă cu o frecvenţă unghiulară ω_0 pe o orbită presupusă circulară de rază r. Fiecare electron se mişcă sub acţiunea unei forţe centripete $\vec{F}_E$ de origină electrostatică. Din legea a doua a lui Newton

$$F_E = ma = m\omega_0^2 r \quad (37\text{-}10)$$

Fiecare electron ce se roteşte pe orbita sa posedă un moment magnetic orbital, dar, deoarece într-un atom orbitele au toate orientările posibile, momentul magnetic *total* al atomului este egal cu zero. În figura 37-7 a, de exemplu, momentul magnetic dipolar $\vec{\mu}_l$ intră în pagină; în figura 37-7 b el iese din pagină şi efectul

net pentru aceste două orbite este compensarea momentelor. Acest efect de compensare este arătat şi în figura 37-8.

Dacă se aplică un cîmp exterior $\vec{B}$, ca în figurile 37-7 c şi d, asupra electronului va acţiona o forţă *suplimentară*, dată de $-e(\vec{v}\times\vec{B})$. Această forţă magnetică acţionează întotdeauna normal la direcţia de mişcare; mărimea sa este

$$F_B=evB=e(\omega r)B \tag{37-11}$$

Arătaţi că în figura 37-7 c forţele $\vec{F}_B$ şi $\vec{F}_E$ au sensuri opuse şi că în figura 37-7 d ele au acelaşi sens. Observaţi că deoarece la aplicarea cîmpului magnetic forţa centripetă se modifică (se poate arăta că raza rămîne constantă), viteza unghiulară trebuie şi ea să se modifice; astfel ω din ecuaţia 37-11 diferă de ω_0 din ecuaţia 37-10.

Aplicînd legea a doua a lui Newton figurilor 37-7 c şi d obţinem pentru forţele *rezultante* asupra electronilor (pentru ambele sensuri de rotaţie)

$$F_E\pm F_B=ma=m\omega^2r$$

Introducînd ecuaţiile 37-10 şi 37-11 în această ecuaţie obţinem

$$m\omega_0^2r\pm e\omega rB=m\omega^2r$$

sau

$$\omega^2\mp\left(\frac{eB}{m}\right)\omega-\omega_0^2=0 \tag{37-12}$$

Această ecuaţie pătratică poate fi rezolvată în funcţie de ω, noua viteză unghiulară. În loc să facem aceasta ne folosim de faptul (dat fără demonstraţie; vezi problema 7) că ω diferă puţin de ω_0 chiar pentru cîmpurile magnetice exterioare cele mai puternice. Astfel

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega \tag{37-13}$$

unde $\Delta\omega\ll\omega_0$. Introducînd această ecuaţie în ecuaţia 37-12 obţinem

$$[\omega_0^2+2\omega_0\Delta\omega+(\Delta\omega)^2]\pm[\beta\omega_0+\beta\Delta\omega]-\omega_0^2=0$$

unde am folosit notaţia $eB/m=\beta$. Cei doi termeni ω_0^2 se anulează reciproc; termenii $(\Delta\omega)^2$ şi $\beta\Delta\omega$ sînt mici în comparaţie cu termenii rămaşi şi cu o eroare foarte mică pot fi consideraţi egali cu zero. Astfel, cu o foarte bună aproximaţie, se obţine

$$\Delta\omega\simeq\mp\frac{1}{2}\beta=\mp\frac{eB}{2m} \tag{37-14}$$

sau, din ecuaţia 37-13

$$\omega=\omega_0\mp\frac{eB}{2m}$$

Astfel, aplicarea unui cîmp magnetic are ca efect creşterea sau descreşterea (în funcţie de sensul de rotaţie) vitezii unghiulare. Aceasta, la rîndul ei, are ca efect creşterea sau descreşterea momentului magnetic orbital al electronului ce se roteşte pe orbita atomică (vezi exemplul 2).

Figura 37-8. Momentele magnetice ale celor doi electroni ce se mişcă în sensuri opuse într-un atom, se compensează atunci cînd nu există un cîmp magnetic exterior, ca în cazul a) dar *nu* se compensează în prezenţa unui cîmp, ca în b). Observaţi că momentul rezultant din b) are sens *opus* lui $\vec{B}$. Comparaţi cu atenţie cu figura 37-7.

În figura 37-7 c viteza unghiulară scade (deoarece forţa centripetă scade) astfel că mărimea momentului magnetic scade. În figura 37-7 d, din contră, viteza unghiulară creşte astfel că mărimea lui $\vec{\mu}_l$ creşte. Aceste efecte sînt arătate în dreapta figurii 37-8 unde se poate observa că cele două momente magnetice *nu se mai compensează*.

Vedem că, dacă se aplică un cîmp magnetic $\vec{B}$ unei substanţe diamagnetice (cu moment magnetic total egal cu zero în absenţa cîmpului aplicat), va fi *indus* un moment magnetic a cărui sens (iese din planul figurii 37-7) este *opus* sensului lui $\vec{B}$; vezi şi figura 37-8. Aceasta este exact contrarul celor întîlnite în paramagnetism, unde dipolii magnetici (*permanenţi*) tindeau să aibe *acelaşi* sens cu cel al cîmpului aplicat.

Putem acum înţelege de ce o probă diamagnetică este respinsă cînd este apropiată de unul din polii unui magnet puternic. Dacă polul este polul nord, în spaţiul din jurul lui va exista un cîmp magnetic neuniform de inducţie $\vec{B}$ a cărui linii ies din pol. Dacă o sferă dintr-un material diamagnetic (să zicem bismut) este adusă în vecinătatea acestui pol, magnetizarea $\vec{M}$ ce este indusă în ea are sensul spre pol, adică *opus* lui $\vec{B}$. Astfel, partea dinspre magnet a sferei se comportă ca un pol nord şi este *respinsă* de polul nord al magnetului. În cazul unei sfere paramagnetice vectorul $\vec{M}$ este *paralel* cu $\vec{B}$ iar partea apropiată de magnet a sferei este pol sud, fiind astfel *atrasă* de polul nord al magnetului.

Exemplul 4. Calculaţi cu cît se *modifică* momentul magnetic al electronului din exemplul 2 dacă asupra lui acţionează un cîmp magnetic de inducţie $\vec{B}$ egală cu 2,0 T normal la planul orbitei.

Obţinem pe μ din ecuaţia 37-3

$$\mu = NiA = (1)(e\nu)(\pi r^2) = (1)\left(\frac{e\omega}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{2}er^2\omega$$

Variaţia lui μ este

$$\Delta\mu = \frac{1}{2}er^2\Delta\omega$$

sau, din ecuaţia 37-14

$$\Delta\mu = \pm\frac{1}{2}er^2\left(\frac{eB}{2m}\right) = \pm\frac{e^2Br^2}{4m}$$

Introducînd valorile numerice obținem

$$\Delta\mu = \pm \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}\ C)^2\ (2,0\ T)\ (5,1 \cdot 10^{-11}\ m)^2}{(4)\ (9,1 \cdot 10^{-31}\ kg)} = \pm 3,7 \cdot 10^{-29}\ A \cdot m^2$$

În exemplul 2, momentul μ_l era de $9,1 \cdot 10^{-24}\ A \cdot m^2$, astfel că modificarea produsă chiar de un cîmp magnetic exterior intens este destul de mică, raportul $\Delta\mu/\mu_l$ fiind de aproximativ $4 \cdot 10^{-6}$.

37-5 Feromagnetismul

În cazul a cinci elemente (Fe, Co, Ni, Gd și Dy) și a unei serii de aliaje a acestora cu alte elemente apare un efect special ce permite probei să atingă un înalt grad de aliniere magnetică în pofida tendinței de dezordonare produsă de agitația termică a atomilor. În astfel de materiale, cunoscute sub numele de *feromagnetice* între atomii adiacenți apare o formă specială de interacție numită *cuplaj de schimb*, ce face ca momentele lor magnetice să fie cuplate împreună într-un paralelism rigid*. Fizica cuantică modernă arată cu succes că aceasta se petrece doar pentru cele cinci elemente enumerate. Dacă temperatura crește peste o anumită valoare critică, numită *temperatura Curie*, cuplajul de schimb dispare brusc și materialul devine doar paramagnetic. Pentru fier temperatura Curie este de 1 043°K. Evident că feromagnetismul nu este o proprietate individuală a fiecărui atom sau ion, ea fiind legată de interacția atomilor și ionilor cu vecinii din rețeaua cristalină a solidului (vezi figura 21-5).

În figura 37-9 este dată o *curbă de magnetizare* pentru o probă de fier. Pentru obținerea unei astfel de curbe se procedează în felul următor: proba, pe care o presupunem inițial nemagnetizată, se modelează în formă de inel iar pe ea se bobinează sîrmă, obținîndu-se astfel o bobină toroidală, ca în figura 37-10, numită *inel Rowland*. Cînd prin bobină trece un curent *i*, *dacă miezul de fier nu ar fi prezent*, în tor s-ar produce un cîmp de inducție dat de ecuația 34-4

$$B_0 = \mu_0 n i \qquad (37\text{-}15)$$

unde n este numărul de spire din tor pe unitatea de lungime. Deși această formulă a fost dedusă pentru cazul unui solenoid lung, ea poate fi aplicată și unui tor dacă $d \ll r$ în figura 37-10. Datorită existenței miezului de fier, valoarea reală a lui $\vec{B}$ în interiorul bobinei toroidale va fi mai mare decît $\vec{B}_0$, cu un factor important în multe cazuri, deoarece dipolii atomici elementari din miez se aliniază în cîmpul aplicat $\vec{B}_0$, producînd astfel un cîmp propriu de inducție. Putem deci scrie

$$B = B_0 + B_M \qquad (37\text{-}16)$$

---

* Cuplajul de schimb fiind un efect pur cuantic, nu poate fi „explicat" pe baza fizicii clasice.

Figura 37-9. O curbă de magnetizare pentru fier.

Figura 37-10. Un inel Rowland; se vede bobina secundară S.

unde B_M este inducţia magnetică produsă de probă; ea este proporţională cu magnetizarea M a probei. În general $B_M \gg B_0$.

Cîmpul B_0 este proporţional cu i curentul prin bobina toroidală şi poate fi calculat uşor folosind ecuaţia 37-15; B poate fi măsurat printr-un procedeu ce va fi descris mai jos. Şi astfel, din ecuaţia 37-16 poate fi obţinută valoarea experimentală a lui B_M. Valoarea sa maximă $B_{M, max}$ corespunde unei alinieri complete a dipolilor atomici din fier. Astfel, putem reprezenta, ca în figura 37-9, gradul de aliniere (ordonare) $(=B_M/B_{M, max})$ în funcţie de B_0. Pentru această probă se obţine o saturaţie de 96,5% pentru $B_0=0{,}13$ T (acest punct se găseşte pe figură la aproximativ 4,9 m în dreapta originii); mărind pe B_0 la 1 T (aproximativ 36,6 m în dreapta în figura 37-9) valoarea saturaţiei ajunge doar la 97,7%.

Pentru a măsura pe B produs în sistemul din figura 37-10, să creştem curentul prin spirele bobinei toroidale de la zero la i. Fluxul prin bobina secundară S va varia cu BA, unde A este aria torului. Conform legii lui Faraday, această variaţie de flux va produce în bobina S o t.e.m. indusă. Pentru simplitate, presupunem că, i curentul prin tor este astfel variat încît creşterea lui B să se facă liniar în timp în intervalul Δt, după cum este arătat în figura 37-11 a. T.e.m. din bobina S în acest interval, va fi, din legea lui Faraday*

$$\mathcal{E}=N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}=\frac{NBA}{\Delta t}$$

* Neglijăm semnul minus deoarece ne interesează numai mărimea lui $\mathcal{E}$.

unde N este numărul de spire din bobina S. Această t.e.m. va produce în bobina S un curent i_s dat de

$$i_s = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBA}{R\Delta t}$$

sau

$$B = \frac{(i_s \Delta t)\, R}{NA} = \frac{qR}{NA}$$

în care R este rezistența bobinei S, iar $i_s \Delta t$ este sarcina q ce trece prin această bobină în timpul Δt. Dacă se conectează la bobina S un așa-numit *galvanometru-balistic*, devierea sa va fi o măsură a sarcinii q. Astfel putem determina pe B pentru orice valoare a curentului i prin înfășurarea bobinei toroidale. În practică nu este necesar ca variația lui B cu timpul $B(t)$ din figura 37-11, a să fie lineară în intervalul de timp Δt.

Figura 37-11. a) B pentru un inel Rowland atunci cînd prin înfășurare curentul crește de la zero în intervalul Δt. b) Curentul corespunzător indus în bobina secundară. Ambele curbe sînt idealizate: în realitate, variațiile sînt mult mai puțin rapide (pe grafic aceasta se traduce prin rotunjirea colțurilor).

Curbele de magnetizare pentru un material feromagnetic obținute la creșterea și la descreșterea curentului prin bobina toroidală *nu se suprapun una peste cealaltă*. În figura 37-12 este redată următoarea experiență efectuată cu ajutorul unui inel Rowland: (1) inițial fierul este nemagnetizat (punctul a), se crește curentul prin bobina toroidală pînă ce $B_0\,(=\mu_0 ni)$ atinge valoarea corespunzătoare punctului b; (2) se micșorează curentul în bobină pînă se ajunge din nou la zero (punctul c); (3) se inversează sensul curentului prin bobină și se crește valoarea sa pînă ce se atinge punctul d; (4) se reduce din nou curentul la zero (punctul e); (5) se inversează din nou sensul curentului și se crește pînă ce se atinge din nou punctul b. Această ireversibilitate arătată în figura 37-12 poartă numele de *histerezis*. Observați că în punctele c și e miezul de fier este magnetizat chiar dacă curentul prin bobina toroidală este zero; acesta este cunoscutul fenomen de *magnetism permanent*.

Curba de magnetizare din cazul paramagnetic (figura 37-6) se poate explica prin cele două tendințe opuse: una de aliniere (ordonare) în cîmpul exterior și cealaltă de dezordonare datorită vibrațiilor termice. În cazul feromagnetic, am presupus totuși că dipolii atomici adiacenți sînt ținuți într-un paralelism rigid. De ce atunci, momentul magnetic al probei nu atinge valoarea sa de saturație pentru valori foarte mici — chiar zero — ale lui B_0? În interpretarea modernă

Figura 37-12. Curba de magnetizare (ab) pentru o probă de fier și curba de hysterezis corespunzătoare $(abcde)$.

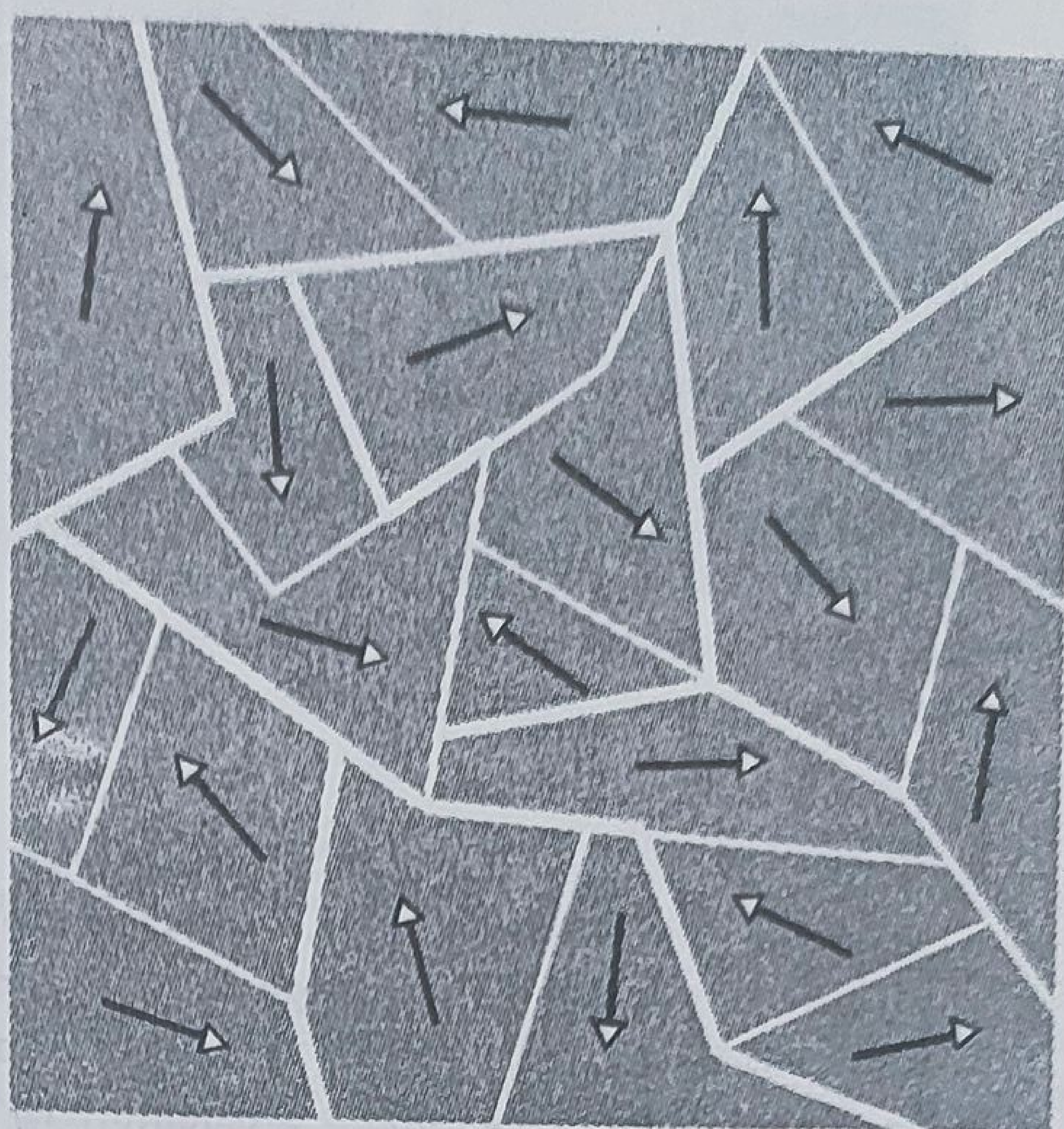


Figura 37-13. Domeniile magnetice dintr-o probă policristalină feromagnetică sînt astfel orientate încît efectul exterior este mic. Totuşi, fiecare domeniu este format din dipoli atomici complet aliniaţi, după cum este indicat prin săgeţi. Graniţele groase delimitează cristalitele din care este format solidul; graniţele subţiri delimitează domeniile dintr-un cristalit.

se presupune existenţa în probă a unor *domenii*, adică a unor regiuni în care există o aliniere aproape perfectă. Dar momentele magnetice ale domeniilor nu sînt paralele între ele pentru valori suficient de mici ale lui $\vec{B}_0$, după cum se indică şi în figura 37-13.

În figura 37-14 este dată imaginea unor domenii, obţinută prin împrăştierea unei suspensii coloidale de pulbere foarte fină de oxid de fier pe suprafaţa decapată în mod corespunzător a unui monocristal de fier. Graniţele dintre domenii, care sînt regiuni înguste în care alinierea dipolilor elementari variază de la o anumită direcţie într-un domeniu la o direcţie cu totul diferită în celălalt, sînt locuri în care sînt prezente cîmpuri magnetice intense dar puternic localizate şi neuniforme. Particulele din suspensia coloidală sînt atrase de aceste regiuni. Deşi dipolii atomici din domeniile individuale sînt complet aliniaţi, proba în totalitatea ei poate avea un moment magnetic rezultant foarte mic. Aşa stau lucrurile în cazul unui cui de fier nemagnetizat.

Cînd magnetizăm bucata de fier introducînd-o într-un cîmp magnetic exterior, se produc două efecte. Unul este creşterea dimensiunii domeniilor ce sînt orientate favorabil pe seama acelora ce nu sînt, ca în figura 37-15. Al doilea, direcţia



Figura 37-14. Imagine de domenii magnetice de pe un monocristal de fier ce conţine 3,8% siliciu. Liniile albe indică graniţele dintre domenii. Aceste graniţe sînt regulate, şi nu neregulate ca cele din figura 37-13, deoarece proba este un monocristal. În figura 37-13, proba este formată din multe cristalite sau grăunţe. (Prin amabilitatea lui H. J. Williams, Bell Telephone Laboratories).

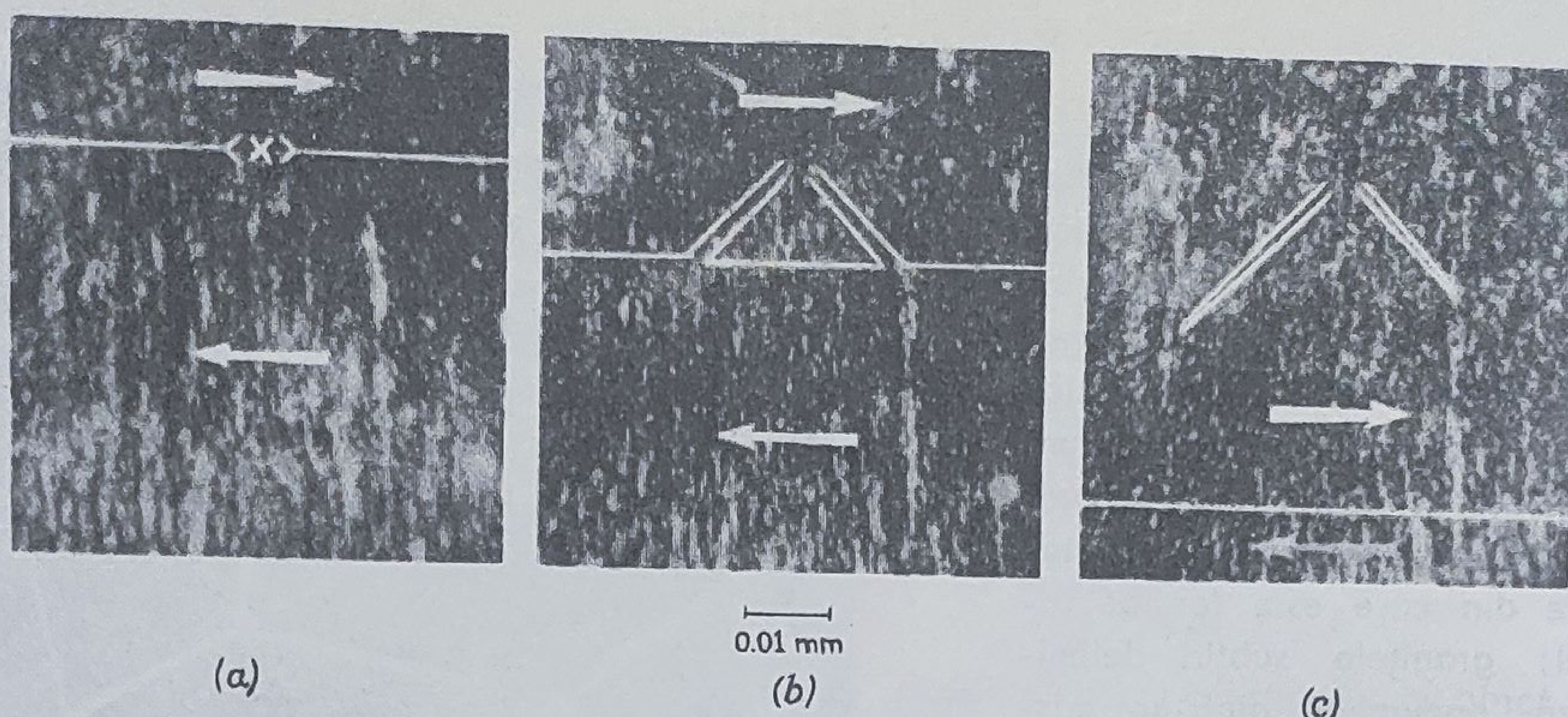


Figura 37-15. (a) O graniță dintre două domenii a căror magnetizare este indicată prin săgețile albe. (b) Dacă asupra probei acționează un cîmp magnetic exterior de la stînga spre dreapta, domeniul superior va crește în dimensiuni pe seama celui inferior. Granița dintre domenii se va deplasa în jos pe măsură ce dipolii elementari își inversează orientarea. (c) Procesul continuă. Granița s-a deplasat peste o regiune în care există o imperfecțiune în cristal. (Prin amabilitatea lui H. J. Williams, Bell Telephone Laboratories).

orientării dipolilor dintr-un domeniu se poate modifica ca un tot, apropiindu-se de direcția cîmpului. Fenomenul de histerezis apare deoarece granițele dintre domenii nu revin exact în pozițiile lor inițiale atunci cînd este îndepărtat cîmpul exterior $\vec{B}_0$.

Alte două tipuri de fenomene magnetice, strîns legate de feromagnetism sînt *antiferomagnetismul* și *feromagnetismul*. În substanțele antiferomagnetice, ca de exemplu MnO_2, cuplajul de schimb la care ne-am referit la pagina , servește la fixarea ionilor adiacenți într-un *antiparalelism* rigid (vezi figura 37-16, *b*). Astfel de materiale prezintă un magnetism exterior total foarte mic. Dar, dacă sînt încălzite peste o anumită temperatură, numită *temperatură Néel*, cuplajul de schimb încetează să mai acționeze, și materialul devine paramagnetic. În substanțele ferimagnetice ca de exemplu ferita de fier, sînt prezente două feluri diferite de ioni magnetici. Cei doi ioni din ferita de fier sînt: Fe^{++} și Fe^{+++}. Cuplajul de schimb fixează ionii după cum este indicat în figura 37-16, *c*, în care caz efectele exterioare sînt intermediare între feromagnetism și antiferomagnetism. Și aici cuplajul de schimb dispare dacă materialul este încălzit peste o anumită temperatură caracteristică.

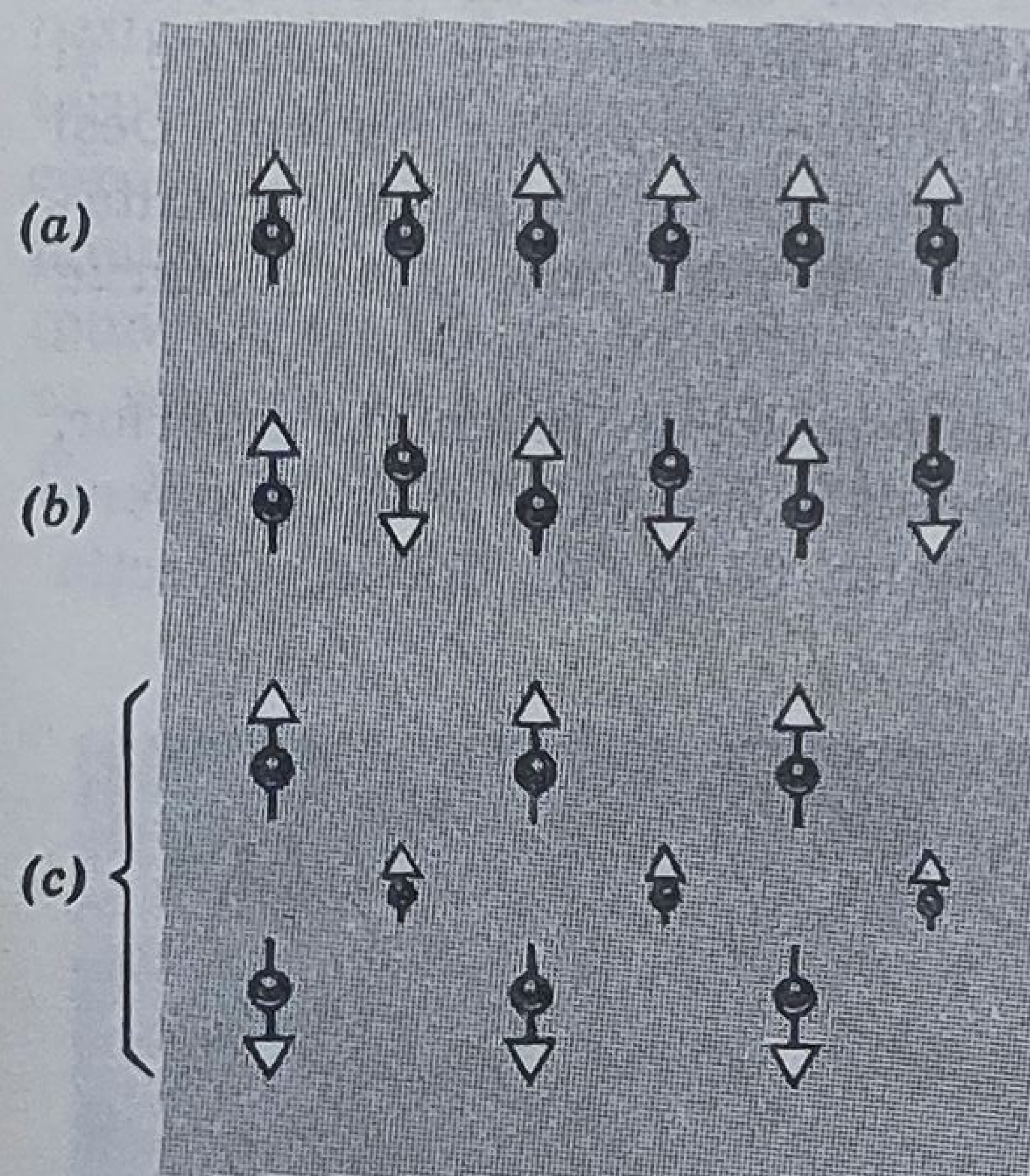


Figura 37-16. Orientarea dipolilor magnetici elementari produsă de cuplajul interatomic de schimb în (a) feromagnetism, (b) antiferomagnetism și (c) ferimagnetism.

37-6 Magnetismul nuclear

Multe nuclee posedă dipoli magnetici; este deci posibil ca o probă ce conţine astfel de nuclee să prezinte în exterior efecte magnetice importante produse de nucleele sale. Totuşi, momentele magnetice nucleare sînt cu cîteva ordine de mărime mai mici decît cele asociate mişcării electronice din atom sau ion. De exemplu, momentul magnetic al electronului asociat spinului său este de 660 ori mai mare decît cel al protonului (nucleul de hidrogen).

Efectele macroscopice ale magnetismului nuclear sînt mici în comparaţie cu aceleaşi efecte produse de paramagnetismul electronic; ordinul de mărime al raportului efectelor este egal cu *pătratul* raportului mărimii momentelor deoarece: (a) *în aceleaşi condiţii* magnetismul macroscopic este mai mic cu acest raport dar (b) din cauză că momentul magnetic dipolar al nucleului este mai mic înseamnă că (vezi exemplul 3) vibraţia termică este în mod proporţional mai eficace în micşorarea gradului de aliniere a dipolilor elementari într-un cîmp magnetic extern; astfel că raportul intervine de două ori.

Pentru detectarea magnetismului nuclear, metode cum este cea a inelului lui Rowland (figura 37-10) sînt mult prea puţin sensibile. Vom descrie acum *metoda de rezonanţă nucleară* cu ajutorul căreia magnetismul nuclear poate fi pus în evidenţă cu uşurinţă. Această metodă este de asemenea larg folosită şi în studiul paramagnetismului, feromagnetismului, antiferomagnetismului şi ferimagnetismului, în care cazuri efectele magnetice nu sînt asociate nucleelor ci electronilor atomici. Metoda de rezonanţă nucleară a fost dezvoltată în 1946 de E. M. Purcell şi colaboratorii săi de la Harward. Simultan şi independent, F. Bloch şi colaboratorii de la Stanford au descoperit o metodă foarte asemănătoare. Pentru aceste realizări cei doi fizicieni au primit premiul Nobel.

Ne propunem să măsurăm mărimea μ a momentului magnetic al protonului. În principiu, aceasta se poate realiza plasînd proba ce conţine protoni într-un cîmp magnetic extern de inducţie $\vec{B}$ şi măsurînd energia $(-2\mu B)$ necesară pentru a roti momentele magnetice ale protonilor cu 180°. O descriere perfect riguroasă a procesului nu poate fi dată decît folosind fizica cuantică. Descrierea pe care o vom da, deşi bazată în întregime pe fizica clasică, duce totuşi la concluzii corecte.

În figura 37-17 a este arătat un proton al cărui moment cinetic propriu face unghiul θ cu un cîmp magnetic extern uniform $\vec{B}$. În figura 37-17 b este arătat

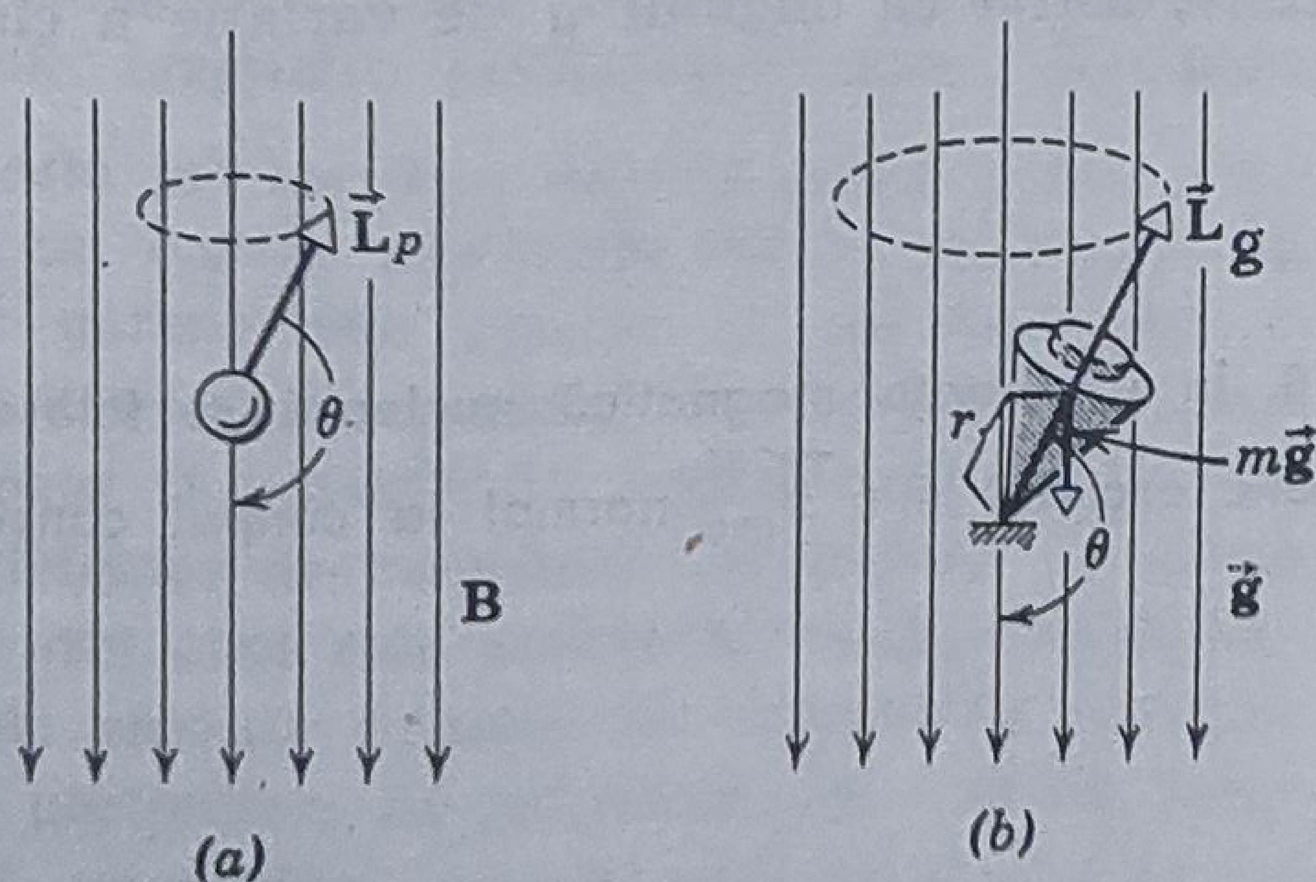


Figura 37-17. (a) Un proton ce posedă moment cinetic propriu de rotaţie în mişcare de precesie într-un cîmp magnetic extern şi (b) un giroscop în mişcare de precesie într-un cîmp gravitaţional extern. $\vec{L}_p$ şi $\vec{L}_g$ sînt cei doi vectori moment cinetic.

un giroscop a cărui moment cinetic face unghiul θ cu cîmpul gravitațional extern uniform $\vec{g}$. În ambele cazuri există un cuplu ce tinde să aducă axa obiectului în rotație, paralel cu cîmpul. Pentru proton acesta este dat de (ecuația 33-11)

$$M_p = \mu B \sin\theta \qquad (37\text{-}17\ a)$$

Pentru giroscop el este dat de

$$M_g = mgr \sin\theta \qquad (37\text{-}17\ b)$$

unde r este coordonata centrului de masă a giroscopului iar m masa sa.

În paragraful 13-2 am văzut că un giroscop posedă și o mișcare de precesie în jurul unei axe verticale cu o frecvență unghiulară dată de

$$\omega_g = \frac{mgr}{L_g} \qquad (37\text{-}18\ a)$$

în care L_g este momentul cinetic de spin al giroscopului.

Protonul, ce posedă un moment cinetic de spin cuantificat L_p, va avea și el o mișcare de precesie în jurul direcției cîmpului (magnetic) sub acțiunea cuplului (magnetic). Deduceți expresia frecvenței de precesie, călăuzindu-vă de deducerea folosită în paragraful 13-2, dar folosind cuplul magnetic (ecuația 37-17 a) în locul cuplului gravitațional (ecuația 37-17 b). Relația este

$$\omega_p = \frac{\mu B}{L_P} \qquad (38\text{-}18\ b)$$

Exemplul 5. Care este frecvența de precesie a unui proton într-un cîmp magnetic de 0,5 T?

Mărimile μ și L_p din ecuația 37-18 b sînt $1{,}4\cdot10^{-26}$ A·m² și $0{,}53\cdot10^{-34}$ J.s. Se obține deci

$$\nu_P = \frac{\omega_P}{2\pi} = \frac{\mu B}{2\pi L_P} = \frac{(1{,}4\cdot10^{-26}\ \mathrm{A\cdot m^2})\,(0{,}5\ \mathrm{T})}{(2\pi)\,(0{,}53\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})} - 2{,}1\cdot10^{7}\mathrm{Hz}$$

Această frecvență (=21 MHz) este în domeniul frecvențelor radio.

Putem modifica energia unui sistem oarecare ce se află în mișcare periodică dacă acționăm asupra sa din exterior cu o frecvență identică cu cea a mișcării sale. Aceasta este cunoscuta condiție de *rezonanță*. Ca „influență exterioară" asupra protonului în mișcare de precesie putem folosi un cîmp magnetic alternativ mic $\vec{B}_{osc}$ normal la cîmpul constant $\vec{B}$. Acest cîmp oscilant se însumează vectorial cu cîmpul constant și deci cîmpul *rezultant* va varia între limitele indicate prin linii punctate în figura 37-18. Valori tipice ale lui B și ale amplitudinii lui $\vec{B}_{osc}$ sînt 0,5 T și 10^{-4} T respectiv, astfel că unghiul α de variație a cîmpului

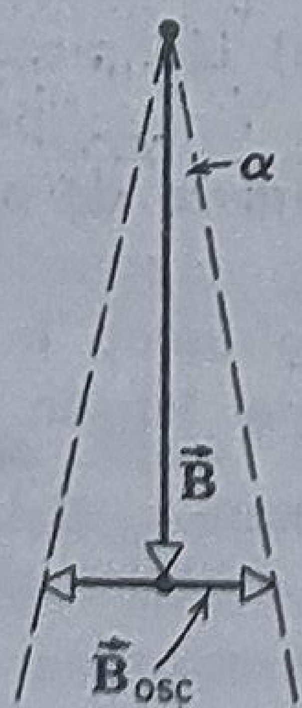


Figura 37-18. În rezonanța magnetică nucleară se folosește un cîmp magnetic oscilant mic $\vec{B}_{osc}$ normal la cîmpul constant $\vec{B}$.

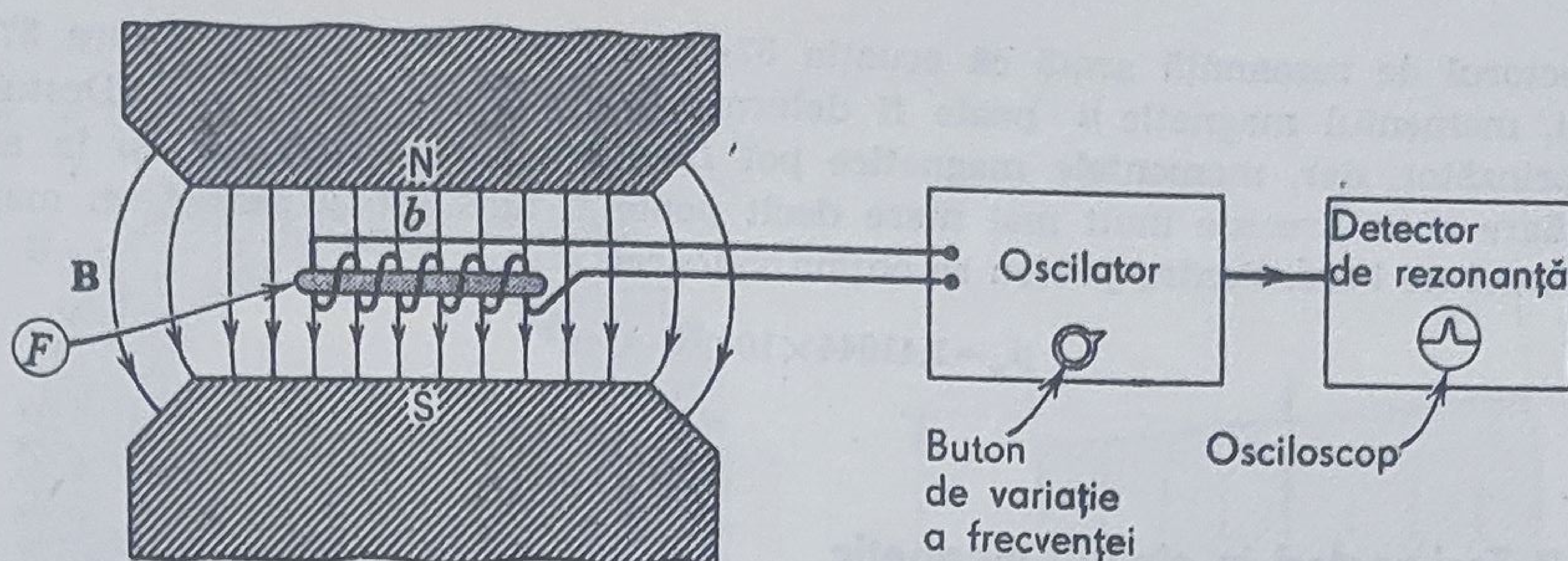


Figura 37-19. Schema de principiu pentru observarea rezonanței nucleare. Cîmpul oscilant este orizontal, în bobină.

rezultant este foarte mic. Dacă frecvența unghiulară ω_0 a cîmpului oscilant se ia egală cu frecvența unghiulară de precesie ω_p a protonului, protonul în mișcarea sa de precesie va absorbi energie. Creșterea energiei înseamnă creșterea unghiului θ din figura 37-17 a.

Condiția de rezonanță

$$\omega_0 = \frac{\mu B}{L_P} \qquad (37\text{-}19)$$

poate fi folosită la măsurarea lui μ. Plasăm protonul într-un cîmp cunoscut $\vec{B}$, aplicăm un „cîmp perturbator“ normal la el și variem frecvența unghiulară ω_0 a acestui cîmp perturbator pînă ce condiția de rezonanță este îndeplinită. Ne putem da seama cînd este satisfăcută ecuația 37-19 deoarece la rezonanță mulți dintre protoni vor tinde să-și inverseze sensul momentului cinetic propriu în cîmp, absorbind astfel energie, proces ce poate fi detectat prin metode electronice corespunzătoare.

În figura 37-19 este dat schematic dispozitivul experimental. Protonii, ce se află sub formă de nuclee de hidrogen în molecula de apă, într-o mică fiolă F, sînt introduși într-un cîmp magnetic intens constant produs de un electromagnet a cărui poli N și S sînt arătați. Cîmpul magnetic perturbator slab (orizontal) $\vec{B}_{osc}$ este produs de o bobină mică b prin care trece un curent alternativ de înaltă frecvență. Acest curent este produs de un oscilator de radio frecvență a cărui frecvență unghiulară ω_0 poate fi variată; la oscilator este conectat un „detector de rezonanță“ electronic ce indică momentul cînd este absorbită energia de la oscilator, energie folosită la inversarea momentelor protonilor. În principiu, se variază frecvența unghiulară ω_0 a oscilatorului pînă ce

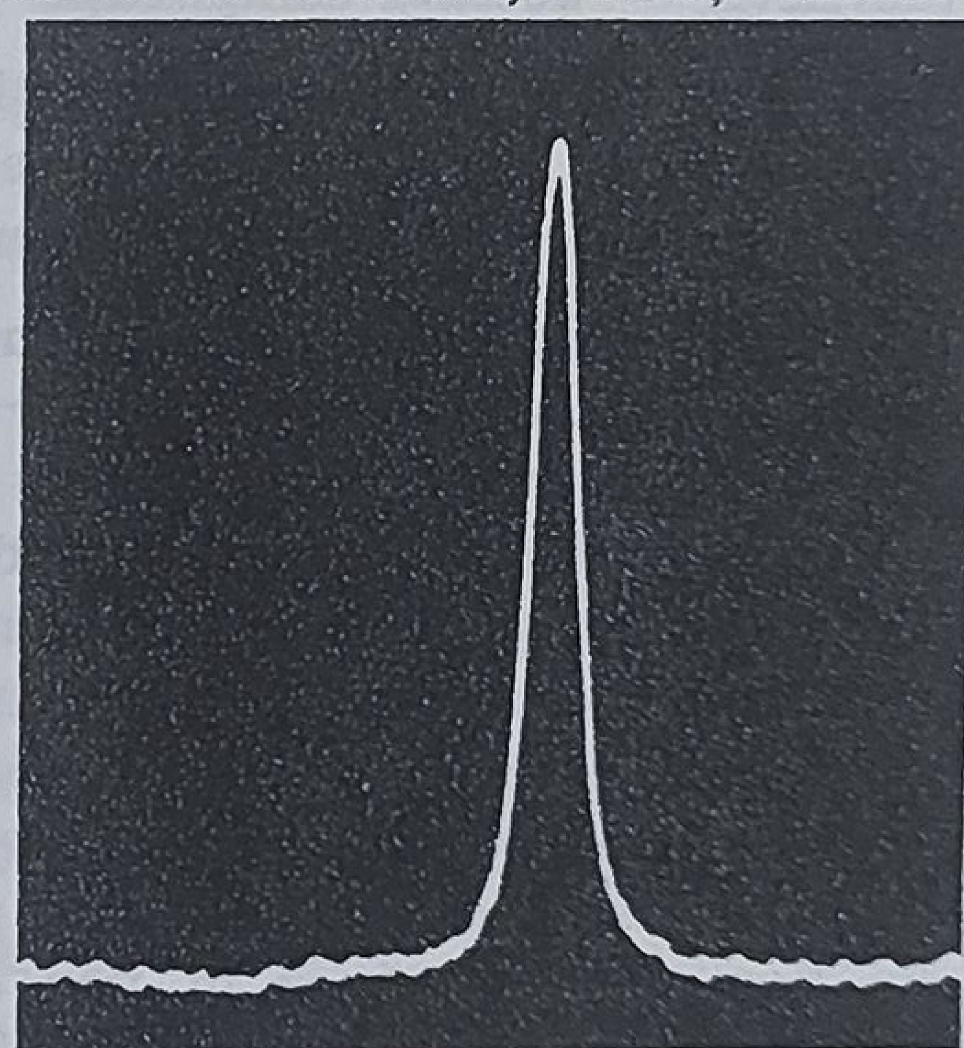


Figura 37-20. Imaginea de pe osciloscop a maximului de rezonanță protonică ce indică absorbția de energie din oscilator în funcție de frecvența oscilatorului. (Din Bloembergen și alții, Phys. Rev., 73, 679 1948).

detectorul de rezonanță arată că ecuația 37-19 este satisfăcută (vezi figura 37-20). Deci, momentul magnetic μ poate fi determinat măsurînd pe B și ω_0. Destul de surprinzător, dar, momentele magnetice pot fi măsurate în acest mod și în altele similare cu o precizie mult mai mare decît poate fi măsurat μ pentru un magnet în formă de bară. Pentru proton se obține valoarea

$$\mu_p = 1{,}41044 \times 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

37-7 Trei vectori în cîmpul magnetic

Am văzut în capitolul 30 că, dacă un dielectric este introdus într-un cîmp electric pe suprafața sa apar sarcini de polarizare. Aceste sarcini de suprafață ce își au origina în dipolii electrici elementari (permanenți sau induși) din care este format dielectricul, produc un cîmp propriu ce modifică cîmpul original. Pentru cazul simplu discutat în capitolul 30. — un strat dielectric ce se află între plăcile unui condensator plan — această complicație poate fi rezolvată ușor folosind vectorul intensității cîmpului electric $\vec{E}$ și unele cunoștiințe asupra proprietăților electrice ale materialului dielectric ca de exemplu constanta dielectrică. Pentru probleme mai complicate afirmăm că este folositor să introducem încă doi vectori electrici (suplimentari), *polarizarea electrică* $\vec{P}$ și *deplasarea electrică* $\vec{D}$. În tabela 30-2 sînt date unele caracteristici ale acestor trei vectori.

În magnetism întîlnim o situație similară. Dacă un material magnetic este introdus într-un cîmp de inducție, dipolii magnetici elementari (permanenți sau induși) vor produce un cîmp de inducție propriu care va modifica cîmpul original. Pentru cazul simplu discutat în acest capitol — un inel Rowland cu un miez feromagnetic — această complicație poate fi depășită ușor cunoscînd vectorul inducției magnetice $\vec{B}$ și unele proprietăți magnetice ale materialului din care este confecționat inelul, ca de exemplu cele furnizate de figura 37-9. Pentru probleme mai complexe este util să introducem alți doi vectori magnetici (suplimentari), *magnetizarea* $\vec{M}$ și *intensitatea cîmpului magnetic* $\vec{H}$. O facem pe larg pentru ca studentul ce se află la al doilea curs de electromagnetism să și le poată însuși temeinic.

Considerăm un inel Rowland prin spirele căruia trece curentul i_0 și care este astfel construit încît miezul său, pe care-l presupunem din fier, poate fi îndepărtat. Inducția magnetică B, măsurată cu metoda dată în paragraful 37-5, este mult mai mare atunci cînd bobina posedă miez de fier decît în lipsa lui, presupunînd constant curentul prin spire.

Din punct de vedere fizic putem înțelege valoarea mare a lui B în miezul de fier considerînd că în fier dipolii elementari sînt aliniați. O „felie“ ipotetică din miezul de fier, ca cea din figura 37-21 b, are un moment magnetic $d\vec{\mu}$ egal cu suma vectorială a tuturor dipolilor elementari conținuți în ea. Definim primul nostru vector suplimentar, *magnetizarea* $\vec{M}$, ca momentul magnetic al unității de volum al materialului miezului. Pentru felia din figura 37-21 b avem

$$d\vec{\mu} = \vec{M}(Adl)$$

unde (Adl) este volumul feliei, A fiind secțiunea transversală a miezului.

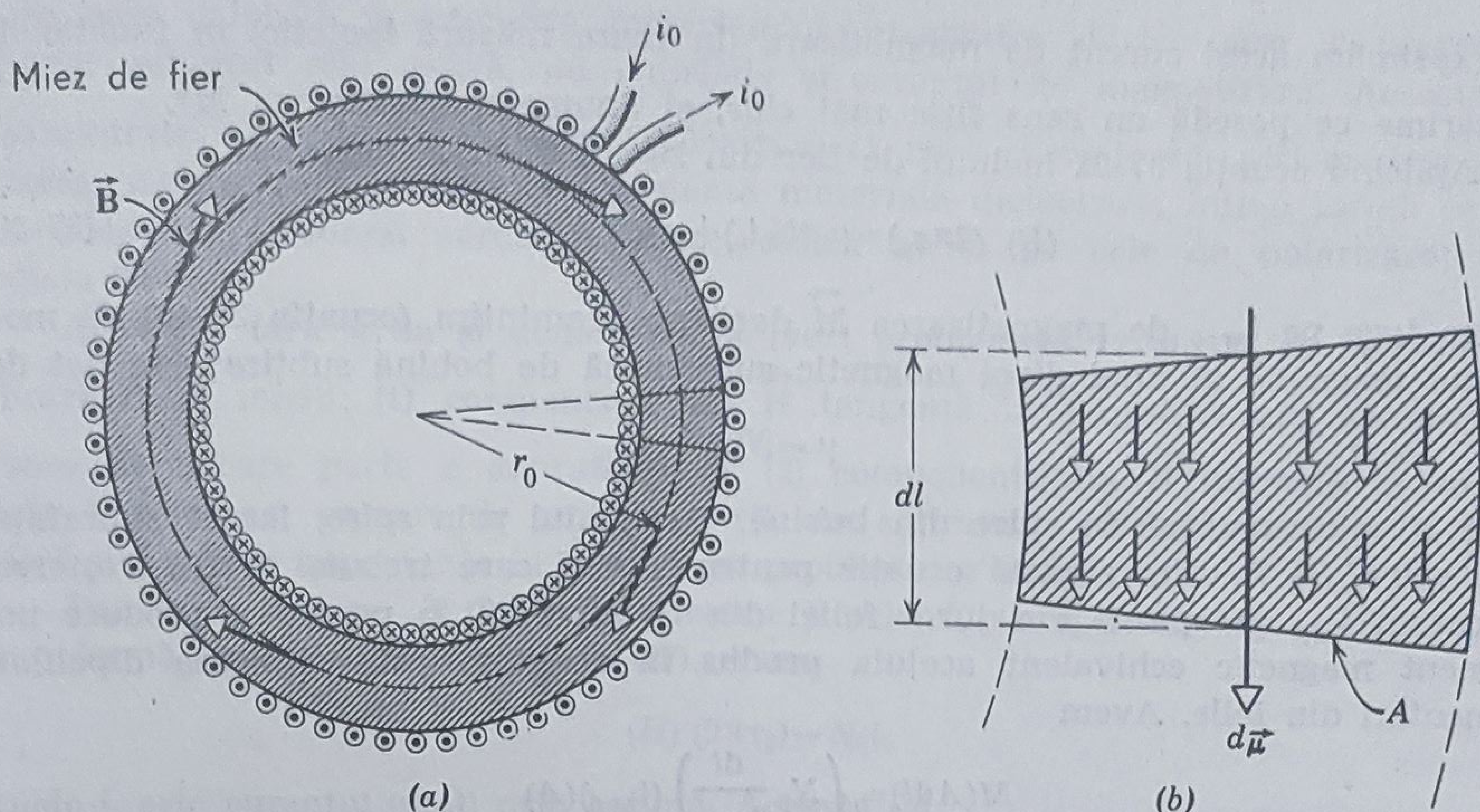


Figura 37-21. (a) Un inel Rowland cu miez de fier. (b) O felie din miez; este indicat momentul magnetic d $\vec{\mu}$ produs prin alinierea dipolilor magnetici, elementari din fier.

Cînd am discutat legea lui Ampère în capitolul 34, am presupus că nu sînt prezente materiale magnetice. Dacă aplicăm această lege, care este

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \tag{37-20}$$

conturului circular de integrare indicat în figura 37-21 a, obținem

$$(B)(2\pi r_0) = \mu_0 (N_0 i_0) \tag{37-21}$$

în care r_0 este raza medie a miezului, N_0 este numărul de spire și i_0 este curentul prin fiecare spiră. Se vede imediat că legea lui Ampère, sub forma ecuației 37-20, *nu este valabilă în cazul cînd sînt prezente materiale magnetice*. Ecuația 37-21 ne spune că membrul drept fiind același indiferent dacă miezul de fier există sau nu, inducția B trebuie să fie și ea aceeași, concluzie ce nu este în concordanță cu experiența.

Putem mări pe B în absența miezului de fier pînă la valoarea pe care ar avea-o în prezența miezului, dacă mărim curentul prin spire cu valoarea $i_{M,0}$. Magnetizarea miezului de fier este astfel *echivalentă în efectul ei asupra lui* $\vec{B}$ cu această creștere ipotetică a curentului. Vom modifica legea lui Ampère adăugînd, în mod arbitrar încă un termen în membrul drept, curentul de magnetizare i_M obținînd

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i + i_M) \tag{37-22}$$

Dacă atunci cînd miezul de fier este prezent dăm lui i_M o valoare corespunzătoare, este clar că legea lui Ampère, în noua sa formă, rămîne valabilă. Rămîne

să exprimăm acest curent de magnetizare (în mare măsură ipotetic) în funcție de o mărime ce posedă un sens fizic mai clar, și anume magnetizarea $\vec{M}$*.

Aplicînd ecuația 37-22 inelului de fier din figura 37-21 a, obținem

$$(B)\ (2\pi r_0)=\mu_0(N_0 i_0)+\mu_0(N_0 i_{M,0}) \tag{37-23}$$

Putem lega pe $i_{M,0}$ de magnetizarea $\vec{M}$ dacă ne reamintim (ecuația 33-10) că momentul magnetic al unui dipol magnetic sub formă de bobină subțire este dat de

$$\mu=NiA$$

unde N este numărul de spire din bobină, i curentul prin spire, iar A suprafața unei spire. Să folosim această ecuație pentru a găsi care trebuie să fie creșterea de curent $i_{M,0}$ în spirele din jurul feliei din figura 37-21 b pentru a produce un moment magnetic echivalent aceluia produs în realitate prin alinierea dipolilor elementari din felie. Avem

$$M(A\,\mathrm{d}l)=\left(N_0\frac{\mathrm{d}l}{2\pi r_0}\right)(i_{M,0})(A)$$

mărimea din prima paranteză din membrul drept fiind numărul de spire asociate feliei de grosime $\mathrm{d}l$. Aceasta se reduce la

$$N_0 i_{M,0}=M(2\pi r_0) \tag{37-24}$$

Introducînd aceasta în ecuația 37-23 obținem

$$(B)\ (2\pi r_0)=\mu_0(N_0 i_0)+\mu_0(M)(2\pi r_0) \tag{37-25}$$

Căutăm acum să generalizăm cazul special al inelului lui Rowland scriind ecuația 37-25 sub forma

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 i+\mu_0\oint \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

sau

$$\oint\left(\frac{\vec{B}-\mu_0\vec{M}}{\mu_0}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}=i$$

Mărimea $(\vec{B}-\mu_0\vec{M})/\mu_0$ apare atît de des în problemele de magnetism încît a primit un nume special, *intensitatea cîmpului magnetic* $\vec{H}$, sau

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}-\mu_0\vec{M}}{\mu_0} \tag{37-26}$$

pe care o scriem sub forma $\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$

Legea lui Ampère poate fi scrisă acum sub formă simplă

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=i \tag{37-27}$$

---

* Ne putem imagina acest curent de magnetizare considerîndu-l ca un curent real care circulă în jurul magnetului, la suprafața sa, fiind efectul macroscopic rezultant al tuturor curenților microscopici ai orbitelor electronilor atomici. Dar, în această imagine a *curenților amperieni* este dificil de luat în considerare magnetizarea asociată spinului electronului. Deoarece nu vom încerca să măsurăm experimental curenții de magnetizare ci doar efectele lor magnetice (postulate) preferăm să considerăm curentul de magnetizare ca un formalism util.

care este valabilă în prezența materialelor magnetice și în care i reprezintă *numai curentul real*, adică, nu cuprinde și curentul de magnetizare. Aceasta ne reamintește că vectorul deplasare electrică $\vec{D}$ ne-a permis să scriem legea lui Gauss pentru cazul în care sînt prezente materiale dielectrice, într-o formă ce lua în considerare numai sarcinile libere, adică nu și pe cele de polarizare; vezi tabela 30-2.

Afirmăm fără a da și demonstrația (vezi problemele 12 și 13) că la frontiera dintre două medii: (1) componenta lui $\vec{H}$ tangentă la suprafață are aceeași valoare de fiecare parte a suprafeței* și (2) componenta lui $\vec{B}$ normală la suprafață are aceeași valoare de ambele părți ale suprafeței. Aceste *condiții la frontieră* sînt foarte importante în rezolvarea problemelor complexe.

Pentru a găsi pe H în inelul nostru Rowland, să aplicăm legea lui Ampère sub formă generalizată (ecuația 37-27). Avem

$$(H)\,(2\pi r_0)=N_0 i_0$$

unde i_0 este curentul (real) prin bobină. Aceasta dă

$$H=\left(\frac{N_0}{2\pi r_0}\right) i_0=n i_0 \tag{37-28}$$

în care n este numărul de spire pe unitatea de lungime. Deoarece în ecuația 37-27 nu am introdus nici o informație cu privire la miez, valoarea lui H calculată din ecuația 37-28 este independentă de materialul miezului.

B poate fi măsurat experimental prin metoda descrisă în paragraful 37-5 iar apoi, din ecuația 37-26 poate fi calculat M. Observați că (vezi ecuația 37-15) abscisa B_0 din figura 37-9 este proporțională cu H ($=\mu_0 H$), ordonata fiind proporțională cu B. Curbe de tipul acesteia și a celei din figura 37-12, poartă numele de *curbe B—H*.

Să presupunem că am măsurat pe $\vec{H}$, $\vec{B}$ și $\vec{M}$ pentru o largă varietate de materiale magnetice, folosind sau tehnica descrisă sau o alta echivalentă. Pentru materialele *paramagnetice și diamagnetice* vom găsi, ca un rezultat experimental că $\vec{B}$ este direct proporțional cu $\vec{H}$ sau

$$\vec{B}=k_m \mu_0 \vec{H} \tag{37-29}$$

în care k_m, *permeabilitatea* relativă a mediului magnetic, este o constantă pentru o anumită temperatură și densitate a materialului. Eliminînd pe $\vec{B}$ din ecuațiile 37-29 și 37-26 putem scrie

$$\vec{M}=(k_m-1)\vec{H} \tag{37-30}$$

care este o altă exprimare a caracterului de liniaritate sau de proporționalitate a materialelor paramagnetice și diamagnetice.

În vid, unde nu există dipoli magnetici care să fie aliniați, magnetizarea $\vec{M}$ trebuie să fie zero. Punînd $\vec{M}=0$ în ecuația 37-26 se obține

$$\vec{B}=\mu_0 \vec{H} \quad \text{(în vid)} \tag{37-31}$$

---

* Presupunînd că nu există curenți reali la suprafață, de felul celor existenți în inelul lui Rowland din figura 37-21 a, spre exemplu.

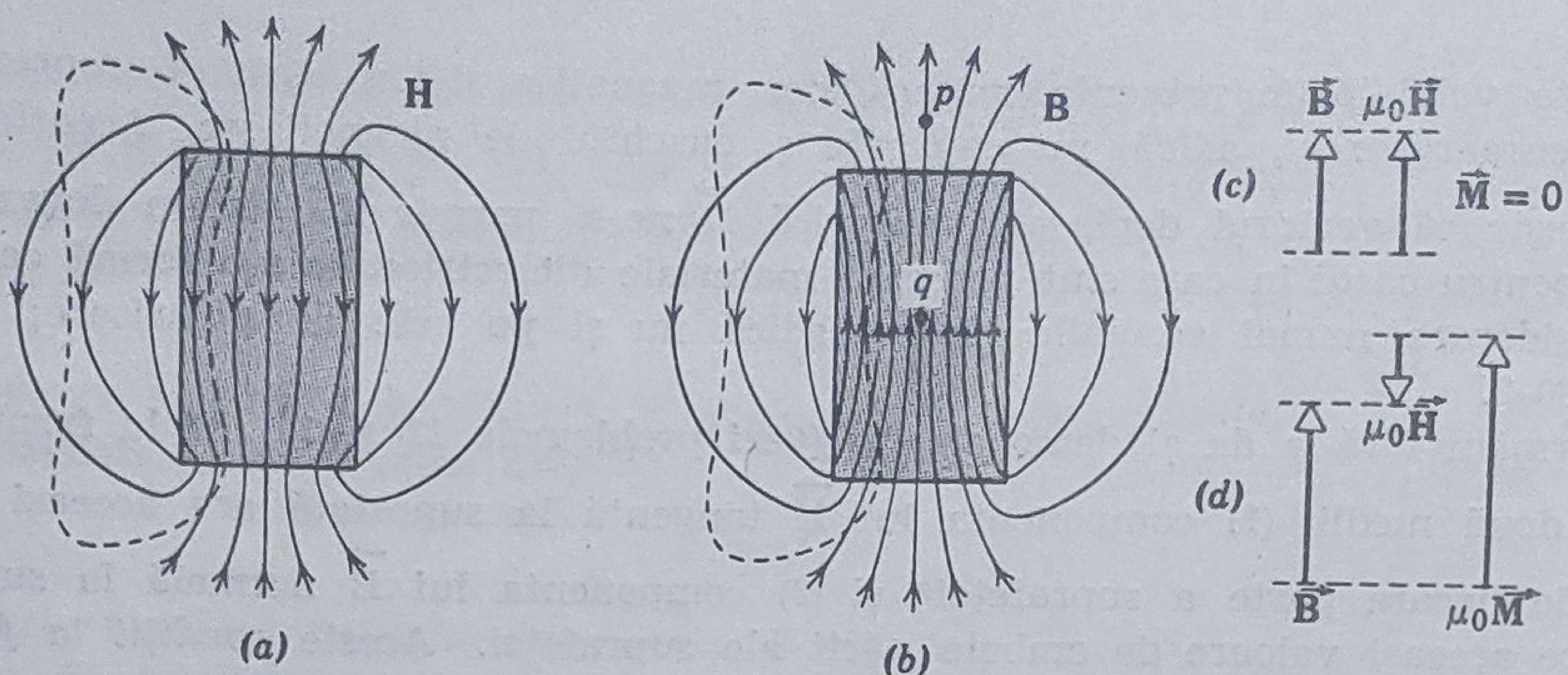


Figura 37-22. (a) Liniile lui $\vec{H}$ și (b) liniile lui $\vec{B}$ pentru un magnet permanent. Se observă că liniile lui $\vec{H}$ își modifică sensul la frontieră. Curbele închise punctate sînt contururi de integrare de-a lungul cîrora poate fi aplicată legea lui Ampère. Se vede că relația $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$ este satisfăcută (c) într-un punct oarecare *p* din exterior și (d) într-un punct oarecare q din interior.

Comparînd cu ecuația (37-29) se vede că vidul trebuie descris prin $k_m = 1$. Ecuația 37-30 verifică că magnetizarea devine egală cu zero dacă punem k_m egal cu unitatea. Pentru materiale paramagnetice k_m este puțin mai mare ca unitatea. Pentru materialele diamagnetice este puțin mai mic ca unitatea; din ecuația 37-20 se vede că aceasta înseamnă că $\vec{M}$ și $\vec{H}$ trebuie să aibe sensuri opuse, rezultat ce l-am discutat pe larg în paragraful 37-4.

În materialele feromagnetice relația dintre $\vec{B}$ și $\vec{H}$ este departe de a fi lineară, după cum se vede și din figurile 37-9 și 37-12. Experimental, se constată că valoarea lui k_m este funcție nu numai de valoarea lui H ci, din cauza existenței fenomenului de histerezis, de „istoria" magnetică și termică a probei*.

Un caz special interesant din feromagnetism este cel al magnetului permanent, pentru care $\vec{H}$, $\vec{M}$ și $\vec{B}$ au valori diferite de zero în interiorul magnetului chiar dacă curentul real este zero. În figura 37-22 este dată imaginea tipică a liniilor lui $\vec{B}$ și ale lui $\vec{H}$ asociați unui astfel de magnet. Liniile lui $\vec{B}$ pot fi desenate sub formă de curbe continui, condiția la frontieră (2) menționată mai sus fiind satisfăcută în punctele în care liniile intră și ies din magnet. Ecuația 37-22 arată că vectorul $\vec{B}$ este asociat curentului *total*, deci ambilor curenți: celui real și celui de magnetizare. În figura 37-22 a $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ de-a lungul unui contur oarecare ca de exemplu cel indicat prin curba punctată nu este zero ci trebuie să fie asociată unui curent de magnetizare ipotetic i_M care presupunem că circulă în jurul magnetului la suprafața sa; în această problemă nu există

* În cazul dielectricilor există materiale ceroase, numite *feroelectrice*, pentru care relația dintre $\vec{D}$ și $\vec{E}$ este neliniară, care prezintă histerezis și din care pot fi construiți dipoli electrici cvasipermanenți *(electreți)*. Totuși, materialele dielectrice cele mai des folosite prezintă o relație liniară între $\vec{D}$ și $\vec{E}$ pe cînd pentru materialele magnetice cele mai des folosite relația este neliniară.

curenţi reali (i). În figura 37-22 a se vede că $\vec{H}$ îşi schimbă sensul la frontieră. Deoarece $\vec{H}$ (vezi ecuaţia 37-27) este asociat numai curenţilor reali, trebuie să avem $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ de-a lungul oricărui contur ca cel indicat prin linia punctată. Inversarea sensului lui $\vec{H}$ la frontieră face aceasta posibilă. Reţineţi că $\vec{M}$ şi $\vec{H}$ au sensuri opuse în interiorul magnetului. În tabela 37-1 sînt însumate proprietăţile celor trei vectori $\vec{B}$, $\vec{H}$ şi $\vec{M}$.

Exemplul 6. Într-un inel Rowland curentul (real) i_0 prin spire este de 2,0 A iar numărul de spire pe unitatea de lungime (n) a torului este 10 spire/cm.

Tabela 37.1

CEI TREI VECTORI DIN CÎMPUL MAGNETIC

Nume	Simbol	Legat de	Condiţia la frontieră
Inducţia magnetică	$\vec{B}$	Toţi curenţii	Componenta normală este continuă
Intensitatea cîmpului magnetic	$\vec{H}$	Numai de curenţii reali	Componenta tangenţială este continuă*
Magnetizarea (momentul magnetic dipolar pe unitatea de volum)	$\vec{M}$	Numai de curenţii de magnetizare	Se anulează în vid

Ecuaţia de definiţie pentru $\vec{B}$	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sau $= i\vec{l} \times \vec{B}$	ecuaţia 33-3 a ecuaţia 33-6 a
Relaţia generală dintre cei trei vectori	$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$	ecuaţia 37-26
Legea lui Ampère în prezenţa mediilor magnetice	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$ (i=numai curentul real)	ecuaţia 37-27
Relaţii empirice pentru unele materiale magnetice**	$\vec{B} = k_m\mu_0\vec{H}$ $\vec{M} = (k_m - 1)\vec{H}$	ecuaţia 37-29 ecuaţia 37-30

* Presupunînd că la frontieră nu există curenţi reali.

** Numai pentru materialele paramagnetice şi diamagnetice, dacă k_m trebuie să fie independent de $\vec{H}$.

B măsurat prin metoda din paragraful 37-5 este 1,0 T. Calculați (a) H, (b) M și (c) curentul de magnetizare $i_{M,0}$ atît în prezența cît și în absența miezului. (d) care este k_m pentru aceste condiții date?

(a) H este independent de materialul miezului și poate fi găsit din ecuația 37-28

$$H=ni=(10 \text{ spire/cm})(2,0 \text{ A})=2,0\times10^3 \text{ A/m}$$

(b) M este zero cînd miezul este absent. Cînd miezul este prezent, obținem valoarea lui $\vec{M}$ rezolvînd ecuația 37.26 în funcție de $\vec{M}$

$$M=\frac{B-\mu_0 H}{\mu_0}=\frac{(1,0 \text{ T})-(4\pi\times10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m})(2,0\times10^3 \text{ A/m})}{(4\pi\times10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m})}=7,9\times10^5 \text{ A/m}$$

(c) Curentul de magnetizare efectiv rezultă din ecuația 37-24:

$$i_{M,0}=M\left(\frac{2\pi r_0}{N_0}\right)=\frac{M}{n}=\frac{7,9\times10^5 \text{ A/m}}{1,0\times10^3 \text{ spire/m}}=790 \text{ A}$$

Un curent *suplimentar* de această valoare prin spirele torului va produce un B de aceeași mărime, în absența miezului, cu cel obținut prin alinierea dipolilor elementari, în prezența miezului.

(d) Permeabilitatea poate fi obținută din ecuația 37-29

$$k_m=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{1,0 \text{ T}}{(4\pi\cdot10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m})(2,0\cdot10^3 \text{ A/m})}=397$$

Subliniem că această valoare a lui k_m este valabilă doar pentru condițiile speciale din această experiență.

Întrebări

1. Se dau două bare de fier în aparență identice. Una din cele două este un magnet iar cealaltă nu. Cum le puteți deosebi? Nu vi se permite să le suspendați ca pe un ac magnetic sau să folosiți vreun instrument.

2. Cum puteți inversa magnetismul unui ac magnetic?

3. Două bare de fier se atrag întotdeauna, indiferent de capetele ce sînt aduse în apropiere.

Se poate trage concluzia că una din bare trebuie să fie nemagnetizată?

4. Dacă împrăștiem pilitură de fier pe un magnet oarecare în formă de bară, ea se prinde de el atît la capete cît *și la mijloc.* Schițați liniile lui $\vec{B}$ atît în exteriorul cît și în interiorul magnetului.

5. Pămîntul este un dipol magnetic enorm. (a) Polul magnetic din emisfera nordică este un pol nord sau un pol sud? (b) În emisfera nordică liniile de forță magnetică asociate cîmpului magnetic pămîntesc, intră sau ies din suprafața Pămîntului?

6. Radiațiile cosmice sînt particule încărcate care pătrund în atmosfera Pămîntului venind din spațiul cosmic. Se constată că radiațiile cosmice a căror energie este sub o anumită limită sînt mai intense la polii magnetici nord și sud ai Pămîntului decît la ecuatorul magnetic. Explicați de ce?

7. Cum ar putea fi măsurat momentul magnetic dipolar al Pămîntului?

8. Găsiți trei argumente care să ne convingă că fluxul Φ_B al cîmpului magnetic pămîntesc este mai mare prin conturul Alascăi decît prin al Texasului.

9. Neutronul, deși nu posedă sarcină, are un moment magnetic dipolar. Este posibilă aceasta din punctul de vedere al electromagnetismului clasic sau chiar acest singur exemplu este o dovadă a eșecului electromagnetismului clasic?

10. Magnetizarea de saturație a unei substanțe paramagnetice este foarte diferită de aceea a unei substanțe feromagnetice saturate de aproximativ aceleași dimensiuni?

11. Explicați de ce un magnet atrage un obiect de fier nemagnetizat, ca de exmplu un cui.

12. Acționează o forță rezultantă sau un cuplu asupra (a) unei bare de fier nemagnetizate sau (b) unui magnet permanent sub formă de bară atunci cînd sînt plasate într-un cîmp magnetic uniform?

13. Un cui se află în repaus pe suprafața lustruită a unei mese în apropierea unui magnet puternic. Apoi este lăsat liber și este atras de magnet. Care este sursa energiei cinetice pe care o are în drumul său spre magnet?

14. Magnetizarea indusă într-o sferă diamagnetică de către un cîmp magnetic extern nu variază cu temperatura spre deosebire de situația din paramagnetism. Putem înțelege aceasta bazîndu-ne pe descrierea originii diamagnetismului pe care am dat-o în acest capitol?

15. Comparați curbele de magnetizare pentru o substanță paramagnetică (figura 37-6) și pentru o substanță feromagnetică (figura 37-9). Cum ar arăta o curbă similară pentru o substanță diamagnetică? Credeți că ar prezenta efecte de saturație într-un cîmp intens aplicat (să zicem de 10 T)?

16. Arătați care este deosebirea între frecvența de precesie și frecvența ciclotronică a unui proton într-un cîmp magnetic.

17. În discuția noastră asupra magnetismului nuclear am afirmat că absorbția de energie se petrece deoarece dipolii sînt rotiți cu 180°. Totuși, un dipol pote fi inițial sau paralel sau antiparalel cu cîmpul. În primul caz se va produce o *absorbție* de energie dar în al doilea caz va avea loc o *cedare* de energie, ambele cantități fiind egale cu $2\mu B$. De ce totuși observăm o absorbție *netă* cînd s-ar părea că aceste două procese se compensează reciproc?

18. Discutați asemănările și deosebirile dintre tabelele 30-2 și 37-1.

Probleme

1. Pămîntul posedă un moment magnetic dipolar de $6{,}4 \cdot 10^{21}\ \mathrm{A \cdot m^2}$ (a) Care ar trebui să fie curentul printr-o spiră de curent ce ar înconjura Pămîntul pe la ecuatorul său magnetic pentru a produce un astfel de dipol? (b) Am putea să compensăm în acest fel magnetismul pămîntesc în punctele din spațiu situate la distanță mare de suprafața Pămîntului? (c) Situate pe suprafața Pămîntului?

2. Ne imaginăm electronul ca o sferă mică de rază R, a cărei sarcină și masă sînt distribuite uniform în întreg volumul său. Un astfel de electron posedă un moment cinetic de

„spin", $L=0{,}53\cdot10^{-34}$ J·s şi un moment magnetic $\mu=9{,}3\cdot10^{-24}$ A·m². Arătaţi că $e/m=2\mu L$. Acest rezultat este în concordanţă cu experienţa? (Indicaţie: Electronul presupus sferic trebuie împărţit în spire de curent infinit de mici şi apoi, prin integrare, trebuie dedusă o expresie pentru momentul magnetic. Acest model electronic este prea mecanicist pentru a fi în spiritul fizicii cuantice).

3. Calculaţi (a)intensitatea cîmpului electric şi (b) inducţia magnetică într-un punct situat la distanţa de 1,0 Å de un proton, în lungul axei spinului său. Momentul magnetic al protonului este $1{,}4\cdot10^{-26}$ m²·A.

4. Un inel Rowland este format dintr-un material feromagnetic. Secţiunea sa transversală este circulară cu raza interioară de 5,0 cm iar cea exterioară de 6,0 cm. Pe el sînt bobinate 400 de spire. (a) Care trebuie să fie curentul prin spire pentru a atinge un $B_0=2\cdot10^{-4}$ T în figura 37-9? (b) În jurul torului se înfăşoară 50 spire ce formează o bobină secundară cu o rezistenţă de 8,0 Ω. Ce cantitate de sarcină se deplasează prin bobina secundară cînd prin spirele torului începe să treacă curentul dacă pentru această valoare a lui B_0 avem $B_M=$ $=800\ B_0$?

5. Momentul dipolar asociat unui atom de fier dintr-o bară de fier este de $1{,}8\cdot10^{-23}$ m²·A. Presupunem că toţi atomii din bară, care are lungimea de 5 cm şi secţiunea transversală de 1 cm², au momentele dipolare aliniate. (a) Care este momentul dipolar al barei? (b) Ce cuplu trebuie exercitat pentru a menţine acest magnet normal la un cîmp extern de 1,5 T? Densitatea fierului este de 7,9 g/cm³.

6. Puteţi explica diamagnetismul folosindu-vă de legea de inducţie a lui Faraday? De exemplu, la ce efecte inductive ne putem aştepta în figura 37-7 a şi b, atunci cînd cîmpul creşte de la zero la valoarea finală $\vec{B}$?

7. Demonstraţi că $\Delta\omega \ll \omega_0$ în ecuaţia 37-13.

8. Arătaţi că, din punct de vedere clasic, o sarcină pozitivă ce posedă un moment cinetic propriu de spin, va avea un moment magnetic de spin de acelaşi sens cu momentul său cinetic de spin.

9. Să presupunem că toate nucleele (protonii) dintr-un gram de apă *pot fi aliniate*. Care va fi inducţia magnetică B produsă la distanţa de 5,0 cm de probă, de-a lungul axei de aliniere?

10. Este posibil să măsurăm raportul e/m pentru electron măsurînd (a) frecvenţa ciclotronică ν_c a electronilor într-un cîmp magnetic dat şi (b) frecvenţa de precisie ν_p a protonilor în acelaşi cîmp. Arătaţi că această relaţie este

$$\frac{e}{m}=\frac{\nu_c}{\nu_p}\,\frac{\mu_s}{L_s}$$

Deoarece μ_s şi L_s pentru proton se cunosc cu precizie, din această experienţă se obţine în prezent cea mai precisă valoare a raportului e/m.

11. *Interacţia dipol-dipol.* Cuplajul (interacţia) de schimb menţionat în paragraful 37-5 ca fiind cel ce dă proprietăţile feromagnetice *nu* înseamnă energia de interacţie magnetică reciprocă dintre doi dipoli magnetici elementari! Pentru a arăta aceasta (a) calculaţi pe B la distanţa $a(=1{,}0$ Å) de un moment dipolar μ $(=1{,}8\cdot10^{-23}$ m²·A); (b) calculaţi energia $(=2\mu B)$ necesară pentru a roti un al doilea dipol similar, cu 180° în acest cîmp. Ce concluzie puteţi trage asupra intensităţii acestei interacţii dipol-dipol? Comparaţi cu rezultatul din exemplul 3. (Observaţie: cîmpul la aceeaşi distanţă, dar în planul median al dipo-

lului este numai jumătate din cel în lungul axei; vezi ecuația 37-2).

12. *Condiție le frontieră pentru* $\vec{B}$. Arătați că la frontiera dintre două medii, componenta normală a lui $\vec{B}$. are aceeași valoare de ambele părți ale suprafeței. (Indicație: Construiți o suprafață Gauss închisă de formă cilindrică cu cîte una din baze în fiecare mediu și aplicați teorema lui Gauss pentru magnetism).

13. *Condiție la frontieră pentru* $\vec{H}$. Arătați că la frontiera dintre două medii componenta tangențială a lui $\vec{H}$ are aceeași valoare de ambele părți ale suprafeței, presupunînd că la suprafață nu există curenți. (Indicație: construiți un contur dreptunghiular închis cu cele două laturi lungi paralele cu suprafața, cîte o latură în fiecare mediu. Folosiți legea lui Ampère sub forma ce se aplică în prezența materialelor magnetice).

14. Se poate arăta că expresia cea mai generală a densității de energie magnetică se poate scrie sub forma

$$\mu_B = \frac{1}{2}\ \vec{B} \cdot \vec{H}$$

În cazul vidului aceasta se reduce la rezultatul cunoscut?

Capitolul 38

Oscilaţii electromagnetice

38-1 Oscilaţii *LC*

Sistemul *LC* din figura 38-1 seamănă cu sistemul oscilant masă-arc (vezi figura 8-4) deoarece, printre altele, amîndouă posedă o frecvenţă caracteristică de oscilaţie. Pentru a arăta acest lucru, presupunem că iniţial condensatorul *C* din figura 38-1 a este încărcat cu sarcina q_m şi că curentul i prin bobină este zero. În această situaţie energia înmagazinată în condensator este dată de ecuaţia 30-25.

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} \tag{38-1}$$

Energia înmagazinată în bobină este

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \tag{38-2}$$

şi este zero deoarece curentul este nul. Acum să presupunem că condensatorul începe să se descarce prin bobină, sarcinile pozitive deplasîndu-se în sens invers acelor ceasornicului cum se vede în figura 38-1, b. Acest lucru înseamnă că curentul i dat de dq/dt, a început să treacă de sus în jos prin bobină.

Pe măsură ce q scade, energia înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului de asemenea scade. Această energie este transferată cîmpului magnetic ce apare în jurul bobinei din cauză că curentul ce trece prin ea creşte în intensitate. Astfel, pe măsură ce cîmpul electric scade, cîmpul magnetic creşte şi energia este transferată de la primul cîmp la cel de-al doilea.

La un moment dat corespunzător figurii 38-1 c, sarcina condensatorului va fi nulă, energia fiind în totalitatea ei transferată cîmpului magnetic al bobinei. Conform ecuaţiei 38-2, curentul prin bobină trebuie să

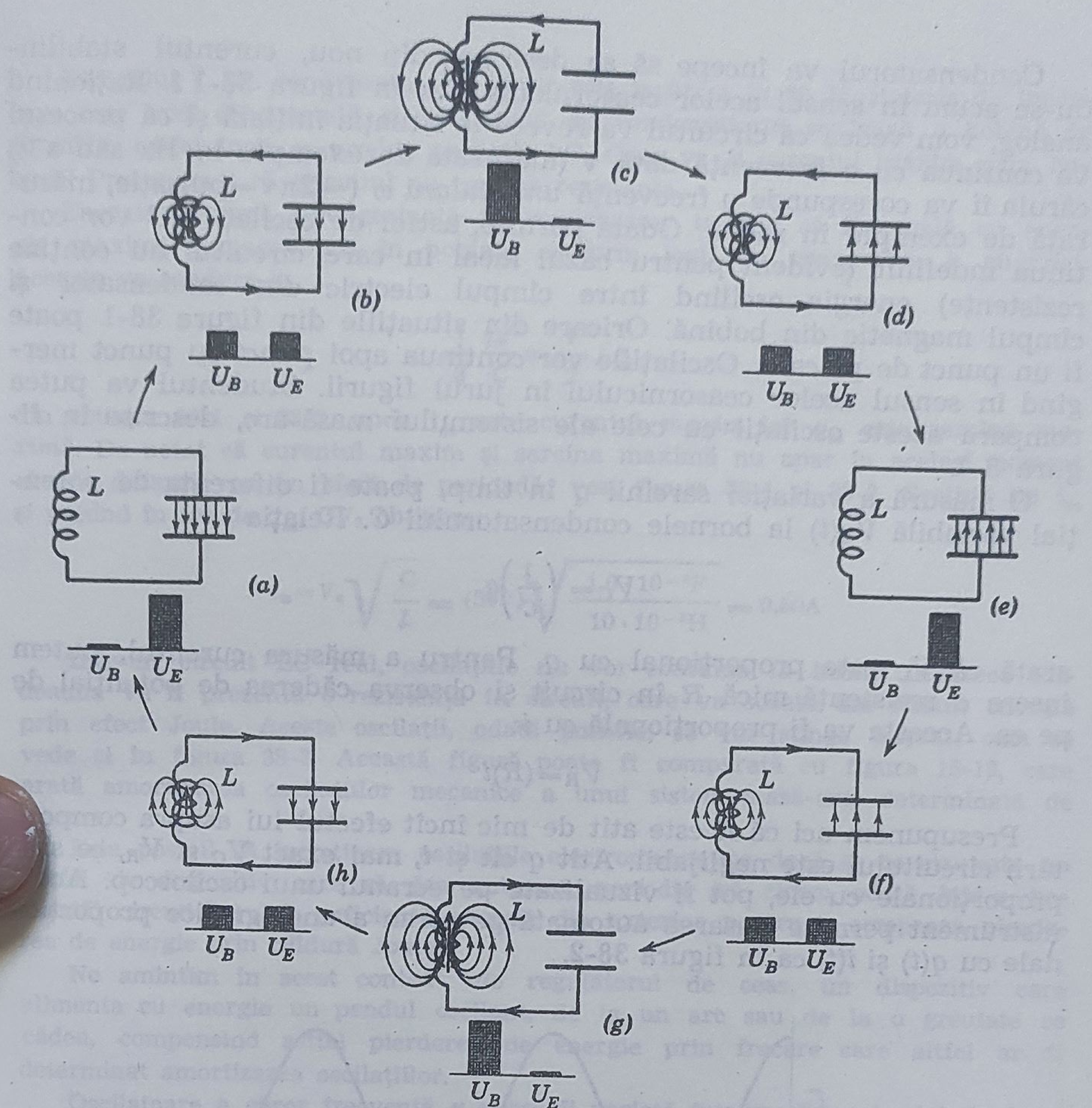


Figura 38-1. Se indică opt stadii dintr-un ciclu de oscilație al unui circuit *LC*. Graficele de sub fiecare figură arată energia potențială magnetică și electrică înmagazinată. Săgeata verticală pe axa bobinei indică curentul. Studentului i se propune să compare în amănunt, această figură cu figura 8-4, cu care ea corespunde exact.

fie în acest moment maxim. Observați că cu toate că q este zero, curentul (care este dq/dt) *nu* este zero la acest moment.

Curentul de intensitate mare ce circulă prin bobină (figura 38-1 c) continuă să transporte sarcinile pozitive de pe placa superioară a condensatorului către placa inferioară cum se vede în figura 38-1, *d*, energia acum începe să treacă de la bobină, înapoi spre condensator în care cîmpul electric începe să crească din nou. La un moment dat (figura 38-1 e) întreaga energie va fi din nou complet transferată condensatorului. Situația din figura 38-1 *e* seamănă cu cea inițială, doar că acum condensatorul este încărcat în sens invers.

Condensatorul va începe să se descarce din nou, curentul stabilindu-se acum în sensul acelor ceasornicului, ca în figura 38-1 f. Raționînd analog, vom vedea că circuitul va reveni la situația inițială și că procesul va continua cu o frecvență dată ν (măsurată de exemplu în Hz sau s^{-1}) căruia îi va corespunde o frecvență *unghiulară* ω ($=2\pi\nu=$pulsație, măsurată de exemplu în rad/s). Odată pornite, astfel de oscilații *LC* vor continua indefinit (evident pentru cazul ideal în care circuitul nu conține rezistențe) energia oscilînd între cîmpul electric din condensator și cîmpul magnetic din bobină. Oricare din situațiile din figura 38-1 poate fi un punct de plecare. Oscilațiile vor continua apoi punct cu punct mergînd în sensul acelor ceasornicului în jurul figurii. Studentul va putea compara aceste oscilații cu cele ale sistemului masă-arc, descrise în figura 8-4.

O măsură a variației sarcinii q în timp, poate fi diferența de potențial variabilă $V_C(t)$, la bornele condensatorului C. Relația

$$V_C=\left(\frac{1}{C}\right)q$$

arată că V_C este proporțional cu q. Pentru a măsura curentul, putem însera o rezistență mică R în circuit și observa căderea de potențial de pe ea. Aceasta va fi proporțională cu i:

$$V_R=(R)i$$

Presupunem aci că R este atît de mic încît efectul lui asupra comportării circuitului este neglijabil. Atît q cît și i, mai exact V_C și V_R, ce sînt proporționale cu ele, pot fi vizualizate pe ecranul unui osciloscop. Acest instrument permite trasarea automată pe ecran a unor grafice proporționale cu $q(t)$ și $i(t)$ ca în figura 38-2.

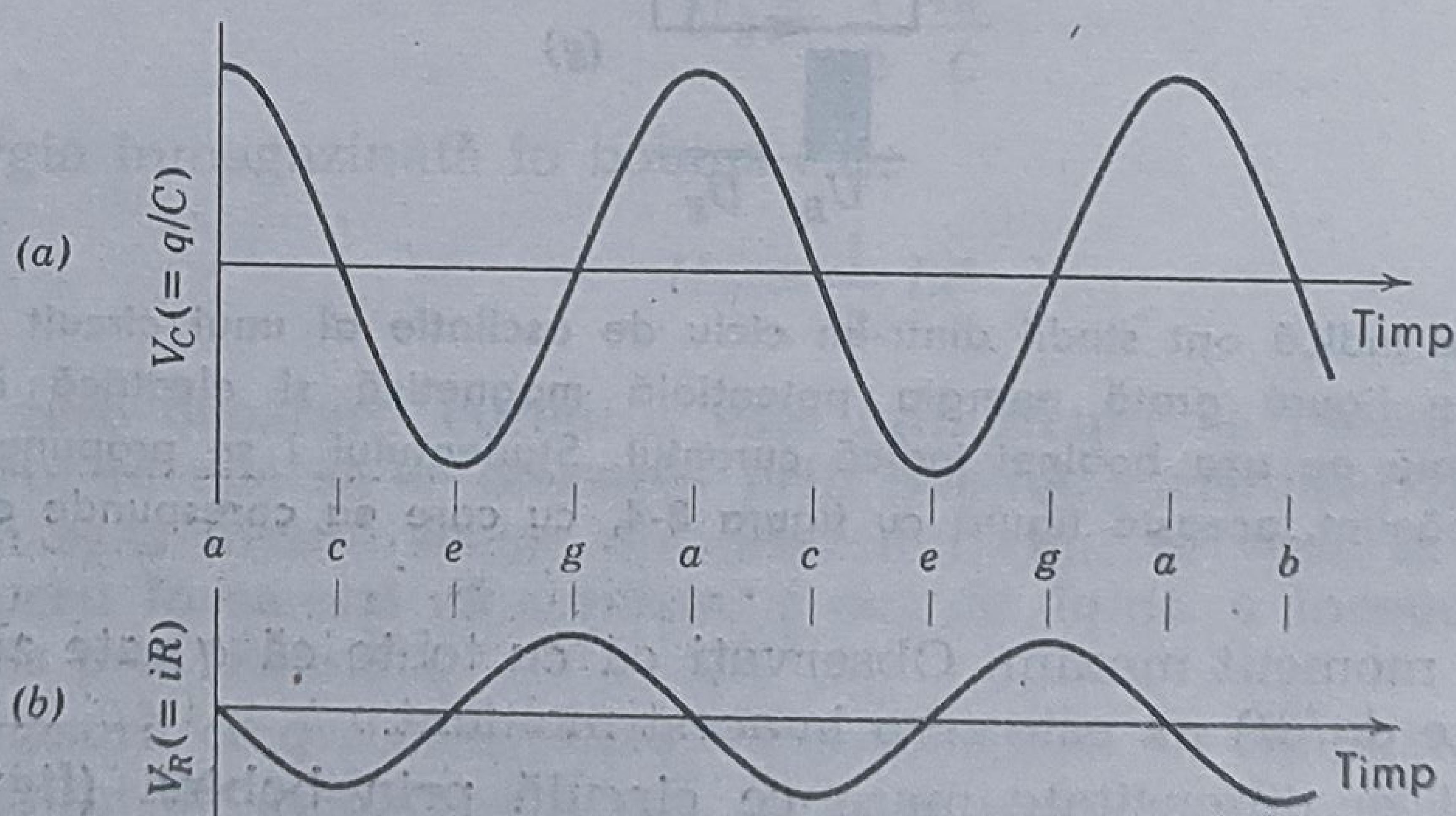


Figura 38-2. Un desen de pe ecranul osciloscopului care indică (a) sarcina și (b) curentul din circuitul din figura 38-1 funcție de timp, obținute ca diferențe de potențial. Literele indică fazele corespunzătoare ale oscilațiilor din această figură. Observați că deoarece $i=dq/dt$, curba de jos este proporțională cu derivata celei de sus.

Exemplul 1 Un condensator de 1,0μF este încărcat la 50 V. Bateria de încărcare este apoi deconectată și în paralel cu condensatorul se leagă o bobină de 10 mHy, astfel încît se produc oscilații *LC*. Care va fi curentul maxim prin bobină? Presupuneți că circuitul nu conține rezistențe.

Energia maximă înmagazinată în condensator trebuie să fie egală cu energia maximă înmagazinată în bobină, conform legii de conservare a energiei. Aceasta va conduce la

$$\frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}=\frac{1}{2}Li_m^2$$

din ecuația 38-1 și 38-2, unde i_m este curentul *maxim* iar q_m este sarcina *maximă*. De notat că curentul maxim și sarcina maximă nu apar în același moment ci sînt defazate cu un sfert de perioadă; vezi figura 38-1 și 38-2. Scoțînd pe i_m și punînd în loc de q_m, CV_0 obținem:

$$i_m=V_0\sqrt{\frac{C}{L}}=(50V)\sqrt{\frac{1{,}0\cdot10^{-6}\text{F}}{10\cdot10^{-3}\text{H}}}=0{,}50\text{A}$$

Într-un circuit *LC* real, oscilațiile nu vor continua la infinit deoarece totdeauna va fi prezentă o rezistență în circuit, care va scoate din circuit energia prin efect Joule. Aceste oscilații, odată pornite, se vor stinge treptat, cum se vede și în figura 38-3. Această figură poate fi comparată cu figura 15-19, care arată amortizarea oscilațiilor mecanice a unui sistem masă-arc, determinată de frecare.

Este posibil să întreținem oscilațiile electromagnetice dacă se construiește un astfel de dispozitiv care să dea automat, periodic (să zicem odată într-o perioadă) circuitului *LC*, suficientă energie din exterior pentru a compensa pierderea de energie prin căldură Joule.

Ne amintim în acest context, de regulatorul de ceas, un dispozitiv care alimenta cu energie un pendul oscilant, de la un arc sau de la o greutate ce cădea, compensînd astfel pierderea de energie prin frecare care altfel ar fi determinat amortizarea oscilațiilor.

Oscilatoare a căror frecvență ν poate fi variată într-un domeniu dat de frecvențe se construiesc astăzi la scară industrială și cuprind un domeniu larg de frecvență cuprins între frecvențele joase-audio (mai mic ca 10 Hz) pînă la frecvențele microundelor (mai mari ca 10^{10} Hz).

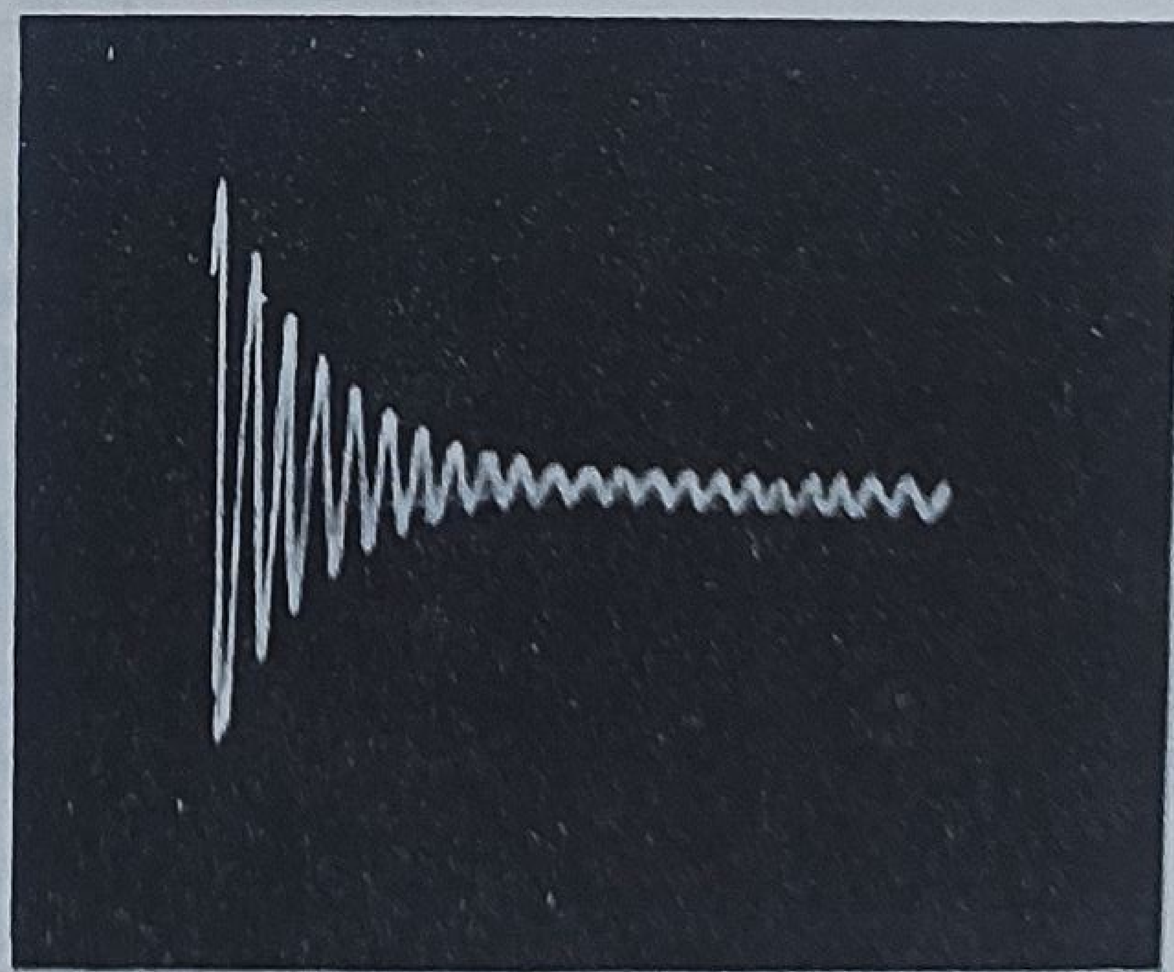


Figura 38-3. O fotografie a ecranului unui osciloscop pe care se vede forma oscilațiilor într-un circuit *LRC* care scad în timp deoarece energia este treptat disipată sub formă de căldură Joule în rezistor. Figura reprezintă diferența de potențial la bornele rezistorului funcție de timp.

38-2 Analogia cu mişcarea armonică simplă

În figura 8-4 se vede că în cazul oscilaţiilor simple, armonice, ale unui sistem masă-arc, ca şi în cazul circuitului oscilant LC, sînt în joc două forme de energie. Una din ele este rezultată din comprimarea sau dilatarea arcului iar cealaltă este legată de energia cinetică a masei în mişcare. Acestea sînt date de relaţiile ce ne sînt familiare şi sînt trecute în coloana din stînga a tabelei 38-1. Tabela sugerează că condensatorul este analogul arcului iar bobina este analogul masei şi că o serie de mărimi electromagnetice îşi au corespondentul lor mecanic şi anume:

q corespunde cu x

i corespunde cu v

C corespunde cu $1/k$

L corespunde cu m

Tabela 38.1

CÎTEVA FORMULE PENTRU ENERGIE

mecanică	electromagnetică
resortul $U_p = \frac{1}{2} kx^2$	condensatorul $U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
masa $U_k = \frac{1}{2} mv^2$	bobina $U_B = \frac{1}{2} Li^2$
$v = dx/dt$	$i = dq/dt$

Comparînd figura 38-1 care ne arată oscilaţia circuitului LC cu figura 8-4 care ne arată oscilaţia sistemului masă-arc, vedem cît de adîncă este corespondenţa. Observaţi că în cele două figuri corespondenţa este v cu i şi de asemenea x cu q. Observaţi de asemenea, cum în ambele cazuri energia alternează între două forme magnetică şi electrică pentru sistemul LC şi cinetică şi potenţială pentru sistemul masă-arc.

În paragraful 15-3 am văzut că frecvenţa unghiulară naturală de oscilaţie a unui sistem masă-arc în oscilaţie liberă neamortizată este

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Metoda analogiei ne sugerează că găsirea frecvenței naturale de oscilație a unui circuit LC se poate obține înlocuind pe k cu $1/C$ și pe m cu L, astfel

$$\omega=2\pi\nu=\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (38\text{-}3)$$

Această formulă este într-adevăr corectă, după cum vom vedea în paragraful următor.

38-3 Oscilații electromagnetice — tratare matematică

Vom deduce în continuare expresia frecvenței oscilațiilor într-un circuit LC, pornind de la legea de conservare a energiei. Energia totală U din circuitul LC în orice moment este dată de

$$U=U_B+U_E=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

relație care exprimă faptul că la un moment oarecare de timp energia este înmagazinată parțial în cîmpul magnetic al bobinei și parțial în cîmpul electric al condensatorului. Dacă presupunem că rezistența circuitului este nulă, atunci U nu se modifică în timp (nu se produce căldură Joule) chiar dacă i sau q variază. Matematic acest lucru înseamnă că dU/dt trebuie să fie zero. Această condiție ne conduce la

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0 \qquad (38\text{-}4)$$

Mărimile q și i nu sînt variabile independente, fiind legate prin relația

$$i=\frac{dq}{dt}$$

Derivînd în raport cu timpul, obținem

$$\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$$

Înlocuind aceste două expresii în ecuația 38-4 obținem

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0 \qquad (38\text{-}5)$$

Aceasta este ecuația diferențială care descrie oscilația circuitului LC (fără rezistență). Pentru a găsi soluția ecuației, observăm că ecuația 38-5 este identică din punct de vedere matematic cu ecuația 15-6

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \qquad (15\text{-}3)$$

care este ecuația diferențială a oscilației sistemului masă-arc. Pe această identitate se bazează corespondența mărimilor indicată în pagina 308.

Soluția ecuației 15-6 este

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad (15\text{-}5)$$

unde A ($= x_m$) este amplitudinea mișcării iar φ este un *unghi de fază* arbitrar. Deoarece q corespunde lui x, putem scrie soluția ecuației 38-5 sub forma

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad (38\text{-}6)$$

Unde ω este frecvența unghiulară încă necunoscută a oscilației electromagnetice.

Putem verifica că ecuația 38-6 este într-adevăr o soluție a ecuației 38-5, introducînd în ea derivata a doua a ei. Pentru a găsi derivata a doua, vom scrie

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (38\text{-}7)$$

și

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Substituind pe q și d^2q/dt^2 în ecuația 38-5 obținem

$$-L\omega^2 q_m \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} q_m \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Împărțind cu $q_m \cos(\omega t + \varphi)$ și rearanjînd termenii obținem

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Astfel, dacă ω ia valoarea constantă $1/\sqrt{LC}$, ecuația 38-6 este într-adevăr o soluție a ecuației 38-5. Această expresie pentru ω este identică cu cea pe care am dedus-o prin analogie.

Unghiul de fază φ din ecuația 38-6 este determinat de condițiile inițiale (la $t=0$). Dacă condiția inițială este cea reprezentată în figura 38-1 a, atunci vom lua $\varphi=0$, pentru ca ecuația 38-6 să ne dea corect $q=q_m$ pentru $t=0$. Ce situație inițială corespunde în figura 38-1 cazului $\varphi=90°$?

Exemplul 2. (a) Care este valoarea sarcinii de pe un condensator ce face parte dintr-un circuit oscilant LC, în momentul în care energia este egal repartizată între cîmpul electric, și magnetic, raportată la sarcina maximă? (b) Care este intervalul de timp necesar, pentru ca acest lucru să se producă, presupunînd că condensatorul la început a fost încărcat cu q_m? Presupuneți că $L=10$ mH și $C=1{,}0\ \mu$ F.

(a) Energia înmagazinată și valoarea ei *maximă* pentru un condensator sînt respectiv

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{și} \quad U_{E,m} = \frac{q_m^2}{2C}$$

Punînd $U_E = \frac{1}{2} U_{E,m}$, obținem

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{2C} \quad \text{sau} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} q_m$$

(b) Pentru a găsi timpul, scriem ecuația 38-6, presupunînd $\varphi = 0$

$$q = q_m \cos \omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} q_m,$$

care conduce la $\omega t = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ sau $t = \frac{\pi}{4\omega}$

Pulsația ω se găsește din ecuația 38-3

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(10 \cdot 10^{-3}\ \text{Hy})\,(1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{F})}} = 10 \cdot 10^4\ \text{rad/s}$$

Timpul t este atunci

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{(4)\,(1{,}0 \cdot 10^4\ \text{rad/s})} = 7{,}9 \times 10^{-5}\ \text{s}$$

Care este frecvența ν în Hz?

Energia electrică înmagazinată în circuitul LC, folosind ecuația 38-6 este

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{q_m}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi) \tag{38-8}$$

iar energia magnetică, folosind ecuația 38-7 este

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L\omega^2 q_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Introducînd expresia lui ω (ecuația 38-3) în această ultimă ecuație obținem

$$U_B = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi) \tag{38-9}$$

În figura 38-4 se arată graficele lui $U_E(t)$ și $U_B(t)$ pentru cazul $\varphi = 0$. Observați că (a) valorile maxime ale lui U_E și U_B sînt aceleași ($= q_m^2/2C$); (b) suma lui U_B și U_E pentru orice moment este constantă ($= q_m^2/2C$); și (c) cînd U_E ajunge maxim, U_B este zero și reciproc. Această analiză conferă validitate analizei calitative efectuate în paragraful 38-1. Studentul va compara această dis-

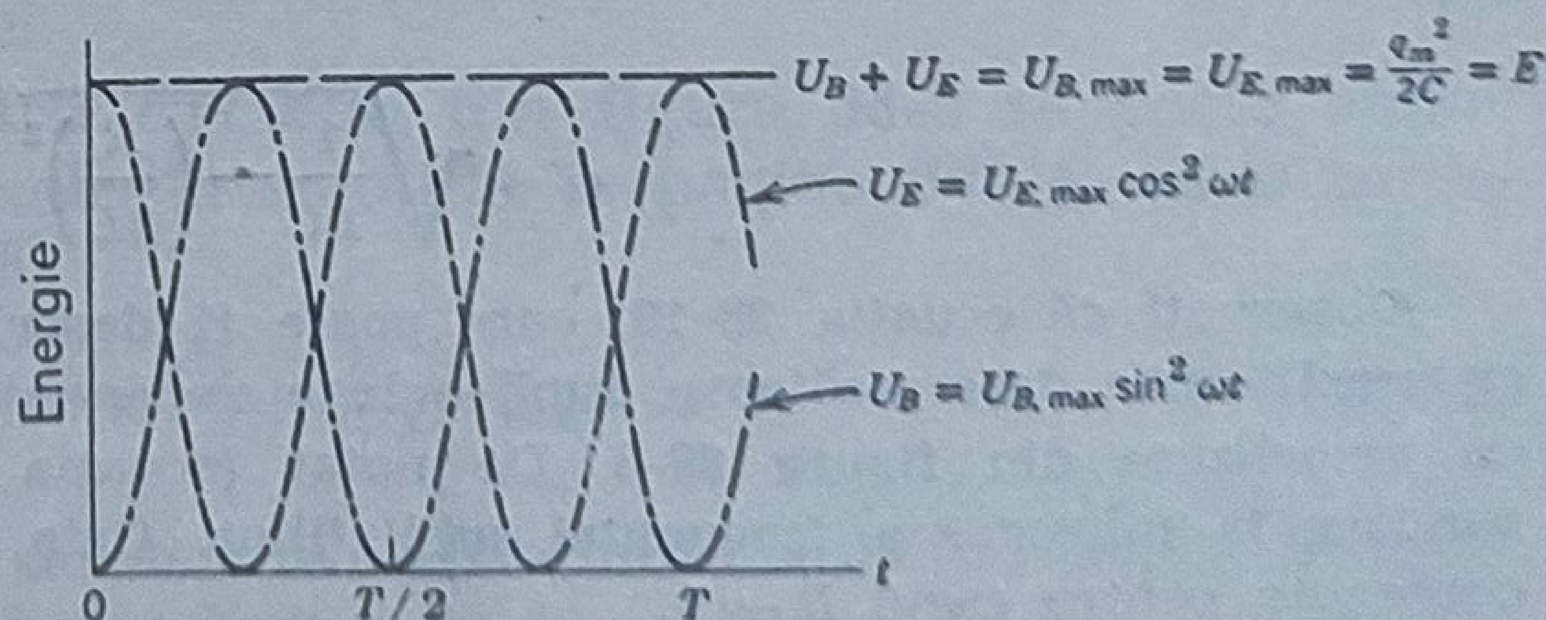


Figura 38-4. Energia electrică și magnetică acumulată în circuitul din figura 38-1. Observați că suma lor este constantă.

cuție cu cea dată în paragraful 15-4 pentru transformările energiei în sistemul masă-arc.

Exemplul 3. *Circuitul LCR.* (a) Găsiți expresia lui $q(t)$ pentru un circuit simplu ce conține o rezistență R, o bobină de inductanță L și o capacitate C. (b) După cît timp amplitudinea oscilației sarcinii va scădea la jumătate dacă $L=10$ mH, $C=1{,}0\mu F$ și $R=0{,}1\Omega$?

(a) Dacă U este energia totală înmagazinată, obținem ca mai înainte

$$U=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C},$$

unde însă U nu mai este constant ci variază

$$\frac{dU}{dt}=-i^2R$$

semnul minus semnificînd *descreșterea* energiei înmagazinată U în timp și transformarea ei în căldură Joule, cu „viteza" i^2R. Combinînd cele două ecuații obținem

$$Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=-i^2R$$

Înlocuind pe i cu dq/dt și pe di/dt cu d^2q/dt^2 obținem

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0,$$

care este ecuația diferențială ce descrie oscilațiile amortizate LC. Dacă punem $R=0$, ecuația se reduce, după cum era de așteptat, la ecuația 38-5.

Studentul va compara această ecuație diferențială pentru oscilațiile LC amortizate, cu ecuația 15-17.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0, \qquad (15\text{-}28)$$

care descrie oscilațiile amortizate ale sistemului masă-arc. Încă odată identitatea matematică a ecuațiilor ne permite să facem corespondența între R și constanta b a amortizării mecanice.

Soluția pentru circuitul LCR se poate scrie imediat, prin analogie cu soluția ecuației 15-37. Pentru R suficient de mic (vezi ecuația 15-38 și ecuația 15-39) și pentru condiția inițială în care capacitatea are sarcina maximă

$$q=q_m\, e^{-Rt/2L}\cdot\cos\omega' t \qquad (38\text{-}10)$$

unde

$$\omega'=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad (38\text{-}11)$$

Observați că ecuația 38-10, care poate fi descrisă ca o funcție cosinusoidală, cu amplitudine descrescătoare după o lege exponențială, este echivalentă cu curba de amortizare din figura 38-3. De notat (ecuația 38-11) că prezența rezistenței conduce la micșorarea frecvenței oscilațiilor. Cele două relații se reduc la cele cunoscute, pentru cazul $R\to 0$.

(b) Amplitudinea de oscilație va descrește la jumătate cînd factorul de amplitudine $e^{-Rt/2L}$ din ecuația 38-10 va deveni 1/2 adică

$$\frac{1}{2}=e^{-Rt/2L}$$

care ne conduce la

$$t=\frac{2L}{R}\ln 2=\frac{(2)\,(10\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H})\,(0.69)}{0{,}10\ \Omega}=0{,}14\ \mathrm{s}.$$

Pulsația, va fi (din ecuația 38-11)

$$\omega'=\sqrt{\frac{1}{(10\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H})\,(1{,}0\cdot 10^{-6}\ \mathrm{F})}-\left(\frac{0{,}10\ \Omega}{2\cdot 10\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Hy}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{10^8\ \mathrm{rad^2/s^2}-25\ \mathrm{rad^2/s^2}}=1{,}0\times 10^4\ \mathrm{rad/s}$$

Observați că termenul al doilea este destul de mic, astfel că în acest caz, ca de altfel în multe alte cazuri practice, rezistența va avea un efect neglijabil asupra frecvenței. Studentul va arăta că timpul de 0,14 s necesar pentru reducerea la jumătate a amplitudinii oscilațiilor corespunde la aproximativ 220 perioade. Atenuarea este mult mai slabă ca cea arătată în figura 38-3.

38-4 Oscilațiile forțate și rezonanța

Să considerăm un circuit LCR (figura 38-5) ce conține o sursă de t.e.m. $\mathscr{E}(t)$, sinusoidală dată de relația

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\cos\omega''t,$$

în care ω'' poate fi variată după dorință. T.e.m. $\mathscr{E}(t)$ poate proveni de exemplu de la un oscilator cu frecvență variabilă. Care va fi amplitudinea oscilațiilor electromagnetice ce au loc în circuit, în funcție de pulsația ω'' a „forței" ce excită aceste oscilații?

Problema este similară cu cea a oscilațiilor forțate dintr-un sistem masă-arc, cu amortizare, discutat în paragraful 15-10. Ecuația diferențială ce descrie mișcarea este

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_m\cos\omega''t, \qquad (15\text{-}31)$$

unde ω'' este pulsația forței externe (excitatoare), periodice, aplicată sistemului și F_m amplitudinea ei.

Ecuația diferențială pentru circuitul din figura 38-5 se poate obține dacă ținem cont de corespondența stabilită la pagina 308 și cu o corespondență aleasă între $\mathscr{E}$ și F

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=\mathscr{E}_m\cos{}''t. \qquad (38\text{-}12)$$

Această ecuația poate fi de asemenea obținută aplicînd legea de conservare a energiei la circuitul din figura 38-5.

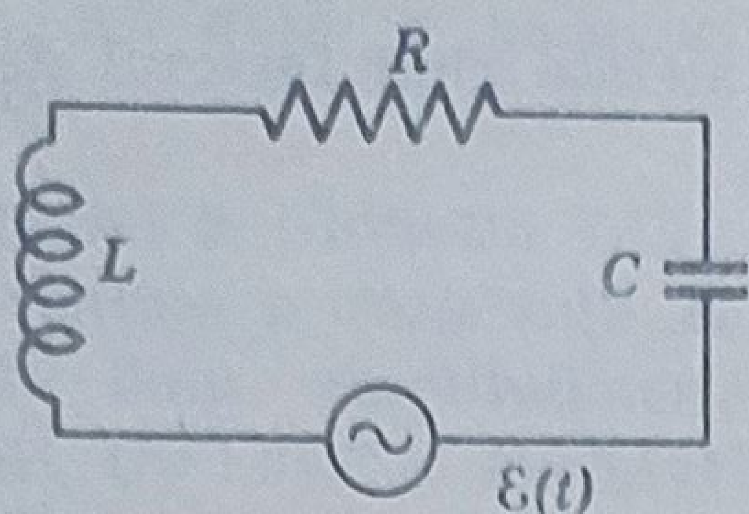


Figura 38-5. Un circuit *LRC* care conţine o sursă de t.e.m. sinusoidală de pulsaţie ω''.

Putem obţine soluţia ecuaţiei 38-12 folosind aceeaşi corespondenţă între mărimi, de la pagina 308. Pornind de la ecuaţia 15-4 şi făcînd substituţiile necesare, obţinem:

$$q=\frac{\mathcal{E}_m}{G}\sin(\omega''t-\varphi), \tag{38-13}$$

unde

$$G=\sqrt{\left(\omega''^2L-\frac{1}{C}\right)^2+R^2\omega''^2},$$

iar φ, *unghiul de fază* dintre „forţa excitatoare" şi „răspunsul" sistemului este dat de

$$\varphi=\arccos\frac{R\omega''}{G}$$

Pe noi ne interesează mai degrabă curentul $i(t)$ din circuit decît sarcina; curentul este echivalentul vitezei $v(t)$ a masei în mişcare din paragraful 15-10. Putem obţine pe $i(t)$ derivînd ecuaţia 38-13 în raport cu timpul

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{\omega''\mathcal{E}_m}{G}\cos(\omega''t-\varphi)=i_m\cos(\omega''t-\varphi).$$

Amplitudinea i_m a oscilaţiilor de curent este din aceste ecuaţii:

$$i_m=\frac{\omega''\mathcal{E}_m}{G}=\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\omega''L-\frac{1}{\omega''C}\right)^2+R^2}}. \tag{38-14}$$

Analizînd ecuaţia 38-14 observăm că curentul (şi nu sarcina; vezi întrebarea 5) va avea un maxim al amplitudinii atunci cînd

$$\omega''L=\frac{1}{\omega''C} \tag{38-15 a}$$

care poate fi scrisă şi altfel

$$\omega''=\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{38-15 b}$$

Comparînd cu ecuaţia 38-3 observăm că amplitudinea maximă a oscilaţiilor de curent se obţine atunci cînd frecvenţa t.e.m. aplicată coincide cu frecvenţa proprie ω (neamortizată) a sistemului.

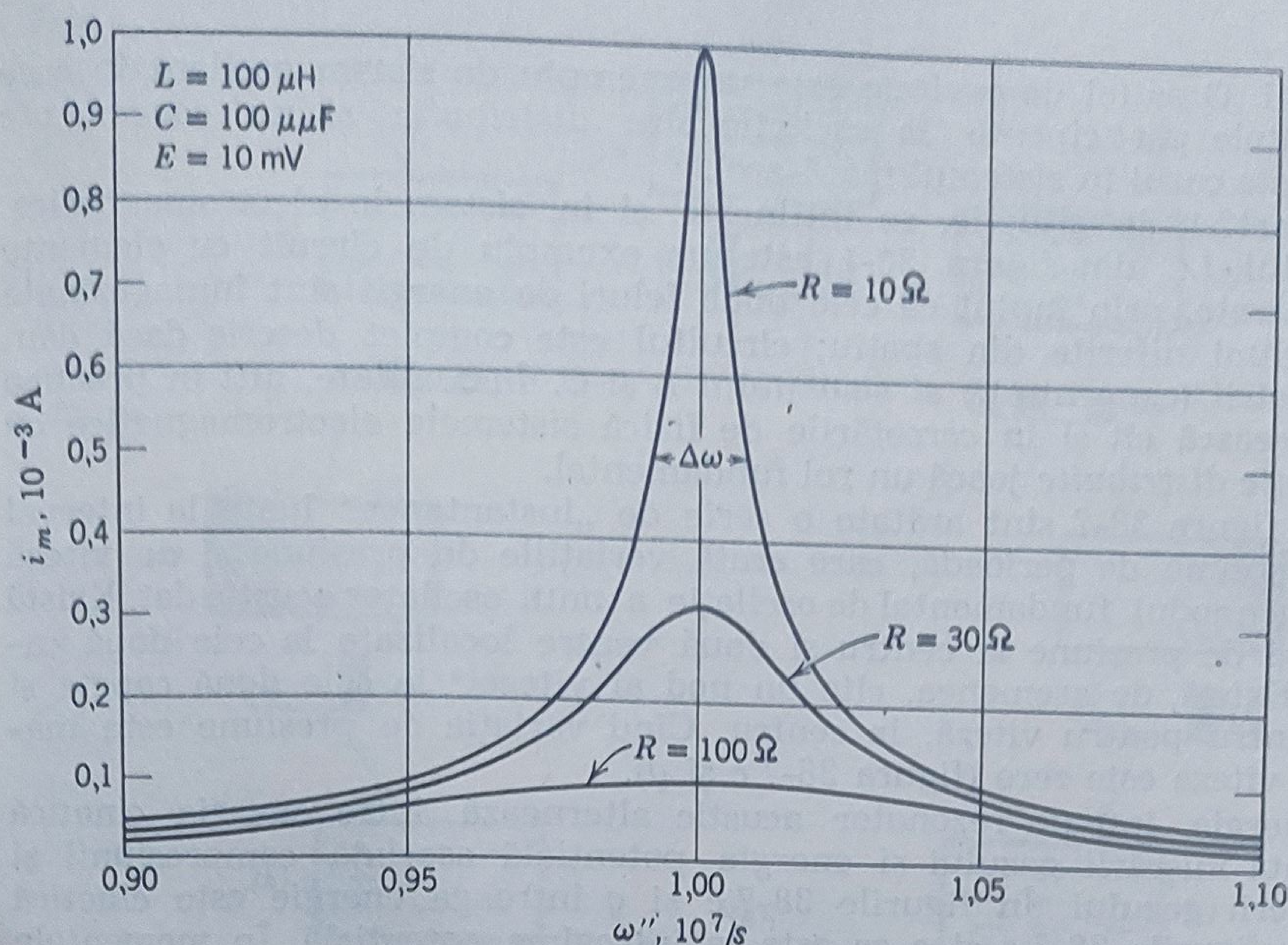


Figura 38-6. Amplitudinea curentului funcție de frecvență pentru circuitul din figura 38-5. Săgeata indicată cu $\Delta\omega$ pe curba $R=10\ \Omega$ reprezintă semilărgimea ei.

La rezonanță ($\omega''=\omega$) amplitudinea oscilațiilor de curent este determinată în întregime de rezistență; aceasta rezultă din ecuațiile 38-14 și 38-15 *a*, adică

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \quad \text{(la rezonanță)}$$

Graficul dependenței lui i_m de ω'' pentru un circuit *LCR* este dat în figura 38-6, pentru trei valori diferite ale rezistenței. Observați că cu cît rezistența din circuit este mai mică, cu atît curba de rezonanță este mai ascuțită. Lărgimea unei astfel de curbe se măsoară prin *semilărgimea* ei, care corespunde diferenței între două frecvențe, corespunzătoare unui curent egal cu jumătate din amplitudinea maximă de curent. Semilărgimea curbei de rezonanță pentru $R=10\ \Omega$ este indicată în figura 28-6 printr-un segment notat cu $\Delta\omega$.

38-5 Elemente de circuit, concentrate și distribuite

În sistemul oscilant masă-arc cele două forme de energie apar în două părți separate ale sistemului, energia potențială fiind înmagazinată în arc iar energia cinetică în masa în mișcare. O *cavitate rezonantă acustică*, ca, de exemplu, un tub de orgă, este un sistem oscilant mecanic în care cele două forme de energie *nu* sînt separate spațial. Energia cinetică asociată mișcării aerului din cavitate și energia potențială asociată compresiunii sau rarefierii aerului, pot fi prezentate pe întregul volum al

cavităţii. O astfel de cavitate este un exemplu de sistem oscilant în care elementele participante la oscilaţie sînt *distribuite* şi nu *concentrate* (cum este cazul în sistemul masă-arc).

O astfel de situaţie, se întîlneşte şi în sistemele electromagnetice. Circuitul LC din figura 38-1 este un exemplu de circuit cu elemente concentrate, prin faptul că cele două feluri de energii sînt înmagazinate în regiuni diferite din spaţiu; circuitul este complet descris dacă dăm parametrii (concentraţi) ai sistemului L şi C. În realitate, atît în practica inginerească cît şi în cercetările de fizică sistemele electromagnetice cu *elemente distribuite* joacă un rol fundamental.

În figura 38-7 sînt arătate o serie de „instantanee" luate la interval de o optime de perioadă, care arată variaţiile de presiune şi de viteză pentrul modul fundamental de oscilaţie a unui oscilator acustic dat. Există un nod de presiune la centru şi două ventre localizate la cele două capete. Există, de asemenea, cîte un nod al vitezei* la cele două capete şi un ventru pentru viteză, la centru. Cînd variaţia de presiune este maximă, viteza este zero (figura 38-7 c şi g).

Energia într-un rezonator acustic alternează între energia cinetică asociată mişcării gazului şi energia potenţială asociată compresiunii şi rarefierii gazului. În figurile 38-7 c şi g întreaga energie este cinetică iar în figurile 38-7 a şi e ea este în întregime potenţială. În momentele intermediare ambele există.

Energia cinetică a unei cantităţi mici de masă Δm din gaz, ce se mişcă paralel cu axa cilindrului cu o viteză v_g, este $\frac{1}{2}\Delta m \cdot v_g^2$. *Densitatea de energie cinetică*, adică, energia cinetică pe unitate de volum este

$$u_C = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}v_g^2 = \frac{1}{2}\rho_0 v_g^2,$$

în care ΔV este volumul unui element de gaz iar ρ_0 este densitatea medie a gazului.

Energia potenţială pe unitate de volum în gaz, adică, *densitatea de energie potenţială*, asociată cu comprimarea şi rarefierea gazului poate fi scrisă

$$u_p = \frac{1}{2}B\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2.$$

Aici B este modulul de elasticitate a gazului ca un întreg iar $\Delta\rho/\rho_0$ care este pozitiv pentru compresiune şi negativ pentru rarefiere, reprezintă variaţia relativă a densităţii gazului.

Pulsaţia oscilaţiilor pentru cavitatea din figura 38-7, pentru modul fundamental (frecvenţa minimă) este

$$\omega_1 = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{l},$$

* Viteza pe care noi o vom lua în consideraţie aici este vectorul vitezei $\vec{v}_g$, a unui element de volum de gaz, care este totuşi suficient de mare pentru a conţine un număr mare de molecule. Vitezele moleculelor corespunzătoare agitaţiei termice nu sînt luate în consideraţie deoarece sînt distribuite la întîmplare în toate direcţiile.

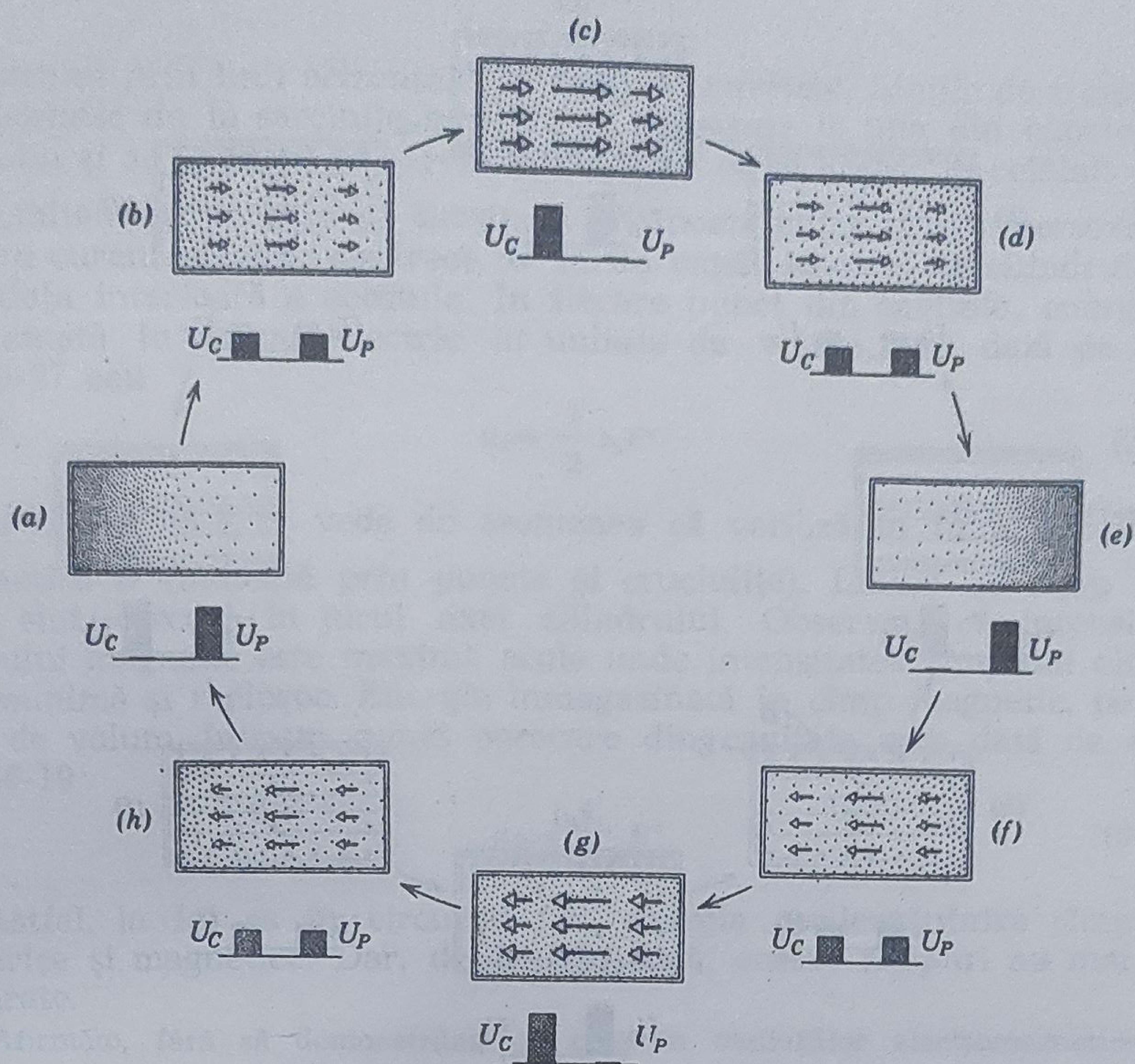


Figura 38-7. Se indică opt stadii dintr-un ciclu de oscilație a unei cavități rezonante acustice cilindrice. Săgețile reprezintă direcțiile vitezelor unor mici volume, elementare, de gaz. Comparați cu figura 38-1. Graficele de sub fiecare figură reprezintă energia cinetică și potențială.

unde v este viteza sunetului în gaz și l lungimea cavității. Din ecuația 20-1 putem scrie pe v ca $\sqrt{B_0/\rho_0}$. Observați că în relația de mai sus am pus $\lambda=2l$, corespunzătoare modului fundamental. Care sînt pulsațiile ω_2, ω_3 etc. ale modurilor superioare?

38-6 Cavitatea electromagnetică ca oscilator

Să considerăm acum un alt cilindru închis, de rază a și lungime l a cărui pereți sînt făcuți din cupru sau alt bun conductor de electricitate. Pot fi produse oscilații ale cîmpului electric și magnetic într-o astfel de cavitate dacă ea este goală în interior! O astfel de *cavitate rezonantă electromagnetică* este un oscilator electromagnetic cu elemente distribuite, spre deosebire de circuitul LC, care este un sistem cu elemente concentrate. Ca și în cazul rezonatorului acustic, și aci sînt posibile mai multe moduri de oscilație cu frecvențe bine determinate; vom descrie în cele ce urmează doar modul fundamental ce corespunde frecvenței minime.

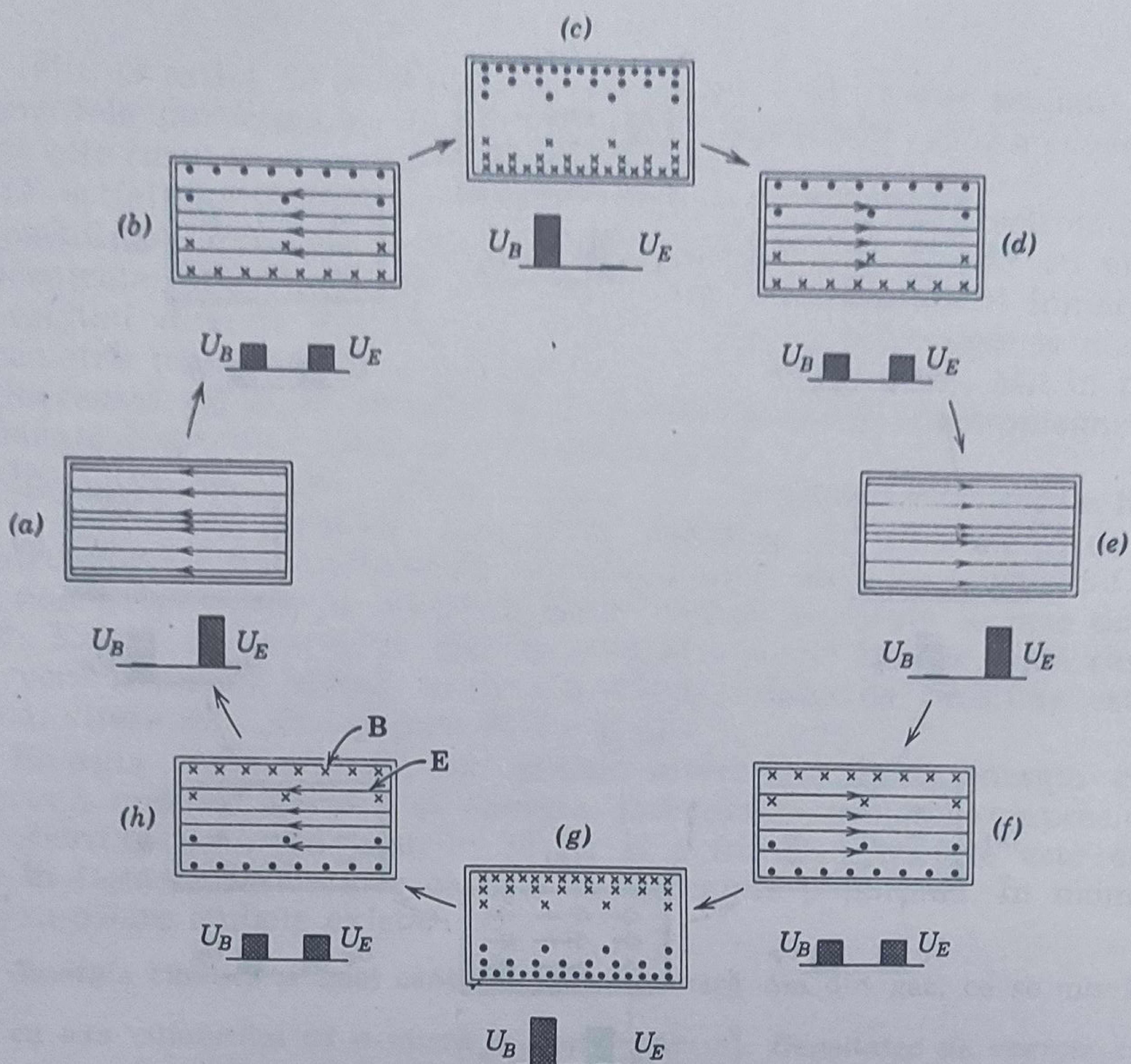


Figura 38-8. Se indică opt stadii dintr-un ciclu de oscilații a unei cavități rezonante cilindrice electromagnetice. Graficele de sub fiecare figură reprezintă energia electrică și magnetică acumulată. Punctele și crucile reprezintă linii circulare ale lui B; liniile orizontale reprezintă $\vec{E}$. Comparați cu figura 38-7.

Oscilațiile pot fi amorsate, dacă cuplăm în mod corespunzător cu o sursă de oscilații electromagnetice, cum ar fi de exemplu un magnetron*. Cuplajul se realizează de obicei printr-o mică fantă circulară, practicată în peretele cavității. Dacă dimensiunile cavității sînt de ordinul centimetrilor, frecvențele de rezonanță vor fi de ordinul a 10^{10} Hz. Aceste frecvențe sînt foarte înalte în comparație cu frecvențele acustice ce iau naștere în cavități rezonante de aceleași dimensiuni, și sînt o urmare directă a faptului că perturbațiile electromagnetice se propagă în spațiul liber cu o viteză ($=3\cdot10^8$ m/s) ce depășește cu mult viteza sunetului în aer (~ 350 m/s).

O serie de „instantanee" luate la interval de o optime dintr-o perioadă (figura 38-8) arată cum variază intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$

* *Magnetronul* este o sursă de oscilații electromagnetice de frecvențe foarte înalte, lungimi de undă de ordinul centimetrilor sau milimetrilor, în care oscilațiile iau naștere într-o serie de cavități rezonante și sînt întreținute (neamortizate) prin metode electromagnetice. (N.T.).

reprezentat prin linii orizontale, în timp, în cavitate. Liniile de cîmp electric pornesc de la sarcinile pozitive ce se găsesc la una din capetele cilindrului și se termină pe sarcinile negative ce se găsesc la celălalt capăt. Concomitent cu variația de timp a lui $\vec{E}$ (poate chiar să-și inverseze sensul) un curent electric va trece de la un capăt la altul al cilindrului pe suprafața interioară a acestuia. În fiecare punct din cavitate, energia înmagazinată în cîmpul electric în unitate de volum este dată de ecuația 30-27 sau

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{38-16}$$

În figura 38-8 se vede de asemenea că variază în timp și inducția magnetică $\vec{B}$ (indicată prin puncte și cruciulițe). Liniile de cîmp magnetic sînt cercuri în jurul axei cilindrului. Observați că intensitatea cîmpului magnetic este maximă acolo unde intensitatea cîmpului electric este minimă și reciproc. Energia înmagazinată în cîmp magnetic, pe unitate de volum, într-un punct oarecare din cavitate este dată de ecuația 36-19

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{38-17}$$

Astfel, la fel ca în circuitul LC, energia oscilează între cîmpurile electrice și magnetice. Dar, de această dată, aceste cîmpuri nu mai sînt separate.

Afirmăm, fără să demonstrăm, că pulsația oscilațiilor electromagnetice din cavitatea din figura 38-8, pentru modul fundamental arătat în figură este

$$\omega_1 = \frac{1{,}19c}{a}$$

în care a este raza cavității iar c viteza radiațiilor electromagnetice în spațiul liber. Vom vedea mai tîrziu (paragraful 39-5) că c poate fi scrisă în funcție de mărimile electromagnetice sub forma $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Structura liniilor de cîmp reprezentate în figura 38-8, sugerează că frecvența de rezonanță a oscilațiilor din cavitate, pentru modul arătat, depinde doar de raza cavității și nu depinde de lungimea ei.

În tabela 38-2 sînt însumate o serie de mărimi ce caracterizează cele patru sisteme oscilante discutate pînă acum. Pentru sisteme cu constante concentrate se dau expresiile celor două tipuri de energii în joc și frecvența (unică) de oscilație. Pentru sistemele cu constanțe distribuite se dau expresiile densităților de energie ce sînt în joc și frecvența de oscilație pentru modul fundamental. Studentului i se propune să studieze cu atenție toate corespondențele, asemănările și diferențele ce apar în această tabelă.

Expresia de mai sus, pentru frecvența unghiulară fundamentală de rezonanță ω_1 a cavității este dedusă scriind ecuațiile de bază ale electromagnetismului (tabela 38-3) pentru spațiul din interiorul cavității cu condiții la frontieră corespunzătoare: $\vec{E}$ *trebuie să fie zero în interiorul pereților cavității iar componenta tangențială a ei trebuie să fie zero peste tot la suprafața internă a cavității.* Dacă acest lucru nu ar fi adevărat, un curent de intensitate infinită ar trece prin pereții cavității (de rezistivitate presupusă nulă) determinată de această componentă tangențială. Această condiție la frontieră are același sens ca și cerința ca

Tabela 38.2

PATRU SISTEME OSCILANTE

	Sisteme mecanice	Sisteme electromagnetice
Sisteme cu constante concentrate	masă+arc $U_C=\frac{1}{2}mv^2$ $U_p=\frac{1}{2}kx^2$ $w=\sqrt{\frac{k}{m}}$	circuit LC $U_B=\frac{1}{2}Li^2$ $U_E=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\right)q^2$ $\omega=\sqrt{\frac{(1/C)}{L}}$
Sisteme cu constante distribuite	Cavitate acustică $u_C=\frac{1}{2}\rho_0 v_g^2$ $u_p=\frac{1}{2}B\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2$ $\omega_1=\frac{3{,}14v}{l}$; $v=\sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$	Cavitate electromagnetică $u_B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\right)B^2$ $u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ $\omega_1=\frac{1{,}19\,c}{a}$; $c=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$

amplitudinea oscilaţiilor unui arc fixat la ambele capete să fie nule la capetele lui sau ca şi cerinţa ca să existe noduri de viteză la marginea cavităţii rezonante acustice. Avînd aceste condiţii la frontieră asigurate pentru $\vec{E}$, se poate arăta (în presupunerea unor pereţi perfect conductori) că (a) nu poate exista în interior cîmp magnetic variabil în timp şi că (b) nu pot exista în pereţi curenţi variabili în timp. Totuşi, un cîmp magnetic tangenţial poate exista *la suprafaţă;* sarcini şi curenţi de suprafaţă pot exista.

Exemplul 4. Care este relaţia dintre valoarea „medie" a lui $\vec{E}$ pe întreaga cavitate din figura 38-8, luată la momentul corespunzător figurii 38-8 a, şi valoarea „medie" a lui $\vec{B}$, luată la momentul corespunzător figurii 38-8 c?

În primul moment, întreaga energie este electrică, iar în al doilea moment considerat, întreaga energie este magnetică. Energia totală U, obţinută prin integrarea densităţii de energie pe întregul volum al cavităţii, trebuie să fie aceeaşi în ambele momente, adică

$$U=\int U_{E,\,m}\,dV=\int U_{B,\,m}\,dV,$$

unde dV este elementul de volum în cavitate şi $u_{E,\,m}$ şi $u_{B,\,m}$ sînt valorile *maxime* ale lui u_E şi u_B în acest element de volum; aceste valori maxime se obţin un sfert

de perioadă mai tîrziu, după cum se vede și în figura 38-8. Folosind ecuațiile 38-16 și 38-17 obținem

$$\int \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} dV = \int \frac{B_m^2}{2\mu_0} dV$$

sau

$$\mu_0 \varepsilon_0 \int E_m^2 dV = \int B_m^2 dV$$

Mărimea $\int E_m^2 \, dV$ poate fi scrisă ca $\overline{E_m^2} V$, unde V, este volumul cavității iar $\overline{E_m^2}$ este valoarea medie a lui E_m^2 luată peste întreaga cavitate. Efectuînd în același fel calculele pentru B_m obținem

$$\mu_0 \varepsilon_0 \overline{E_m^2} = \overline{B_m^2}$$

sau extrăgînd rădăcina pătrată, obținem

$$\sqrt{\overline{B_m^2}} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\overline{E_m^2}}.$$

Putem nota $\sqrt{\overline{B^2}}$ prin B_{rmp} „rădăcina medie pătratică" a lui B_m. De observat că la calculul lui B_{rmp}, medierea s-a efectuat peste întregul volum al cavității, la momentul corespunzător figurii 38-8 c. Ea nu reprezintă media temporală pentru un punct dat din cavitate. Efectuînd aceleași calcule pentru $\vec{E}$ obținem

$$B_{rmp} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \, E_{rmp} = \sqrt{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}) \ (8{,}9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)} \cdot E_{rmp} =$$
$$= (3{,}3 \times 10^{-9} \text{ s/m}) \, E_{rmp}$$

Dacă $E_{rmp} = 10^4$ V/m, o valoare uzuală, atunci

$$B_{rmp} = (3{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ s/m}) \, (10^4 \text{ V/m}) = 3{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ Wb/m}^2 = 0{,}33 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

Care va fi energia totală înmagazinată în cavitate, în aceste condiții, presupunînd o cavitate de 10 cm lungime și 3,0 cm diametru?

Studentul își amintește că în exemplul 6, capitolul 36, am văzut că densitatea de energie în cîmpul magnetic folosit în mod normal în laboratoare (de exemplu 1T) este enorm de mare în comparație cu cea din cîmpurile electrice uzuale (de exemplu 10^5 V/m). Acest fapt se observă și în exemplul de față.

38-7 Cîmpuri magnetice induse

Pentru a înțelege oscilațiile cavității electromagnetice în termenii teoriei electromagnetice, va trebui să completăm ecuațiile fundamentale ale electromagnetismului și să introducem un nou concept și anume: un *cîmp electric variabil produce un cîmp magnetic*. Această afirmație, care este simetricul legii de inducție a lui Faraday, are o importanță fundamentală. Vom dezvolta această idee folosind considerente de simetrie și vom lăsa concordanța cu experiența a concluziilor finale să vorbească singure. Această concordanță cu experiența, este amplu discutată în capitolele 39 și 40.

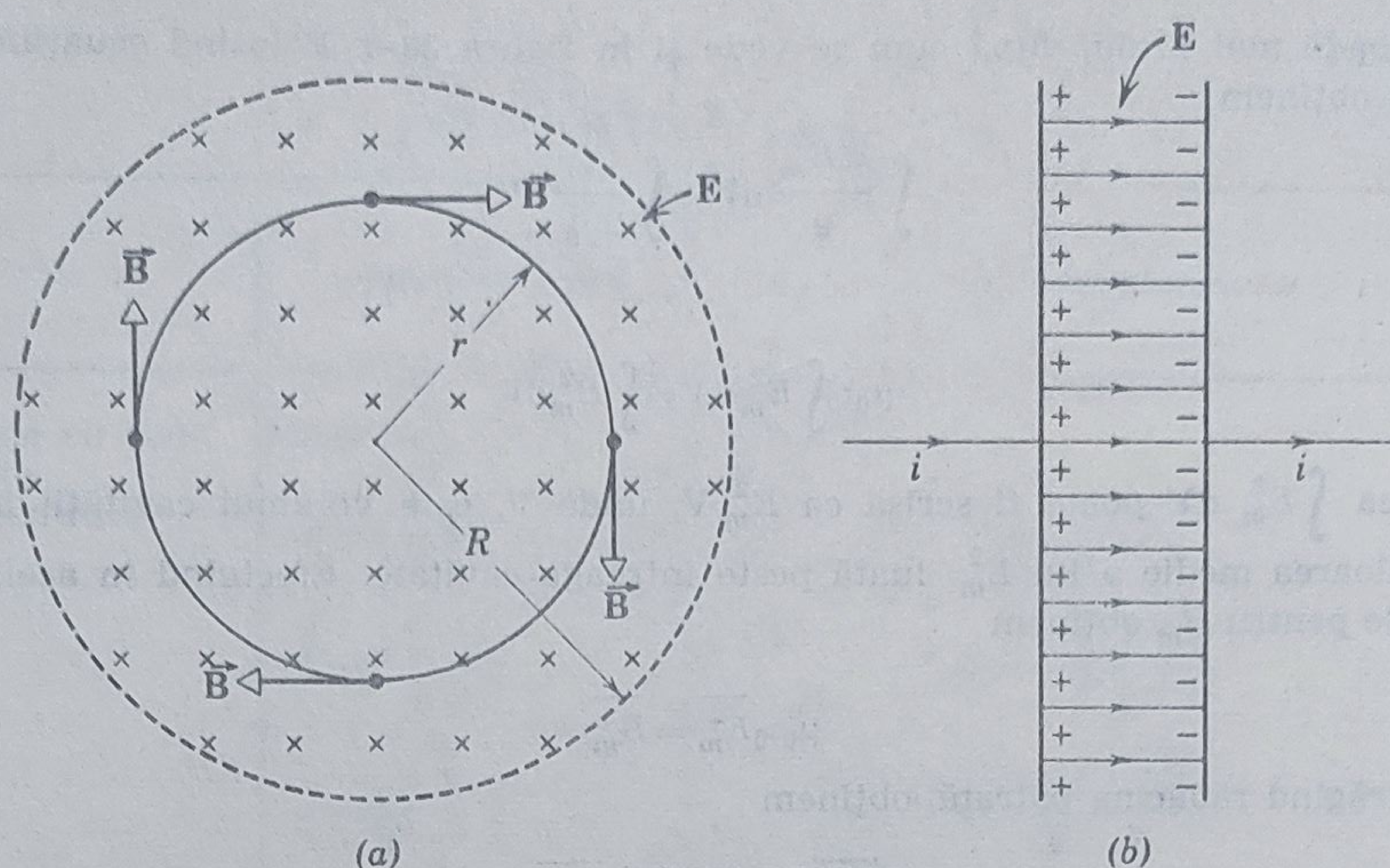


Figura 38-9. (a) Se prezintă cîmpul magnetic indus $\vec{B}$, în patru puncte, produs un cîmp electric variabil E. Cîmpul electric crește. Comparați cu figura 35-10. (b) O astfel de variație de cîmp electric poate fi produs prin încărcarea unui condensator plan, reprezentat în figură.

Principial rezultat obținut a fost demonstrarea faptului că viteza luminii vizibile în spațiul liber, c, poate fi legată de mărimi pur electromagnetice, prin relația

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{38-18}$$

Această demonstrație nu numai că a arătat că optica este o ramură a electromagnetismului, dar a condus direct la ideea de spectru electromagnetic, care în continuare a condus la descoperirea undelor de radio.

În figura 38-9 *a* se vede cum un cîmp electric $\vec{E}$ umple o regiune cilindrică din spațiu. El poate fi produs de exemplu de un condensator plan cu armături circulare, paralele (figura 38-9 *b*). Presupunem că E crește în timp cu o viteză constantă dE/dt, ceea ce înseamnă că trebuie să alimentăm plăcile cu sarcini electrice, într-un ritm constant; pentru a realiza acest lucru trebuie ca un curent constant i să meargă spre placa pozitivă și un curent constant, egal, i să iasă din placa negativă.

Dacă vom putea realiza o experiență suficient de sensibilă, atunci vom găsi că acest *cîmp electric variabil produce un cîmp magnetic*. În figura 38-9 *a* se indică $\vec{B}$ în patru puncte oarecari. Figura 38-9 ne arată un exemplu foarte frumos de simetrie în natură. Un cîmp *magnetic* variabil produce un cîmp *electric* (legea lui Faraday); vedem acum că un cîmp *electric* variabil produce un cîmp *magnetic*.

Pentru a descrie matematic acest efect nou, sîntem ghidați de analogia cu legea de inducție a lui Faraday

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (38\text{-}19)$$

care spune că un cîmp electric (termenul din stînga) este produs de către un cîmp magnetic variabil (termenul din dreapta). Din motive de simetrie vom putea scrie*

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (38\text{-}20)$$

Ecuația 38-20, afirmă că un cîmp magnetic (termenul stîng) se poate produce prin varierea cîmpului electric (termenul drept). Studentul este îndrumat să compare cu atenție figura 35-10, care ilustrează producerea unui cîmp electric de către un cîmp magnetic variabil, cu figura 38-9 *a*. În fiecare caz, fluxul corespunzător Φ_B sau Φ_E este *crescător*. Cu toate acestea, experiența arată că liniile lui $\vec{E}$ din figura 35-10 sînt *în sens contrar mișcării acelor ceasornicului*, în timp ce cele ale lui $\vec{B}$ din figura 38-9 *a* sînt *în același sens cu mișcarea acelor ceasornicului*. Această diferență cere ca minusul din ecuația 38-19 să fie omis în ecuația 38-20.

În paragraful 34-1 am văzut că un cîmp magnetic poate fi de asemenea produs de un curent ce trece printr-un conductor. Am descris cantitativ acest lucru prin legea lui Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i,$$

în care i este curentul de conducție ce trece prin spira în jurul căreia este luat conturul de integrare. Astfel există cel puțin două moduri de producere a cîmpului magnetic: (a) prin variația cîmpului electric și (b) cu ajutorul unui curent. În general ambele posibilități pot fi folosite astfel că**

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i \qquad (38\text{-}21)$$

Această importantă generalizare a legii lui Ampère a fost dată de către Maxwell.

---

* Sistemul de unități ales de noi, cere ca să introducem constantele ε_0 și μ_0 în ecuația 38-20. În alte sisteme de unități ele pot să nu apară.

** În realitate există și un al treilea mod de producere a cîmpului magnetic: folosind corpuri magnetizate. În paragraful 37-7 am văzut că putem ține cont de acest lucru, introducînd un termen i_M — *curent de magnetizare* în partea dreaptă a legii lui Ampère. Această lege va fi în general de forma

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i + \mu_0 i_M$$

În cele ce urmează vom presupune totdeauna că nu sînt prezente materiale magnetice și deci, $i_M = 0$.

În capitolul 34 am presupus că nu există cîmpuri electrice variabile astfel încît termenul $d\Phi_E/dt$ din ecuația 38-21 este nul. În discuția anterioară am presupus că nu avem curent de conducție în spațiul în care cîmpul electric este prezent. Astfel că termenul i din ecuația 38-21 este zero. Vom vedea acum că fiecare din aceste două cazuri este un caz special.

Exemplul 5. Un condensator plan cu plăci paralele circulare este încărcat ca în figura 38-9. (a) Calculați o expresie pentru cîmpul magnetic indus la diverse distanța r de centru. Considerați ambele cazuri $r<R$ și $r>R$.

Deci ecuația 38-20

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t},$$

și putem să scriem pentru $r \leqslant R$,

$$(B)(2\pi r) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(E)(\pi r^2)] = \varepsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

Rezolvînd-o în raport cu B obținem

$$B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 r \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad (r \leqslant R)$$

Pentru $r \geqslant R$, ecuația 38-20 conduce la

$$(B)(2\pi r) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(E)(\pi R^2)] = \varepsilon_0 \mu_0 \pi R^2 \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right),$$

sau

$$B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2}{2r} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad (r \geqslant R)$$

(b) Găsiți pe B pentru $r=R$, pentru $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 10^{12}$ V/m·s și pentru $R = 5{,}0$ cm. La $r=R$, cele două ecuații pentru B au aceeași expresie

$$B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 R \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{2}\right)(4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m})(8{,}9 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}) \cdot$$

$$\cdot (5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})(10^{12}\ \mathrm{V/m \cdot s}) = 2{,}8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb/m^2} = 0{,}0028\ \mathrm{Gs}$$

Aceasta arată că cîmpul magnetic indus, în acest exemplu, este atît de slab încît el poate fi măsurat cu mare dificultate folosind aparate simple, în contrast puternic cu cîmpul *electric* indus (legea lui Faraday), care poate fi ușor pus în evidență. Această deosebire în observarea cîmpurilor induse este în parte determinată de faptul că t.e.m. indusă poate fi ușor crescută folosind bobine cu multe spire. Pentru cîmpul magnetic nu avem la dispoziție astfel de posibilități experimentale. În experiențe în care avem oscilații de foarte mare frecvență, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ poate fi foarte mare, ceea ce va determina valori esențial mai mari pentru cîmpul magnetic indus.

38-8 Curentul de deplasare

Termenul $\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ din ecuația 38-21 are dimensiunile unui curent. Cu toate că nu are loc nici un proces de deplasare de sarcini, este avantajos să numim acest termen *curent de deplasare**. Astfel, putem spune că producerea cîmpului magnetic este determinată fie de curentul de conducție i, fie de curentul de deplasare i_d $(=\varepsilon_0 d\Phi_E/dt)$, și ecuația 38-21 poate fi rescrisă astfel**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_d + i). \qquad (38\text{-}22)$$

Conceptul de curent de deplasare ne permite să păstrăm nealterată ideea că *curentul este neîntrerupt*, un principiu stabilit pentru curenți de conducție constanți, în paragraful 31-1. În figura 38-9 *b*, de exemplu, un curent i intră în placa pozitivă și iese din placa negativă. *Curentul de conducție* este întrerupt, deoarece între plăcile condensatorului nu se mișcă nici un purtător de sarcină. Cu toate acestea, curentul de deplasare i_d între armături va fi exact i, permițîndu-ne astfel să păstrăm conceptul de continuitate a curentului.

Pentru a calcula curentul de deplasare, ne amintim (vezi ecuația 30-5) că Φ_E între plăci este dat de

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Dar (vezi ecuația 38-21 și 38-22)

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = (\varepsilon_0)\left(\frac{dq/dt}{\varepsilon_0}\right) = i.$$

Astfel, curentul de deplasare, între plăci are aceeași valoare ca și curentul de conducție din conductori.

Exemplul 6. Care va fi intensitatea curentului de deplasare prin condensatorul din exemplul 5?

Din definiția curentului de deplasare

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[(E)(\pi R^2)\right] = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} =$$

$$= (8{,}9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(\pi)(5{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2 (10^{12}\ \mathrm{V/m \cdot s}) = 0{,}070.$$

Cu toate că acest curent de deplasare este relativ intens, el produce un cîmp magnetic slab (vezi exemplul 5) din cauză că este răspîndit pe o suprafață mare.

---

* Cuvîntul „deplasare“ a fost introdus din motive istorice de care nu ne vom ocupa aici.

** Vom putea scrie această relație și mai general, în prezența materialelor magnetice, sub forma

$$\oint B\,dl = \mu_0 (i_d + i + i_M).$$

Vezi nota de picior de la pagina 323.

Tabela 38.3

ECUAȚIILE DE BAZĂ ALE ELECTROMAGNETISMULUI (ECUAȚIILE LUI MAXVELL)*

Numele	Ecuația	Descrie	Experiențe de bază	Discutat în
1	2	3	4	5
Teorema lui Gauss pentru cîmpul electric	$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$	Cîmpul și sarcina electrică	1. Sarcinile de același semn se resping iar cele de semn contrar se atrag, cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. 1′. O sarcină pe un conductor izolat se deplasează spre suprafața lui exterioară	Capitolul 28
Teorema lui Gauss pentru cîmpul magnetic	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	Cîmpul magnetic	2. Imposibilitatea de a izola polul magnetic	paragraful 37-2
Legea lui Ampère (completată de Maxwell)	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + i \right)$	Efectul magnetic al variației cîmpului electric sau al unui curent	3. Viteza luminii poate fi calculată din date pur electromagnetice 3′. Un curent printr-un conductor produce un cîmp magnetic în spațiul din jurul său.	paragraful 39-5 capitolul 34
Legea lui Faraday pentru inducție	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	Efectul electric al unui cîmp magnetic variabil	4. O bară magnetică, introdusă într-o spiră închisă, va da naștere unui curent electric prin spiră.	Capitolul 35

* Scrise în presupunerea că nu sînt prezente materiale dielectrice sau magnetice.

38-9 Ecuațiile lui Maxwell

Ecuația 38-21, încheie prezentarea ecuațiilor de bază ale electromagnetismului, numite *ecuațiile lui Maxwell*. Ele sînt însumate în tabela 38-3. Toate ecuațiile fizicii care permit, ca acestea, corelarea experiențelor dintr-un domeniu foarte larg și care prezic fenomene noi au o frumusețe deosebită în ele și pot fi apreciate, de cei ce le înțeleg și din punct de vedere estetic*. Această afirmație este adevărată pentru legile de mișcare ale lui Newton, și pentru legile termodinamicii pentru teoria relativității și pentru teoriile fizicii cuantice.

Ca și pentru ecuațile lui Maxwell, fizicianul german Ludwig Boltzmann (citîndu-l pe Goethe) a scris:

„Un zeu a fost acela care a scris acestea...". În timpurile noastre I. R. Pierce** într-unul din capitolele cărții, intitulat „Splendidele ecuații ale lui Maxwell" a scris: „Pentru oricine care vrea să depășească interesele înguste, practice, merită să înțeleagă ecuațiile lui Maxwell chiar și numai pentru sufletul lui". Sfera de acțiune a acestor ecuații este remarcabilă, incluzînd de fapt principiile fundamentale de funcționare a tuturor dispozitivelor electromagnetice ca motoare, ciclotroane, calculatoare electronice, televiziunea și radarul în microunde.

38-10 Ecuațiile lui Maxwell și oscilațiile în cavitate

În acest paragraf vom arăta cum putem înțelege oscilațiile electromagnetice ale cavității folosind ecuațiile lui Maxwell. O discuție strict formală, depășește de fapt scopul nostru, ar începe de la aceste ecuații și s-ar sfîrși cu expresiile matematice ale variației lui $\vec{B}$ și $\vec{E}$ în timp, și în spațiul dintre cavitate pentru toate modurile de oscilație. Noi ne vom concentra atenția numai asupra stării fundamentale, ilustrată în figura 38-8, pentru care vom *postula* variațiile lui $\vec{B}$ și $\vec{E}$ dată în această figură; vom arăta că aceste postulate sînt în concordanță cu ecuațiile lui Maxwell.

Figura 38-10 prezintă două secțiuni ale cavității din figura 38-8 *d*, în care sînt prezente atît cîmpurile electrice, cît și cele magnetice. Analizînd figura 38-8 observăm că $\vec{B}$ *crește* ca intensitate în timp ce $\vec{E}$ *descrește* în această fază a ciclului de oscilație. Să aplicăm legea lui Faraday

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

la dreptunghiul de dimensiuni h și $a-r$, luat ca parcurs de integrare. Fluxul Φ_B prin acest contur scade în timp deoarece $\vec{B}$ este descrescător.

---

* „Physical law should have mathematical beauty", „legile fizicii trebuie să posede frumusețe matematică" a spus și P.A.M. Dirac unul din cei mai de seamă fizicieni ai secolului nostru. Această frumusețe este direct legată de proprietățile de simetrie pe care le au fenomenele fizice. (N.T.).

** *Electronii, unde și informații*", Hanover House, 1956. Această carte este recomandată ca lectură paralelă pentru înțelegerea electromagnetismului.

Integrala pe conturul ales va fi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = hE(r)$$

în care $E(r)$ este valoarea lui $\vec{E}$ la distanța r de la centrul cavității.

Observați că $\vec{E}$ este zero pe latura orizontală superioară a conturului de integrare (ce se află în peretele cavității) și că $\vec{E}$ și $d\vec{l}$ sînt normale pe cele două laturi verticale. Combinînd aceste două ecuații

$$E(r) = -\frac{1}{h}\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{38-23}$$

Ecuația 38-23 arată că $E(r)$ depinde de viteza de variație a lui Φ_B prin suprafața delimitată de conturul ales și că are un maxim atunci cînd $d\Phi_B/dt$ este maxim. Acest moment corespunde momentului în care $\vec{B}$ este nul, adică, atunci cînd $\vec{B}$ își schimbă sensul: să ne amintim că o funcție sin. sau cos. are cea mai rapidă variație (are o tangentă de pantă maximă) atunci cînd intersectează abscisa, trecînd de la o valoare pozitivă la una negativă. Astfel structura cîmpului electric în cavitate va atinge valoarea *maximă* atunci cînd cîmpul magnetic este *zero*, peste tot în cavitate, corespunzătoare figurilor 38-8 *a* și *e* și de asemenea în acord cu conceptul de schimb de energie între cele două forme: electrică și magnetică. Studentului i se propune să demonstreze, folosind legea lui Lenz, că în figura 38-10 *b* cîmpul electric este îndreptat spre dreapta după cum este desenat, dacă cîmpul magnetic descrește.

Figura 38-10 *a* arată o secțiune transversală prin cavitate, aproape de unul din capetele ei; liniile de forță electrică intră în pagină perpendicular pe ea, iar liniile de cîmp magnetic sînt cercuri în sensul acelor ceasornicului. Să folosim legea lui Ampère sub forma

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i \tag{38-21}$$

pentru conturul de rază r indicat în figură. Prin acest contur nu trece nici un curent electric, astfel că în ecuația 38-21, curentul de conducție i

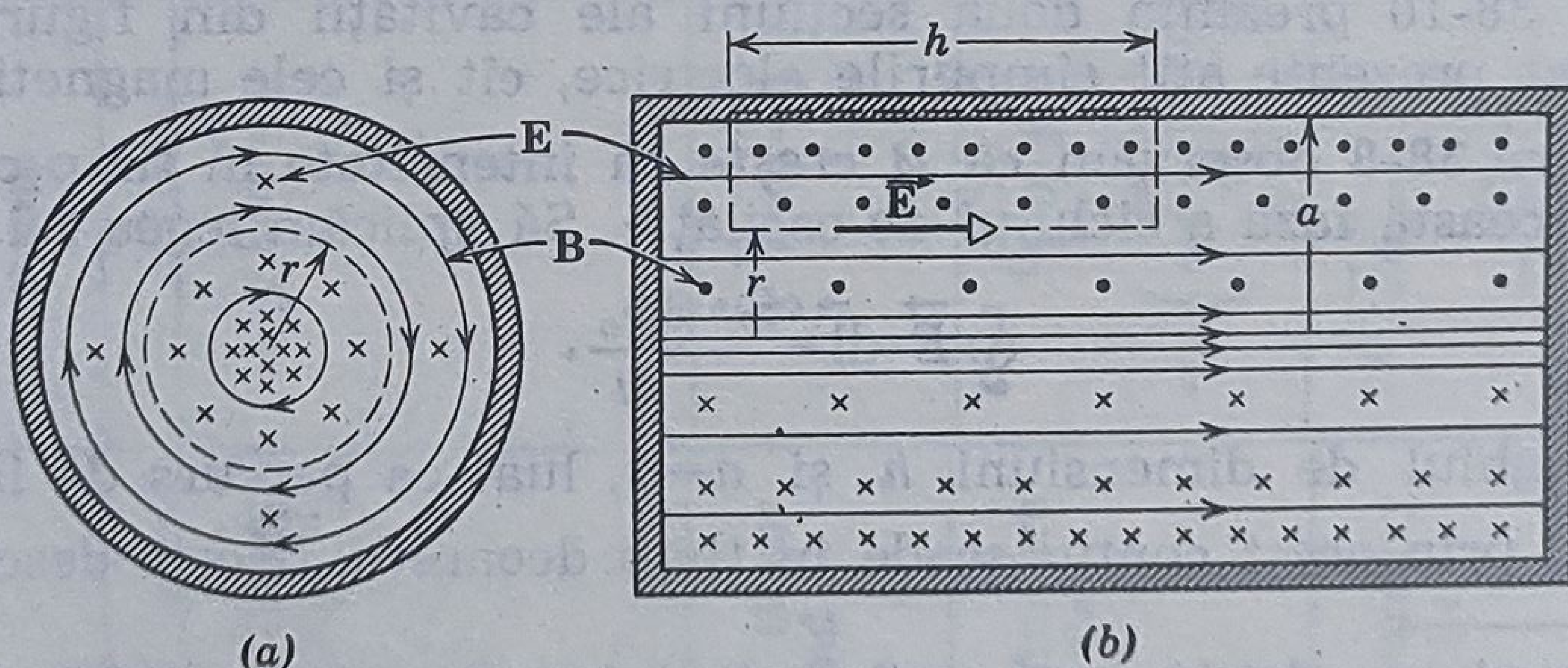


Figura 38-10. Două secțiuni printr-o cavitate rezonantă electromagnetică în faza de oscilație ce corespunde figura 38-8 d. (a) Cercul cu linie întreruptă reprezintă un parcurs posibil pentru aplicarea legii lui Ampère. (b) Dreptunghiul cu linie întreruptă reprezintă un parcurs posibil pentru aplicarea legii lui Faraday.

este zero. Integrala de contur din stînga devine (B) $(2\pi r)$ astfel că ecuaţia se reduce la

$$B(r)=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi r}\frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad (38\text{-}24)$$

Ecuaţia 38-24 ne arată că $B(r)$ cîmpul magnetic este proporţional cu viteza de variaţie a fluxului electric Φ_E prin contur. Cîmpul $B(r)$ este maxim atunci cînd $d\Phi_E/dt$ este maxim; acest lucru se produce atunci cînd $\vec{E}=0$, adică atunci cînd $\vec{E}$ îşi schimbă direcţia. Observăm astfel că $\vec{B}$ are un *maxim* atunci cînd $\vec{E}$ este *nul* pentru toate punctele din cavitate. Acest rezultat este în concordanţă cu figura 38-8 *c* şi *g* şi cu ideea de schimb între formele de energie electrică şi magnetică. O comparaţie cu figura 38-9 *a*, care ca şi figura 38-10 *a*, corespunde la o creştere a cîmpului electric, ne arată că liniile lui $\vec{B}$ sînt într-adevăr în sensul acelor ceasornicului, privite în lungul direcţiei cîmpului electric.

Compararea ecuaţiilor 38-23 şi 38-24 sugerează o interdependenţă totală a lui $\vec{B}$ şi $\vec{E}$ în cavitate. Pe măsură ce cîmpul magnetic se modifică în timp, el induce un cîmp electric în felul descris de legea lui Faraday. Cîmpul electric, care de asemenea variază în timp, induce un cîmp magnetic, conform legii lui Ampère completată de Maxwell. Oscilaţiile, odată pornite, se întreţin una pe cealaltă şi vor continua indefinit dacă nu vor exista pierderi prin efect Joule sau pierderi de energie prin eventuale fante existente în pereţii cavităţii. În capitolul 39 am văzut că această intercondiţionare a lui $\vec{B}$ şi $\vec{E}$ are loc nu numai pentru undele electromagnetice staţionare din cavităţi ci de asemenea şi pentru undele electromagnetice libere, ca cele radio sau ale luminii vizibile.

Să analizăm curenţii — atît cei de conducţie cît şi cei de deplasare — ce apar în cavitate şi să analizăm legătura lor cu cîmpurile electrice şi magnetice. Figura 38-11 arată două secţiuni prin cavitate, luate la momentul corespunzător celui din figura 38-10. Pentru simplificarea desenului cîmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ nu sînt prezente; săgeţile reprezintă curenţii.

Deoarece $\vec{E}$ este crescător în acest moment sarcina pozitivă de la capătul stîng al cavităţii trebuie să crească. Astfel va trebui să existe curenţi de conducţie prin pereţi din dreapta spre stînga (figura 38-11 b). Aceşti curenţi sînt reprezentaţi prin puncte (ce reprezintă vîrful săgeţilor) lîngă perele cavităţii (figura 38-11 a).

Ţinînd cont că $\varepsilon_0\, d\Phi_E/dt$ este curentul de deplasare, putem scrie ecuaţia 38-24 sub forma

$$B(r)=\frac{\mu_0}{2\pi r}\cdot\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}=\frac{\mu_0}{2\pi r}i_d$$

Această ecuaţie scoate în evidenţă că în cavitate $\vec{B}$ este asociat cu un curent de deplasare (vezi ecuaţia 34-4). Folosind regula mîinii drepte în figura 38-10 a, se vede că curentul de deplasare i_d trebuie să intre în planul figurii dacă el este asociat cu liniile lui $\vec{B}$ în sensul acelor ceasornicului, cum sînt prezente aci.

Curentul de deplasare este reprezentat în figura 38-11 b prin săgeţi care sînt îndreptate spre dreapta şi în figura 38-11 a prin cruci, ce reprezintă săgeţile ce

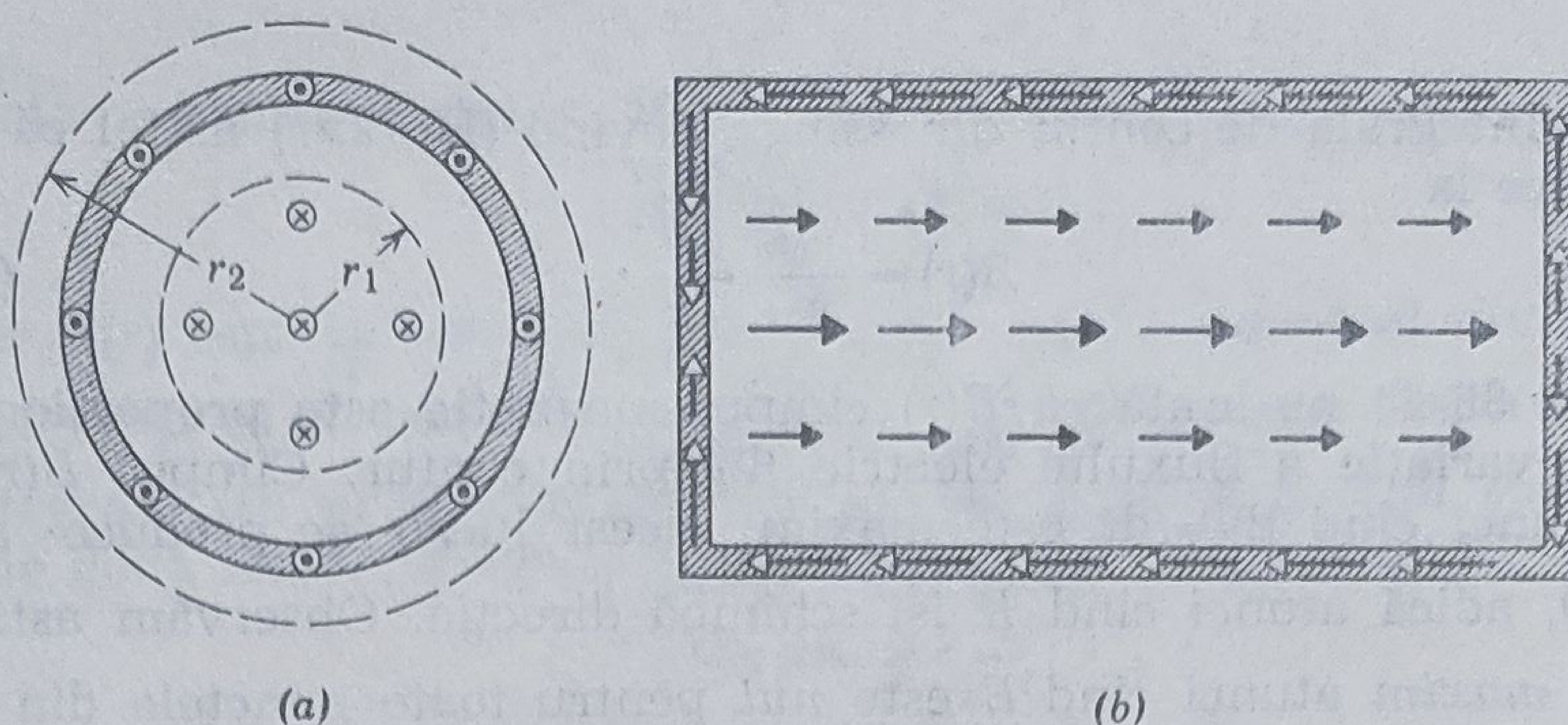


Figura 38-11. Se prezintă pentru cavitatea din figura 38-10. (a) Curentul de conducţie, ce trece prin pereţii cavităţii şi curentul de deplasare ce trece prin volumul cavităţii, şi (b) curentul de deplasare (săgeţile negre) prin volumul cavităţii şi curenţii de conducţie (săgeţile albe) prin pereţii cavităţii. Săgeţile sînt proporţionale cu densitatea de curent. Observaţi continuitatea curentului (de conducţie+deplasare), adică posibilitatea de a închide curentul. (Pentru o cavitate cu pereţi realmente fără rezistenţă, curentul de conducţie trece în întregime pe suprafaţa pereţilor, necesitînd o modificare a definiţiei date pentru densitatea de curent; lăsăm pe seama studenţilor rezolvarea acestei mici complicaţii).

intră în planul figurii. Analizînd figura 38-11, vedem că curentul este neîntrerupt, fiind îndreptat în susul pereţilor sub formă de curent de conducţie şi apoi înapoi prin volumul cavităţii, ca curent de deplasare. Dacă aplicăm legea lui Ampère extinsă de Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_d + i), \qquad (38\text{-}25)$$

conturului circular de rază r_1 (vezi figura 38-11 a), vedem că $\vec{B}$ la acest contur este determinat în întregime de curentul de deplasare, curentul de conducţie i *prin contur* fiind nul.

Pentru conturul de rază r_2, curentul net cuprins în el este zero, deoarece curentul de conducţie prin pereţi este egal şi de semn contrar cu curentul prin volumul cavităţii.

Deoarece i şi i_d sînt egali ca mărime, dar de sensuri opuse, rezultă din ecuaţia 38-25 că B trebuie să fie nul, pentru toate punctele din afara cavităţii, ce concordă cu observaţiile experimentale.

Întrebări

1. De ce circuitul LC din figura 38-1 nu se opreşte din oscilaţie atunci cînd condensatorul s-a descărcat complet?

2. Cum aţi putea să puneţi în oscilaţie un circuit LC, a cărui condiţii iniţiale sînt reprezentate în figura 38-1 c? Proiectaţi un dispozitiv de comutare în acest scop.

3. Într-un circuit oscilant LC, cu rezistenţă neglijabilă, cine determină (a) frecvenţa şi (b) amplitudinea oscilaţiilor?

4. Treceți într-un tabel toate sistemele mecanice sau electrice pe care vi le puteți închipui și care pot să oscileze cu o frecvență naturală de oscilație și cu formula respectivă pentru frecvența lor dacă o găsiți în carte.

5. Rezonanța în circuitele LC apare, așa cum ne arată ecuația 38-14 și figura 38-6, atunci cînd frecvența ω'' a „excitației“ exterioare este egală cu frecvența proprie a circuitului (neamortizat). În paragraful 15-10 am văzut că frecvența de oscilație a sistemului masă-arc conform ecuației 15-41 și figurii 15-19, are loc pentru un ω'' apropiat, *dar nu exact egal* cu frecvența proprie (neamortizată) a sistemului. Este acesta un caz în care metoda de corespondență nu dă rezultate corecte?

6. Să presupunem că putem vizualiza pe ecranul unui osciloscop, o diferență de potențial proporțională cu temperatura unui rezistor (special), astfel încît dacă el face parte dintr-un circuit LRC ce oscilează cu o frecvență joasă, să putem urmări variația în timp a temperaturii rezistorului ca răspuns al efectului de încălzire determinat de curentul din circuitul oscilant; care va fi legătura între frecvența acestei oscilații de temperatură și cea a oscilațiilor curentului, măsurată ca diferență de potențial la capetele rezistorului?

7. Discutați variația periodică a energiei de la punct la punct într-o cavitate rezonantă acustică, în cazul în care acest lucru are loc.

8. Este oare posibil ca un element de circuit (de exemplu un condensator) să se comporte în unele situații ca un element de circuit „concentrat“ și în alte condiții ca un element de circuit „distribuit“?

9. Enumerați cît mai multe sisteme oscilante mecanice cu (a) elemente concentrate, (b) cu elemente distribuite.

10. O cavitate oscilantă acustică în aer și o cavitate rezonantă electromagnetică de aceleași dimensiuni au frecvențe de rezonanță ce stau în raport de 10^6 sau mai mult. Care din ele are frecvența mai mare și de ce?

11. Care vor fi dificultățile de construcție pe care le-ați întîmpina dacă ați încerca să construiți un circuit LC de tipul celui din figura 38-1 pentru a-l face să oscileze la (a) 0,01 Hz și (b) la 10^{10} Hz?

12. Este posibil ca o cavitate rezonantă electromagnetică ca cea din figura 38-8 să lucreze la 60 Hz? Dacă da, dați amănunte de construcție.

13. „Imprecizia de acord“ a unei cavități electromagnetice din cupru poate fi considerabil micșorată dacă o răcim la temperatura aerului lichid. Explicați. Folosiți în discutarea problemei curba de acord (de rezonanță) a unui circuit LC (figura 38-6).

14. Cavitățile rezonante sînt deseori argintate de dinăuntru. Explicați.

15. De ce legea de inducție a lui Faraday ne este mult mai familiară ca simetrica ei, dată de ecuația 38-20?

16. De ce mărimea $\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ este numită *curent* (de deplasare)?

17. În figura 38-1 c este necesar să considerăm existența unui curent de deplasare pentru a menține continuitatea curentului prin condensator. Cum de poate el să existe cînd pe armături nu avem sarcini?

18. Discutați simetria ce există între (a) primele două și (b) următoarele două, ecuații Maxwell.

19. În ce porțiune dintr-o perioa-

dă (a) curentul de conducție și (b) curentul de deplasare în cavitatea din figura 38-8, vor fi zero?

20. Discutați variația în timp a sarcinii ce apare în diverse puncte pe peretele interior al unei cavități oscilante electromagnetice, pe o perioadă întreagă (vezi figura 38-8).

Probleme

1. Aveți la dispoziție o bobină de 10 mH și două condensatoare de 5,0μF și respectiv 2,0μF. Care vor fi frecvențele de rezonanță ale circuitelor ce se pot forma din aceste elemente, legîndu-le în toate modurile posibile?

2. Cum puteți face ca o bobină de 1,0 mH să oscileze cu frecvența de $1{,}0 \cdot 10^6$ Hz?

3. O bobină este legată în paralel cu un condensator a cărui capacitate poate fi variată prin rotirea unui buton. Dorim să realizăm o variație liniară (a frecvenței circuitului oscilant LC) cu unghiul de rotație a butonului, începînd cu $2 \cdot 10^5$ Hz și sfîrșind cu $4 \cdot 10^5$ Hz pentru o rotație de 180° a butonului. Dacă $L = 1{,}0$ mH, reprezentați grafic dependența lui C de unghiul de rotație al butonului între 0 și 180°.

4. O bobină de 10 H are o rezistență de 180 Ω. Ce condensator trebuie pus în serie cu această bobină pentru a fi la rezonanță cînd este conectat la rețeaua de 50 Hz?

5. Deduceți ecuația diferențială pentru un circuit LC (ecuația 38-5), folosind legea a doua a lui Krichhoff.

6. Deduceți ecuația diferențială a oscilațiilor forțate în circuitul LCR (ecuația 38-12) folosind legea conservării energiei.

7. Arătați că oscilațiile lui q dintr-un circuit amortizat LC (vezi ecuația 38-10) ajunge la jumătate din amplitudinea inițială după un timp egal aproximativ cu $0{,}69 \dfrac{L}{R}$.

8. Un circuit are $L = 10$ mH și $C = 1{,}0\mu$F. Cît de mare trebuie să fie o rezistență care trebuie introdusă în circuit pentru a reduce frecvența circuitului (neamortizat) cu 0,01%?

9. Să presupunem că amplitudinea oscilațiilor sarcinilor într-un circuit oscilant LRC scade la jumătate din valoarea inițială după n perioade. Arătați că micșorarea relativă a frecvenței de rezonanță determinată de prezența rezistorului, este cu o bună aproximație dată de relația

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{0{,}0061}{n^2}$$

care este independentă de L, C și R. Folosiți curba de scădere din figura 38-3.

10. Arătați că pentru amortizări mici, curentul într-un circuit amortizat LC este dat aproximativ de relația

$$i = -q_m \omega' e^{-Rt/2L} \cdot \sin(\omega' t + \varphi),$$

în care

$$\varphi = \text{arc tg}\, \frac{R}{2L\omega'}.$$

Porniți de la ecuația 38-10.

11. *Factorul „Q" pentru un circuit.* Într-un circuit LC amortizat ca cel din exemplul 3, arătați că pierderea de energie pe perioadă, $\Delta U/U$, este dată aproximativ de relația $2\pi R/\omega L$. Mărimea $\omega L/R$ se numește „Q"-ul circuitului (factor de „calitate"). Un circuit cu Q mare, are o rezistență mică

şi o mică pierdere de energie pe o perioadă ($-2\pi/Q$) şi o curbă de rezonanţă ascuţită (vezi figura 38.6).

12. Arătaţi că amplitudinea oscilaţiilor sarcinilor într-un circuit LCR este dată de

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\omega''^2 L - \frac{1}{C}\right)^2 + (\omega'' R)^2}}.$$

Care va fi valoarea lui ω'' pentru care q_m va fi maxim?

13. Un circuit LCR are $L=1{,}0$ H, $C=20\,\mu$F şi $R=20\ \Omega$. Pentru ce frecvenţă ω'' a unei t.e.m. aplicate, circuitul va fi la rezonanţă? La ce frecvenţă amplitudinea oscilaţiilor va fi jumătate din valoarea ei maximă?

14. Arătaţi că semilărgimea relativă a curbei de rezonanţă din figura 38-6 este dată aproximativ de relaţia

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{3}\,R}{\omega L},$$

în care ω este frecvenţa de rezonanţă iar $\Delta\omega$ este semilărgimea maximului de rezonanţă la $i=\frac{1}{2}i_m$. Observaţi că această expresie se poate scrie şi $\sqrt{3}/Q$ (vezi problema 11) care scoate în evidenţă faptul că un circuit cu Q mare are un maxim de rezonanţă îngust, adică un $\Delta\omega/\omega$ mic.

15. Un circuit serie R_1, L_1, C_1, posedă aceeaşi frecvenţă de rezonanţă ca şi circuitul R_2, L_2, C_2. Dacă acum, cele două circuite sînt legate în serie, care va fi frecvenţa de rezonanţă a întregului circuit?

16. Arătaţi în exemplul 5 că *densitatea de curent de deplasare* j_d este dată, pentru $r<R$, de

$$j_d = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

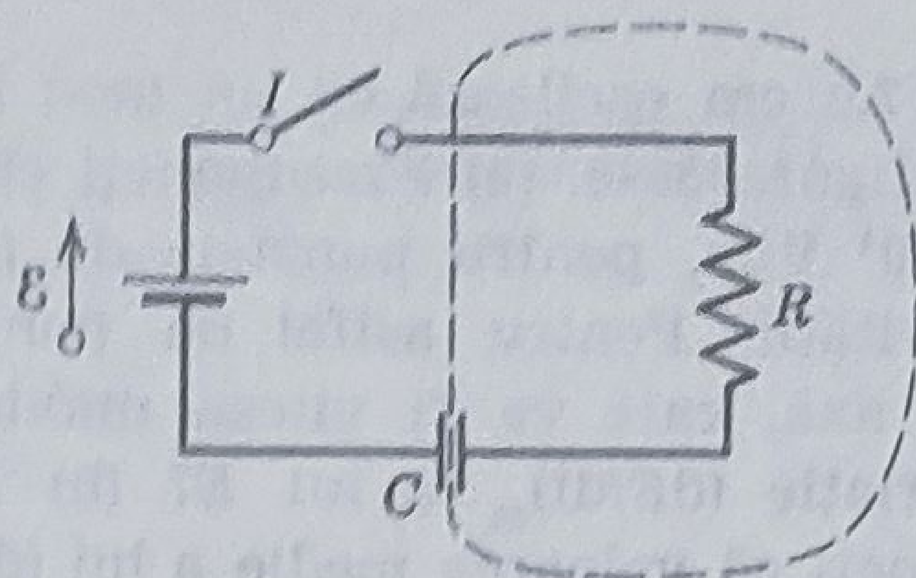


Figura 38-12.

17. Demonstraţi că într-un condensator plan-paralel curentul de deplasare poate fi scris ca

$$i_d = C\frac{dV}{dt}$$

18. Vi se dă un condensator de $1{,}0\,\mu$ F. Cum veţi reuşi să produceţi, în spaţiul dintre plăci, un curent de deplasare (instantaneu) de 1,0 A?

19. Cum este posibil ca curentul de deplasare, din exemplul 5, printr-o spiră circulară concentrică de rază r să varieze cu r? Consideraţi atît $r<R$ cît şi $r>R$.

20. Continuitatea curentului printr-un circuit, poate fi scrisă în termeni microscopici sub forma

$$\oint(\vec{j}+\vec{j}_d)d\vec{S}=0,$$

unde $\vec{j}$ este densitatea curentului de conducţie iar $\vec{j}_d$ este densitatea curentului de deplasare. Integrala se poate lua pe orice suprafaţă închisă; în esenţă, această ecuaţie ne arată că orice curent care intră într-un volum închis, trebuie să şi iasă de acolo. (a) Aplicaţi această ecuaţie suprafeţei indicate prin linie întreruptă din figura 38-12, imediat după ce I este închis. (b) Aplicaţi relaţia la diverse suprafeţe ce pot fi trasate în cavitatea din figura 38-11, incluzînd şi unele care taie pereţii cavităţii.

21. O cavitate electromagnetică cilindrică de 5,0 cm diametru şi lungă

de 7,0 cm oscilează cu un mod indicat în figura 38-8. (a) Presupuneţi că $E_m = 10^4$ V/m, pentru punctele de pe axa cavităţii. Pentru astfel de puncte de pe axă, care va fi viteza maximă de variaţie $(dE/dt)_m$ a lui E? (b) Presupuneţi că valoarea medie a lui $(dE/dt)_m$ pentru toate punctele de pe o secţiune transversală prin cavitate, este jumătate din cea aflată pentru punctele de pe ax. În această presupunere, calculaţi care va fi valoarea maximă a lui B la suprafaţa cavităţii cilindrice?

22. Colectaţi şi tabelaţi expresiile a patru mărimi date mai jos, atît pentru $r<R$ cît şi pentru $r>R$. Copiaţi deducerile termen cu termen şi studiaţi-le ca aplicaţii ale ecuaţiilor lui Maxwell pentru probleme cu simetrie cilindrică.

(a) $B(r)$ pentru un curent i, printr-un conductor lung de rază R (vezi paragraful 34-2).

(b) $E(r)$ pentru un cilindru lung de rază R, uniform încărcat cu sarcină (vezi paragraful 28-6); de asemenea problema 14, capitolul 28).

(c) $B(r)$ pentru un condensor plan-paralel, cu plăci circulare de rază R, în care E variază uniform în timp (vezi paragraful 38-7).

(d) $E(r)$ pentru o regiune cilindrică de rază R în care un cîmp magnetic B, uniform, variază uniform în timp (vezi paragraful 35-5).

Capitolul 39

Unde electromagnetice*

39-1 Linia de transmisie

În capitolul 38 am studiat energia undelor staţionare ce se formează într-un spaţiu limitat al unei cavităţi rezonante electromagnetice. Această energie poate fi transferată de la un loc la altul prin unde progresive. Un aranjament de conductori care să permită un astfel de transfer se numeşte *o linie de transmisie*. În figura 39-1 se arată un tip de linie, un *cablu coaxial;* capătul lui de intrare este legat la un întrerupător I. Pentru cele ce urmează vom presupune că cablul este infinit lung şi că elementele cablului au rezistenţă nulă. Cînd I este în poziţia b, conductorul central şi cel periferic sînt la acelaşi potenţial. Dacă acum întrerupătorul este trecut în poziţia a, apare brusc o diferenţă de potenţial V, între aceste elemente. Această diferenţă de potenţial nu va apare brusc pe toată întinderea liniei ci se propagă cu o viteză finită c care vom vedea că are exact valoarea vitezei luminii, pentru o linie fără rezistenţă. Figura 39-2 a arată că diferenţa de potenţial dintre conductori creşte brusc de la zero la valoarea t.e.m.

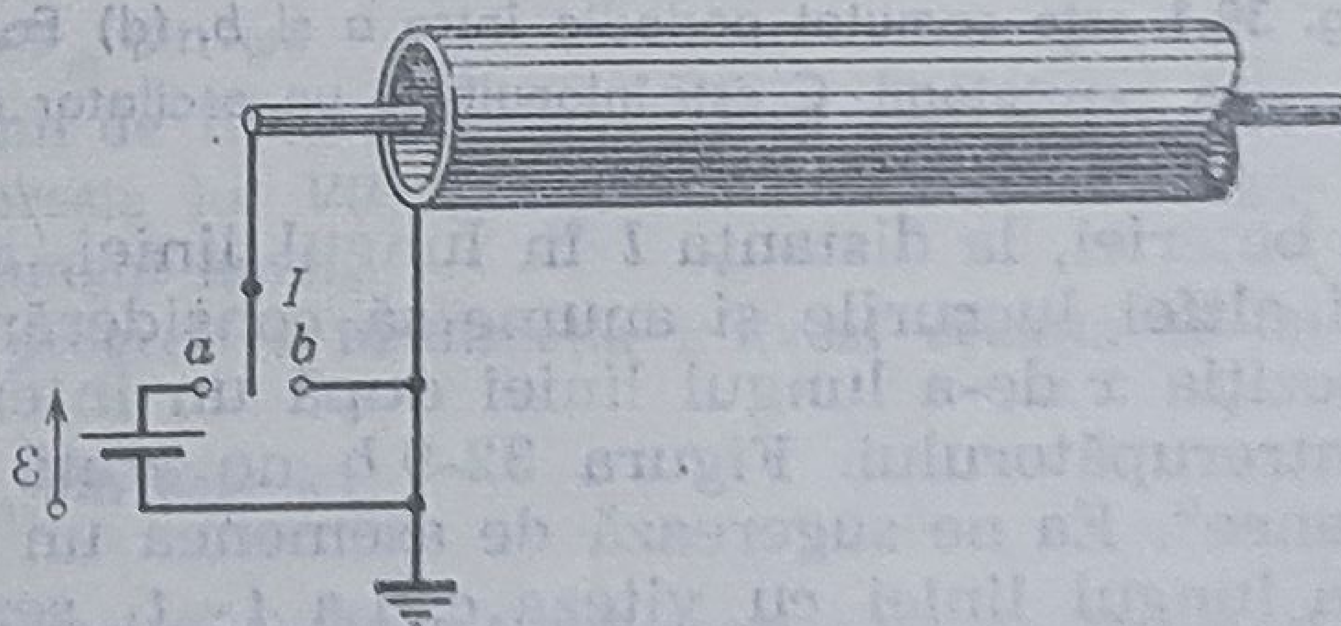


Figura 39-1. Un puls** electromagnetic poate fi trimis dealungul unui cablu coaxial trecind comutatorul I de pe b pe a.

* Acest subiect va fi tratat mai în profunzime în Tema suplimentară V, de la sfîrşitul cărţii.

** Adică un tren de unde (N.R.).

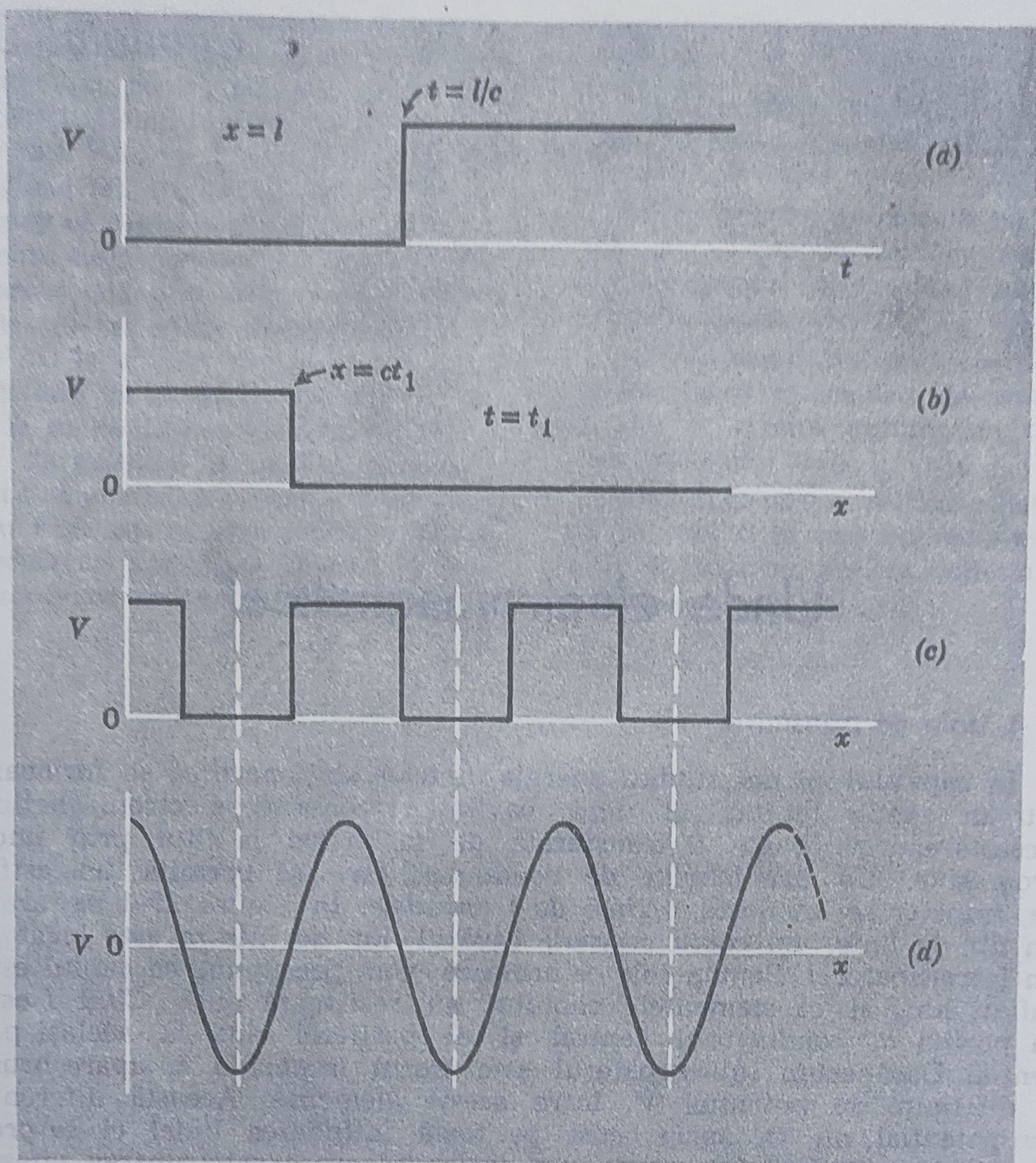


Figura 39-2. (a) Variaţia în timp a diferenţei de potenţial între conductorii unui cablu coaxial la distanţa *l* de capătul de intrare. (b) Un „instantaneu" al pulsului în cablu la un moment oarecare *t*. (c) forma undei ce se propagă dacă comutatorul C din fig. 39-1 este comutat periodic între *a* şi *b*. (d) Forma undei ce se propagă dacă comutatorul C este înlocuit cu un oscilator electromagnetic sinusoidal.

a bateriei, la distanţa l în lungul liniei, la momentul $t = l/c$. Putem privi şi altfel lucrurile şi anume să considerăm variaţia V a potenţialului cu poziţia x de-a lungul liniei după un interval de timp t_1 de la închiderea întrerupătorului. Figura 32-9 *b* ne arată o astfel de „fotografie instantanee". Ea ne sugerează de asemenea un „front de undă" ce se propagă în lungul liniei cu viteza c. La $t = t_1$ semnalul nu a ajuns în punctele pentru care $x > ct_1$. Dacă întrerupătorul I este periodic trecut între poziţiile a şi b în lungul liniei se va propaga o undă de perturbaţie de forma indicată în figura 39-2 *c*. Acest lucru ne sugerează ideea că dacă

în locul bateriei și a dispozitivului de comutare se pune un oscilator electromagnetic ce produce oscilații sinusoidale de frecvența ν, atunci în lungul liniei se va propaga o undă ca cea reprezentată în figura 39-2 *d*.

O undă progresivă ce se propagă în lungul unei linii de transmisii de rezistență neglijabilă, va avea o lungime de undă λ dată de

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Dacă frecvența oscilatorului este de 50 Hz, frecvența uzuală a curentului alternativ, industrial, lungimea de undă este de $6 \cdot 10^6$ metri. Pentru frecvențe atît de joase, caracterul de propagare sub formă de undă progresivă nu va ieși în evidență pe linii de lungimi uzuale. În intervalul de timp necesar schimbării polarității sursei, energia intrată pe linie de la oscilator, a ajuns de mult la sarcina de la capătul celălalt al liniei.

Frecvențele din domeniul radio sau de microunde sînt mult mai înalte, respectiv au lungimi de undă mult mai scurte. Domeniul de frecvențe destinat emisiunilor comerciale de televiziune, stabilit de Comisia Federală de Telecomunicații (a S.U.A.) se întinde de la $54 \cdot 10^6$ la $980 \cdot 10^6$ Hz. În lungimi de undă acest domeniu este cuprins între 5,6 și 0,31 m*. Pentru aceste lungimi de undă distribuția tensiunilor de-a lungul liniilor de transmisie a semnalelor de televiziune, poate fi descrisă prin unde progresive. Microundele, folosite în sistemele radar și de radiocomunicații, au lungimi de undă și mai scurte, cuprinse între aproximativ 20 cm și aproximativ 0,5 mm.

Aceste considerente ne dau un alt mod de a privi diferența dintre elementele de circuit concentrate și distribuite. Un sistem este numit cu elemente distribuite dacă lungimea de undă este comparabilă sau mai mică ca dimensiunile sistemului. Dacă lungimea de undă este mult mai mare decît dimensiunile sistemului, avem de-a face cu elemente concentrate. O linie de transmisie de 50 m lungime va reprezenta un sistem cu elemente concentrate pentru undele electromagnetice cu frecvența de 50 Hz ($\lambda = 6 \cdot 10^6$ m) dar un sistem cu elemente distribuite la 10^8 Hz ($\lambda = 3$ m). Într-un sistem cu elemente concentrate analiza sistemului se face în funcție de parametri L, C și R; în sisteme cu elemente distribuite analiza sistemului se face adesea în funcție de cîmpurile produse ca și în funcție de sarcinile și curenții legați de aceste cîmpuri.

Exemplul 1. O diferență de potențial

$$V_0 = V_m \sin \omega t$$

se aplică la unul din capetele unei linii de transmisie lungi, fără rezistență; frecvența $\nu = (\omega/2\pi) = 3 \cdot 10^9$ Hz. Scrieți expresia lui $V(t)$ pentru un punct P ce se găsește la 1,5 λ de capătul alimentat, în lungul liniei.

Ecuația generală pentru o undă progresivă în direcția x (vezi ecuația 19-10) este

$$V = V_m \sin (\omega t - kx)$$

---

* Țara noastră este afiliată normelor Organizației Internaționale de Radio și Televiziune (O.I.R.T.) care a destinat emisiunilor de televiziune cinci benzi, ce se întind de la 48 MHz pînă la 860 MHz, respectiv între 5,80 m și 0,35 m, lungime de undă și cuprinde în prezent 68 canale. (N.T.).

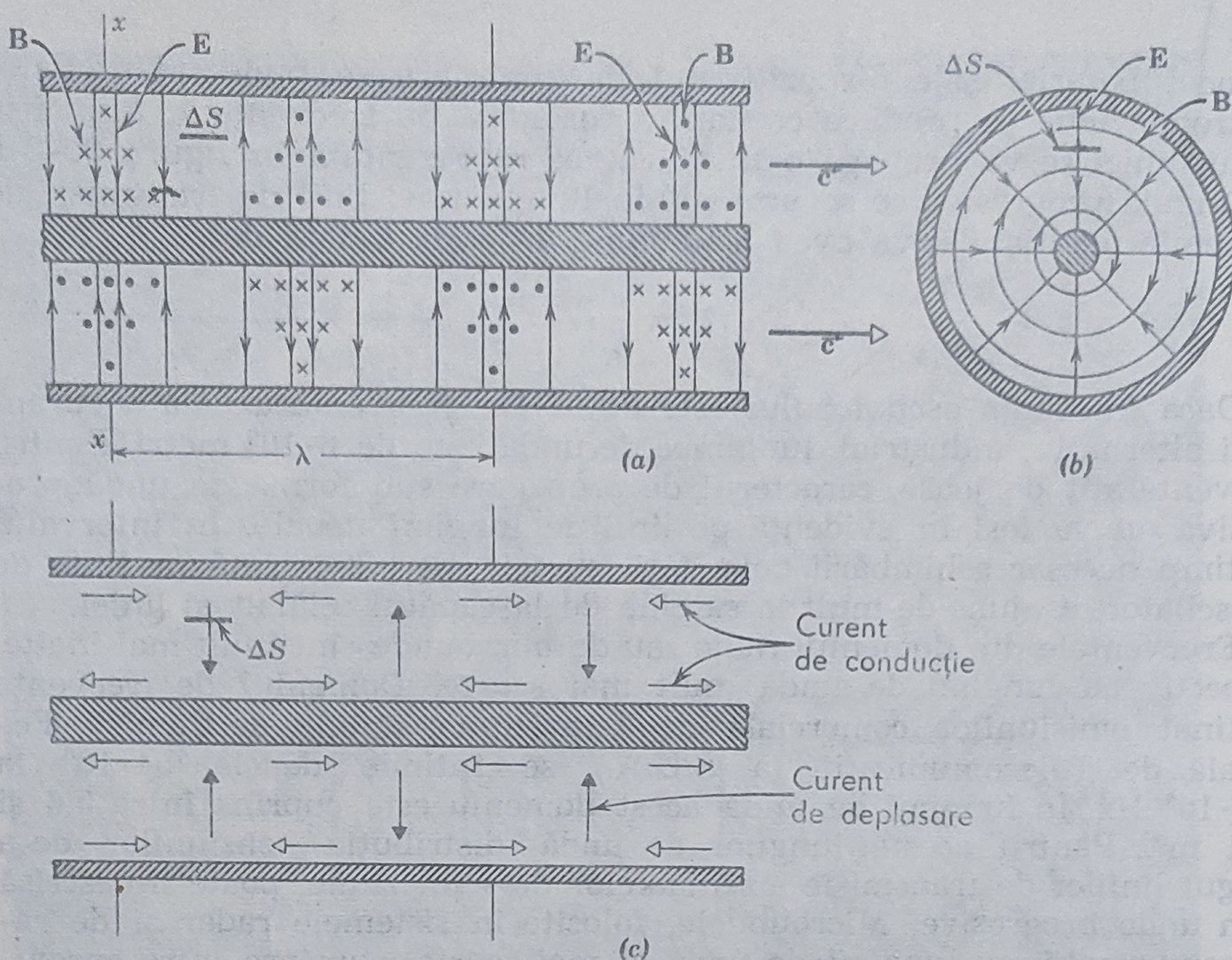


Figura 39-3. (a) Cîmpurile electric și magnetic într-un cablu coaxial; este reprezentată o undă ce se propagă spre dreapta, cu viteza c. (b) O secțiune prin xx din (a); unda iese din planul paginii; (c) curentul de conducție (săgeți albe) și curenții de deplasare (săgeții negre) asociați undei din (a); în fiecare caz săgețile reprezintă vectorii densitate de curent.

unde k $(=2\pi/\lambda)$ este numărul de undă. Pentru $x=0$, ea ne dă variația corectă în timp a diferenței de potențial de la bornele de intrare. Pentru $x=1{,}5\ \lambda$ obținem

$$V_p = V_m \sin\left[\omega t - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(1{,}5\lambda)\right] = V_m \sin(\omega t - 3\pi).$$

Astfel V_P este totdeauna egală în mărime cu V_0, dar de semn contrar. Care este lungimea de undă în acest exemplu?

39.2. Cablul coaxial. Curenți și cîmpuri

Cele două figuri 39.3 a și b sînt „instantanee" ale configurațiilor cîmpurilor electrice și magnetice într-un cablu coaxial. Cîmpul electric este radial iar cîmpul magnetic formează linii concentrice în jurul conductorului central. Întregul sistem de cîmpuri se propagă în lungul liniei cu viteza c, dacă linia are rezistență nulă.

Configurația cîmpurilor din figură satisface *condițiile de frontieră* cerute de o linie fără rezistență și anume ca pentru toate punctele de pe ambele suprafețe conductoare, cîmpul $\vec{E}$ să nu aibă componente tan-

genţiale (vezi pagina 319). Configuraţia cîmpurilor poate fi dedusă matematic din ecuaţiile lui Maxwell impunîndu-le condiţiile de frontieră. Configuraţia reprezentată este cea mai simplă din multiplele posibile, care se pot propaga pe linie. Cablul coaxial, spre deosebire de cavitatea electromagnetică din figura 38.8, nu este un dispozitiv rezonant. Frecvenţa ν a undelor ce se pot propaga în lungul cablului poate să varieze continuu, ca pentru orice undă progresivă, cum ar fi de exemplu undele transversale ce se propagă în lungul unei corzi întinse.

Curenţii din cablu la momentul reprezentat în figura 39.3 *a* şi *b* sînt daţi în figura 39.3 c. Săgeţile paralele cu axa cablului reprezintă curenţii de conducţie din conductorul central şi cel exterior. Săgeţile negre, reprezintă curenţii de deplasare ce există în spaţiul dintre cei doi conductori. Observaţi că curenţii de conducţie şi cei de deplasare formează ochiuri închise respectînd astfel ideea de continuitate a curentului.

Exemplul 2. Verificaţi că curenţii de deplasare din figura 39-3 c sînt în concordanţă cu configuraţia cîmpurilor $\vec{B}$ şi $\vec{E}$ reprezentată în figura 39-3 a.

Să considerăm un element de suprafaţă ΔS reprezentat din profil în figura 39-3 şi din faţă în figura 39-4. Acest element de suprafaţă ipotetic se consideră în repaus în raport cu cablul, în timp ce configuraţia de cîmpuri se mişcă în lungul lui cu viteza c. Figura 39-4 a arată liniile de forţă electrice din vecinătatea acestui element. Este clar din motive de simetrie că pentru momentul reprezentat, fluxul electric net Φ_E prin suprafaţă este nul. Cu toate că Φ_E este zero în mărime, la acest moment cîmpul are *cea mai rapidă variaţie*, deoarece $\vec{E}$ prin elementul ΔS tocmai îşi schimbă sensul ca urmare a deplasării undei. Astfel, curentul de deplasare dat de relaţia

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

ia valoarea maximă.

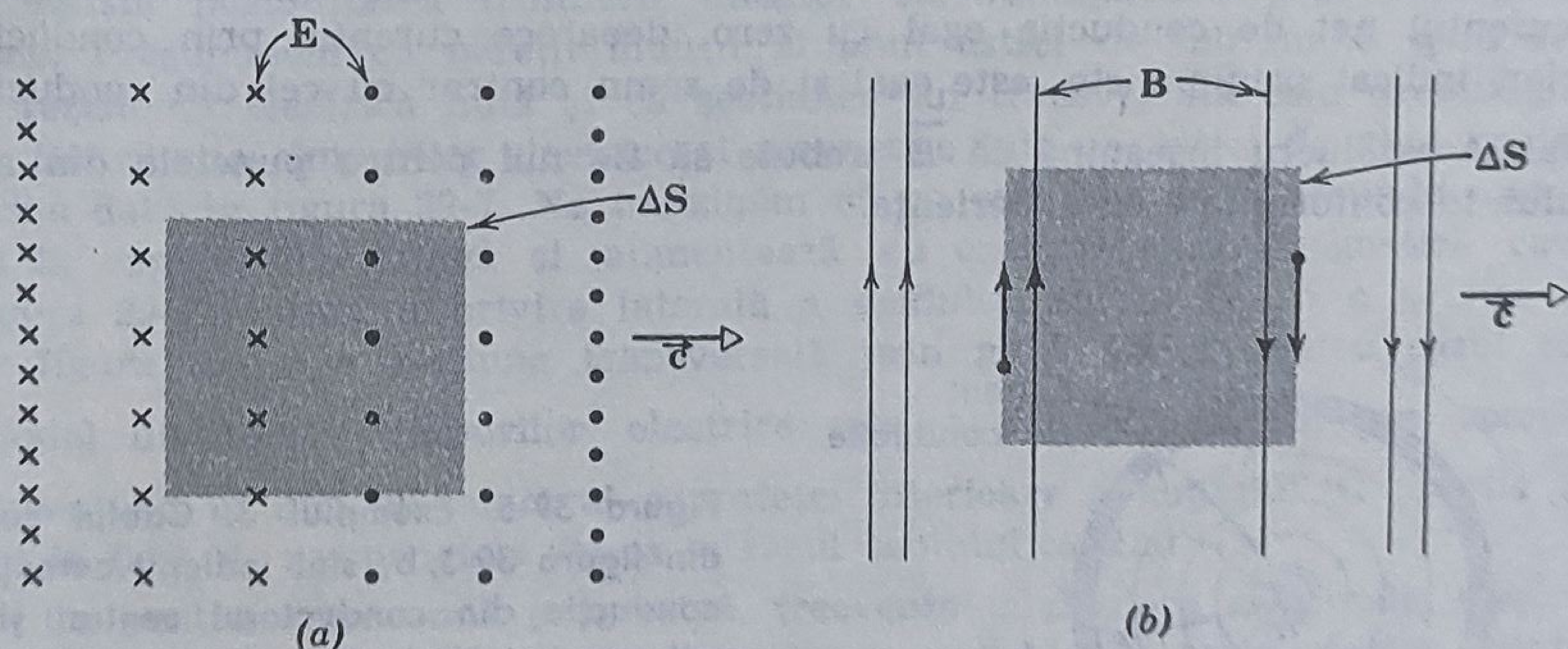


Figura 39-4. Elementul de suprafaţă S din fig. 39-3 mărit şi privit de sus; se văd cîmpurile electric (a) şi magnetic (b) adiacente.

Figura 39-4 b ne arată cîmpul magnetic în vecinătatea elementului de suprafață. Să aplicăm expresia generalizată a legii lui Ampère acestui element

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i + i_d)$$

Curentul de conducție i este zero deoarece nu se transportă sarcină prin elementul ΔS. Curentul de deplasare i_d nu este zero, avînd valoare maximă. Astfel, deoarece partea dreaptă a ecuației $(-\mu_0 i_d)$ nu se anulează, partea stîngă trebuie să fie diferită de zero. Privind figura 39-4 b vedem că $\oint \vec{B}\, d\vec{l}$ are o valoare diferită de zero pe marginile pătratului. În acest fel configurația cîmpurilor și cea de curenți din figura 39-3 a—c sînt în concordanță. Nu am discutat pînă acum sensul lui i_d; cu alte cuvinte el intră în plan în figura 39-4, după cum cere figura 39-3 c, sau nu? Lăsăm demonstrația acestui lucru pe seama studenților. Ei pot fi ghidați de sensul curentului de deplasare din figura 38-9 a și b.

Exemplul 3. Arătați că curenții de conducție din figura 39-3 c sînt legați în mod corespunzător de distribuția de cîmp magnetic.

Figura 39-5 reprezintă o secțiune transversală prin cablu în planul xx din figura 39-3 a. Să explicăm legea lui Ampère

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(i + i_d)$$

conturului circular de rază r. Curentul de deplasare prin acest contur este nul, el fiind radial. Curentul de conducție i în conductorul central, indicat prin semnul $\times$, în figură, traversează conturul astfel că ecuația devine

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 i,$$

sau

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Observați că $\vec{B}$ este legat de curentul din conductorul central prin regula cunoscută a mîinii drepte și că expresia lui B este cea găsită anterior (ecuația 34-4) pentru un conductor lung parcurs de un curent constant.

Dacă aplicăm legea lui Ampère conturului circular de rază mai mare r', putem lua curentul net de conducție egal cu zero, deoarece curentul prin conductorul exterior, indicat prin puncte, este egal și de semn contrar cu cel din conductorul central. Acest lucru înseamnă că $\vec{B}$ trebuie să fie nul pentru punctele din afara cablului, în conformitate cu experiența.

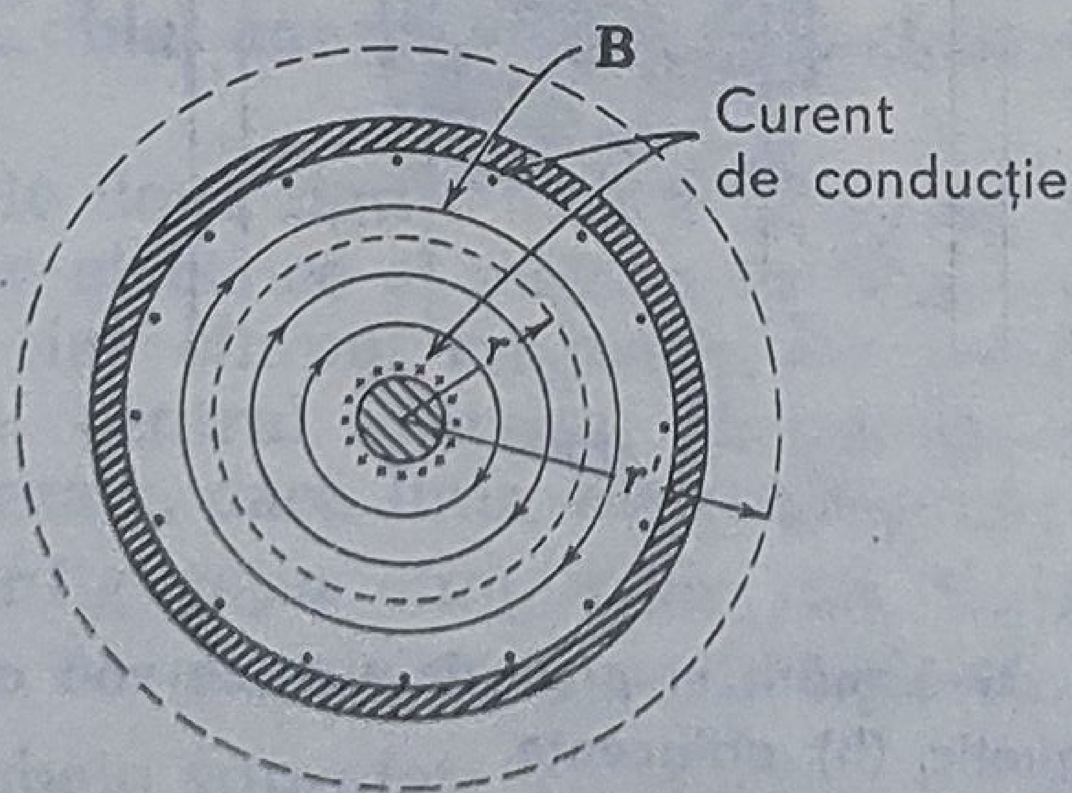


Figura 39-5. Exemplul 3. Cablul coaxial din figura 39-3, b; sînt indicați curenții de conducție din conductorul central și din cel exterior. Unda iese din planul paginii.

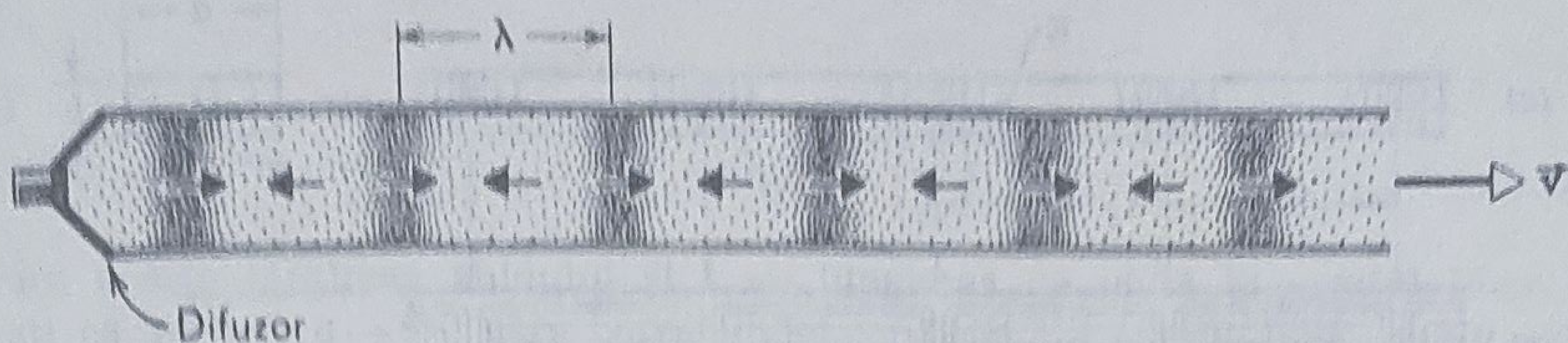


Figura. 39-6. O linie transmisie acustică; este indicată o undă acustică ce se propagă spre dreapta. Săgețile mici negre indică vitezele de deplasare ale unor mici elemente de volum de gaz. Comparați cu figura 39-3, a.

Este interesant să comparăm oscilațiile electromagnetice dintr-o undă tipic progresivă, ca cea din figura 39-3, cu cele dintr-o cavitate rezonantă ca cea din figura 38-8. În ultimul caz oscilațiile corespund unor unde electromagnetice *staționare*. Într-o undă progresivă, $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sînt în fază, ceea ce înseamnă că pentru un punct dat de pe linia de transmisie ele ating împreună, valoarea maximă. Pe cînd într-un punct oarecare dat din cavitatea rezonantă (figura 38-8) $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ating maximele lor la momente diferite distanțate printr-un sfert de perioadă; ele sînt defazate cu 90°.

O completă analogie există și în sisteme mecanice. În rezonatorul acustic din figura 38-7 variația în timp a presiunii și vitezei pentru o undă staționară acustică sînt defazate cu 90°, într-o perfectă corespondență cu oscilațiile cavității electromagnetice din figura 38-8. Analogul acustic al liniei de transmisie (fig. 39-6) este un tub infinit lung umplut cu gaz, la unul din capetele tubului fiind plasat un oscilator acustic cum ar fi de exemplu un difuzor. Întreaga configurație din figura 39-6 se mișcă spre dreapta cu viteza v. Variația de presiune, sugerată prin densitatea de puncte și vitezele instantanee exprimate prin săgeți, sînt *în fază*, exact la fel cum sînt $\vec{E}$ și $\vec{B}$ în cablul coaxial din figura 39-3.

39-3 Ghidul de undă

Există posibilitatea trimiterii undelor electromagnetice prin tuburi metalice goale. Presupunem că pereții interni ai unui astfel de tub numit *ghid de undă*, au rezistență electrică nulă și că secțiunea lui transversală este dreptunghiulară.

Distribuția cîmpurilor electrice și magnetice într-un astfel de ghid poate fi de forma dată în figura 39-7. Ne imaginăm că un oscilator de microunde este conectat la capătul din stînga și alimentează cu energie electromagnetică cavitatea. Figura 39-7 a arată o privire laterală a ghidului, figura 29-7 b o privire de sus iar figura 39-7 c o secțiune transversală prin ghid. Ca și pentru cazul cablului coaxial distribuția cîmpurilor electrice este astfel încît $\vec{E}$ nu are componentă tangențială în nici un punct al suprafeței interioare a ghidului. Cîmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sînt în fază, de asemenea la fel ca în cazul cablului coaxial.

Ca pentru orice undă progresivă, frecvența unghiulară ω a undei electromagnetice ce trece prin ghid poate fi continuu variată. Cu toate acestea, pentru un ghid de dimensiuni date, există pentru fiecare mod de transmisie, sau configurație pentru $\vec{E}$ și $\vec{B}$, o așa-numită *frecvență de tăiere* ω_0 Un ghid de undă dat nu va putea transmite unde pentru un mod dat dacă frecvența ei este mai mică ca

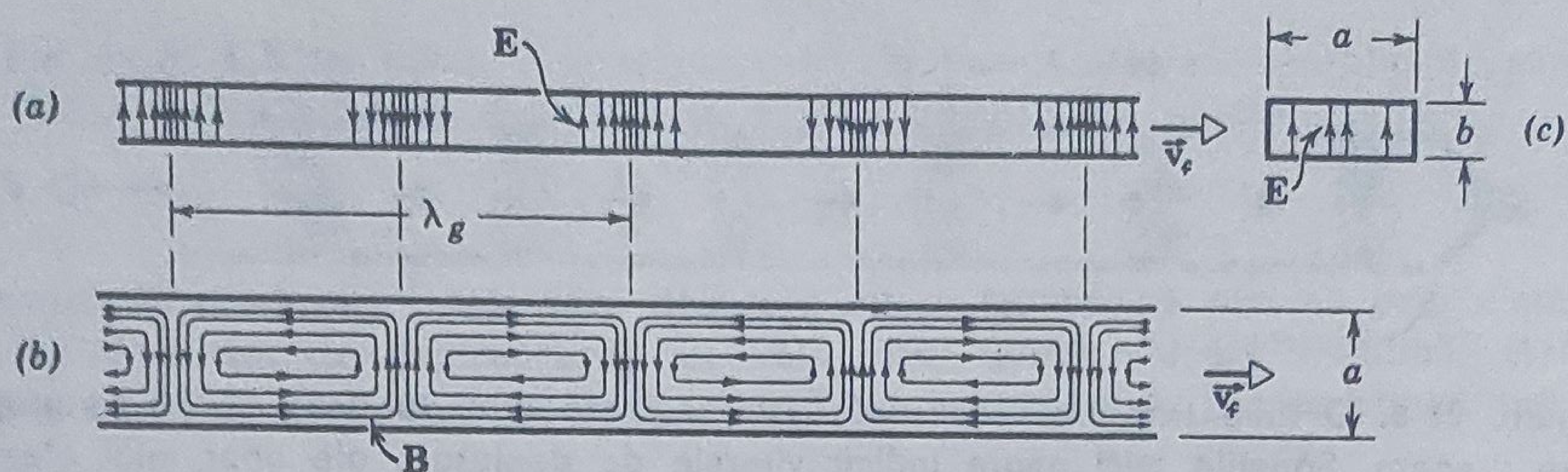


Figura 39-7. Un ghid de unde. Se vede: (a) o imagine laterală a liniilor lui $\vec{E}$, (b) o imagine de sus a liniilor lui $\vec{B}$ și (c) o imagine în secțiune a liniilor lui $\vec{E}$. În (c) unda iese din planul paginii. Pentru simplitate, liniile lui $\vec{B}$ nu sînt indicate în (a) și (c) iar liniile lui $\vec{E}$ în (b).

frecvența de tăiere pentru acel mod în ghid. Distribuția de cîmp din figura 39-7 arată *modul dominant* pentru un ghid dreptunghiular; acesta este modul cu cea mai joasă frecvență de tăiere. Fiind dată frecvența ω a undelor ce trebuiesc transmise se obișnuiește să se aleagă în practică ghidul al cărui dimensiuni sînt astfel alese încît ω este mai mare ca frecvența de tăiere ω_0 pentru modul dominant dar mai mică ca frecvența de tăiere pentru toate celelalte moduri. În aceste condiții modul dominant de propagare este unicul posibil.

Într-un cablu coaxil (fără rezistență) viteza de deplasare a configurației de cîmpuri este c. Într-o linie de transmisie acustică din figura 39-6 (presupusă fără „rezistență") unda se deplasează de asemenea cu o viteză v, care este aceeași cu viteza de propagare într-un mediu infinit. Totuși, într-un ghid de undă viteza *nu este c!*

Într-un ghid de undă trebuie să distingem între (a) *viteza de fază* v_f, care este viteza cu care configurația de cîmpuri din figura 39-7 se deplasează și (b) *viteza de grup* v_g, care este viteza cu care energia electromagnetică sau „semnalul" ce transportă informația, se propagă în lungul ghidului. Aceste viteze, ce sînt egale pentru undele electromagnetice în cablul coaxial și pentru undele acustice în tuburi, sînt diferite pentru undele ce se propagă prin ghiduri.

Viteza de fază nu este măsurabilă direct. Configurația de cîmpuri este o structură periodică și de aceea nu există nici un procedeu de a deosebi un maxim al undei de altul. Putem observa intrarea sau ieșirea undei din ghid, dar este imposibil să identificăm un anumit maxim din cele care trec prin ghid și deci să măsurăm intervalul de timp necesar pentru a traversa ghidul.

Putem „marca" unda de exemplu crescînd pentru un scurt interval de timp, puterea oscilatorului. Putem astfel măsura intervalul de timp necesar acestui plus de putere să traverseze ghidul, dar nu avem nici o garanție că el se va propaga cu aceeași viteză ca și configurația de cîmpuri, ceea ce se întîmplă într-adevăr. Viteza de propagare a unor astfel de semnale sau „marcaje" corespunde vitezei de propagare a *energiei* și care este tocmai viteza de grup.

Din ecuațiile lui Maxwell se poate arăta că viteza de fază și cea de grup pentru modul reprezentat în figura 39-7 este

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \qquad (39\text{-}1)$$

și

$$v_g=c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{39-2}$$

în care a este lărgimea ghidului și λ — lungimea de undă în spațiul liber. Observați că pentru $a\to\infty$, care corespunde condiției de spațiu liber, $v_f=v_g=c$.

Viteza de fază v_f este *mai mare* decît viteza luminii, viteza de grup v_g fiind în mod corespunzător mai scăzută. În teoria relativității am învățat că nici un semnal sau transport de energie nu se poate propaga cu viteze mai mari decît cea a luminii. Energia sau semnale, nu pot fi transmise prin ghid cu o viteză mai mare ca c; ele se propagă cu o viteză v_g care este totdeauna mai mică ca c și deci este în concordanță cu teoria relativității.

Lungimea de undă λ din ecuațiile (39-1) și (39-2) este lungimea de undă măsurată pentru oscilații în spațiul liber, adică

$$\lambda=\frac{c}{\nu} \tag{39-3}$$

unde c este viteza din spațiul liber iar ν frecvența. Pentru o frecvență dată, lungimea undei în ghid (λ_g) trebuie să difere de cea a lungimii undei în spațiul liber λ deoarece v_f s-a modificat. Relația care dă *lungimea de undă din ghid* λ_g este

$$\lambda_g=\frac{v_f}{\nu}=\frac{v_f}{c/\lambda}=\lambda\frac{v_f}{c}$$

Din ecuația (39-1) rezultă

$$\lambda_g=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \tag{39-4}$$

Astfel lungimea de undă în ghid, ceea ce reprezintă lungimea de undă a configurației de cîmpuri din figura 39-7, este mai mare decît lungimea de undă a undei în spațiul liber.

Exemplul 4. Care trebuie să fie dimensiunea a, a unui ghid de undă dreptunghiular astfel încît radiația electromagnetică ce are 3,0 cm lungime de undă în spațiul liber să se propage prin ghid cu (a) 95% din viteza luminii, (b) cu 50% din viteza luminii?

Din ecuația 39-2 avem

$$v_g=0{,}95\,c=c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.$$

Obținem de aci $a=4{,}8$ cm; la fel pentru $v_g=0{,}50\,c$ obținem $a=1{,}7$ cm.

Această formulă ne arată fenomenul de tăiere descris anterior. Dacă $\lambda=2a$ atunci $v_g=0$, și energia nu se mai poate propaga. Pentru radiația considerată aci, $\lambda=3{,}0$ cm astfel că ghidul trebuie să aibă o lărgime a de cel puțin $\frac{1}{2}\times 3{,}0$ cm $=1{,}5$ cm pentru a putea transmite această undă. În ghidul calculat la punctul (a) mai sus, se pot propaga radiații ale căror lungimi de undă în spațiul liber este $2\times 4{,}8$ cm $=9{,}6$ cm sau *mai mică*.

39-4 Radiația

Linia de transmisie acustică din figura 39.6 nu poate fi infinit lungă. Capătul ei poate fi închis cu un capac sau poate fi lăsat liber, poate avea o flanșe, o pîlnie, sau ceva similar atașat ei. Dacă capătul liniei nu este închis, energia transmisă va trece în mediul exterior. Acest fenomen se numește *radiație acustică*. În principiu, totdeauna o parte din energie se va reflecta înapoi, pe linia de transmisie. Dacă scopul principal este obținerea radiației acustice, dorința proiectantului este de a construi o terminație (adică o „antenă acustică“) pentru linia de transmisie astfel încît o cît mai mică parte din energie să fie reflectată înapoi pe linie. Un astfel de capăt poate avea forma unei pîlnii ce se lărgește spre exterior. Radiația acustică necesită un mediu de propagare, de exemplu aerul.

O linie de transmisie electromagnetică, cum ar fi un cablu coaxial sau un ghid de undă, se poate termina într-o multitudine de feluri astfel ca energia să treacă din linie în spațiul exterior. În contrast cu undele sonore, în acest caz nu este nevoie de un mediu fizic. Astfel energia electromagnetică poate fi radiată în spațiul de la capătul unei linii de transmisie formînd o undă progresivă în spațiul liber.

În figura 39.9 se arată o astfel de terminație pentru un cablu coaxial; ea constă din doi conductori dispuși ca în figură și numiți *antenă dipol electrică*. Diferența de potențial dintre cei doi conductori variază sinusoidal după cum unda ajunge la ei, efectul fiind cel al unui dipol electric al cărui moment dipolar $\vec{p}$ variază în timp.

Figura 39.9 arată un astfel de dipol, reprezentat prin două sarcini egale și de semn contrar. Momentul lui dipolar reprezentat prin săgeată, notată cu $\vec{p}$ în figură, oscilează sinusoidal după cum oscilează sarcinile; în figura 39.9 *c* este reprezentat momentul în care ele își schimbă pozițiile. Cele patru desene, care corespund la patru momente decalate fiecare cu un sfert de perioadă, arată că la distanță mare, liniile de forță electrică se rup de dipol și formează linii închise ce se propagă prin spațiul liber cu viteza *c*. Sarcinile oscilante formează un curent, reprezentat prin săgețile notate cu *i* (fig. 39.9). Acești curenți oscilanți generează un cîmp $\vec{B}$ care, pentru simplitatea figurii, nu este reprezentat. Liniile pentru $\vec{B}$, ca și pentru $\vec{E}$, formează contururi închise ce se îndepărtează de dipol cu viteza *c*. Aceste cîmpuri electrice și magnetice care, după cum vom vedea sînt puternic intercondiționate, formează *radiația electromagnetică*.

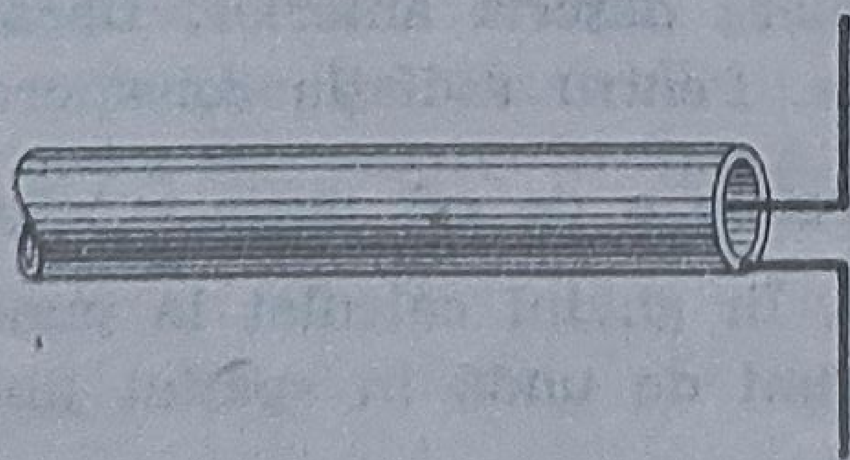


Figura 39-8. O antenă dipol electric la capătul unui cablu coaxial.

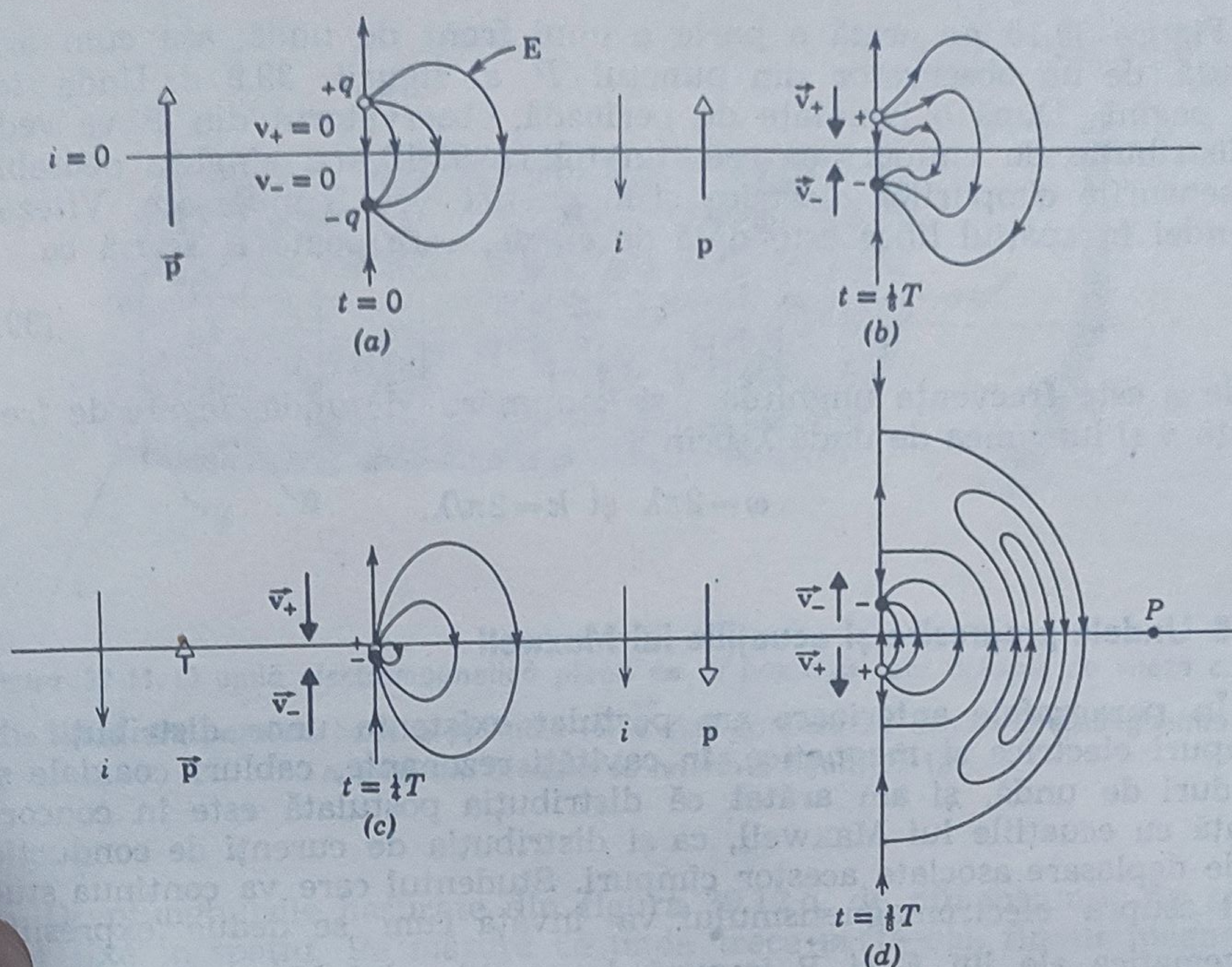


Figura 39-9. Modul în care un dipol electric ce oscilează emite radiație. Sînt arătate vitezele sarcinilor, momentul electric dipolar, curentul echivalent și liniile lui $\vec{E}$ în patru momente de oscilație, decalate fiecare cu 1/8 din perioadă. Liniile lui $\vec{B}$ nu sînt indicate. (Adaptat după Attwood), Electric and Magnetic Fields, John Wiley and Sons, ediția a treia, 1949.)

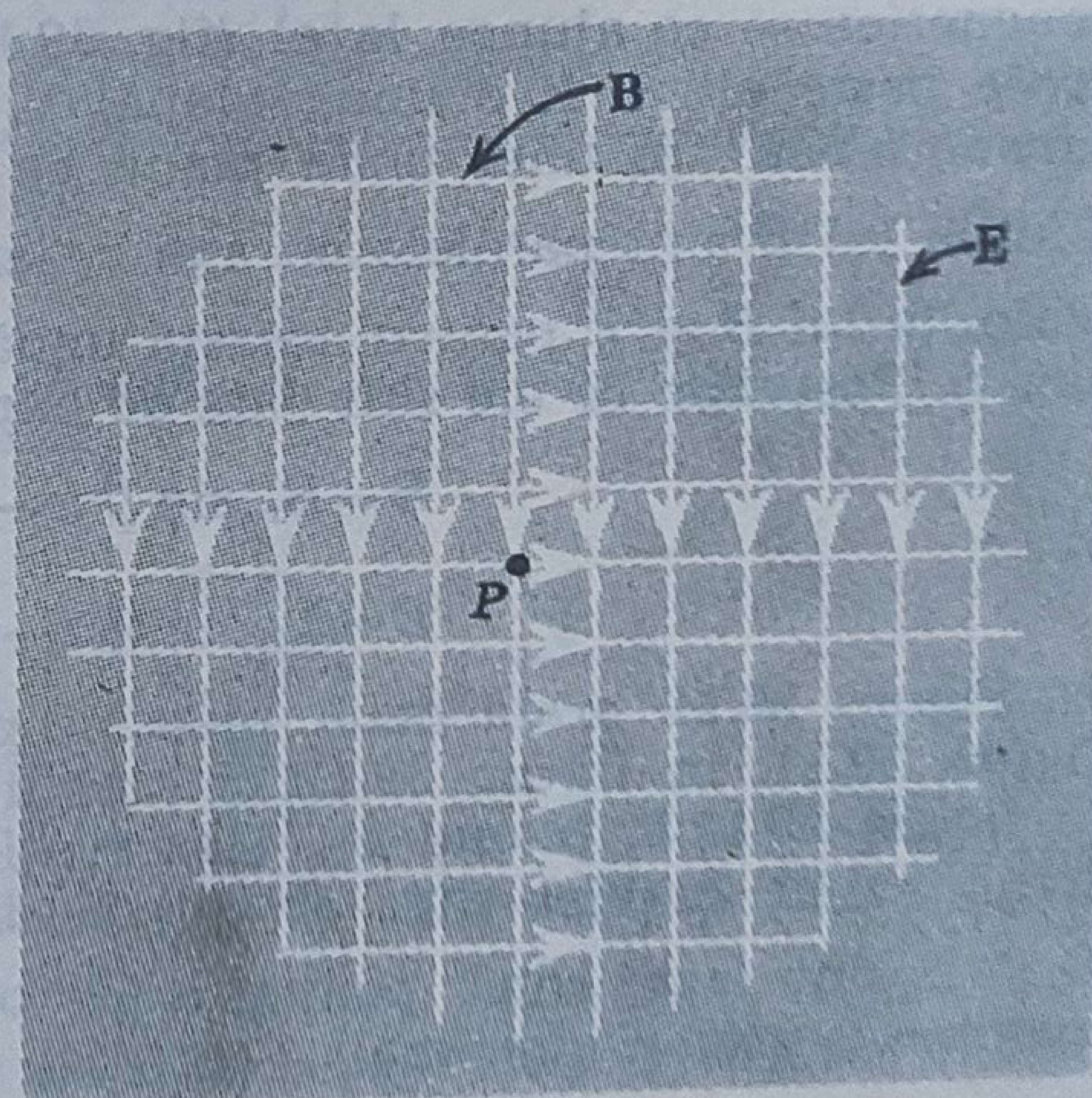


Figura 39-10. Imagine instantanee a unei unde electromagnetice așa cum este ea văzută de un observator situat în punctul P din figura 39-9, d.

Figura 39.10 ne arată o parte a unui front de undă, așa cum ar fi văzută de un observator din punctul P al figurii 39.9 d. Unda iese din pagină. După o jumătate de perioadă, observatorul din P va vedea o distribuţie de cîmpuri ca cea din figura 39.10, cu singura deosebire că sensurile cîmpurilor electrice şi magnetice vor fi inversate. Viteza c a undei în spaţiul liber este dată de $c=\nu\lambda$, care poate fi scrisă ca

$$c=\frac{\omega}{k} \tag{39.5}$$

unde ω este frecvenţa unghiulară şi k numărul de undă, legate de frecvenţa ν şi lungimea de undă λ prin

$$\omega=2\pi\lambda \text{ și } k=2\pi/\lambda.$$

39-5 Undele progresive şi ecuaţiile lui Maxwell

În paragrafele anterioare am postulat existenţa unor distribuţii de cîmpuri electrice şi magnetice, în cavităţi rezonante, cabluri coaxiale şi ghiduri de undă, și am arătat că distribuţia postulată este în concordanță cu ecuaţiile lui Maxwell, ca şi distribuţia de curenţi de conducţie şi de deplasare asociate acestor cîmpuri. Studentul care va continua studiul asupra electromagnetismului va învăța cum se deduc expresiile matematice ale lui $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ impunînd ecuaţiilor lui Maxwell condiţiile la frontieră cerută de problema în cauză. În acest paragraf vom continua programul nostru arătînd că configuraţia cîmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ postulată pentru o undă electromagnetică progresivă este în completă concordanţă cu ecuaţiile lui Maxwell. Obţinînd acest lucru, vom fi capabili să arătăm că viteza acestor unde în spaţiul liber coincide cu cea a luminii vizibile şi deci că lumina însăşi este o undă electromagnetică.

Dacă observatorul din P (fig. 39.9, d) se găsește la o distanţă considerabilă de sursă, *frontul de undă* — descris de cîmpurile electrice și magnetice — ce ajunge la el (fig. 39.10), va fi un plan și unda care va trece peste el va fi o undă plană (v. § 19-2). Figura 39-11 prezintă un „instantaneu" al unei unde plane ce se propagă în lungul direcției x. Liniile lui $\vec{E}$ sînt paralele cu axa z, iar cele ale lui $\vec{B}$ paralele cu axa y. Valorile lui $\vec{B}$ și $\vec{E}$ pentru această undă depind doar de x și t (și nu de y sau z). Postulăm că ele sînt date de expresiile

$$B=B_m \sin(kx-\omega t) \tag{39.6}$$

și

$$E=E_m \sin(kx-\omega t). \tag{39.7}$$

Figura 39.12 arată două secţiuni prin diagrama tridimensională din figura 39.11. În figura 39.12, a, planul paginii este tocmai planul xz iar în figura 29.12 b, planul xy. Observaţi că pentru undele progresive dintr-un cablu coaxial (fig. 39.3, a) şi dintr-un ghid de undă (fig. 39.7), $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sînt fază, adică pentru orice punct atins de undă ele iau valori maxime la acelaşi moment.

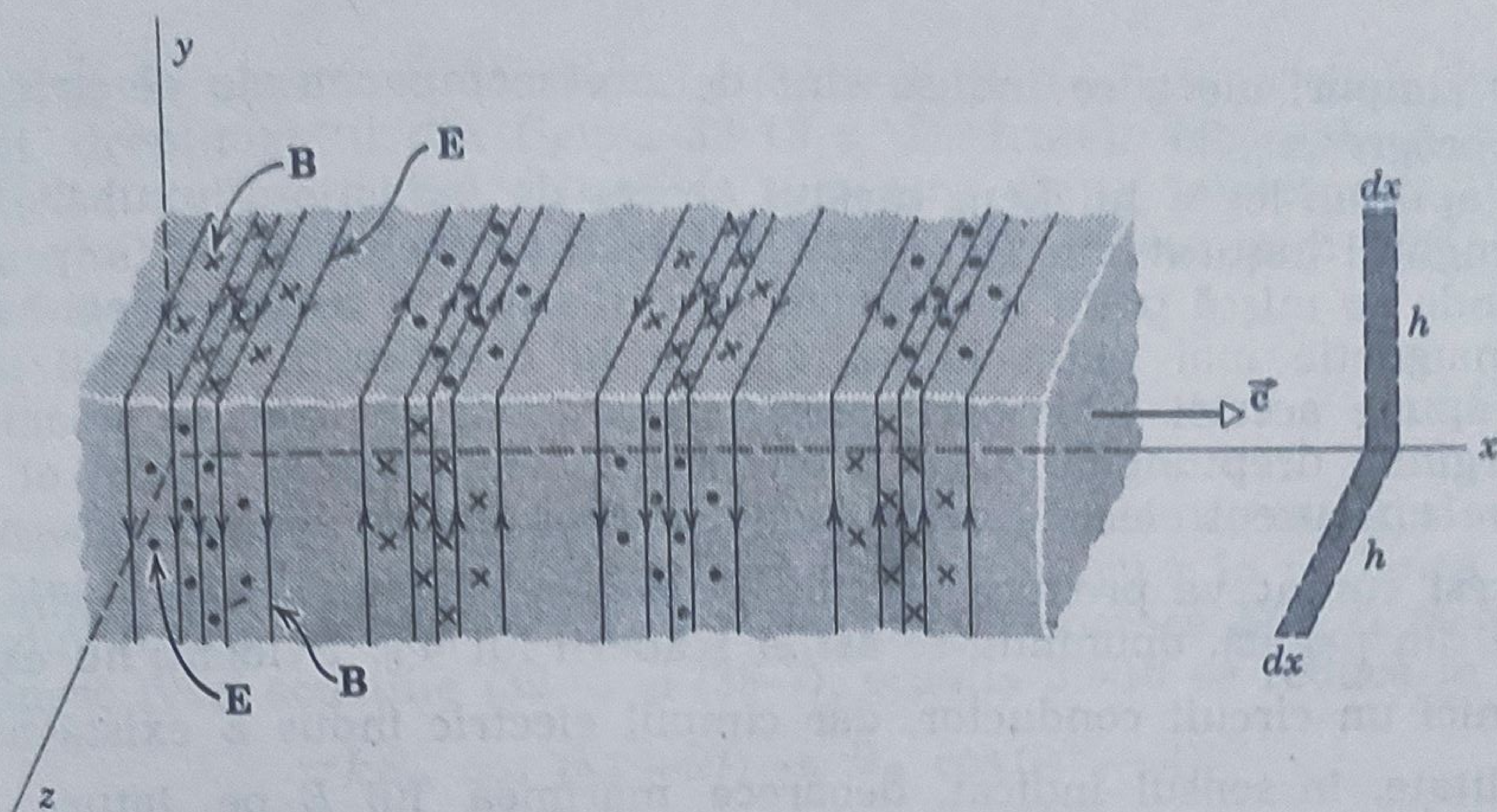


Figura 39-11. O undă electromagnetică plană ce se propagă spre dreapta cu viteza c. Liniile lui $\vec{B}$ sînt paralele cu axa y; liniile lui $\vec{E}$ sînt paralele cu axa z. Dreptunghiurile înnegrite din dreapta se referă la figura 39-12.

Dreptunghiurile hașurate din figura 39.12 *a*, de dimensiunile dx și h, sînt fixe în spațiu. Pe măsură ce unda trece peste ele, fluxul magnetic Φ_B prin dreptunghi se va modifica, și va da naștere unui cîmp electric indus pe marginile dreptunghiului, conform legii inducției a lui Faraday.

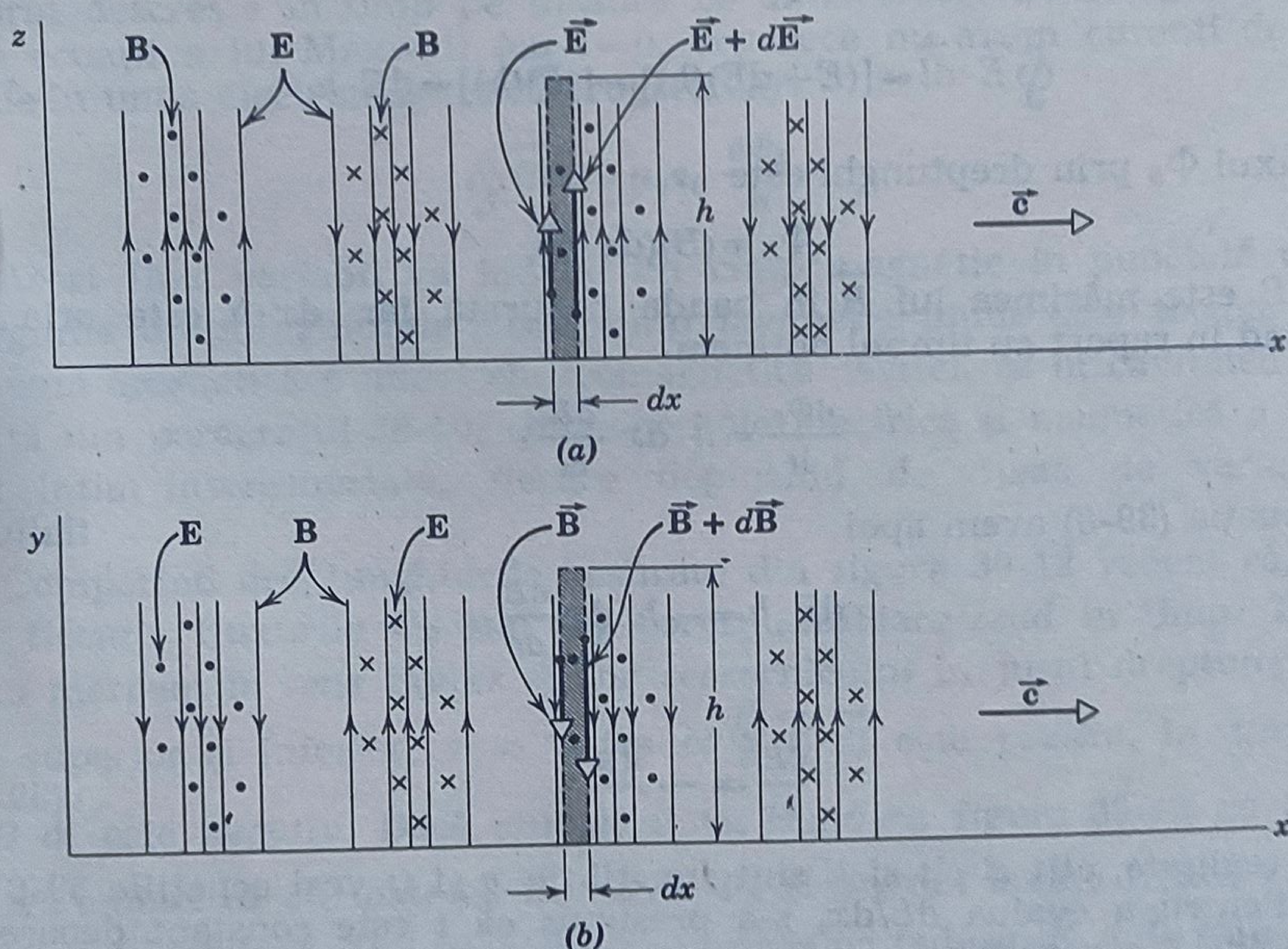


Figura 39-12. Unda din figura 39-11 privită (a) în planul xz și (b) în planul xy.

Aceste cîmpuri electrice induse sînt de fapt componentele electrice ale undei progresive.

Să aplicăm legea lui Lenz acestui proces de inducție. Fluxul Φ_B prin dreptunghiul hașurat din figura 39.12 *a* este *descrescător* în timp deoarece unda se mișcă peste dreptunghi spre dreapta și astfel o regiune de cîmp magnetic mai puțin intens ajunge la dreptunghi. Cîmpul indus se va opune acestei schimbări, ceea ce înseamnă că dacă ne imaginăm că marginile dreptunghiului ar fi un circuit conductor, atunci în el s-ar produce un curent electric de inducție în sens invers acelor ceasornicului. Acest curent va produce un cîmp $\vec{B}$ care, pe porțiunea dreptunghiului, va ieși din pagină, opunîndu-se astfel scăderii lui Φ_B. Evident, nu există acolo nici un circuit conductor, dar cîmpul electric indus $\vec{E}$ există acolo în realitate, în sensul indicat, deoarece mărimea lui $\vec{E}$ pe latura din dreapta a dreptunghiului, $E+\mathrm{d}E$, este mai mare ca cea de pe latura stîngă, $\vec{E}$. În acest fel configurația cîmpului electric este în întregime consistentă cu presupunerea că a fost indusă de cîmpul magnetic variabil.

Pentru o analiză mai detaliată, să aplicăm legea inducției a lui Faraday

$$\oint \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{39-8}$$

în sens invers mișcării acelor ceasornicului, în jurul conturului dreptunghiular hașurat din figura 39-12 *a*. Laturile superioară și inferioară nu aduc nici o contribuție la integrală deoarece $\vec{E}$ și $\mathrm{d}\vec{l}$ sînt perpendiculare pe ele. Integrala devine atunci

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = [(E+\mathrm{d}E)(h)] - [(E)(h)] = \mathrm{d}E\cdot h.$$

Fluxul Φ_B prin dreptunghi este

$$\Phi_B = (B)(\mathrm{d}x\cdot h),$$

unde B este mărimea lui $\vec{B}$ în banda hașurată, iar $\mathrm{d}x\cdot h$ este aria ei. Derivînd în raport cu timpul obținem

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = h\cdot\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

Din ecuația (39-8) avem apoi

$$\mathrm{d}E\ h = -h\ \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{39-9}$$

În realitate, atît B cît și E sînt funcții de x și t; vezi ecuațiile 39-6 și 39-7. Pentru a evalua $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$, s-a presupus că t este constant deoarece figura 39-12 a reprezintă o „fotografie instantanee". De asemenea pentru evaluarea lui $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ s-a presupus că x este constant deoarece este

necesar să se considere doar viteza de variație a lui B în timp, într-un loc dat, dreptunghiul din figura 39-12, a. Derivatele efectuate în aceste condiții se numesc *derivate parțiale* și pentru ele se folosesc notații puțin diferite, vezi nota de la subsolul paginii 87. În aceste notații, ecuația 39-9 devine

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{39-10}$$

Semnul negativ ce apare în această ecuație este necesară și corespunzătoare situației, deoarece cu toate că E crește cu x în regiunea hașurată din figura 39-12 a, B descrește în timp. Deoarece $E(x, t)$ și $B(x, t)$ se cunosc (vezi ecuațiile (39-6) și (39-7), ecuația 39-10 se reduce la

$$kE_m \cos (kx-\omega t) = \omega B_m \cos (kx-\omega t),$$

sau (vezi ecuația 39-5)

$$\frac{\omega}{k} = \frac{E_m}{B_m} = c. \tag{39-11 a}$$

Astfel, viteza undei c este raportul amplitudinilor componentelor electrice și magnetice ale undei. Din ecuațiile 39-6 și 39-7 vedem că raportul amplitudinilor este același cu raportul valorilor instantanee, sau

$$E = cB. \tag{39-11 b}$$

Acest rezultat important ne va fi folositor în paragrafele următoare. Să revenim acum la figura 39-12 b, în care fluxul Φ_E prin dreptunghiul hașurat descrește în timp pe măsură ce unda trece. Conform celei de-a treia ecuații a lui Maxwell (cu $i=0$, deoarece nu avem curenți de conducție în unda electromagnetică progresivă)

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{39-12}$$

Acest flux variabil va induce un cîmp magnetic în punctele de pe marginile dreptunghiului. Acest cîmp magnetic indus este tocmai componenta magnetică a undei electromagnetice. Astfel, că în cavitatea rezonantă din paragraful 38-10, componentele electrică și magnetică a undei sînt intim interconectate, fiecare depinzînd de viteza de variație a celuilalt.

Comparînd dreptunghiurile hașurate din figura 39-12 vedem că, pentru fiecare, fluxurile Φ_B sau Φ_E corespunzătoare *scad* în timp. Totuși, dacă mergem în sens invers acelor ceasornicului în jurul dreptunghiurilor superior și inferior, vom vedea că $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ este *pozitiv*, în timp ce $\oint \vec{B}\, d\vec{l}$ este *negativ*. Dacă studentul va compara figura 35-10 cu 38-9 a își va aminti că cu toate că fluxurile Φ_B și Φ_E din aceste figuri, variază în timp la fel (ambele cresc), liniile cîmpurilor induse, $\vec{E}$ și $\vec{B}$, au sensuri opuse.

Integrala din ecuaţia 39-12, evaluată mergînd în sens acelor ceasornicului în jurul dreptunghiului haşurat din figura 39-12 *b* este

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = [-(B+dB)(h)]+[(B)(h)] = -h\, dB,$$

unde B este mărimea lui $\vec{B}$ pe marginea din stînga a dreptunghiului iar $B+dB$ este mărimea lui, pe marginea din dreapta.

Fluxul Φ_E prin dreptunghiul din figura 30-12 *b* este

$$\Phi_E = (E)(h\, dx).$$

Derivînd obţinem

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h\, dx \frac{dE}{dt}.$$

Ecuaţia (39-12) poate fi astfel scrisă

$$-h\, dB = \mu_0\, \varepsilon_0 \left(h\, dx \frac{dE}{dt} \right)$$

sau, introducînd derivatele parţiale,

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (39\text{-}13)$$

Din nou, semnul negativ al acestei ecuaţii este cel corespunzător şi necesar, deoarece cu toate că B creşte cu x în regiunea haşurată din figura 39-12 *b*, E descreşte în timp.

Combinînd această ecuaţie cu (39-6) şi (39-7) obţinem

$$-kB_m \cos(kx-\omega t) = -\mu_0\, \varepsilon_0\, \omega\, E_m \cos(kx-\omega t),$$

sau (vezi ecuaţia 39-5)

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{k}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 c}. \qquad (39\text{-}14)$$

Eliminînd pe E_m/B_m, între ecuaţiile (39-11 *a*) şi (39-14) obţinem

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \qquad (39\text{-}15)$$

Introducînd valorile numerice

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Wb/Am})(8{,}9 \cdot 10^{-}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} =$$

$$= 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} \qquad (39\text{-}16)$$

care este viteza luminii în spaţiul liber. Această deducere a vitezei luminii pe cale pur electromagnetică este cel mai de preţ rezultat pe care l-a dat teoria lui Maxwell a electromagnetismului. Maxwell a obţinut acest rezultat înainte ca undele radio să fie cunoscute şi înainte ca să se bănuiască că lumina este de natură electromagnetică. Rezultatul acesta a condus la conceptul de spectru electromagnetic, pe care-l vom

discuta în capitolul 40, și la descoperirea undelor radio de către Heinrich Hertz în 1890. Ea a condus la posibilitatea considerării opticii ca ramură a electromagnetismului și să-i deducem legile din ecuațiile lui Maxwell.

O concluzie atît de fundamentală ca cea dată de ecuația 39-15 trebuie să fie supusă unei verificări experimentale riguroase. Una din cele trei mărimi ce apar în această ecuație, μ_0 are o valoare fixată și anume $4\pi\times10^{-7}$ Wb/A·m. Viteza luminii c este una din constantele fizice cel mai precis măsurată, avînd o valoare acceptată azi de $2{,}997924\cdot10^8$ m/s. Mărimea ce a mai rămas ϵ_0, poate fi măsurată pe condensatori plan paraleli de construcție extrem de îngrijită, ca cel descris în paragraful 30-2. Cea mai bună valoare măsurată, efectuată de către Rosa și Dorsey la Biroul Național de Standarde (S.U.A.) în 1906 este $8{,}84025\cdot10^{-12}$ C²/N·m². În limitele acestea de precizie ecuația 39-15 este complet verificată. Încrederea noastră în teoria electromagnetică, susținută de numeroasele predicții și concordanțe cu experiența, este acum de așa natură încît acum inversăm procedeul mai sus amintit și calculăm valoarea acceptată în prezent pentru ϵ_0 (vezi Anexa A) din măsurători ale vitezei luminii, folosind ecuația 39-15.

39-6. Vectorul Poynting

Una din caracteristicile importante ale undelor electromagnetice este aceea că transportă energie. După cum vom vedea în cele ce urmează, energia ce trece prin unitatea de suprafață în unitate de timp, transportată de unda plană electromagnetică poate fi descrisă cu ajutorul unui vector $\vec{S}$, numit *vector Poynting*, după numele lui John Henry Poynting (1852—1914), care pentru prima dată i-a descris proprietățile. Definim pe $\vec{S}$ prin

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}. \qquad (39\text{-}17)$$

În SI, S se măsoară în W/m²; direcția și sensul lui $\vec{S}$ sînt date de direcția și sensul propagării energiei. Vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sînt dați de valorile lor instantanee în punctul considerat. Dacă ecuația (39-17) este aplicată undei electromagnetice plane progresive din figura 39-11, se vede că $\vec{E}\times\vec{B}$, respectiv $\vec{S}$, sînt pe direcția și sensul de propagare. Observați de asemenea că pentru cablul coaxil din figura 39-3, $\vec{E}$ este paralel cu axa cablului pentru toate punctele.

Putem obține rezultate deosebit de semnificative dacă extindem noțiunea de vector Poynting și la alte situații ce implică existența undelor electromagnetice progresive sau staționare după cum vom vedea în exemplele 5 și 6. Dacă aplicăm această noțiune pentru circuite cu constante concentrate în care curenții sînt constanți sau aproape constanți, vom fi conduși la unele concluzii interesante pe care le vom discuta în problemele 11, 17 și 18.

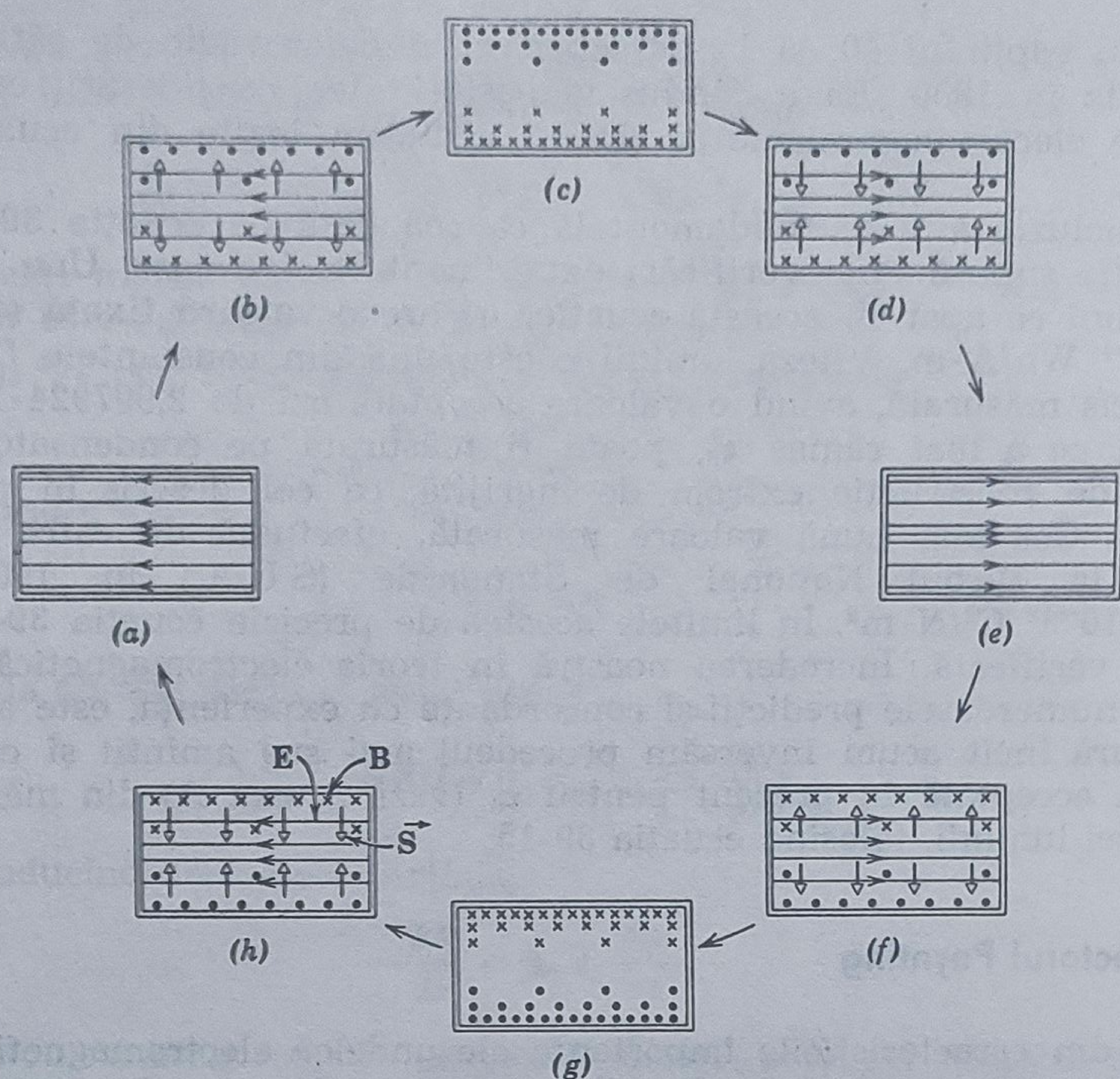


Figura 39-13. Exemplul 5. Energia trece periodic de la regiunea centrală a cavității la regiunea de lîngă pereți, după cum este indicat prin vectorul Poynting, $\vec{S}$.

Exemplul 5. Analizați transportul de energie în cavitatea din figura 38-8 folosind vectorul Poynting.

Analizînd figura 39-13 vedem că atunci cînd energia este înmagazinată doar în cîmpul electric, ea este concentrată în lungul axei, deoarece aceasta este regiunea în care $\vec{E}$ ia valoare maximă. Cînd energia este înmagazinată complet în cîmp magnetic (fig. 39-13 c și g), ea este concentrată lîngă pereți. Astfel energia trece periodic de la regiunea centrală a ghidului la marginea lui. În figură se văd direcțiile lui $\vec{S}$ în diferite puncte ale cavității și la diverse momente, sub formă de săgeți albe. Observați că $\vec{S}$ este nul pentru figurile 39-13 a, c, e și g, deoarece în aceste momente configurația de cîmpuri este staționară și energia este localizată. Analogia mecanică a acestor momente este cea a unui pendul în momentul elongației maxime. Studentul va verifica că aceste săgeți indică corect direcția și sensul, folosind ecuația 39-17.

Figura 39-14 poate fi folosită pentru a deduce relația Poynting pentru cazul special al undelor electromagnetice plane. Ea ne arată o secțiune transversală printr-o undă plană progresivă ce traversează o regiune paralelipipedică de grosime dx și arie A. Regiunea considerată este fixă în raport cu axele de coordo-

nate. La un moment dat, energia înmagazinată în regiunea haşurată este (din ecuaţia 30-27 şi ecuaţia 36-19),

$$dU=dU_E+dU_B=(u_E+u_B)\,(A\,dx)=\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}\,B^2\right)A\,dx \qquad (39\text{-}18)$$

unde $A\,dx$ este volumul regiunii haşurate iar E şi B sînt valorile instantanee ale vectorilor de cîmp în regiune.

Folosind ecuaţia 39-11 b ($E=cB$) pentru a elimina *un* E din primul termen din ecuaţia 39-18 şi *un* B din termenul al doilea, obţinem

$$dU=\left[\frac{1}{2}\,\varepsilon_0E(cB)+\frac{1}{2\mu_0}\,B\left(\frac{E}{c}\right)\right]A\,dx=\frac{(\mu_0\varepsilon_0c^2+1)(EBA\,dx)}{2\mu_0c}.$$

Din ecuaţia (39-15), obţinem (deoarece $\mu_0\,\varepsilon_0c^2=1$)

$$dU=\frac{EBA\,dx}{\mu_0c}$$

Această energie dU va trece prin faţa dreaptă a regiunii paralelipipedice în intervalul de timp $dt=dx/c$. Astfel energia pe unitate de arie şi pe unitate de timp, egală cu S, va fi

$$S=\frac{dU}{dt\,A}=\frac{EBA\,dx}{\mu_0c(dx/c)A}=\frac{1}{\mu_0}\,EB.$$

Aceasta este exact expresia mai generală dată de ecuaţia 39-17 pentru o undă plană progresivă.

Valorile lui S, E şi B sînt la un moment oarecare de timp. De obicei pe noi ne interesează mai degrabă valoarea *medie* a lui S, luată pe o perioadă sau mai multe, a undei. Dacă un observator ar face măsurători de intensitate asupra unei unde ce se propagă, ar măsura în fapt această valoare medie $\bar{S}$. Putem să vedem uşor (exemplul 5) că $\bar{S}$ este legat de valorile *maxime* ale lui E şi B prin relaţia

$$\bar{S}=\frac{1}{2\mu_0}\,E_mB_m.$$

Exemplul 6. La distanţa mare r, de o sursă punctiformă de lumină cu o putere de emisie P_0 se găseşte un observator. Calculaţi mărimea cîmpului electric şi magnetic în acel punct. Presupuneţi că sursa este monocromatică, că radiază uniform şi izotrop şi că la distanţa considerată ea se comportă ca o undă progresivă plană ca cea din figura 39-11.

Puterea ce traversează sfera de rază r, centrată pe sursă, este $(\bar{S})(4\pi r^2)$, unde $\bar{S}$ este valoarea *medie* a vectorului Poynting la suprafaţa sferei. Această putere trebuie să fie egală cu P_0, adică

$$P_0=\bar{S}\cdot 4\pi r^2.$$

Din definiţia lui $\vec{S}$ (ecuaţia 39-17) avem

$$\bar{S}=\overline{\left(\frac{1}{\mu_0}\,EB\right)}.$$

Eliminînd pe B, folosind relaţia $E=cB$ (ecuaţia 39-11 b), obţinem

$$\bar{S}=\frac{1}{\mu_0c}\,\overline{E^2}$$

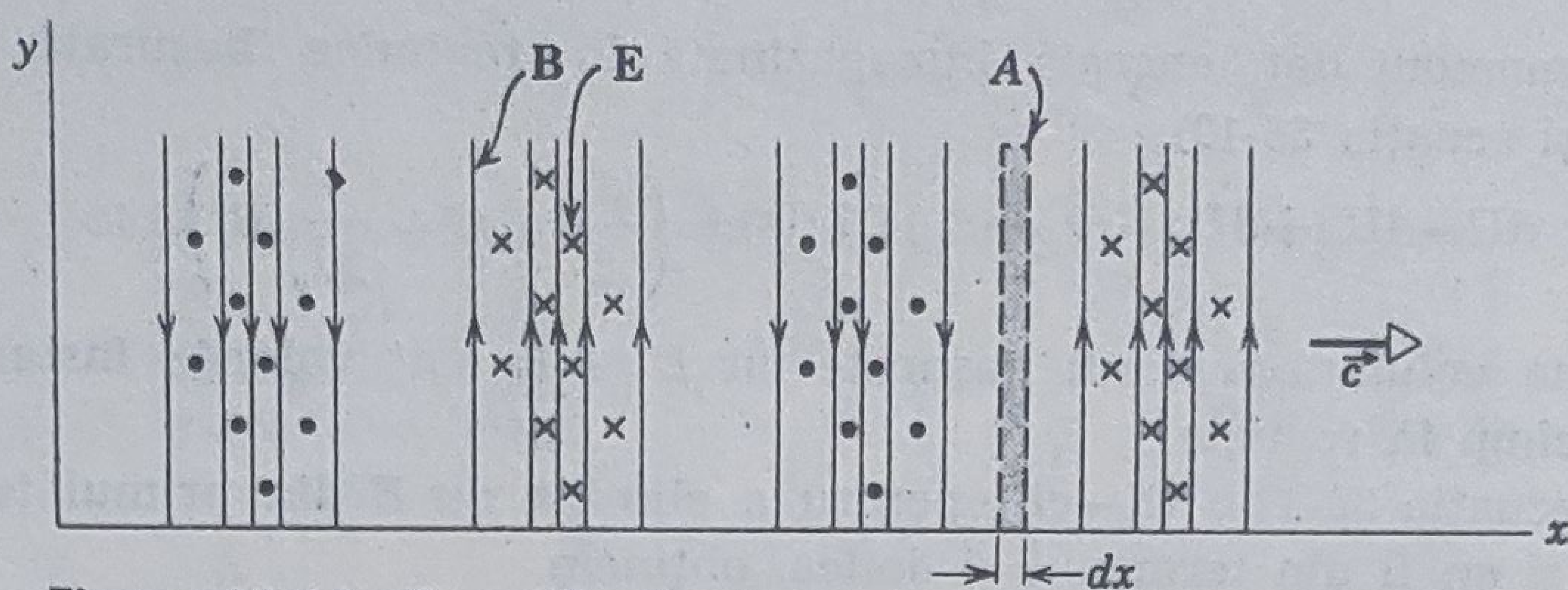


Figura 39-14. O undă plană ce se propagă spre dreapta cu viteza *c*; comparaţi figura 39-12, b. Dreptunghiul înnegrit din figură reprezintă o regiune paralelipipedică de grosime *dx* şi arie A, normala pe planul figurii.

Valoarea medie a lui E^2 pe o perioadă este $\frac{1}{2}E_m^2$, deoarece E variază sinusoidal (vezi ecuaţia 39-7). Obţinem astfel

$$P_0=\left(\frac{Em^2}{2\mu_0 c}\right)(4\pi r^2)$$

sau

$$E_m=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{P_0\mu_0 c}{2\pi}}.$$

Pentru $P_0=10^3$ W şi $r=1{,}0$ m avem

$$E_m=\frac{1}{(1{,}0\text{m})}\sqrt{\frac{(10^3\text{W})(4\pi\cdot10^{-7}\text{Wb/A}\cdot\text{m})(2\cdot10^8\text{m/s})}{2\pi}}=240\text{V/m}$$

Relaţia $E_m=cB_m$ (ecuaţia (39-11 a)) conduce la

$$B_m=\frac{E_m}{c}=\frac{240\text{V/m}}{3\cdot10^8\text{m/s}}=8\times10^{-7}\text{Wb/m}^2$$

Observaţi că E_m este suficient de mare, judecînd după valorile curent utilizate în laboratoare, dar că B_m ($=0{,}008$ G$=8\cdot10^{-7}$ T) este foarte mic.

Întrebări

1. Care sînt direcţiile curentului de conducţie pentru cablul coaxial din figura 39-1, (a) în centrul conductorului, (b) în conductorul exterior la scurt timp după ce comutatorul este trecut în poziţia *a*? Consideraţi punctele pe care frontul de undă (din figura 39-2 a şi b) le-a atins şi pe care încă nu le-a atins.

2. Comparaţi un cablu coaxial şi un ghid folosite ca linie de transmisie. Scoateţi în evidenţă atît asemănările cît şi deosebirile.

3. Care este relaţia dintre lungimea de undă a undei în cablul coaxial şi în spaţiul liber?

4. Pot fi transmise unde progresive de orice lungime de undă prin (a) cablu coaxial şi (b) prin ghid de undă? Pot fi produse unde staţionare de orice frecvenţă într-o cavitate rezonantă? Argumentaţi răspunsul d-voastră folosind analogii mecanice sau acustice.

5. Dacă o lungime de undă este mai mare ca lungimea de undă de tă-

iere pentru ghid, pentru modul dominant, se poate transmite energie prin ghid folosind un alt mod?

6. Explicaţi de ce este nevoie de termenul $\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ în ecuaţia lui Ampère pentru a înţelege propagarea undelor electromagnetice.

7. Cum se poate că c are totdeauna aceeaşi valoare în ecuaţia $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ [ecuaţia 39-15] dacă μ_0 este dat arbitrar iar ε_0 etste măsurat?

8. Oare este posibil ca la un moment dat teoria electromagnetică să fie în stare să deducă valoarea lui c (3×10^8 m/s), nu în funcţie de μ_0 şi ε_0, ci direct, numeric, fără a recurge la măsurători?

9. Care este direcţia curentului de deplasare în figura 39-4? Argumentaţi răspunsul.

10. Cine transportă energia în cablul coaxial, curenţii din conductori sau cîmpurile din spaţiul dintre conductori?

Probleme

1. Folosind teorema lui Gauss, evaluaţi sarcina instantanee ce apare pe conductorii unui cablu coaxial (figura 39-3) şi arătaţi că această distribuţie de sarcini este legată corect de curenţii de conducţie prezentaţi în figura 39-3 c.

2. Reprezentaţi viteza de fază, viteza de grup şi lungimea de undă în ghid, în funcţie de lungimea de undă în spaţiul liber, pentru un ghid dreptunghiular cu lăţimea de 3,0 cm. Presupuneţi modul dominant.

3. Pentru un ghid de undă de lăţime 3,0 cm care va trebui să fie lungimea de undă în spaţiul liber a radiaţiei pentru ca energia să aibe nevoie de 1,0 μs ($=10^{-6}$ s) pentru a străbate 100 m de ghid? Care va fi viteza de fază în aceste condiţii?

4. În ce condiţii lungimea de undă din ghidul din figura 39-7 va fi dublul lungimii de undă din spaţiul liber?

5. Cum variază în timp şi spaţiu curentul de deplasare într-o undă electromagnetică plană, progresivă?

6. Verificaţi că pentru orice punct dintr-o undă electromagnetică ca cea din figura 39-11, densitatea de energie înmagazinată în cîmp electric este egală cu cea înmagazinată în cîmp magnetic.

7. Se construieşte o cavitate rezonantă punînd la capetele cablului coaxial din figura 39-3 cîte un capac metalic. Cavitatea are lungimea de $3\lambda/2$. Descrieţi configuraţia cîmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ corespunzătoare situaţiei, presupunînd că se realizează acelaşi mod de oscilaţie ca cel din figura 39-3. (Indicaţie: amintiţi-vă că $\vec{E}$ nu poate avea componenta tangenţială la suprafaţa conductorilor şi că $\vec{B}$ şi $\vec{E}$ trebuie să fie defazaţi cu 90°).

8. Dacă cablul coaxial are rezistenţă, energia trebuie să treacă din cîmp în spre conductor pentru a produce căldura Joule. Cum trebuie modificate liniile de forţă electrică din figura 39-3 a în acest caz? (Indicaţie: vectorul Poynting trebuie să aibă, lîngă suprafaţa conductorilor, o componentă înspre conductor).

9. Care va fi lungimea de undă într-un ghid de lărgimea 6,0 cm, a unei radiaţii de 10 cm lungime de undă (în spaţiul liber). Presupuneţi modul dominant. Care este lungimea de undă de tăiere, pentru acest ghid.

10. Schiţaţi alte cinci secvenţe în figura 39-9, care să arate radiaţia unui

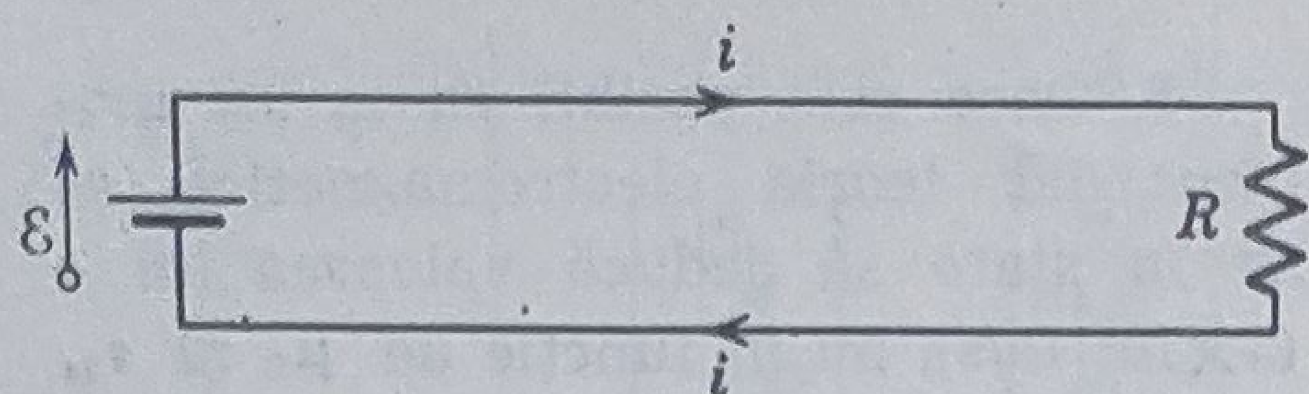


Figura 39-15.

dipol oscilant. Includeţi o indicaţie şi pentru liniile lui $\vec{B}$.

11. În figura 39-15 se vede o linie de transmisie lungă, fără rezistenţă, ce transportă putere de la o baterie la o sarcină rezistivă. Un curent constant i trece prin linie, după cum este indicat. (a) Schiţaţi calitativ cîmpurile electrice şi magnetice în jurul liniei şi (b) arătaţi cu ajutorul vectorului Poynting că energia se propagă de la baterie la rezistor prin spaţiul din jurul liniei şi nu prin linia propriu-zisă. (Indicaţie: fiecare conductor al liniei este o suprafaţă achipotenţială, deoarece linia s-a presupus că nu are rezistenţă).

12. Analizaţi transportul de energie în ghidul de undă din figura 39-7, folosind vectorul Poynting.

13. Un cub de latură a, are laturile paralele cu axele x, y, z ale unui sistem de coordonate rectangular. Un cîmp electric $\vec{E}$ uniform este paralel cu axa y şi un cîmp magnetic $\vec{B}$ este paralel cu axa x. Calculaţi (a) puterea care trece prin fiecare faţă a cubului şi (b) variaţia puterii nete înmagazinate în cub, din punct de vedere a vectorului Poynting.

14. Un conductor de cupru (de 2,5 mm diametru şi de rezistenţă $3{,}28\cdot10^{-4}\ \Omega$ pentru fiecare metru) este străbătut de un curent de 25 A. Calculaţi pe $\vec{E}$, $\vec{B}$ şi $\vec{S}$ pentru un punct de pe suprafaţa conductorului.

15. Lumina Soarelui ajunge cu intensitatea de $1{,}4\cdot10^{3}$ W/m² (−2,0 cal/cm²·min) la limita exterioară a atmosferei Pămîntului. Calculaţi E_m şi B_m pentru lumina solară, presupunînd că este o undă ca cea din figura 39-10.

16. O undă radio plană are $E_m \simeq \simeq 10^{-4}$ V/m. Calculaţi (a) B_m şi (b) intensitatea undei, măsurată prin $\vec{S}$.

17. În figura 39.16 se vede un rezistor cilindric de lungime l, rază a şi rezistivitate ρ, prin care trece un cu-

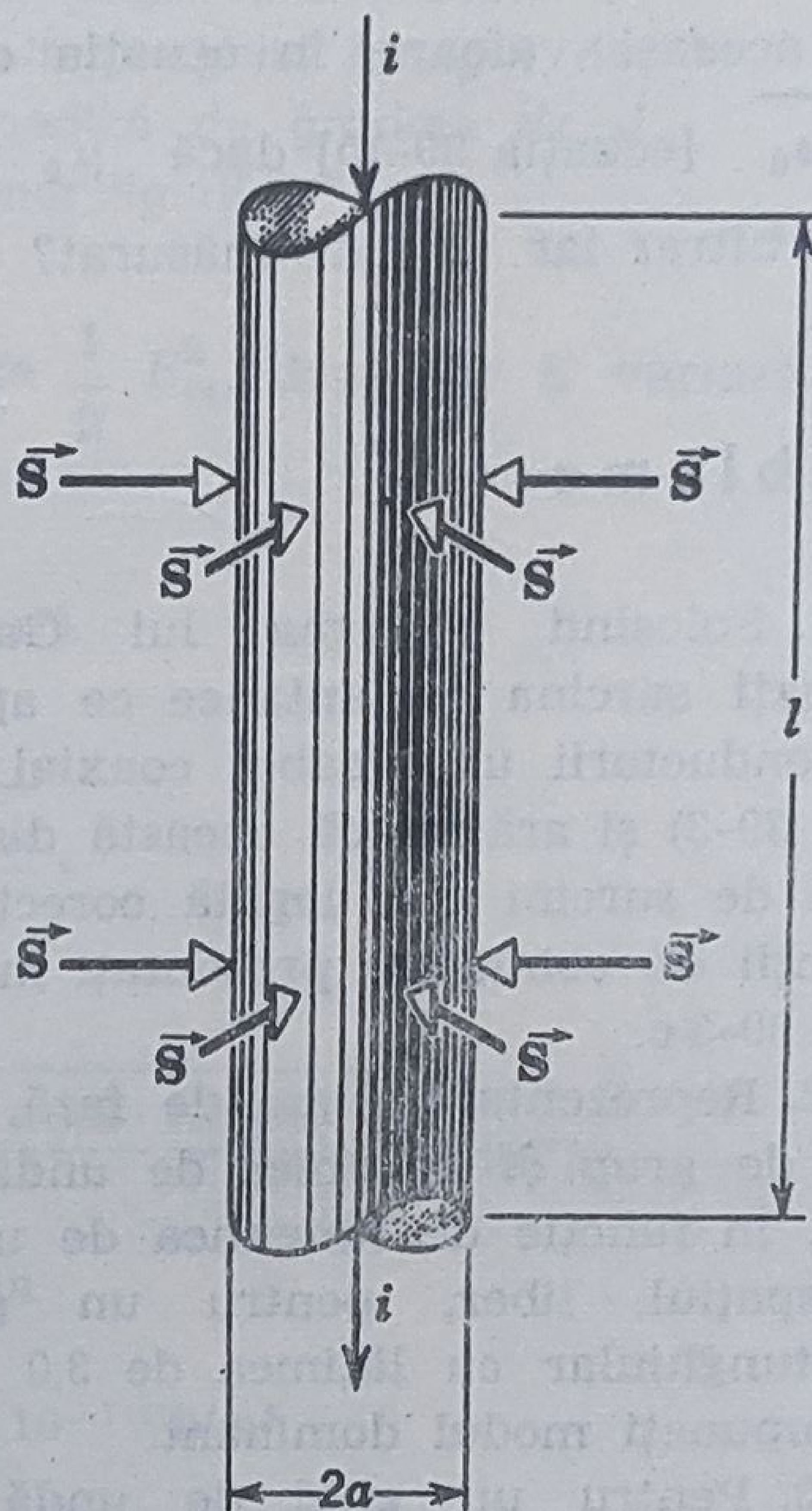


Figura 39-16.

rent i. (a) Arătaţi că vectorul Poynting $\vec{S}$ la suprafaţa rezistorului este peste tot normal la suprafaţă, precum este reprezentat. (b) Arătaţi că puterea P ce intră în rezistor prin suprafaţa ei laterală, calculată prin integrarea vectorului Poynting peste această suprafaţă, este egală cu căldura Joule produsă în unitate de timp, adică

$$-\int \vec{S}\,d\vec{A} = i^2R$$

unde dA este un element de arie de pe suprafaţa laterală. Această relaţie ne arată, din punctul de vedere al vectorului Poynting, că energia ce apa-

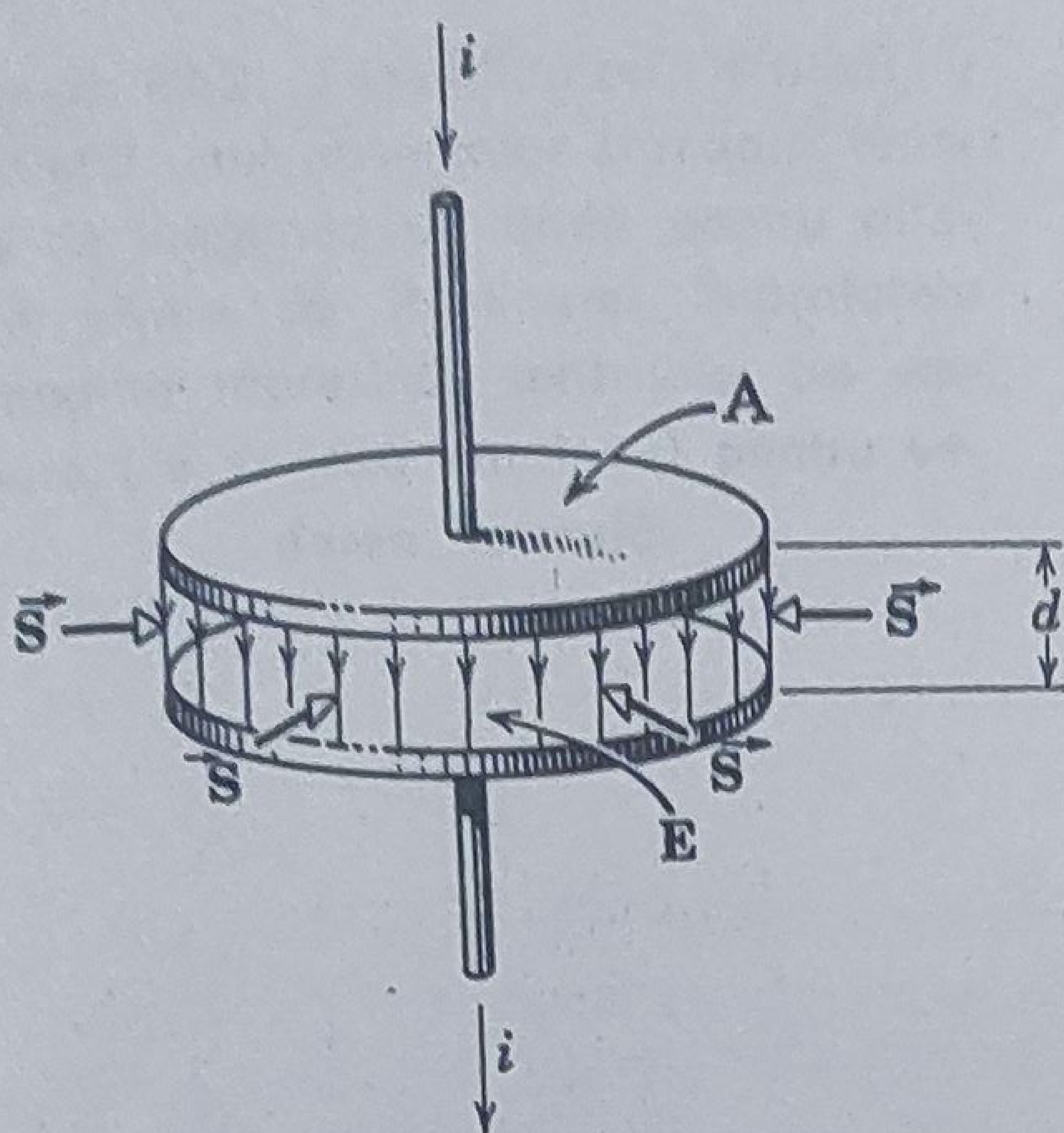


Figura 39-17.

re într-un rezistor sub formă de căldură Joule nu intră în conductor prin firele de legătură ci prin spațiul din jurul conductorilor și a rezistorilor. Observați că $\vec{S}$ și $d\vec{A}$ sînt antiparaleli. (Indicație: $\vec{E}$ este paralel cu axa cilindrului, în sensul curentului; $\vec{B}$ formează cercuri concentrice în jurul cilindrului, cu sensul dat de regula mîinii drepte).

18. Figura 39-17 arată un condensator plan paralel în curs de încărcare. (a) Arătați că vectorul Poynting $\vec{S}$ are peste tot direcție radială în interiorul volumului cilindric. (b) Arătați că energia ce intră în volum în unitate de timp, P, calculată prin integrala vectorului Poynting peste suprafața laterală a acestui volum, este egală cu viteza de creștere a energiei electrostatice înmagazinate, adică că:

$$-\int \vec{S}d\vec{A} = Ad\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$$

unde Ad este volumul condensatorului și $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ este densitatea de energie pentru toate punctele din volum. Această analiză arată că, în conformitate cu imaginea dată de vectorul Poynting, energia înmagazinată în condensator nu intră în ea prin firele de legătură ci prin spațiul din jurul firelor și a plăcilor lui. Indicație: pentru a găsi pe $\vec{S}$, trebuie la început să găsim pe $\vec{B}$, care reprezintă cîmpul magnetic produs de curentul de deplasare în cursul procesului de încărcare; vezi figura 38-9. Neglijați dispersia de la margine a liniilor lui $\vec{E}$).

Capitolul 40

Natura şi propagarea luminii

40-1 Lumina şi spectrul undelor electromagnetice

Maxwell a arătat că lumina face parte din *spectrul undelor electromagnetice* (fig. 40-1). Toate aceste unde sînt de natură electromagnetică şi se propagă cu viteza c în spaţiul liber. Ele diferă doar prin lungimea lor de undă (deci prin frecvenţă), ceea ce înseamnă că modul lor de producere ca şi instrumentele aferente măsurătorilor în domeniul respectiv vor fi foarte diferite, datorită marii întinderi a gamei de frecvenţe*. Spectrul undelor electromagnetice nu are limite superioare şi inferioare. Regiunile indicate în figura 40-1 reprezintă intervalele de frecvenţe care ne sînt accesibile în mod normal prin diferite tehnici de emisie şi detecţie. Toate aceste regiuni se suprapun. De exemplu putem produce radiaţii de 10^{-3} m lungime de undă fie prin tehnici de microunde (osci-

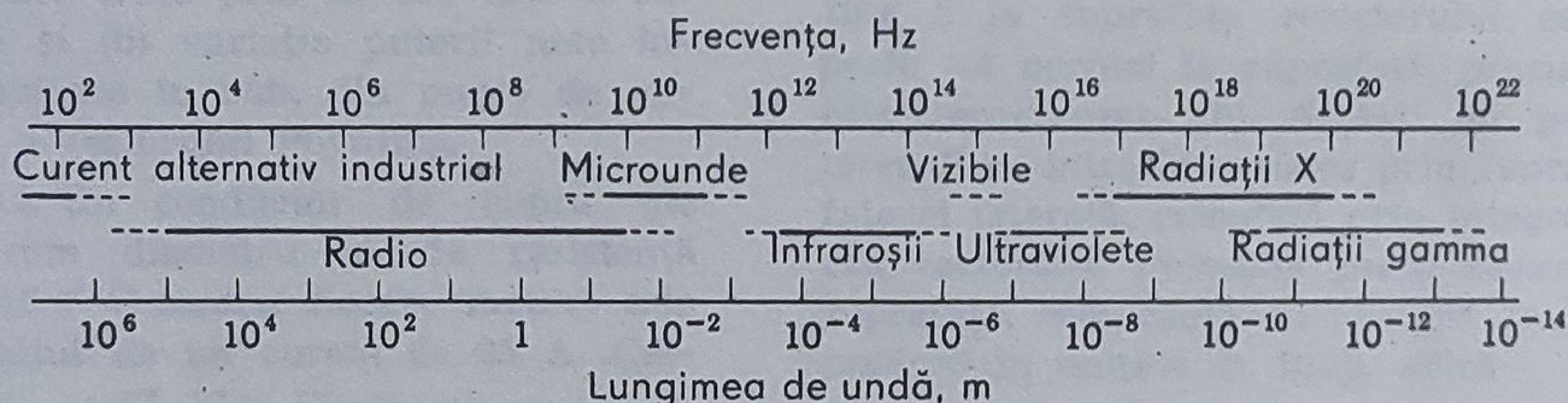
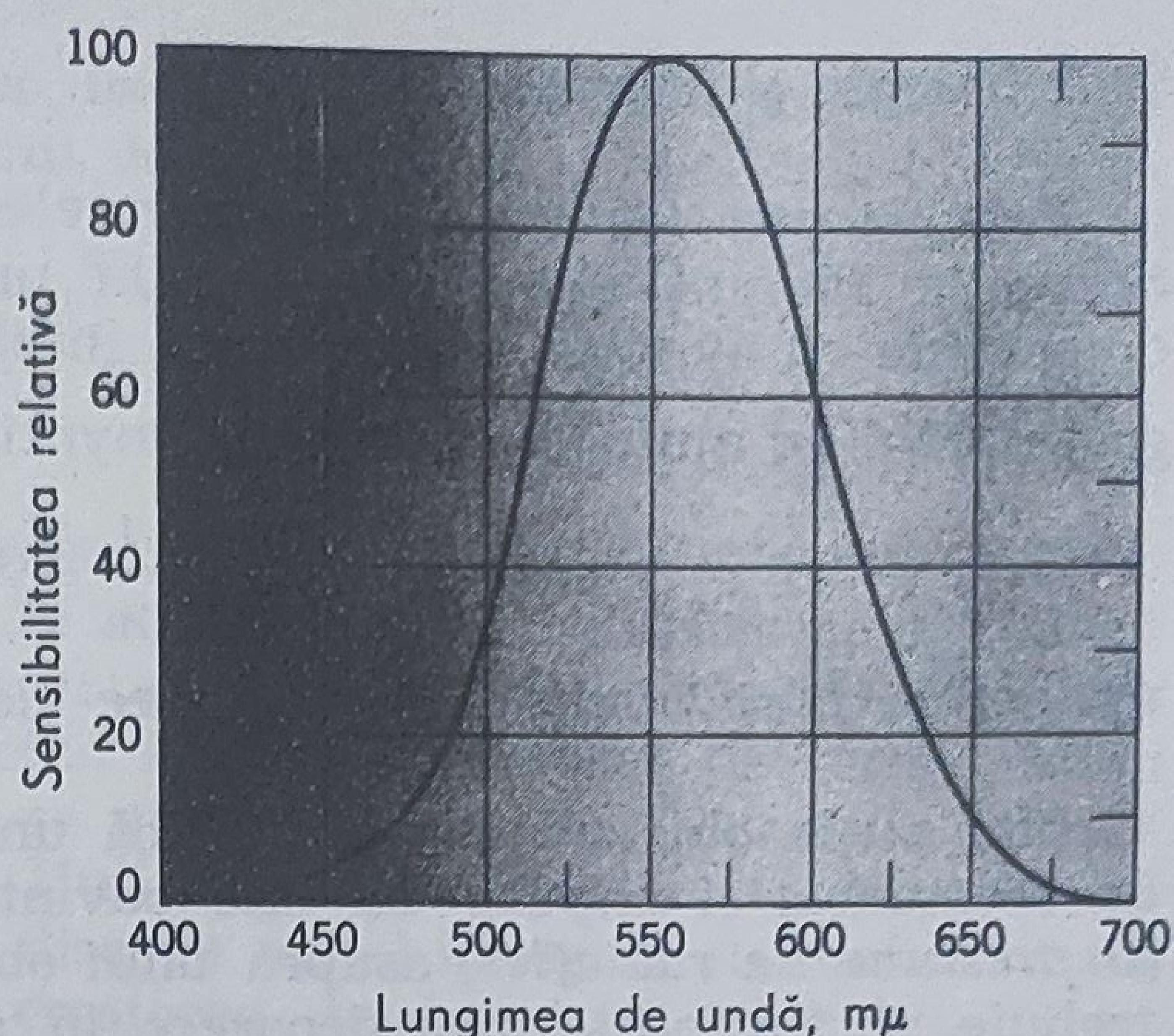


Figura 40-1. Spectrul electromagnetic. Observaţi că pentru reprezentarea lungimilor de undă şi a frecvenţelor s-au folosit scări logaritmice.

* Pentru o trecere în revistă a undelor electromagnetice de lungime foarte mare de undă, de ordinul a $3\cdot10^{10}$ m, studentul poate consulta articolul lui James Heirtzler din „Scientific American", martie 1962.

Figura 40-2. Sensibilitatea relativă a ochiului unui observator standard funcție de lungimea de undă pentru diferite nivele de iluminare. Suprafețele înnegrite reprezintă senzațiile de culoare (ce variază continuu) pentru vederea normală.



latori de microunde) sau prin tehnici de infraroșii (surse cu incandescență).

„Lumina" este definită aici ca radiație care poate fi sesizată cu ajutorul ochiului. Figura 40-2 care ne arată sensibilitatea relativă a ochiului unui *observator standard*, funcție de lungimea de undă, indică că maximul sensibilității se găsește la aproximativ $5{,}55 \cdot 10^{-7}$ m. Lumina cu această lungime de undă produce o senzație luminoasă de galben-verde*.

În optică noi folosim adesea ca unități pentru lungimea de undă, micronul (prescurtat μm), milimicronul (prescurtat mμ) și Ångstromul (prescurtat Å). Ele sînt definite ca

$$1\ \mu m = 10^{-6}\ m$$

$$1\ m\mu = 1\ nm = 10^{-9}\ m$$

$$1\ Å = 10^{-10}\ m$$

Astfel centrul regiunii vizibile se află la 0,555 μm, 555 mμ (=555 nm) sau 5 550 Å.

Limitele spectrului vizibil nu sînt bine definite deoarece curba de sensibilitate a ochiului se apropie asimptotic de ordonată atît pentru lungimi mari de undă cît și pentru lungimi mici. Dacă alegem în mod arbitrar, limitele astfel încît sensibilitatea ochiului să scadă la 1%, din valoarea ei maximă, atunci limitele respective sînt 4 300 Å și 6 900 Å (430—690 nm), o variație de mai puțin de două ori în lungimi de undă. Ochiul poate detecta radiațiile din acest domeniu, evident dacă este suficient de intensă. În multe experiențe de fizică, putem folosi în locul ochiului omenesc, plăci fotografice sau detectori electronici sensibili la lumină.

---

* Vezi: „Experiența asupra vederii în culori" de Edwin H. Land, *Scientific American*, mai, 1959, și în special „Culoare și percepție: cercetările lui Edwin Land în lumina concepțiilor actuale" de M. H. Wilson și R. W. Brocklebank, *Contemporary Physics*, decembrie 1961; o discuție fascinantă asupra problemelor percepției și distincției dintre culoare ca o caracteristică a luminii și culoare ca proprietate a ochiului de a percepe obiectele.

40-2 Energia şi impulsul

Energia este transmisă de unda electromagnetică de exemplu de la Soare la Pămînt sau de la foc la un loc din apropiere. Transportul de energie cu ajutorul acestor unde în spaţiul liber a fost descris în paragraful 39-6 cu ajutorul vectorului Poynting $\vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \qquad (40\text{-}1)$$

unde $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sînt valorile instantanee ale vectorilor cîmp electric şi magnetic.

Mai puţin obişnuit este faptul că undele electromagnetice transportă, de asemenea, şi impuls. Cu alte cuvinte ele pot să exercite o presiune (*o presiune de radiaţie**) asupra unui obiect iluminat de el. Aceste forţe trebuie să fie foarte mici deoarece în mod obişnuit nu le simţim prezenţa. Primele măsurători asupra presiunii de radiaţie au fost făcute între 1901—1903 de către Nichols şi Hull în S.U.A. şi de către Lebedev în Rusia, după aproximativ 30 de ani de la prezicerea teoretică a acestui efect de către Maxwell.

Să lăsăm un fascicul paralel de lumină să cadă pe un obiect, pentru un interval de timp t, lumina incidentă fiind *absorbită în întregime* de către obiect. Dacă în acest timp se absoarbe energia U, impulsul p transmis obiectului va fi dată conform rezultatului lui Maxwell,

$$p = \frac{U}{c} \quad \text{(absorbţie totală)} \qquad (40\text{-}2\,a)$$

unde c este viteza luminii. Direcţia lui p este direcţia fasciculului incident. Dacă energia luminii U este *reflectată în întregime*, impulsul transferat va fi de două ori mai mare

$$p = 2\,\frac{U}{c} \quad \text{(reflexie totală).} \qquad (40\text{-}2\,b)$$

În acelaşi mod, impulsul transferat de o minge de tenis perfect elastică unui obiect este de două ori mai mare decît în cazul cînd mingea ar fi perfect inelastică de aceeaşi masă, şi s-ar mişca cu aceeaşi viteză. Dacă energia luminii U este parţial reflectată şi parţial absorbită, impulsul transferat va fi o valoare între U/c şi $2\,U/c$.

Exemplul 1. Un fascicul paralel de lumină cu un flux de energie S de 10 W/cm² cade timp de 1 oră pe o oglindă plană perfect reflectătoare de arie 1,0 cm². (a) Care va fi impulsul cedat oglindii în tot acest timp, (b) care va fi forţa ce acţionează asupra oglinzii?

(a) Energia reflectată de oglindă este

$$U = (10\ \text{W/cm}^2)\cdot(1{,}0\ \text{cm}^2)\,(3\,600\ \text{s}) = 3{,}6 \times 10^4\ \text{J}.$$

Impulsul cedat după o oră de iluminare este

$$p = \frac{2U}{c} = \frac{(2)(3{,}6\cdot 10^4\text{J})}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}} = 2{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

* Vezi: G. E. Henry, „Presiunea de radiaţie", *Scientific American*, p. 99, iunie 1957.

(b) Din legea a doua a lui Newton, forța medie asupra oglinzii este egală cu impulsul în unitate de timp cedat oglinzii, deci

$$F=\frac{p}{t}=\frac{2{,}4\times10^{-4}\ \text{kg m/s}}{3\,600\ \text{s}}=6{,}7\times10^{-8}\ \text{N}$$

Aceasta este o forță foarte mică.

Nichols și Hull în 1903, au măsurat și verificat ecuația (40-2) folosind metoda balanței de torsiune. Ei au lăsat să cadă lumina pe oglinda O (fig. 40-3); presiune de radiație a determinat rotația balanței de torsiune cu un unghi θ măsurabil, producînd torsionarea firului de suspensie F. Calibrînd inițial firul de torsiune se puteau obține date numerite relativ la presiunea luminii. Nichols și Hull au măsurat intensitatea radiației incidente făcînd-o să cadă pe un disc de metal înnegrit, cu coeficient de absorbție cunoscut și măsurînd creșterea temperaturii discului. Spre exemplu ei au obținut într-un set de măsurători valoarea $7{,}01\cdot10^{-6}$ N/m² în foarte bună concordanță cu valoarea care ar fi trebuit să se obțină pentru fasciculul folosit și calculat din ecuația 40-2, adică $7{,}05\cdot10^{-6}$ N/m².

Presupunînd o oglindă cu arie de 1 cm², aceasta reprezintă o forță doar de $7\cdot10^{-10}$ N, cam de 100 de ori mai mică ca cea calculată în exemplul 1.

Succesul experienței lui Nichols și Hull a fost legat în mare parte de modul în care au reușit ei să elimine diferitele efecte întîmplătoare care puteau determina o deflexie cum ar fi cea determinată de modificarea distribuției de viteze a moleculelor în gazul din preajma oglinzii. Aceste modificări apar datorită creșterii cu puțin a temperaturii oglinzii datorită absorbției de energie luminoasă din fasciculul incident. Acest „efect radiometric" este cel ce determină mișcarea de rotație a radiometrelor de jucărie cînd sînt expuse unui fascicul de lumină. În vid perfect astfel de efecte nu apar, dar în vidul cel mai bun realizat în 1903 aceste efecte erau prezente și deci trebuiau luate în considerație în mod explicit pentru efectuarea experienței.

Pentru a demonstra transportul de impuls din ecuațiile lui Maxwell pentru un caz particular să considerăm o undă electromagnetică plană ce se propagă în direcția axei z și cade pe o foaie dintr-un material de mare rezistivitate electrică (fig. 40-4). O mică parte din energia incidentă va fi absorbită de către foaie iar majoritatea ei va trece prin ea dacă foaia este suficient de subțire*.

Unda incidentă $\vec{E}$ și $\vec{B}$ variază în timp în locul în care se află foaia astfel

$$\vec{E}=\vec{E}_m\sin\omega t \tag{40-3}$$

și

$$\vec{B}=\vec{B}_m\sin\omega t \tag{40-4}$$

unde $\vec{E}$ este paralel cu axa $\pm y$ iar $\vec{B}$ este paralel cu axa $\pm x$.

---

* O parte din energia incidentă va fi de asemenea reflectat, dar unda reflectată este atît de puțin intensă încît ea poate fi neglijată în deducerea ce urmează; vezi: „Optica" de B. Rossi, Addison-Wesley Publishing Company, p. 411, 1957, de unde este extrasă și adaptată această demonstrație.

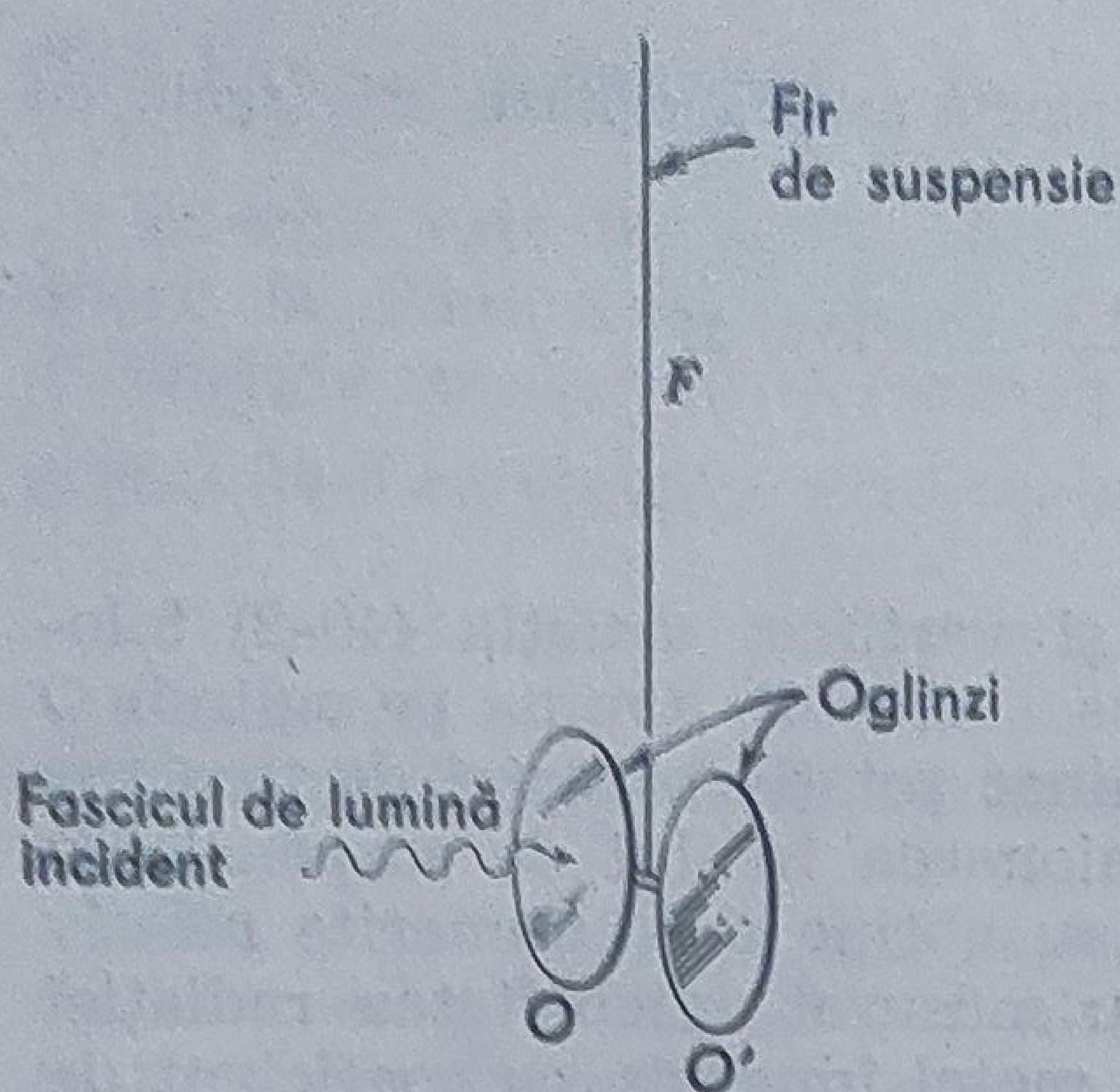


Figura 40-3

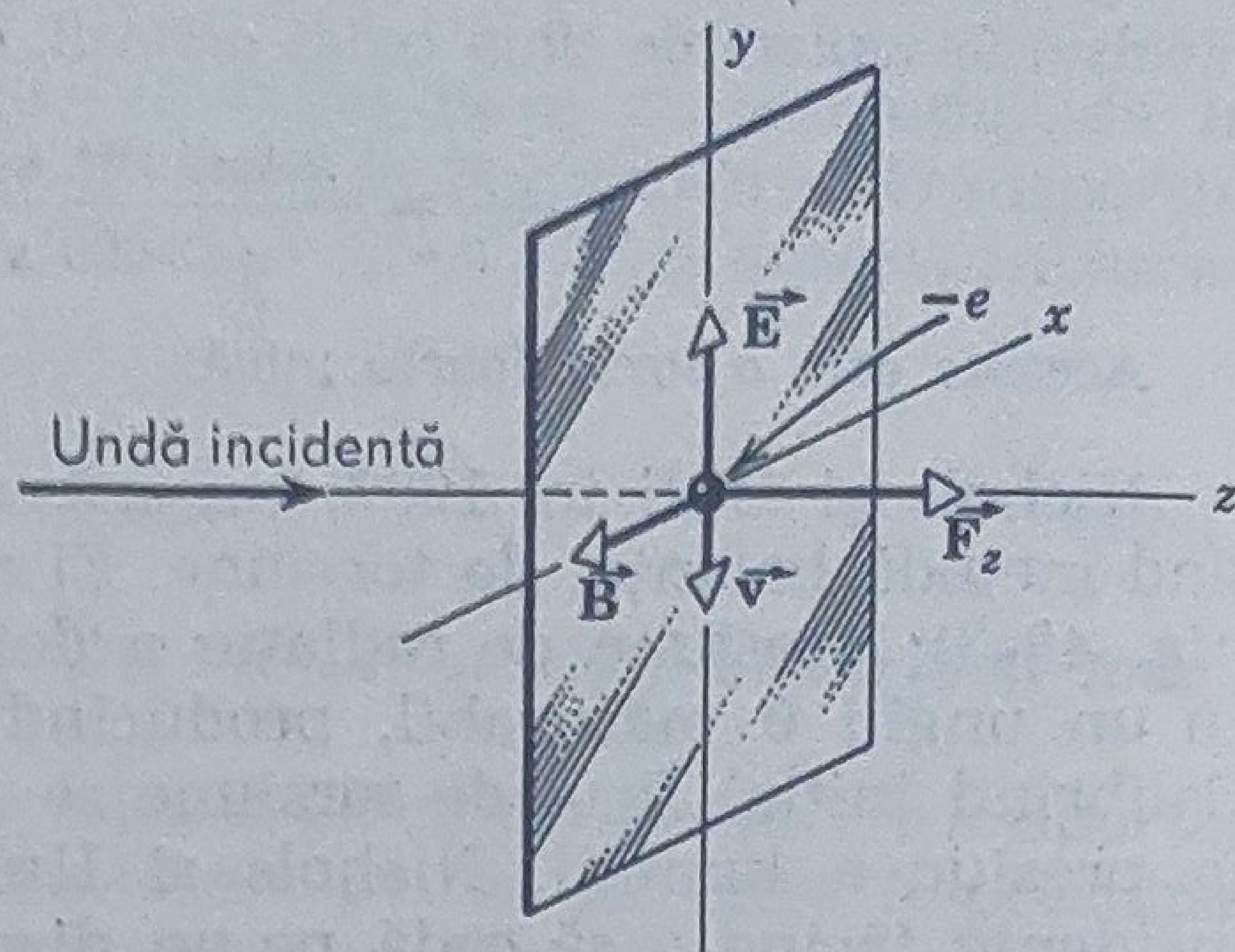


Figura 40-4. O undă de lumină plană incidentă, cade pe un electron dintr-o foaie subțire rezistivă. Sînt arătate valorile instantanee ale lui $\vec{E}$, $\vec{B}$, ale vitezei electronului $\vec{v}$ și ale forței $\vec{F}_z$.

În paragraful 31-4 am văzut că efectul unei forțe (constante) electrice ($=-eE$) asupra unui electron de conducție dintr-un metal este de a-l face să se miște cu o viteză de transport v_t (constantă). Electronul se comportă ca și cum ar fi imersat într-un fluid vîscos, forța electrică care acționează asupra lui fiind echilibrată de o forță „vîscoasă", care poate fi luată proporțională cu viteza electronului. Astfel pentru un cîmp E constant, după ce echilibrul s-a stabilit avem

$$eE=bv_t, \qquad (40\text{-}5)$$

unde b este un coeficient de amortizare rezistiv. Viteza de echilibru a electronului, lăsînd la o parte indicele t, este

$$v=\frac{eE}{b}. \qquad (40\text{-}6)$$

Dacă cîmpul electric aplicat variază în timp și dacă variația este suficient de lentă, electronul are posibilitatea să-și modifice continuu viteza în conformitate cu valoarea variabilă E, astfel că viteza poate fi determinată în continuare din expresia ei de echilibru (ecuația (40-6)) în orice moment. Această modificare a vitezei se va efectua într-un timp cu atît mai scurt cu cît mediul este mai vîscos, la fel ca în cazul căderii unei pietre: în aer atinge relativ lent viteza de echilibru, dar la mişcarea într-un ulei vîscos această viteză este atinsă rapid. Presupunem că foaia din figura 40-4 este atît de vîscoasă, adică rezistența ei este atît de mare, încît ecuația (40-6) rămîne valabilă chiar și pentru oscilațiile rapide ale lui E din unda de lumină incidentă.

Deoarece electronul vibrează paralel cu axa y, ea suferă și influența unei *a doua* forțe determinată de componenta *magnetică* a undei. Această forță

$\vec{F}_z$ $(=-e\vec{v}\times\vec{B})$ este pe direcţia z, perpendiculară pe planul format de $\vec{v}$ şi $\vec{B}$, adică planul xy. Valoarea instantanee a mărimii forţei $\vec{F}_z$ este

$$F_z = evB = \frac{e^2EB}{b}. \tag{40-7}$$

F_z este totdeauna în sensul pozitiv al axei z deoarece v şi B îşi schimbă sensurile lor, simultan; această forţă reprezintă de fapt mecanismul prin care presiunea radiaţiei acţionează asupra foii din figura 40-4.

Din legea a doua a lui Newton, F_z este egal cu dp_e/dt, adică cu mărimea impulsului transferat de undă fiecărui electron în unitate de timp, adică

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{e^2EB}{b} \tag{40-8}$$

Deoarece acest transfer are loc pentru fiecare electron, ea va avea deci loc şi pentru foaia întreagă. Rămîne doar să exprimăm impulsul transferat foii de energia absorbită în foaie.

Componenta electrică a undei incidente acţionează asupra fiecărui electron oscilant astfel încît energia cedată în unitate de timp să fie

$$\frac{dU_e}{dt} = F_E v = (eE)\left(\frac{eE}{b}\right) = \frac{e^2E^2}{b}.$$

Observaţi că forţa magnetică F_z, fiind totdeauna perpendiculară pe viteza v, nu efectuează nici un lucru mecanic asupra electronului oscilant. Ecuaţia 39-11 b ne arată că legătura între E şi B într-o undă plană este

$$E = Bc.$$

Înlocuind *un* E din relaţia anterioară, obţinem

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{e^2EBc}{b}. \tag{40-9}$$

Această relaţie ne arată energia absorbită în unitate de timp de fiecare electron, de la unda incidentă.

Comparînd ecuaţia (40-8) cu ecuaţia (40-9) avem că

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dU_e}{dt}.$$

Integrînd obţinem

$$\int_0^t \frac{dp_e}{dt}\,dt = \frac{1}{c}\int_0^t \frac{dU_e}{dt}\,dt,$$

sau

$$p_e = \frac{U_e}{c} \tag{40-10}$$

unde p_e este impulsul pe care-l primeşte un electron într-un timp t dat, iar U_e este energia absorbită de acest electron în acest interval de timp. Înmulţind fiecare membru al egalităţii cu numărul de electroni liberi din foaie obţinem ecuaţia 40-2, *a*.

Cu toate că am dedus această relație (ecuația (40-10)) pentru un caz particular de absorbant, în relația finală nu apare nici o caracteristică a lui — cum ar fi de exemplu coeficientul de amortizare rezistiv *b*. Așa și trebuia să rezulte deoarece ecuația 40-10 este o proprietate generală a radiației absorbite de *orice* material.

40-3 Viteza luminii*

Lumina se propagă cu o viteză atît de mare încît nici un fapt experimental din viața de toate zilele nu ne indică că viteza ei nu este infinită. Chiar întrebarea: „cît de repede se propagă lumina?" cere o considerabilă intuiție. Galilei și-a pus această întrebare și a încercat să răspundă la ea experimental. Opera lui capitală „Dialogo dei massimi sistemi del mondo" publicată în 1638 în Olanda** este scrisă sub forma unei conversații între trei persoane fictive numite Salviati, Sagredo și Simplicio. Iată aci o mică porțiune în care se discută despre viteza luminii:

Simplicio: Experiența de toate zilele ne arată că lumina se propagă instantaneu; cînd vedem o salvă de artilerie, la distanță mare, lumina ajunge la ochii noștri fără a pierde nici un timp; dar sunetul ajunge la urechile noastre cu o întîrziere simțitoare.

Sagredo: Bine, Simplicio, dar unicul lucru pe care eu pot să-l afirm din această experiență familiară este că sunetul ce ajunge la urechea noastră merge mult mai încet decît lumina; ea nu ne spune în nici un fel dacă lumina se propagă instantaneu sau dacă ea necesită totuși un timp cu toate că ea se propagă extrem de rapid..."

Sagredo, care evident îl reprezintă pe Galilei, descrie în continuare o metodă posibilă pentru măsurare a vitezei luminii. El și un asistent stau față în față la o oarecare distanță, în noapte. Fiecare are un felinar care poate fi acoperit sau descoperit după voie. Galilei pornește experiența descoperind felinarul lui. Cînd lumina a ajuns la asistentul său, el va descoperi felinarul lui, lumina căruia va fi apoi văzută de către Galilei. Galilei a încercat să măsoare intervalul de timp dintre momentele cînd el a descoperit felinarul și cel în care lumina felinarului asistentului lui a ajuns la el. Noi știm acum că pentru o distanță de 1 km între cei doi, lumina va efectua un dus și întors într-un interval de timp doar de $3{,}3 \cdot 10^{-6}$ s. Acest interval de timp este mult mai scurt decît cel al timpului de reacție uman, astfel că metoda cade.

Pentru a măsura o viteză foarte mare, direct, trebuie fie să măsurăm intervale de timp foarte scurte, fie să folosim o distanță mare de măsură. Acest lucru ne sugerează că astronomia, care este legată de distanțe foarte mari, ne va putea furniza o valoare experimentală pentru viteza luminii; acest lucru s-a adeverit. Cu toate că ar fi bine să măsurăm timpul necesar luminii Soarelui să ajungă pe Pămînt, nu avem din păcate nici o metodă să știm cînd anume lumina care a

---

* Vezi: J. H. Push, „Viteza luminii", Scientific American, p. 67, august 1955.

** „Dialog despre cele două sisteme principale ale lumii" apărut pentru prima dată în 1632 la Florentza. Este tradusă în limba română sub același titlu în Editura științifică, 1962. (N. T.).

ajuns la noi a părăsit Soarele; astfel că trebuie să folosim metode astronomice mai subtile.

De notat, că pulsuri de microunde sînt deseori folosite pentru a fi reflectate de Lună; aceasta ne dă o distanţă de măsură de $7{,}68 \cdot 10^8$ m (dus şi întors) ca bază de timp. Viteza luminii (şi a microundelor) este acum atît de bine cunoscută din alte experienţe încît aceste măsurători sînt în prezent folosite pentru a măsura distanţa pînă la Lună cu o precizie foarte mare. Au fost recepţionate semnale de microunde reflectate de Venus*.

În 1675 Ole Roemer, astronom danez ce lucra la Paris a făcut o serie de observaţii asupra sateliţilor lui Jupiter (vezi problema 9) din care a dedus că viteza luminii este de $2 \cdot 10^8$ m/s. După aproximativ 50 de ani James Bradley, un astronom englez, a făcut observaţii astronomice de cu totul altă natură din care a obţinut valoarea de $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

În 1849 Hippolyte Louis Fizeau (1819—1896), un fizician francez, a măsurat pentru prima dată viteza luminii pe o cale neastronomică obţinînd valoarea de $3{,}13 \cdot 10^8$ m/s. În figura 40-5 se poate vedea dispozitivul folosit de către Fizeau. Să nu luăm în seamă, pentru început, roata dinţată. Cu ajutorul unei lentile convergente L_1, lumina provenită de la o sursă S este strînsă şi trimeasă pe oglinda O_1 care o reflectă şi va face ca în F să avem imaginea sursei. Oglinda O_1 este o aşa-numită oglindă „semiargintată"; stratul reflector al ei este atît de subţire încît numai jumătate din lumina incidentă este reflectată, cealaltă jumătate fiind transmisă.

Lentila L_2 este plasată astfel ca imaginea din F să dea un fascicul paralel de lumină; după ce trece prin lentila L_3, este reflectată îndărăt pe direcţia iniţială de oglinda O_2.

În experienţa lui Fizeau distanţa l dintre O_2 şi F a fost de 8 630 m. Cînd lumina întîlneşte din nou oglinda O_1, o parte va fi transmisă intrînd în ochiul observatorului prin lentila L_4.

Observatorul va vedea imaginea sursei S după ce lumina a făcut drumul $2l$, dus şi întors. Pentru a determina timpul necesar luminii să parcurgă această distanţă trebuie să o marcăm într-un fel. Acest lucru se efectuează prin întreruperea fasciculului de lumină cu ajutorul unei

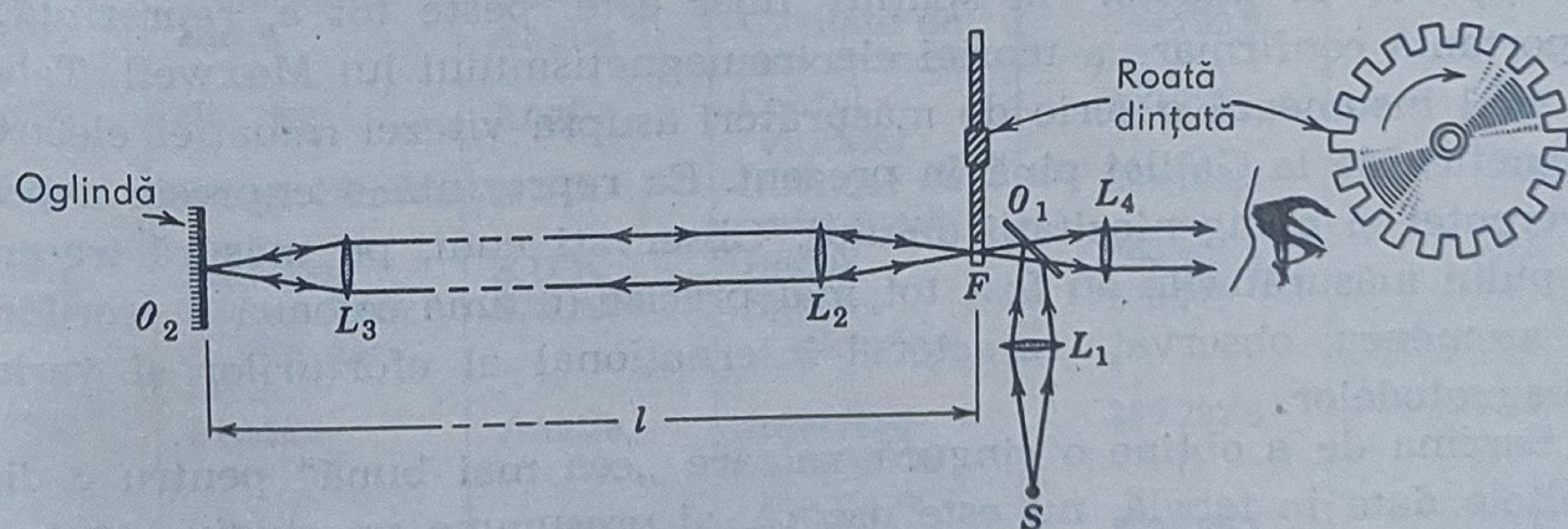


Figura 40-5. Aparatul lui Fizeau pentru măsurarea vitezei luminii.

* Pînă în prezent au fost „radiolocate" cu fascicule de microunde şi laser aproape toate planetele sistemului solar cît şi sateliţii şi staţiile interplanetare construite de om. (N.T.).

roţi dinţate. Să presupunem că în timpul $2l/c$ necesar luminii să parcurgă întregul traseu $2l$, roata s-a rotit doar atît cît este necesar ca trenul de undă care a scăpat printre doi dinţi ai roţii să ajungă în F astfel ca să fie obturat de un dinte. Lumina va fi obturată de dintele roţii şi nu va ajunge la ochiul observatorului.

Dacă viteza de rotaţie a roţii este cea corespunzătoare, observatorul nu va mai vedea licăririle luminii întrerupte de roată deoarece vor fi obturate. Observatorul, pentru a-l determina pe c, va creşte treptat viteza unghiulară ω a roţii pînă ce imaginea sursei S dispare. Fie θ unghiul dintre o adîncitură şi un dinte al roţii. Timpul de rotaţie necesar pentru roată să facă unghiul θ este $2\ l/c$. Sau algebric

$$\frac{\theta}{\omega}=\frac{2l}{c} \quad \text{şi} \quad c=\frac{2\omega l}{\theta}. \tag{40-11}$$

Această metodă a fasciculului modulat, modificat în mod corespunzător este folosit în prezent pentru măsurarea vitezei neutronilor şi a altor particule.

Exemplul 2. Roata folosită de Fizeau avea 720 dinţi. Care este viteza unghiulară minimă pentru ca imaginea să dispară?

Unghiul θ este 1/1 440 din 2π; rezolvînd ecuaţia (40-11) în raport cu ω dă

$$\omega=\frac{c\theta}{2l}=\frac{(3{,}00\cdot10^{8}\,\text{m/s})(1/1\,440\ \text{rot})}{(2)(8\,630\text{m})}=12{,}1\ \text{rot/s}.$$

Fizicianul francez Foucault (1819—1868) a îmbunătăţit simţitor metoda lui Fizeau, înlocuind roata dinţată cu o oglindă rotitoare. Fizicianul american Albert A. Michelson (1852—1931) a efectuat o serie întreagă de măsurători pentru determinarea lui c folosind această metodă şi care s-au întins pe o perioadă de peste 15 ani.

Noi trebuie să privim problema vitezei luminii într-un context mai larg şi anume acela al radiaţiei electromagnetice în general. Faptul că vitezele determinate experimental pentru orice regiune a spectrului electromagnetic al undelor în spaţiul liber este peste tot c, reprezintă o importantă confirmare a teoriei electromagnetismului lui Maxwell. Tabelul 40-1 însumează o serie de măsurători asupra vitezei radiaţiei electromagnetice de la Galilei pînă în prezent. Ea reprezintă o expresie a perseverenţei şi a ingeniozităţii omului. Observaţi cum, pe măsură trecerii timpului măsurătorile au fost tot mai precise (ultima coloană a erorilor). De asemenea, observaţi caracterul internaţional al eforturilor şi varietatea metodelor.

Sarcina de a obţine o singură valoare „cea mai bună" pentru c din multele date în tabelă, nu este uşoară, şi presupune un studiu atent al fiecărei măsurători şi o selecţie a lor pe baza erorilor date, precum şi un atent studiu al eventualelor erori neluate în consideraţie. În final, făcînd media, valorile cu cea mai mică eroare vor trebui să fie luate cu o pondere mai mare ca cele cu o eroare mai mare. Printr-o analiză atentă

Tabela 40.1

VITEZA RADIAȚIEI ELECTROMAGNETICE ÎN SPAȚIUL LIBER (CÎTEVA DINTRE MĂSURĂTORI)

Data	Experimentatorul	Țara	Metoda	Viteza km/s	Eroarea km/s
1600(?)	Galileo	Italia	Lanterne și paravane	„Dacă nu este instantanee, este oricum foarte rapidă".	
1675	Roemer	Franța	Astronomică	200 000	
1729	Bradley	Anglia	Astronomică	304 000	
1849	Fizeau	Franța	Roata dințată	313 300	
1862	Foucault	Franța	Oglinda rotitoare	298 000	500
1876	Cornu	Franța	Oglinda rotitoare	299 990	200
1880	Michelson	S.U.A.	Roata dințată	299 910	50
1883	Newcomb	Anglia	Oglinda rotitoare	299 860	30
1883	Michelson	S.U.A.	Oglinda rotitoare	299 853	60
1906	Rosa și Dorey	S.U.A.	Teoria electromagnetică	299 781	10
1923	Mercier	Franța	Unde staționare în cabluri	299 782	15
1926	Michelson	S.U.A.	Oglinda rotitoare	299 796	6
1928	Karolus și Mittelstaedt	Germania	Celulă Kerr	299 778	10
1932	Michelson Pease și Pearson	S.U.A.	Oglinda rotitoare	299 774	11
1940	Huettel	Germania	Celulă Kerr	299 768	10
1941	Anderson	S.U.A.	Celulă Kerr	299 776	14
1950	Bergstrand	Suedia	Geodimetru	299 792,7	0,25
1950	Essen	Anglia	Cavitate de microunde	299 792,5	3
1950	Houston	Anglia	Cristal vibrator	299 775	9
1950	Bol și Hansen	S.U.A.	Cavitate de microunde	299 789,3	0,4
1951	Aslakson	S.U.A.	Radar	299 794,2	1,9
1952	Rank, Ruth și Ven der Sluis	S.U.A.	Spectre moleculare	299 776	7
1952	Froome	Anglia	Interferometru de microunde	299 792,6	0,7
1954	Florman	S.U.A.	Radio interferometru	299 795,1	3,1
1954	Rank, Shearer și Wiggins	S.U.A.	Spectre moleculare	299 789,8	3,0
1956	Edge	Suedia	Geodimetru	299 792,9	0,2

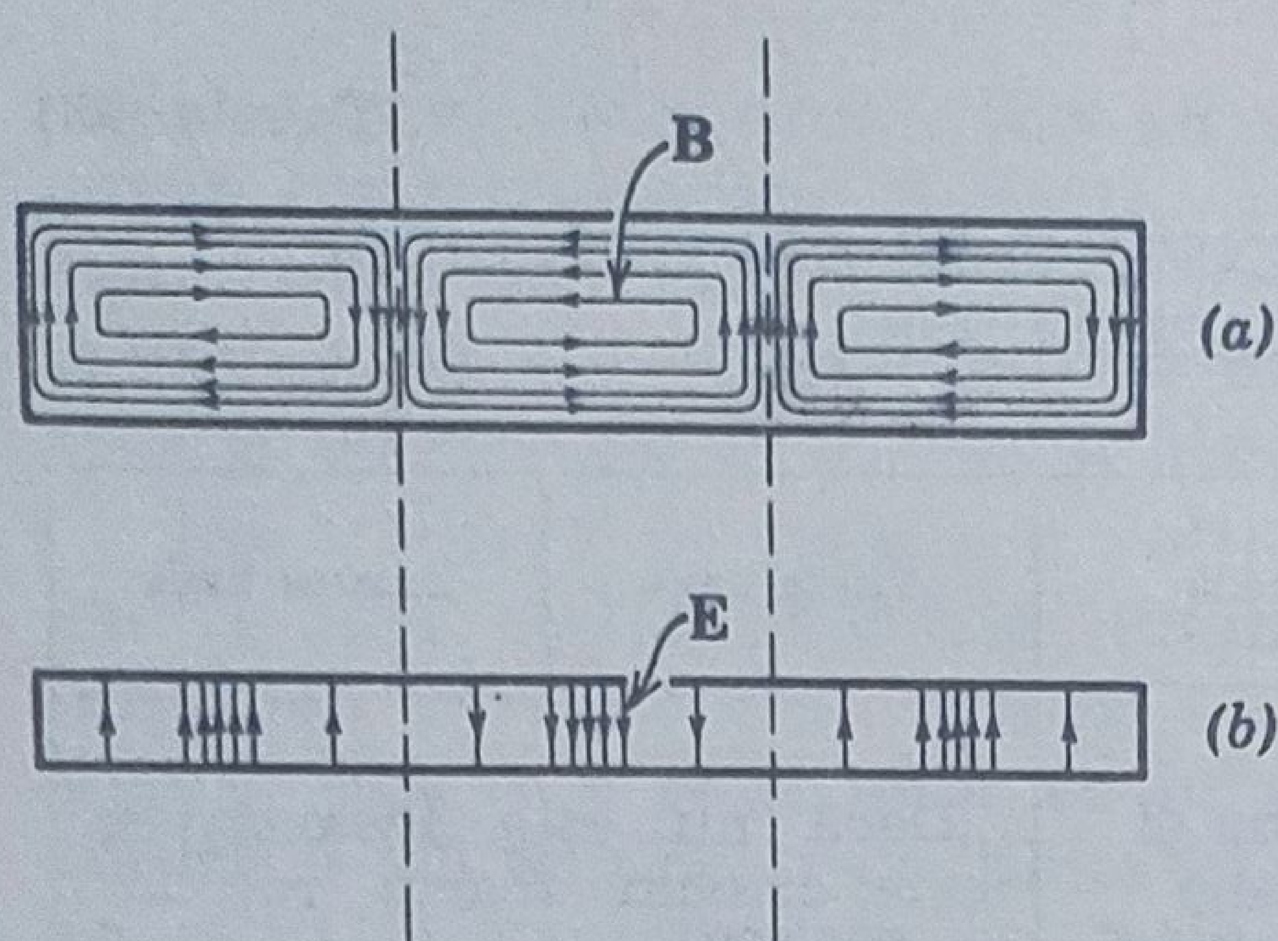


Figura 40-6. O cavitate rezonantă construită dintr-o porţiune de ghid de undă; comparaţi cu figura 39-7. Pentru simplitate în (a) nu sînt arătate liniile lui $\vec{E}$, iar în (b) liniile lui $\vec{B}$.

de acest fel a măsurătorilor, „cea mai bună" valoare considerată în 1964 este*

$$c=2{,}997925\times10^8 \text{ m/s}$$

Eroarea valorii este mai mică ca $0{,}000003\times10^8$ m/s, sau 0,0001%.

Aproximativ după 1940, aproape toate măsurătorile precise asupra lui c au fost efectuate în regiunea undelor scurte sau de microunde a spectrului electromagnetic. Vom descrie în continuare „metoda cavităţii de microunde" folosită de către Essen în Anglia şi de către Bol şi Hansen în S.U.A. Ea foloseşte unde electromagnetice staţionare în cavităţi şi nu unde progresive în spaţiul liber.

Este posibil să transformăm o porţiune de ghid de undă, ca cea din figura 39-7 într-o cavitate rezonantă, închizînd-o cu două capace metalice; vezi figura 40-6. Configuraţia oscilaţiilor în cavitate este asemănătoare cu cea din ghid şi posedă aceeaşi „lungime de undă în ghid" λ_g. Lungimea de undă în ghid este legată de lungimea cavităţii l prin

$$\lambda_g=\frac{2l}{n}, \quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{40-12}$$

relaţie folosită şi în cazul undelor acustice în tuburi închise; n (=3 pentru figura 40-6) ne dă numărul de jumătăţi de lungimi de undă conţinute în cavitate. Procedeul constă în a măsura pe λ_g în astfel de cavităţi aduse la rezonanţă şi apoi folosind ecuaţia 39-4

$$\lambda_g=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \tag{40-13}$$

să calculăm pe λ în spaţiul liber. Din valoarea măsurată a frecvenţei de rezonanţă, viteza c se calculează folosind relaţia $c=\lambda\nu$.

Exemplul 3. În Anglia, Essen de la Laboratorul Naţional de Fizică, a efectuat măsurători ale vitezei undelor electromagnetice prin metoda cavităţii rezonante. Cavitatea folosită de el era făcută dintr-un ghid circular şi nu dreptunghiular; se poate arăta că pentru cavitatea folosită de el distribuţia oscilaţiilor poate fi dată de aceeaşi ecuaţia (40-13) în care însă factorul geometric $2a$ tre-

* Cea mai bună valoare considerată în 1971 este $c=(2{,}997924562\pm0{,}000000011)\cdot10^8$ m/s. (N.T.).

buie înlocuit cu 1,64062 R, unde R este raza ghidului. Raza ghidului era de 3,25876 cm; lungimea cavității era de 15,64574 cm și avea rezonanța la $9,498300 \times 10^9$ Hz. La rezonanță s-au măsurat opt jumătăți de lungimi de undă în cavitate. Care este valoarea lui c?

Din ecuația 40-12, calculînd doar aproximativ

$$\lambda_g = \frac{2l}{n} = \frac{(2)(15,6 \text{ cm})}{8} = 3,90 \text{ cm}.$$

Introducînd în ecuația (40-13), modificată corespunzător pentru un ghid circular avem

$$3,90 \text{ cm} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{(1,64)(3,26 \text{cm})}\right)^2}}.$$

Rezolvînd ecuația în raport cu λ obținem $\lambda = 3,15$ cm. În final obținem

$$c = \lambda \nu = (3,15 \text{ cm})(9,50 \times 10^9 \text{ Hz}) = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Din motive practice, Essen și-a prelucrat datele experimentale într-un mod mult mai complex ca cel indicat. Rezultatul final obținut din multe măsurători făcute în diverse condiții pentru îmbunătățirea rezultatelor a fost de $2,997925 \cdot 10^8$ m/s cu o eroare de $0,00003 \cdot 10^8$ m/s.

40-4 Surse și observatori în mișcare

Cînd spunem că viteza sunetului în aer uscat, la 0°C este de 331,7 m/s, noi presupunem că am luat un sistem de referință în repaus față de masa de aer. Cînd spunem că viteza luminii este în spațiul liber de $2,997925 \cdot 10^8$ m/s, ce sistem de referință este folosit? Nu poate fi vorba de mediul prin care se propagă, ca în cazul aerului, deoarece lumina trece și prin vid.

Conceptul de undă care nu necesită un mediu prin care să se propage a fost respinsă de fizicienii secolului XIX, influențați fiind de o analogie falsă între undele luminoase și cele acustice sau alte unde pur mecanice. Acești fizicieni au postulat existența unui *eter*, un mediu subtil ce umple tot spațiul și servește ca suport pentru transmiterea luminii. Eterul ar fi trebuit să aibă o densitate neglijabil de mică deoarece el nu putea fi observat prin nici un procedeu cunoscut, în spațiul vid.

Cu toate că conceptul de eter s-a dovedit a fi folositor pentru un timp, el nu a supraviețuit experiențelor. În particular, încercările de a măsura viteza Pămîntului prin eter, în toate cazurile a dat zero*. Fizicienii nu puteau să creadă că Pămîntul era tot timpul în repaus în raport cu eterul și că toate celelalte corpuri din Univers erau în mișcare față de el. Alte ipoteze relativ la natura propagării luminii s-au dovedit nesatisfăcătoare dintr-un motiv sau altul.

În 1905 Einstein a rezolvat dificultatea înțelegerii propagării luminii făcînd o ipoteză îndrăzneață: dacă un număr de observatori se mișcă (cu

* Vezi paragraful 43-7, care descrie experiența crucială a lui Michelson și Morley.

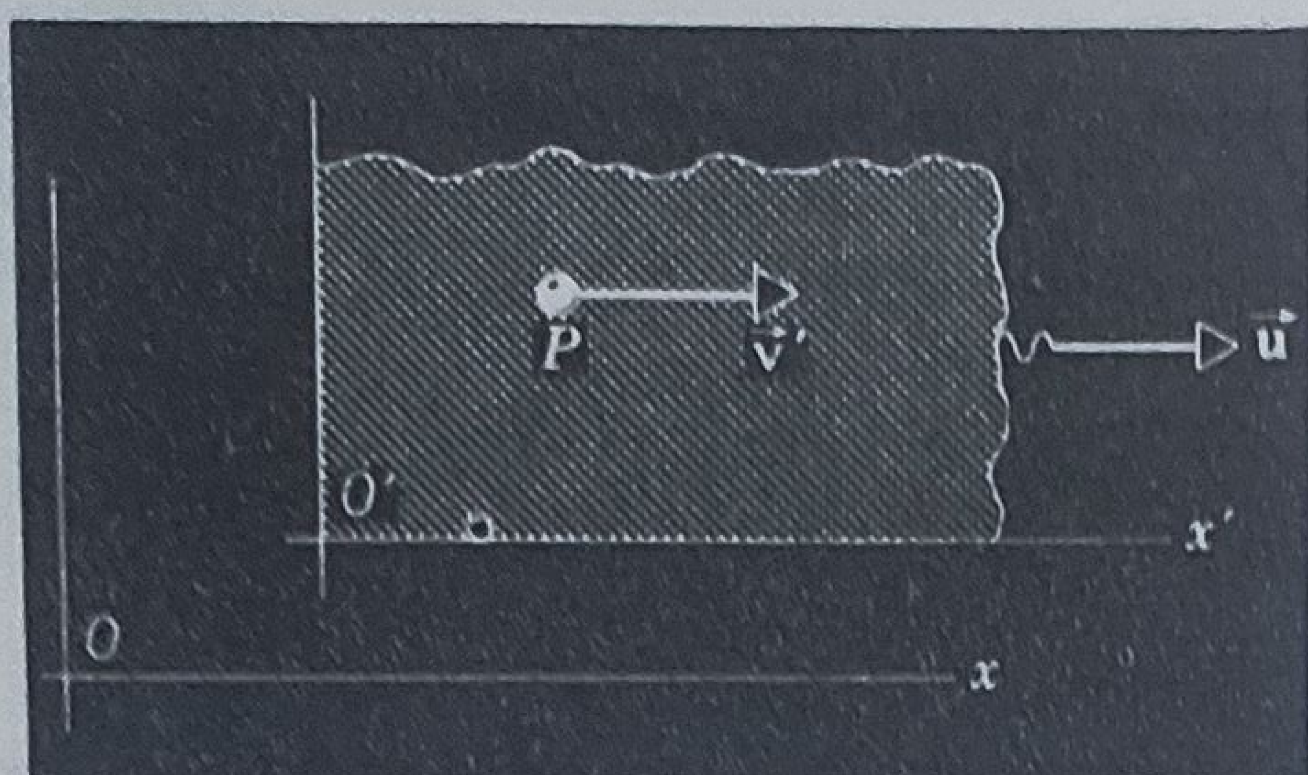


Figura 40-7. Observatorii O și O′ care sînt în mișcare relativă, observă fiecare pulsul de lumină P. Pulsul este emis de o sursă ce nu este indicată, și care se află în repaus în sistemul de referință O′.

viteză constantă) în raport unul cu altul și cu o sursă de lumină și dacă fiecare observator măsoară viteza luminii emisă de sursă, *ei vor obține aceeași valoare*. Acesta este postulatul fundamental al teoriei relativității a lui Einstein. Aceasta înlătură necesitatea eterului postulînd că viteza luminii este aceeași în *toate* sistemele de referință; nici una din ele nu este mai fundamentală decît alta. Teoria relativității, ce rezultă din acest postulat, a fost verificată de nenumărate ori experimental, și totdeauna experiențele au fost în concordanță cu teoria. Aceste concordanțe care au fost obținute pe mai mult de o jumătate de secol de verificări, a dat un foarte puternic suport postulatului de bază al lui Einstein, relativ la propagarea luminii.

Figura 40-7 se referă în mod particular la problema fundamentală a propagării luminii. O sursă de lumină, în repaus în sistemul de referință O', emite un plus de lumină P a cărui viteză v' este măsurată de către un observator în repaus în acel sistem. Din punctul de vedere al unui observator din referențialul O, referențialul O' și observatorul atașat lui se mișcă în sensul pozitiv al axei x cu viteza u. Întrebare: care va fi viteza v pe care observatorul O îl va măsura pentru pulsul de lumină P? Ipoteza lui Einstein cere ca *fiecare* observator prin măsurătoare să obțină aceeași viteză c, adică

$$v=v'=c.$$

Această ipoteză însă contrazice legea clasică de adunare a vitezelor (vezi paragraful 4-6), care spune că

$$v=v'+u \tag{40-14}$$

Această lege (incorectă) care ne este familiară și pare a fi corectă, este de fapt obținută pe baza observațiilor legate de mișcarea corpurilor macroscopice din lumea înconjurătoare. Chiar și cele mai rapide dintre acestea — să zicem un satelit al Pămîntului — se mișcă cu o viteză foarte mică în comparație cu cea a luminii. Aria datelor experimentale care suportă ecuația (40-14) este deci puternic restrînsă, și anume la experiențele pentru care $v' \ll c$ și $u \ll c$. Dacă presupunem că ecuația (40-14) este valabilă pentru toate particulele indiferent de viteză, vom face o extrapolare grosieră. Teoria relativității a lui Einstein arată că într-adevăr această extrapolare nu este posibilă și că ecuația 40-14 este doar un caz limită al unei relații mult mai generale valabilă atît pentru pulsurile de lumină cît și pentru particulele macroscopice, indiferent de viteza lor,

$$v=\frac{v'+u}{1+v'u/c^2}. \tag{40-15}$$

Ecuaţia (40-15) este imposibil de a fi distinsă de ecuaţia (40-14) pentru viteze mici, cînd $v' \ll c$ şi $u \ll c$, vezi exemplul 4.

Dacă aplicăm ecuaţia (40-15) cazului în care obiectul în mişcare este pulsul de lumină şi dacă punem $v' = c$, obţinem

$$v = \frac{c+u}{1+cu/c^2} = c.$$

Acest rezultat este în concordanţă, cum de fapt trebuie să fie, cu ipoteza fundamentală care a stat la baza deducerii ecuaţiei (40-15); ea arată că *ambii* observatori măsoară aceeaşi viteză a luminii c.

Ecuaţia 40-14 conduce la faptul (incorect) că viteza măsurată în S' va fi $c+u$. În figura 40-8 se vede că ecuaţia 40-15 (corectă) şi ecuaţia 40-14 (incorectă) nu pot fi distinse una de alta pentru viteze mici în comparaţie cu cea a luminii.

Exemplul 4. Să presupunem că $v' = u = 11{,}2$ km/s. Care este eroarea procentuală pe care o facem dacă folosim ecuaţia 40-14 în loc de ecuaţia 40-15 în calcularea vitezei v? Viteza luminii este de $3{,}0 \times 10^5$ km/s.

Ecuaţia (40-14) ne dă

$$v = v' + u = 11{,}2 \text{ km/s} + 11{,}2 \text{ km/s} = 22{,}4 \text{ km/s}$$

Ecuaţia 40-15 ne dă

$$v = \frac{v'+u}{1+v'u/c^2} = \frac{11{,}2\text{km/s}+11{,}2\text{km/s}}{1+\dfrac{(11{,}2\text{km/s})^2}{(3{,}0\times10^5\text{km/s})^2}} = \frac{22{,}4\text{km/s}}{1+13{,}9\cdot10^{-10}} =$$

$$= \frac{22{,}4\text{km/s}}{1{,}0000000014}$$

Se vede deci că nici la 11,2 km/s ($\approx$40 000 km/h) eroarea pe care o facem folosind ecuaţia (40-14) nu este importantă.

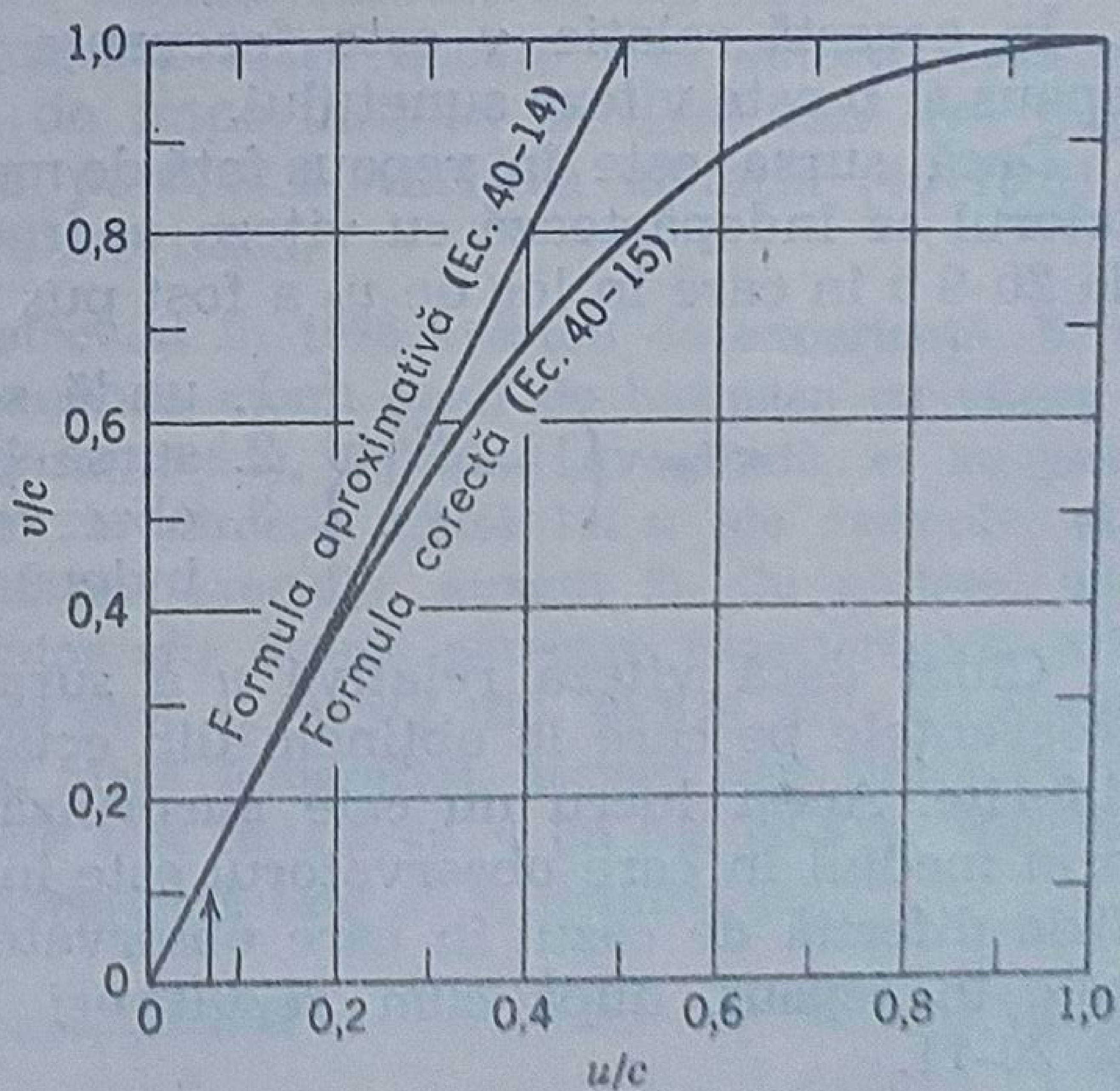


Figura 40-8. Viteza unei particule P, văzută de observatorul O din figura 40-7 în cazul special $v' = u$. Toate vitezele sînt exprimate în raport cu c, viteza luminii. Săgeata verticală corespunde vitezei de $2{,}24 \cdot 10^7$ m/s.

Exemplul 5. Doi electroni sînt emiși de un nucleu al unei substanțe radioactive, pe aceeași direcție în sensuri opuse. Să presupunem că viteza fiecăruia, măsurată față de sistemul de referință al laboratorului este de $0,6\,c$ (aceasta corespunde unei energii cinetice de 130 keV). Care este viteza unui electron privit de pe celălalt electron?

Ecuația (40-14) dă

$$v = v' + u = 0,6\ c + 0,6\ c = 1,2\ c.$$

Ecuația (40-15) dă

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} = \frac{0,6c + 0,6c}{1 + (0,6c)^2/c^2} = 0,88c$$

Acest exemplu ne arată că ecuația 40-14 și ecuația 40-15 dau rezultate foarte diferite pentru viteze comparabile cu c. O mulțime de date experimentale indirecte confirmă faptul că al doilea rezultat este corect.

40-5 Efectul Doppler

Am văzut că obținem aceeași valoare a vitezei luminii indiferent de viteza relativă a sursei și a observatorului. În schimb frecvența ei și lungimea de undă se va schimba, dar totdeauna în așa fel încît produsul lor, care este viteza luminii, să rămînă constantă. Această variație de frecvență se numește *deplasare Doppler*, după numele lui Johann Doppler (1803—1853), care l-a prevăzut pentru prima dată.

În paragraful 20-7 am văzut că dacă sursa *sonoră* se îndepărtează de observator cu viteza u, frecvența auzită de observator (vezi ecuația 20-10, în care în loc de v_s s-a trecut u) este

$$\nu' = \nu \frac{1}{1 + u/v} \quad \begin{cases} \text{1. undă sonoră} \\ \text{2. observator în repaus} \\ \text{3. sursă în mișcare de îndepărtare față de observator.} \end{cases} \qquad (40\text{-}16)$$

În această relație ν este frecvența auzită atunci cînd sursa este în repaus și v este viteza sunetului.

Dacă sursa este în repaus față de mediul înconjurător în schimb observatorul se îndepărtează cu viteza u, frecvența observată va fi (vezi ecuația 20-9 b în care în loc de v_0 a fost pus u) este

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{u}{v}\right) \quad \begin{cases} \text{1. undă sonoră} \\ \text{2. sursă în repaus} \\ \text{3. observatorul în mișcare de îndepărtare față de sursă.} \end{cases} \qquad (40\text{-}17)$$

Chiar dacă viteza relativă u a sursei și observatorului sînt aceleași, frecvențele pe care le obținem din ecuația (40-16) și ecuația (40-17), sînt diferite. Acest lucru nu este surprinzător deoarece o sursă în mișcare prin mediul în care observatorul este în repaus este din punct de vedere fizic diferită de cazul în care observatorul se mișcă prin mediu și sursa este în repaus, după cum rezultă și din compararea figurilor 20-10 și 20-11.

Sîntem tentaţi să aplicăm ecuaţiile (40-16) şi (40-17) pentru lumină, înlocuind cu c viteza sunetului v. Pentru lumină totuşi, în opoziţie cu sunetul, s-a dovedit a fi imposibil să se găsească mediul prin care lumina se propagă, faţă de care sursa sau observatorul să se mişte. Acest lucru înseamnă că sursa în mişcare de îndepărtare faţă de observator şi „observatorul în mişcare de îndepărtare faţă de sursă" sînt situaţii fizice identice şi deci trebuie să conducă *exact la aceeaşi* frecvenţă Doppler. Aplicate luminii, atît ecuaţia (40-16) cît şi ecuaţia (40-17) trebuie să fie incorecte. Conform teoriei relativităţii, frecvenţa Doppler este de fapt

$$\nu' = \nu \frac{1-u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad \begin{cases} \text{1. undă luminoasă} \\ \text{2. mişcare relativă} \\ \quad \text{sursă-observator.} \end{cases} \tag{40-18}$$

În toate cele trei cazuri discutate, putem obţine relaţiile pentru cazul sursei sau observatorului în mişcare de *apropiere* unul către altul, punînd în loc de u, $-u$.

Ecuaţia (40-16), (40-17) şi (40-18) nu sînt atît de diferite pe cît par, dacă raportul u/c este suficient de mic. Să dezvoltăm ecuaţiile (40-16), (40-17) şi (40-18) cu ajutorul dezvoltării binomiale. Ecuaţiile devin atunci (înlocuind pe v cu c):

$$\nu' = \nu\left[1 - \frac{u}{c} + \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \ldots\right], \tag{40-16 a}$$

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{u}{c}\right), \tag{40-17 a}$$

şi

$$\nu' = \nu\left[1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^3 + \ldots\right]. \tag{40-18 a}$$

Raportul u/c pentru toate sursele de lumină monocromatice chiar şi cele de dimensiuni atomice, este mic. Aceasta înseamnă că termenii următori din dezvoltare devin rapid foarte mici şi în funcţie de precizia considerată, putem reţine doar un număr limitat de termeni.

Aproape în toate cazurile diferenţa între aceste trei ecuaţii este neimportantă. Totuşi, este deosebit de important să se efectueze cel puţin o experienţă suficient de precisă pentru a verifica ecuaţia (40-18 *a*) şi astfel, în parte, a verifica teoria relativităţii.

H. E. Ives şi G. R. Stillwell au efectuat în 1938 o astfel de experienţă. Ei au lăsat să treacă printr-un tub un fascicul de atomi (ioni) de hidrogen cu viteza u, produşi într-o descărcare în gaz (figura 40-9 a). Folosind o oglindă, ei au putut observa lumina emisă de aceşti atomi în direcţie opusă lui u (de exemplu, atomul 1) şi lumina emisă paralel cu u (de exemplu, atomul 2). Cu ajutorul unui spectrograf de precizie, ei au putut fotografia o linie oarecare, caracteristică, obţinînd pe o scală a frecvenţelor marcate prin ν_1' şi ν_2' (fig. 40-9 b). Este de asemenea posibil de a fotografia, pe aceeaşi placă fotografică, aceeaşi linie provenită de la un atom în *repaus;* o astfel de linie este notată cu ν (în fig. 40-9 b). Mărimea fundamentală măsurabilă în această experienţă este $\Delta\nu/\nu$, definită ca

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\nu_2 - \Delta\nu_1}{\nu} \tag{40-19}$$

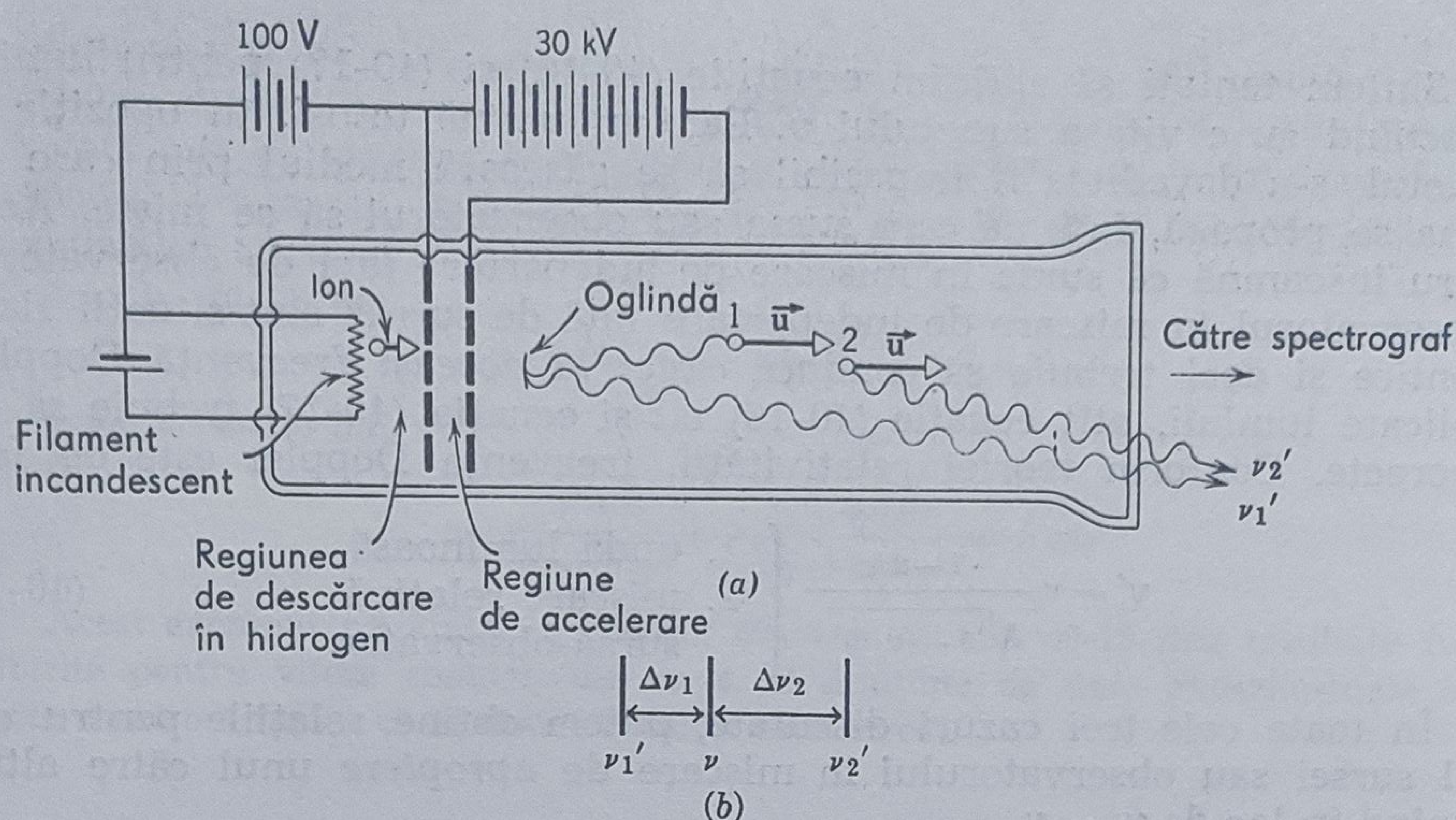


Figura 40-9. Experiența lui Ives-Stilwell.

(vezi fig. 40-9 b). Ea măsoară abaterea frecvenței luminii produse de atomul în repaus de la poziția de mijloc între cele două frecvențe ν_1' și ν_2'. Datele trecut în tabelul 40-2 arată că rezultatele măsurate sînt în concordanță cu formula dată de teoria relativității (ecuația (40-18 a)) și nu cu formula clasică împrumutată din teoria propagării sunetului în medii elastice (ecuația (40-16 a)).

Ives și Stilwell nu au considerat rezultatele lor ca un suport experimental al teoriei relativității lui Einstein, ci au căutat să le dea o explicație teoretică proprie. Experimentatorii din zilele noastre folosind nu numai rezultatele experimentale excelente ale lor ci și ansamblul de date experimentale, dau experiențelor lui Ives și Stillwell interpretarea pe care am dat-o mai sus.

Tabela 40-2

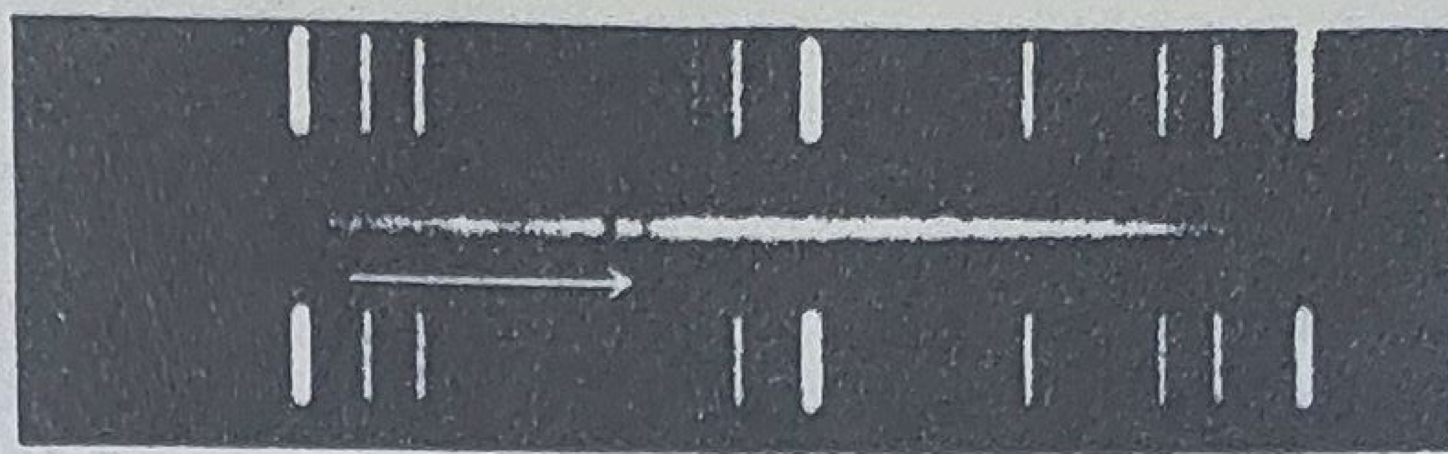
EXPERIENȚA IVES-STILWELL*

$\frac{\Delta\nu}{\nu}$, 10^{-5}	Viteza atomilor în mișcare ($=u$), 10^6 m/s			
	0,865	1,01	1,15	1,33
Valoarea teoretică în conformitate cu teoria clasică (ecuația 40-16 a)	1,67	2,26	2,90	3,94
Valoarea teoretică în conformitate cu teoria relativității (ecuația 40-18 a)	8,835	1,13	1,45	1,97
Valoarea experimentală	0,762	1,1[illegible]	1,42	1,9

* Vezi ecuația (40-19); tabela selectează o parte din datele lui Ives și Stilwell.



(a)



(b)

Figura 40-10. (a) Punctul central reprezintă o nebuloasă din constelația Corona Borealis și se află la distanța de 130 000 000 ani lumina. (b) Fîșia centrală reprezintă spectrul lunimii emise de către nebuloasă. Cele două benzi întunecate verticale arată prezența calciului. Săgeata orizontală indică deplasarea pe care liniile calciului o prezintă, spre lungimi de undă mai mari, lungimea săgeții indicînd această deplasare. Determinarea acestei deplasări arată că galaxia se îndepărtează de noi cu 8 400 km/s. Liniile spectrale de deasupra și dedesuptul fîșiei provin de la o sursă de lumină terestră, și sînt folosite pentru calibrare în lungimi de undă (prin bunăvoința Observatoarelor de la Mount Wilson și Mount Palomar).

Efectul Doppler pentru lumină și-a găsit nenumărate aplicații în astronomie, unde este folosită pentru determinarea vitezei cu care corpurile cerești se apropie sau se îndepărtează de noi.

Astfel de deplasări Doppler ale liniilor spectrale ne permit măsurarea vitezei radiale sau a proiecției vitezei pe direcția de unire sursă-pămînt. Toate galaxiile* pentru care astfel de măsurători au fost efectuate (fig. 40-10) par să se îndepărteze de noi cu o viteză cu atît mai mare cu cît galaxia este mai departe de noi.

Exemplul 6. O radiație luminoasă caracteristică ce provine de la o galaxie din constelația Fecioarei se observă că are o lungime de undă crescută cu 0,4% față de aceeași radiație caracteristică emisă de o sursă terestră. Care este viteza acestei galaxii în raport cu Pămîntul? Se apropie sau se îndepărtează de Pămînt?

Dacă λ este lungimea de undă pentru sursa terestră, atunci

$$\lambda' = 1{,}004\,\lambda.$$

Deoarece trebuie ca $\lambda'\nu' = \lambda\nu = c$ putem scrie aceasta

$$\nu' = 0{,}996\,\nu.$$

Această deplasare a frecvenței este atît de mică încît pentru calculul vitezei sursei putem folosi cu o bună aproximație oricare dintre formulele (40-16), (40-17) sau (40-18). Folosind ecuația (40-17) obținem

$$\nu' = 0{,}996\,\nu = \nu\left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Rezolvînd obținem $u/c = 0{,}004$, sau $u = (0{,}004)\,(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}) = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{m/s}$ sau $4{,}32 \cdot 10^6$ km/h. Galaxia se *îndepărtează*. Dacă u rezultat ar fi fost negativ, galaxia s-ar apropia de noi.

---

* Vezi: Allen R. Sandage, „Deplasarea spre roșu", Scientific American, p. 171, septembrie 1956.

Întrebări

1. Cum a fost ridicată curba de sensibilitate a ochiului, dată în figura 40-2?

2. De ce semnalele de pericol sînt colorate în roșu, cînd sensibilitatea maximă a ochiului se află în regiunea galben-verde?

3. Discutați următoarea definiție, dată de un psiholog, a limitelor spectrului vizibil: „limitele spectrului vizibil corespund la frecvențele pentru care ochiul devine la fel de adaptat ca detector de radiație ca și oricare alt organ al corpului".

4. Cum poate un obiect să absoarbă energie luminoasă fără a primi și impuls?

5. Un proiector trimite un fascicul paralel de raze de lumină. Se exercită vreo forță asupra proiectorului ca urmare a emisiei luminii?

6. Denumiți două experiențe istorice, în plus față de cea a lui Nichols și Hull pentru măsurarea presiunii luminii, în care s-au folosit balanțe de torsiune. Ambele sînt descrise în această carte, una în partea întîia iar cealaltă în a doua.

7. Arătați că la absorbția completă a unui fascicul paralel de lumină, presiunea de radiație asupra obiectului absorbant este $p=S/c$, unde S este mărimea vectorului Poynting, iar c viteza luminii în spațiul liber.

8. Cum ar fi putut Galilei, verifica experimental, că timpul de reacție era o sursă de erori copleșitoare în încercarea lui de a măsura viteza luminii, descrisă în pagina 364?

9. S-a sugerat că viteza luminii, s-ar putea modifica puțin pe măsura trecerii timpului. Ați putea găsi vreo dovadă care să suporte această ipoteză în tabela 40-1?

10. Un prieten al meu susține că postulatul lui Einstein (relativ la faptul că viteza luminii nu este afectată de mișcarea uniformă a sursei și observatorului) trebuie respinsă deoarece este împotriva „bunului simț". Ce ați putea să-i răspundeți?

11. Depinde viteza luminii în vid de (a) lungimea de undă, (b) de frecvență, (c) de intensitate, (d) de viteza sursei sau (e) de viteza observatorului?

12. Poate fi o galaxie atît de departe încît viteza ei de îndepărtare să fie egală cu c? Dacă da, cum putem noi vedea galaxia? Adică, va ajunge vreodată lumina emisă de ea la noi?

Probleme

1. (a) La ce lungimi de undă sensibilitatea ochiului este jumătate din cea a valorii ei maxime? (b) Care este frecvența și perioada luminii ce corespunde maximului de sensibilitate a ochiului?

2. S-a propus ca sistem de propulsie pentru o rachetă cosmică în sistemul solar presiunea de radiație, folosind o „velă" din foaie de aluminiu. Cît de mare trebuie să fie foaia de aluminiu pentru ca forța produsă de radiație să egaleze atracția gravitațională? Presupuneți că masa sistemului *rachetă+velă* este de 1 460 kg, că vela este perfect reflectătoare și că vela este orientată perpendicular pe razele solare. Masa soarelui este de $1{,}97 \cdot 10^{30}$ kg.

3. Intensitatea radiației solare care cade pe Pămînt are o intensitate de 1 400 W/m². Presupunînd că Pămîntul se comportă ca un disc plan, perpendicular pe razele solare, și că toată energia incidentă este absorbită, calculați forța asupra Pămîntului determi-

nată de presiunea radiaţiei. Comparaţi-o cu forţa atracţiei gravitaţionale a Soarelui.

4. Verificaţi că pentru o undă plană normală la o suprafaţă plană, presiunea de radiaţie la suprafaţă este egală cu densitatea de energie a fasciculului care cade pe suprafaţă. Această relaţie este valabilă indiferent de fracţiunea din energia incidentă, reflectată.

5. Verificaţi că „presiunea" exercitată de o ploaie de gloanţe ce cad normal pe o suprafaţă plană, este egală cu *de două ori* densitatea de energie (cinetică) şi fasciculul incident; presupuneţi că gloanţele sînt complet „absorbite" de suprafaţă. Comparaţi şi scoateţi în evidenţă deosebirile faţă de cazul luminii (problema 4).

6. O rachetă cosmică de mici dimensiuni cu masa, inclusiv ocupanţii, de 1 500 kg, se mişcă în spaţiul cosmic în lipsă totală a forţei de gravitaţie. Dacă un proiector al navei se lasă aprins toată ziua şi dacă el radiază 10^4 W, care va fi viteza pe care racheta o va atinge la sfîrşitul unei zile datorită forţei de reacţie asociată impulsului dus de fasciculul de lumină?

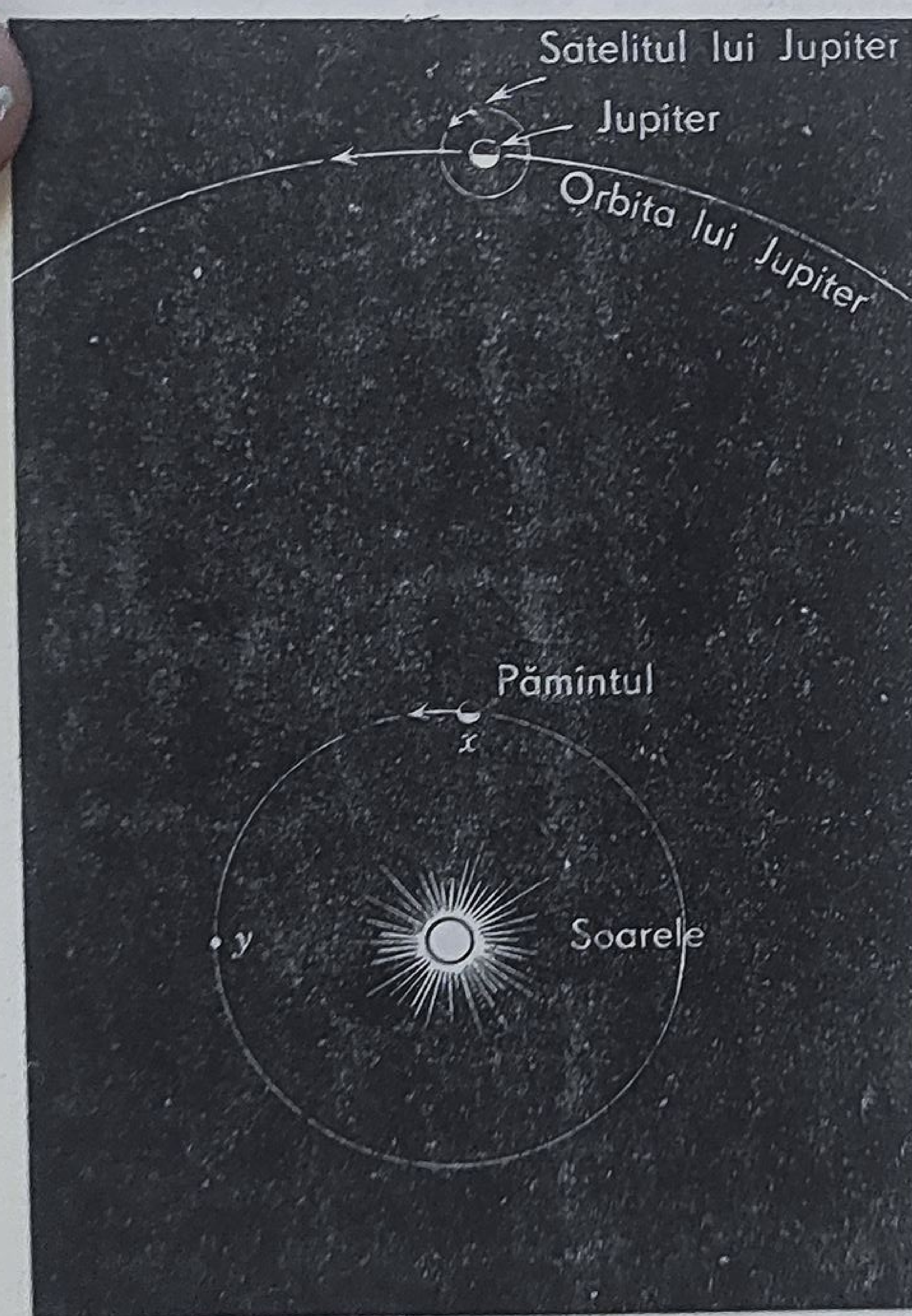


Fig. 40-11.

7. Care este presiunea de radiaţie la un metru depărtare de un bec de 500 W? Presupuneţi că suprafaţa pe care se exercită presiunea luminii este perfect absorbantă şi că becul radiază uniform şi izotrop în spaţiu.

8. Eroarea în distanţa Pămînt-Lună măsurată cu ajutorul undelor radar reflectate de ea este de aproximativ 800 m. Presupunînd că această eroare este asociată doar măsurătorii timpului de ducere plus întoarcere a undei, care este eroarea de timp pe care ea o presupune?

9. Metoda lui Roemer pentru măsurarea vitezei luminii constă în observarea duratei aparente de revoluţie a unui satelit al lui Jupiter. Perioada reală de revoluţie este de 42,5 ore. (a) Luînd în consideraţie viteza finită a luminii, cum vă aşteptaţi să se modifice durata aparentă de revoluţie atunci cînd pămîntul se mişcă pe orbită de la punctul x la punctul y. (fig. 40-11)? (b) Ce observaţii ar mai fi necesare pentru a calcula viteza luminii? Neglijaţi mişcarea lui Jupiter pe orbită (fig. 40-11 nu este desenată la scară).

10. Să presupunem că se măsoară timpul necesar luminii să străbată o distanţă de 1,6 km şi că se cere ca viteza ei să fie dată cu precizia de la pagina 368. Cît de mare poate fi eroarea în măsurarea distanţei presupunînd că celelalte surse de erori sînt neglijabile?

11. Pentru ce valoare a lui u/c, ecuaţia 40-17 diferă de ecuaţia 40-18 cu 1 %?

12. Deplasarea spre roşu a unei nebuloase îndepărtate face ca linia $H\gamma$ (a hidrogenului) ce are lungimea de undă de $4\,340 \cdot 10^{-10}$ m în condiţii de laborator să aibă valoarea de $6\,562 \cdot 10^{-10}$ m. (a) Care va fi proiecţia vitezei relative a nebuloasei pe direcţia de observare a ei? (b) Nebuloasa se apropie sau se îndepărtează de noi?

13. Diferenţa între lungimea de undă a unui fascicul incident de microunde şi a fasciculului reflectat de o maşină care se apropie sau se îndepărtează este folosită pentru determinarea vitezelor automobilelor pe şosele. (a) Arătaţi că dacă v este viteza maşinii şi ν este frecvenţa radiaţiei incidente, variaţia de frecvenţă este aproximativ $2v\nu/c$ unde c este viteza radiaţiei electromagnetice. (b) Care va fi variaţia frecvenţei pentru fiecare km/h viteză, dacă frecvenţa microundelor este de 2 450 MHz?

14. Arătaţi că pentru viteze mici, deplasarea Doppler poate fi scrisă sub formă aproximativă

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c}$$

unde $\Delta\lambda$ este variaţia lungimii de undă.

15. Perioada de rotaţie a soarelui la ecuatorul său este de 24,7 zile, raza lui este de $7{,}0 \cdot 10^{8}$ m. Care va fi deplasarea Doppler a lungimii de undă aşteptată pentru o linie caracteristică emisă la marginea Soarelui, de frecvenţă 5 500 Å?

16. Un satelit al Pămîntului ce lucrează pe frecvenţa exactă de 40 MHz, trece exact pe deasupra unei staţii de recepţie radio la o altitudine de 402,3 km cu o viteză de 8 046,7 km/h. Reprezentaţi grafic variaţia de frecvenţă datorat efectului Doppler, în funcţie de ti, considerînd ca origine $t=0$ momentul în care satelitul se află exact deasupra staţiei. (Indicaţie: viteza u în formula Doppler nu este de fapt viteza reală a satelitului ci proiecţia ei pe direcţia ce uneşte staţia de satelit. Folosiţi formula nerelativistă ecuaţia (40-16 a) şi neglijaţi curbura pămîntului, şi cea a orbitei satelitului).

17. O rachetă cosmică se depărtează de pămînt cu viteza de 0,2 c. Iluminarea în rachetă este albastră. În ce culoare vor vedea observatorii de pe pămînt această lumină? (vezi fig. 40-2).

18. Într-una din experienţele lui Ives şi Stilwell, viteza atomilor de hidrogen a fost $u=8{,}61 \cdot 10^{5}$ m/s. Calculaţi $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_2$ şi $\Delta\nu/\nu$, presupunînd că (a) ecuaţia (40-18 a) este corectă şi (b) că ecuaţia (40-16 a) este corectă; comparaţi rezultatele d-voastră cu cele date în tabelul 40-2 pentru această viteză. Consideraţi doar primii trei termeni în ecuaţia (40-18 a) şi (40-16 a).

Capitolul 41

Reflexia şi refracţia—unde plane şi suprafeţe plane

41-1 Reflexia şi refracţia

În figura 41-1 a se vede că un fascicul de lumină ce cade pe suprafața apei este atît reflectat de către aceasta cît și îndoit (adică *refractat*) cînd intră în apă. În figura 41-1 b fascicului incident este reprezentat printr-o singură linie, *raza incidentă,* paralelă cu direcția de propagare. Fasciculul incident în figura 41-1 b este presupus *undă plană,* fronturile de undă fiind normale pe raza incidentă. Fasciculele reflectate și refractate sînt de asemenea reprezentate prin raze. Unghiurile de *incidență* (θ_1), de *reflexie* (θ_1') și de *refracție* (θ_2) sînt măsurate între normala la suprafață și raza corespunzătoare, după cum se arată în figură.

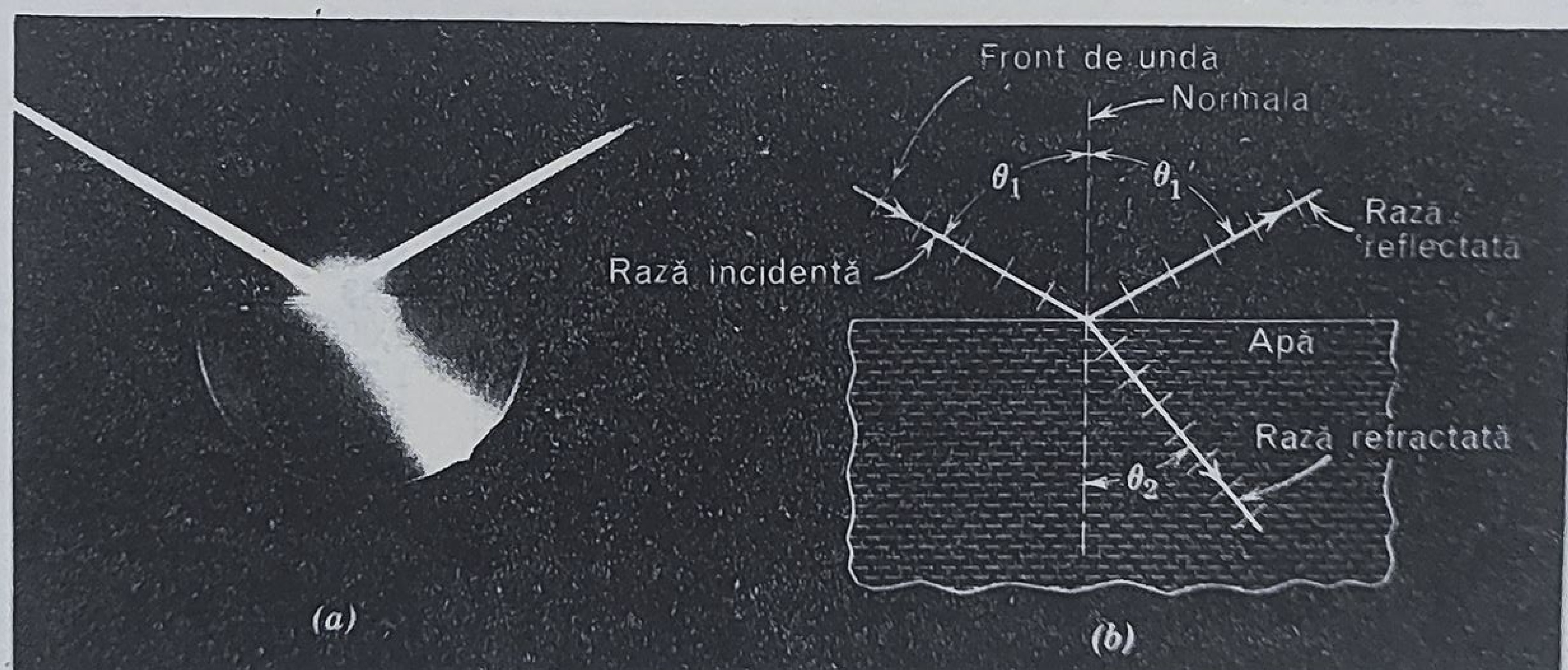


Figura 41-1. (*a*) O fotografie arătînd reflexia și refracția la interfața aer-apă. (*b*) O reprezentare utilizînd raze.

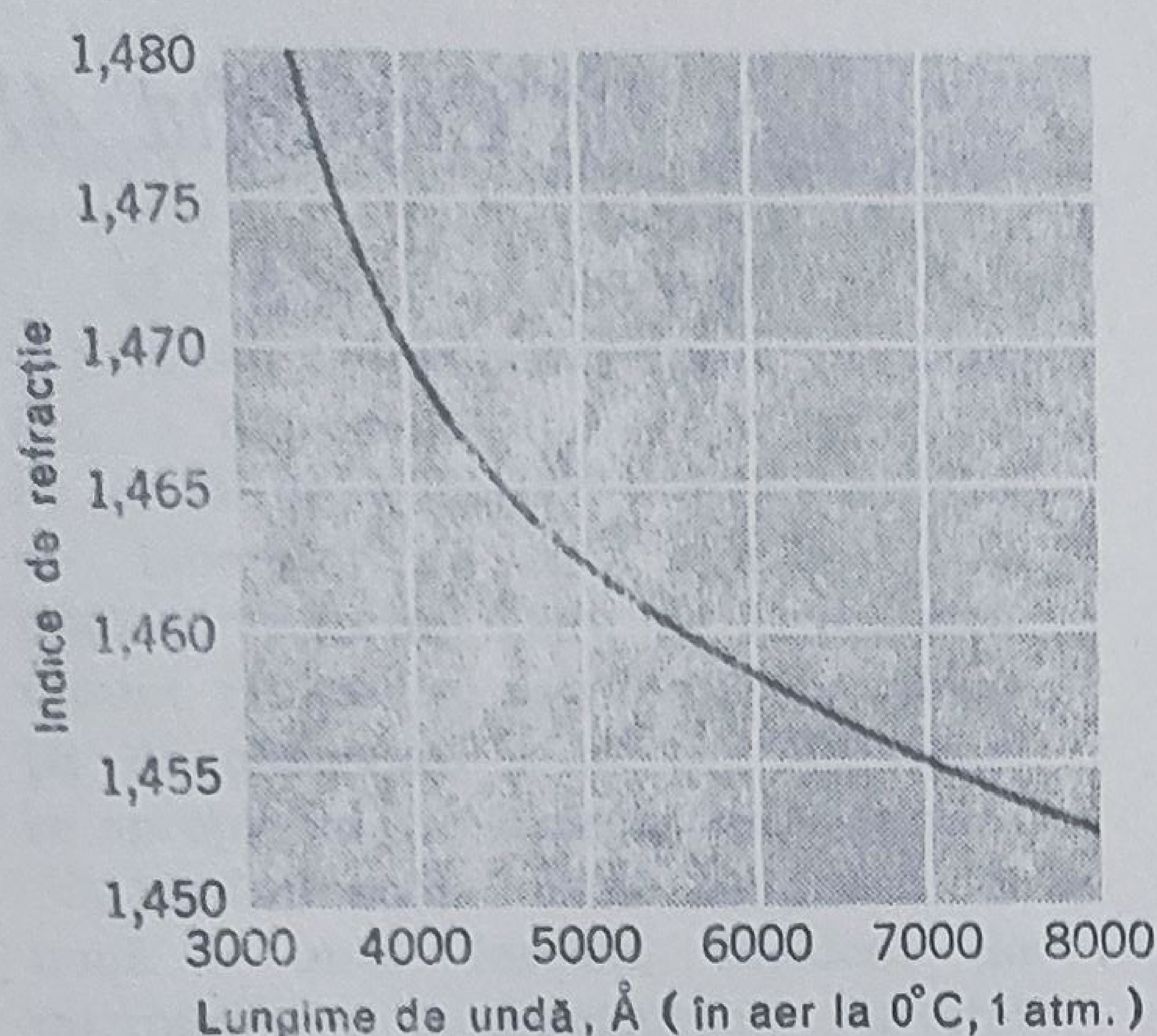


Figura 41-2. Indicele de refracție în raport cu vidul al sticlei de cuarț la 18°C.

Legile reflexiei și ale refracției pot fi ușor găsite din experiență:

1. Razele reflectată și refractată se află în planul format de raza incidentă cu normala la suprafață în punctul de incidență, adică, planul figurii 41.1b.

2. Pentru reflexie:

$$\theta'_1 = \theta_1. \qquad (41\text{-}1)$$

Pentru refracție:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21} \qquad (41\text{-}2)$$

unde n_{21} este o constantă numită *indicele de refracție* al mediului 2 față de mediul 1. Tabela 41.1 prezintă valorile indicilor de refracție în raport cu vidul pentru cîteva substanțe comune și pentru lungimea de undă 5890 Å (lumina lămpii de sodiu).

Indicele de refracție al unui mediu în raport cu altul variază, în general, cu lungimea de undă, ca în figura 41-2. Datorită acestui fapt refracția, spre deosebire de reflexie poate fi folosită pentru analizarea unui fascicul de lumină după lungimile de undă componente. Figura 41-3, luată din *Optica* lui Newton, prezintă modul în care Newton, utilizînd prisma de sticlă *ABC*, formează spectrul luminii soarelui ce intrînd prin fereastra sa trece printr-un orificiu mic în *F*.

Legea reflexiei îi era cunoscută lui Euclid. Aceea a refracției a fost descoperită experimental de către Willebrod Snell (1591—1626) și dedusă din vechea teorie corpusculară a luminii de René Descartes (1596—1650).

Tabela 41.1

CÎȚIVA INDICI DE REFRACȚIE*
(pentru $\lambda = 5890$ Å)

Apă	1,33
Alcool etilic	1,36
Bisulfură de carbon	1,63
Aer (1 atm și 20°C)	1,0003
Iodură de metilen	1,74
Cuarț topit	1,46
Sticlă, crown	1,52
Sticlă, flint greu	1,66
Clorură de sodiu	1,53
Polietilenă	1,50—1,54
Fluorită	1,43

* Măsurați în raport cu vidul. Diferența față de indicele în raport cu aerul (cu excepția, bineînțeles, a indicelui aerului însuși — vezi linia 4) este în cele mai multe cazuri neglijabilă.

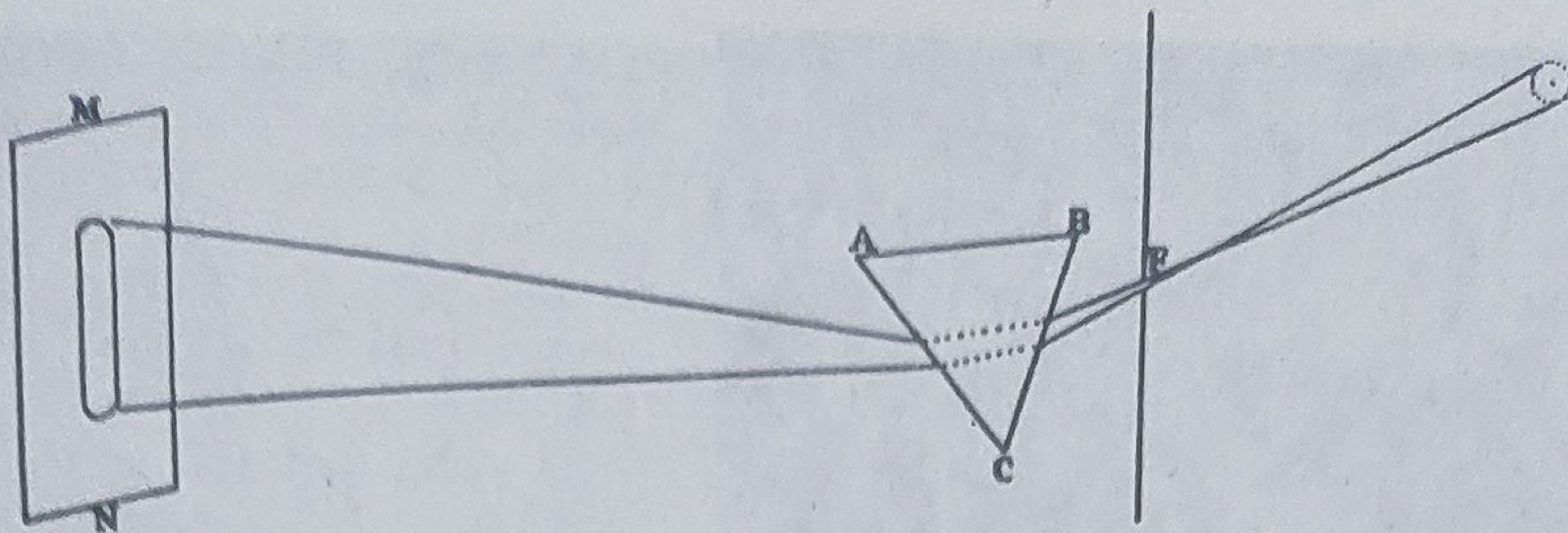


Figura 41-3. Lumina solară din orificiul *F* dintr-un ecran este refractată de prisma *ABC*, formînd un spectru pe ecranul *MN*; din *Optica* lui Newton (1704).

Legea refracției este cunoscută sub numele de legea lui Snell sau (în Franța) legea lui Descartes.

Legile reflexiei și refracției pot fi deduse din ecuațiile lui Maxwell, ceea ce înseamnă că aceste legi trebuie să fie valabile pentru toate regiunile spectrului elctromagnetic. Figura 41-4 a prezintă un montaj experimental pentru investigarea reflexiei microundelor pe o foaie mare metalică. Figura 41-4 b prezintă citirile de pe detector în funcție de poziția unghiulară a oglinzii. Existența fasciculului reflectat la unghiul corespunzător confirmă legea reflexiei pentru microunde. Există acum o amplă evidență experimentală că ecuațiile (41-1) și (41-2) descriu corect comportarea undelor reflectate și refractate în toate regiunile spectrului electromagnetic.

Este bine cunoscut faptul că o suprafață de oțel lustruit va forma un fascicul reflectat bine definit atunci cînd cade pe ea un fascicul incident, dar o foaie de hîrtie reflectă lumina mai mult sau mai puțin în toate direcțiile (*reflexie difuză*). În special datorită reflexiei difuze se pot vedea obiectele neluminoase din jurul nostru. Diferența dintre reflexia difuză și cea *„speculară"* (adică de tip oglindă) apare din netezimea suprafețelor; numai dacă adîncimea medie a iregularităților suprafeței reflectorului este substanțial mai mică decît lungimea de undă a radiației incidente se poate forma un fascicul reflectat. Acest criteriu al netezimii suprafeței are implicații diferite pentru diferite regiuni ale spectrului elec-

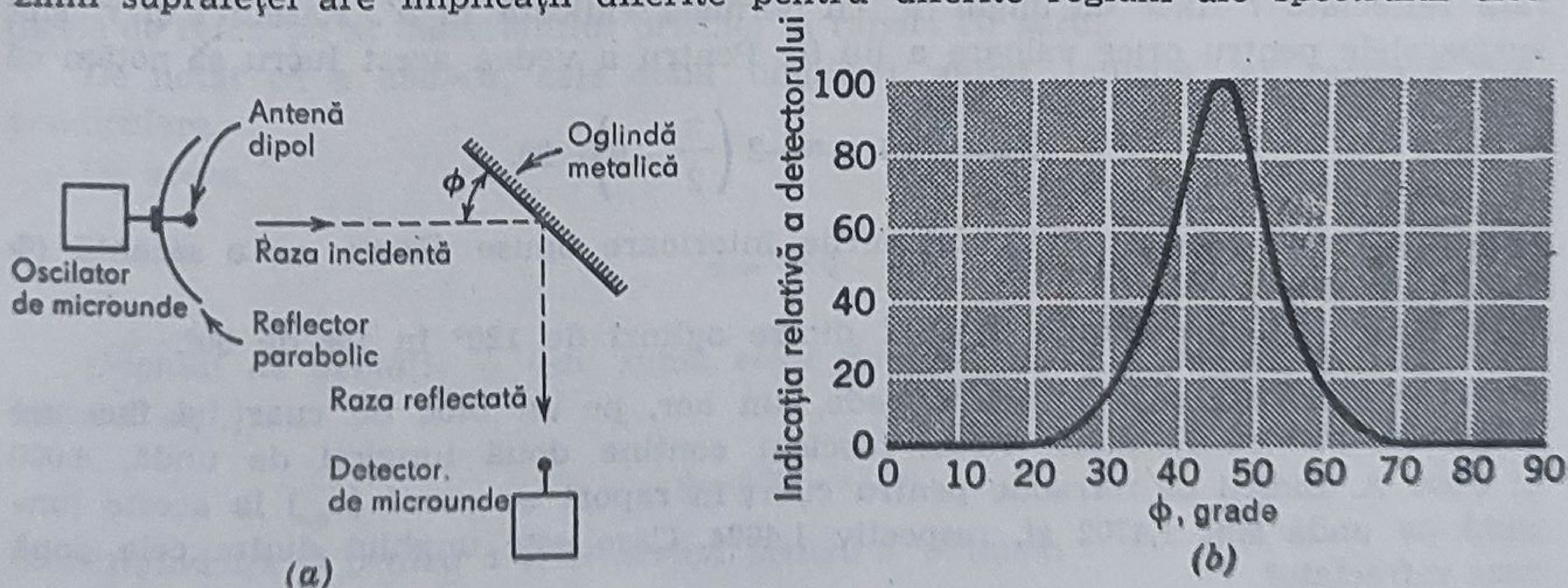


Figura 41-4. (*a*) Un dispozitiv pentru verificarea legii reflexiei pentru microunde. (*b*) Fasciculul reflectat (pentru $\lambda \approx 10$ cm) apare la orientarea așteptată a oglinzii.

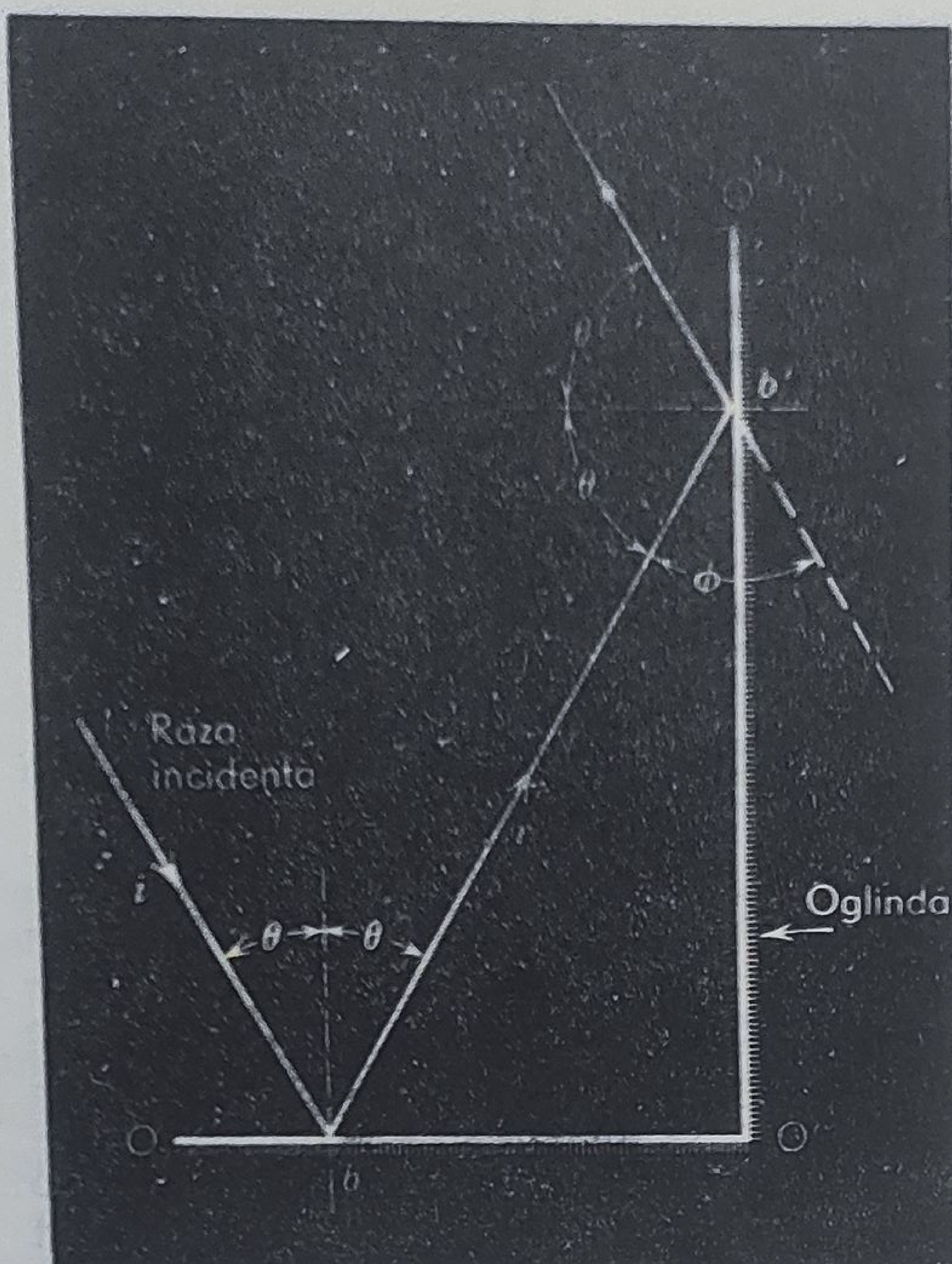


Figura 41-5. Exemplul 1.

tromagnetic. Fundul de fontă al unei tigăi, de exemplu, este un bun reflector pentru microundele cu lungimea de undă de 0,5 cm dar nu este un reflectător pentru lumina vizibilă (adică, nu vă puteţi rade privindu-vă în ea).

O altă cerinţă pentru existenţa fascicului reflectat este ca dimensiunile transversale ale reflectorului trebuie să fie mult mai largi decît lungimea de undă a fascicului incident. Trimiţînd un fascicul de lumină vizibilă pe un disc lustruit de metal de mărimea unei monezi, se va forma un fascicul reflectat. Cu toate acestea, dacă acelaşi disc este plasat într-un fascicul de unde scurte radio cu, să spune, $\lambda=1{,}0$ m, radiaţia va fi împrăştiată în toate părţile şi nu se va forma nici un fascicul unidirecţional bine definit. Vom investiga acest fenoment de *difracţie* în capitolul 44. Cerinţele ca suprafeţele să fie „netezi" şi „largi" se aplică de asemenea formării fasciculelor refractate. Dacă nu sînt îndeplinite aceste două cerinţe descrierea reflexiei şi refracţiei în termeni de raze, a căror comportare este dată de ecuaţiile 41—1 şi 41—2, nu mai este valabilă.

Exemplul 1. Figura 41-5 prezintă raza incidentă i căzînd pe oglinda MM' la unghiul de incidenţă θ. Trasaţi această rază.

Raza reflectată face un unghi θ cu normala în b şi cade ca rază incidentă pe oglinda $M'M''$. Unghiul ei de incidenţă θ' pe această oglindă este $\pi/2-\theta$. A doua rază reflectată r' face un unghi θ' cu normala ridicată în b'. Razele i şi r' sînt antiparalele pentru orice valoare a lui θ. Pentru a vedea acest lucru să notăm că

$$\Phi=\pi-2\theta'=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta.$$

Două linii sînt paralele dacă unghiurile interioare opuse făcute cu o secantă (Φ şi 2θ) sînt egale.

Repetaţi problema pentru unghiul dintre oglinzi de 120° în loc de 90°.

Exemplul 2. O rază incidentă cade, din aer, pe un bloc de cuarţ şi face un unghi de 30° cu normala. Acest fascicul conţine două lungimi de undă, 4 000 şi 5 000 Å. Indicii de refracţie pentru cuarţ în raport cu aerul (n_{qa}) la aceste lungimi de undă sînt 1,4702 şi, respectiv 1,4624. Care este unghiul dintre cele două raze refractate?

Din (41-2) avem, pentru radiaţia de 4 000 Å,

$$\sin\theta_1=n_{qa}\sin\theta_2$$

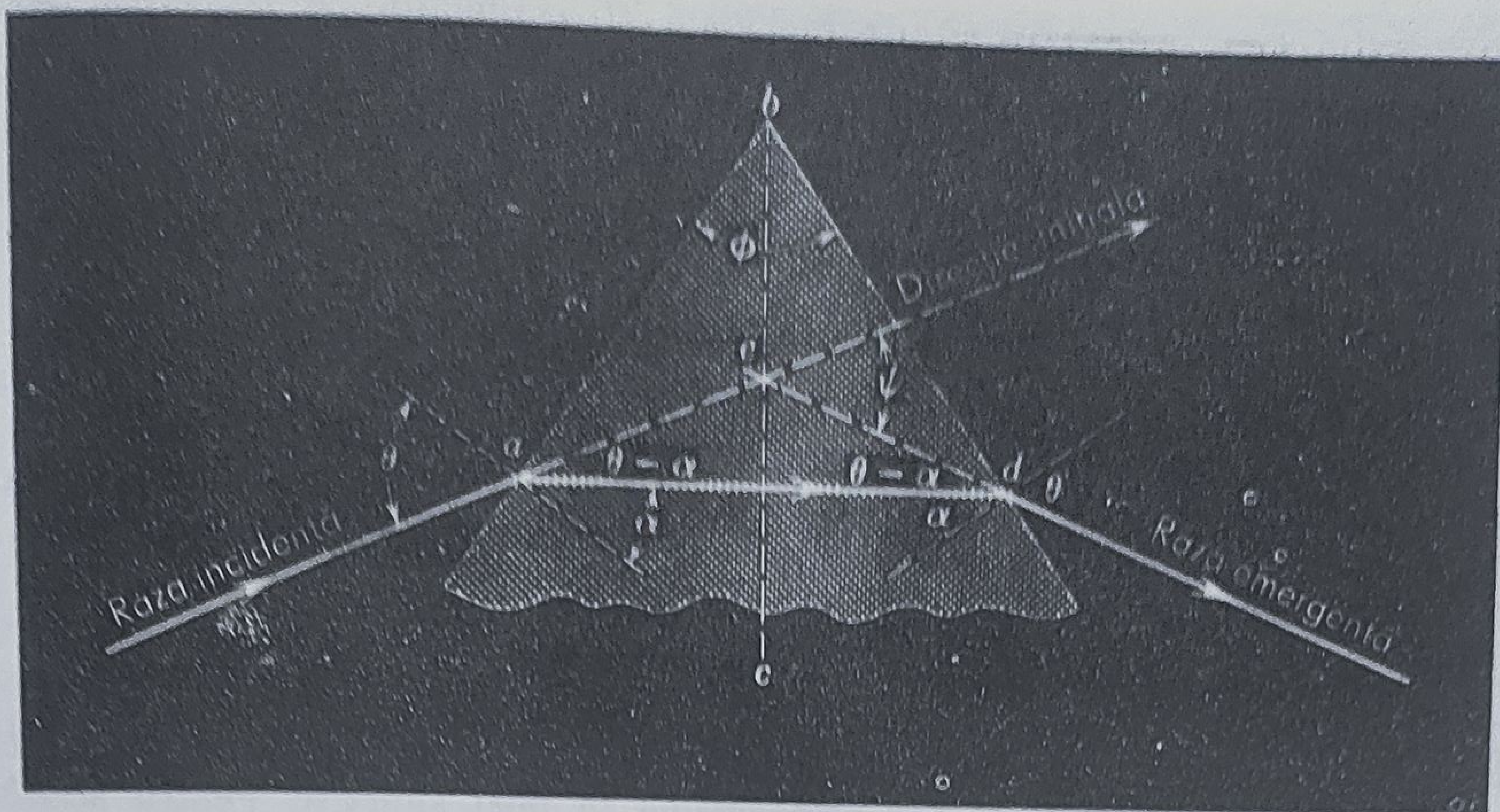


Figura 41-6. Exemplul 3.

sau

$$\sin(30°) = (1{,}4702) \sin \theta_2$$

care duce la

$$\theta_2 = 19{,}88°.$$

Pentru radiația de 5 000 Å avem

$$\sin 30° = (1{,}4624) \sin \theta_2'$$

sau

$$\theta = 19{,}99°$$

Unghiul $\Delta\theta$ dintre fascicule este de 0,11°, componenta cu lungime de undă mai mică fiind frîntă cu un unghi mai mare, adică avînd un unghi de refracție mai mic.

Exemplul 3. O rază incidentă cade din aer pe una din fețele unei prisme de sticlă ca în figura 41-6. Unghiul Θ este astfel ales încît raza emergentă face de asemenea un unghi θ cu normala la cealaltă față. Derivați o expresie pentru indicele de refracție al materialului prismei în raport cu aerul.

De notat că $\measuredangle\, abc = \alpha$, cele două unghiuri avînd laturile lor reciproc perpendiculare.

De aceea

$$\alpha = \frac{1}{2}\Phi \qquad (41\text{-}3)$$

Unghiul de deviație ψ este suma celor două unghiuri interioare opuse în triunghiul *aed*, sau

$$\psi = 2(\theta - \alpha)$$

Substituind 1/2 Φ pentru α și rezolvînd pentru θ obținem

$$\theta = \frac{1}{2}(\psi + \Phi) \qquad (41\text{-}4)$$

În punctul a, θ este unghiul de incidență și α unghiul de refracție. Legea refracției (vezi 41-2)) este

$$\sin \theta = n_{sa} \sin \alpha$$

unde n_{ga} este indicele de refracție al sticlei în raport cu aerul.

Din ecuațiile (41-3) și (41-4) se obține

$$\sin \frac{\psi + \Phi}{2} = n_{sa} \sin \frac{\Phi}{2}$$

sau

$$n_{sa} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\psi + \Phi)}{\sin (\Phi/2)}$$

care este relația căutată. Această relație este valabilă numai pentru un Θ astfel ales încît raza de lumină să treacă prin prismă în mod simetric. Pentru această condiție unghiul de deviație ψ este minim; dacă θ este ori mărit ori micșorat, se va produce atunci o deviație mai mare.

41-2 Principiul lui Huygens

O teorie a luminii n-ar putea să fie acceptată dacă n-ar fi în stare să prezică legile bine stabilite ale reflexiei și ale refracției. Aceste legi pot fi obținute din ecuațiile lui Maxwell, dar complexitățile matematice ne împiedică să facem acest lucru. Din fericire, acestea precum și alte cîteva legi ale opticii pot fi obținute pe baza unei teorii, mai simple dar mai puțin cuprinzătoare, a luminii stabilită de fizicianul olandez Christian Huygens în 1678. Această teorie presupune doar că lumina este mai degrabă o undă decît, să zicem, un flux de particule. Nu se spune nimic despre natura undei și, în particular — deoarece teoria Maxwell a electromagnetismului apare numai după un secol — nu dă nici-o indicație despre caracterul electromagnetic al luminii. Huygens n-a știut dacă lumina este o undă transversală sau longitudinală; n-a știut care sînt lungimile de undă ale luminii vizibile; avea puține cunoștințe despre viteza luminii. Totuși, teoria lui a fost foarte folositoare experimentatorilor pentru mulți ani și rămîne și azi folositoare pentru rațiuni pedagogice precum și în alte scopuri practice. Nu ne așteptăm să ne ofere aceeași bogăție de informații ca teoria electromagnetică mai completă a lui Maxwell.

Teoria lui Huygens este bazată pe o construcție geometrică denumită *principiul lui Huygens,* care ne dă posibilitatea de a spune unde se va afla un front de undă la orice moment de timp viitor dacă i se cunoaște poziția în prezent; adică: *toate punctele de pe un front de undă pot fi considerate ca surse punctiforme pentru producerea de unde sferice secundare. După un timp t noua poziție a frontului de undă va fi dată de suprafața tangentă la aceste unde secundare.*

Vom ilustra aceasta printr-un exemplu trivial: fiind dat un front de undă (*ab* în fig. 41-7) într-o undă plană în spațiul liber, unde se va găsi

frontul de undă la momentul de timp ulterior t? Urmărind principiul lui Huygens, considerăm cîteva puncte din acest plan ca centri pentru unde sferice secundare. În timpul t raza acestor unde sferice este ct, unde c este viteza luminii în spațiul liber. Planul tangent la aceste sfere după timpul t este reprezentat de de. După cum ne așteptam, el este paralel cu planul ab și de la distanța ct de la acesta. Astfel fronturile de undă plane se propagă ca plane și cu viteza c. De notat că metoda lui Huygens presupune o construcție tridimensională și deci figura 41-7 este intersecția acestei construcții cu planul paginii.

Ne-am putea aștepta ca, contrar observației, o undă să fie radiată de către punctele din fig. 41-7 și înapoi nu numai înainte. Se poate evita acest rezultat presupunînd că *intensitatea* undelor sferice nu este uniformă în toate direcțiile ci variază continuu de la un maxim pe direcția înainte la zero pe direcția înapoi. Acest lucru este sugerat în fig. 41-7 prin diminuarea grosimii arcurilor circulare. Metoda lui Huygens poate fi aplicată cantitativ *tuturor* fenomenelor ondulatorii; vezi problema 1. Această metodă a fost fundamentată matematic de către Augustin Fresnel (1788—1827).

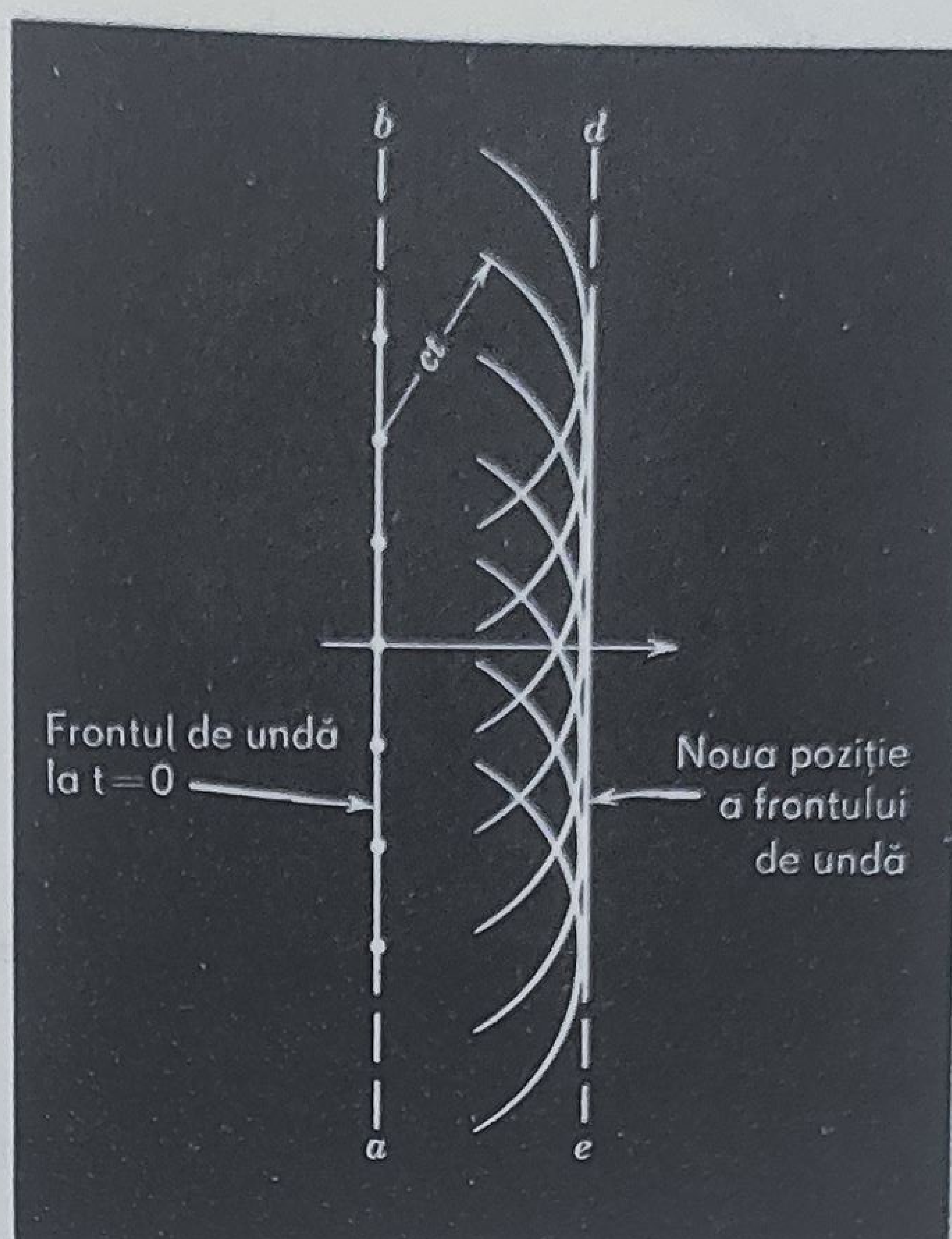


Figura 41-7. Propagarea unei unde plane în spațiul liber este descrisă de construcția lui Huygens. De notat că raza ce reprezintă unda (săgeata orizontală) este perpendiculară pe fronturile de undă.

41-3 Principiul lui Huygens și legea reflexiei

Figura 41-8 a ne prezintă trei fronturi de undă într-o undă plană ce cade pe oglinda MM'. Pentru comoditate ele au fost alese la distanță de o lungime de undă. De notat că θ_1, unghiul dintre fronturile de undă și oglindă, este același ca unghiul dintre raza incidentă și normala la oglindă. Cu alte cuvinte, θ_1 este *unghiul de incidență*. Cele trei fronturi de undă sînt legate între ele prin construcția lui Huygens, ca în fig. 41-7.

În figura 41-8 b o undă Huygens centrată în punctul a, după timpul λ/c va ajunge pînă în punctul l. Lumina provenită din punctul p de pe același front de undă nu poate trece în spatele oglinzii ci trebuie să se deplaseze în sus ca o undă sferică Huygens. Trăgînd un arc cu un compas cu raza λ în jurul lui p obținem un semicerc la care frontul de undă trebuie să fie tangent. Deoarece l trebuie să se găsească pe noul front de undă, această tangentă trebuie să treacă prin l. De notat că unghiul

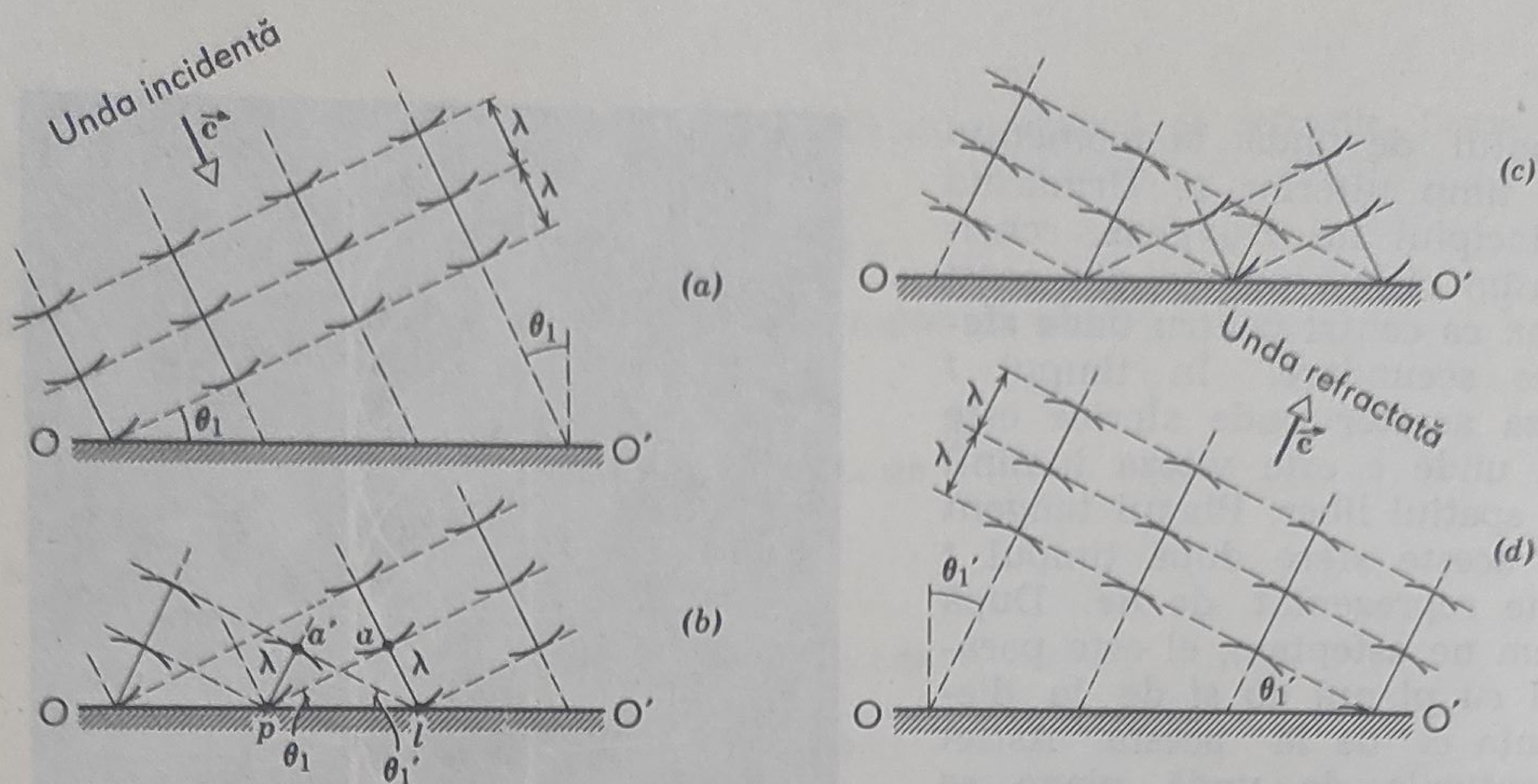


Figura 41-8. Reflexia unei unde plane, descrisă de construcția Huygens.

θ_1' dintre frontul de undă și oglindă este același ca unghiul dintre raza reflectată și normala la oglindă. Cu alte cuvinte θ_1' este *unghiul de reflexie*.

Să considerăm triunghiurile dreptunghice alp și $a'lp$. Ele au latura lp comună și latura al ($=\lambda$) este egală cu latura $a'p$. Cele două triunghiuri dreptunghice sînt astfel egale și ajungem la concluzia că

$$\theta_1=\theta_1'$$

după cum cere și legea reflexiei. Dacă cititorul își amintește că construcția lui Huygens este tridimensională și că arcurile din figuri reprezintă segmente de suprafețe sferice atunci se poate singur convinge că raza reflectată se află în planul format de raza incidentă cu normala la oglindă, adică planul figurii 41-8. Și aceasta constituie una din legile reflexiei; vezi pagina 379.

41-4 Principiul lui Huygens și legea refracției

În figura 41-9 sînt prezentate patru stadii a refracției a trei fronturi de undă succesive dintr-o undă plană ce cade pe interfața dintre aer (mediul 1) și sticlă (mediul 2). Pentru ușurință vom presupune că fronturile incidente sînt separate de λ_1, lungimea de undă măsurată în mediul 1. Fie vitezele luminii în aer v_1 și în sticlă v_2. Presupunem că

$$v_2 < v_1 \tag{41-5}$$

Ipoteza aceasta despre cele două viteze este vitală pentru cele ce urmează. Din cauza dificultăților tehnice ea nu s-a putut verifica experimental pînă în anul 1850 cînd Foucault a dovedit că este corectă.

Fronturile de undă din fig. 41-9 a sînt legate unele de altele prin construcția lui Huygens din fig. 41-7. Ca și în fig. 41-8, θ_1 este unghiul de incidență. Să considerăm timpul ($=\lambda_1/v_1$) în care o undă Huygens se

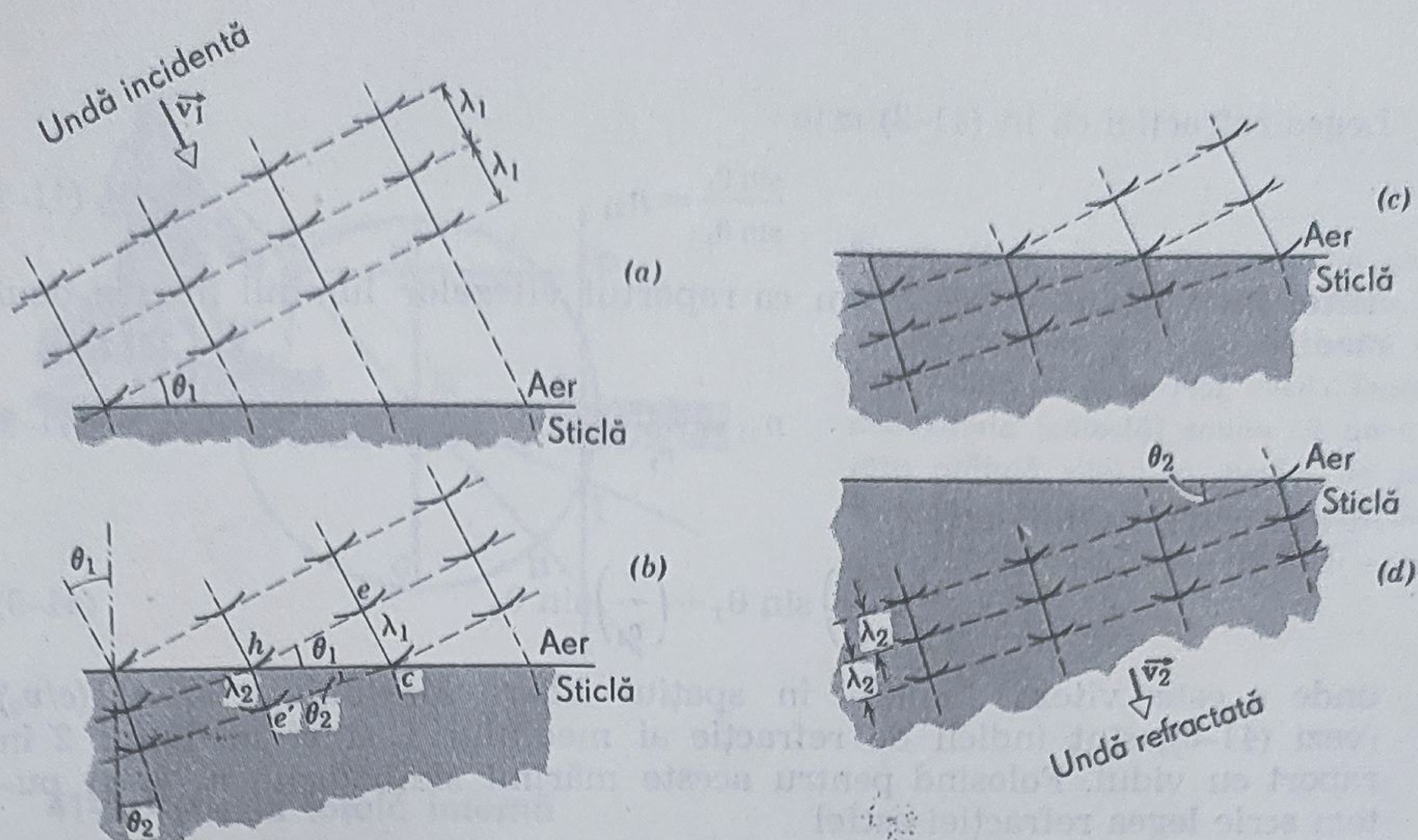


Figura 41-9. Refracția unei unde plane, descrisă de construcția Huygens, unda reflectată este omisă din simplitate. Remarcați modificarea lungimii de undă la refracție.

deplasează din punctul e în punctul c. Lumina care pleacă din punctul h, trecînd prin sticlă cu viteză mai mică (reamintiți-vă presupunerea din ecuația 41-5) se va deplasa pe o distanță mai scurtă

$$\lambda_2=\lambda_1 \frac{v_2}{v_1} \tag{41-6}$$

în tot acest timp. Frontul de undă refractat trebuie să fie tangent la un arc cu această rază și centrat în h. Deoarece c se găsește pe noul front de undă, tangenta trebuie să treacă prin acest punct, după cum se poate vedea. De notat că θ_2, unghiul dintre frontul de undă refractat și interferența aer-sticlă, este același cu unghiul dintre raza refractată și normala la această interfață. Cu alte cuvinte, θ_2 este *unghiul de refracție*. Să notăm, de asemenea, că lungimea de undă în sticlă (λ_2) este mai mică decît lungimea de undă în aer (λ_1).

Pentru triunghiurile dreptunghice hce și hce' se potate scrie

$$\sin \theta_1=\frac{\lambda_1}{hc} \text{ (pentru } hce)$$

și

$$\sin \theta_2=\frac{\lambda_2}{hc} \text{ (pentru } hce').$$

Impărțindu-le și utilizînd ecuația (41-6) se obține

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}=\text{constant} \tag{41-7}$$

Legea refracţiei ca în (41-2) este

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21} \tag{41-2}$$

astfel încît n_{21} ne apare acum ca raportul vitezelor luminii în cele două medii

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{41-8}$$

Putem rescrie (41-7) astfel

$$\left(\frac{c}{v_1}\right) \sin \theta_1 = \left(\frac{c}{v_2}\right) \sin \theta_2 \tag{41-9}$$

unde c este viteza luminii în spaţiul liber. Mărimile (c/v_1) şi (c/v_2) (vezi (41-8)) sînt indicii de refracţie ai mediului 1 şi ai mediului 2 în raport cu vidul. Folosind pentru aceste mărimi simbolurile n_1 şi n_2 putem scrie legea refracţiei astfel

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{41-10}$$

Dacă presupunem că mediul de deasupra sticlei, în fig. 41-9, este vidul în loc de aer, viteza v_1 devine c şi lungimea de undă, notată cu λ_1 în fig. 41-9, capătă valoarea λ ce este o caracteristică a undei în spaţiul liber. Ecuaţia 41-6 se poate scrie

$$\lambda_2 = \lambda \frac{v_2}{c} = \frac{\lambda}{n_2}. \tag{41-11}$$

Se observă astfel în mod special că lungimea de undă a luminii într-un mediu material este mai mică decît lungimea de undă a aceleiaşi unde în vid. În figura 41-9 se vede clar diferenţa lungimilor de undă în cele două medii.

Pentru a aplica principiul lui Huygens la refracţie se cere ca atunci cînd o rază de lumină este frîntă spre normală în trecerea de la aer la un mediu optic dens viteza luminii în acel mediu dens (fie sticlă) trebuie să fie *mai mică* decît cea în aer; vezi ec. (41-5). Această cerinţă este valabilă pentru toate teoriile ondulatorii ale luminii. În teoria corpusculară mai veche, iniţiată de Newton, refracţia poate fi explicată numai dacă viteza luminii în mediul în care lumina este frîntă spre normală (mediul optic dens) este *mai mare* decît cea în aer. S-a presupus că mediul dens exercită forţe atractive asupra „corpusculilor" de lumină atunci cînd se apropie de suprafaţă, mărindu-le viteza şi schimbîndu-le direcţia pentru ai face să facă un unghi mai mic cu normala. Fig. 41-10 ne prezintă o figură dintr-o lucrare din 1637 a lui René Descartes, unde se face o analogie între refracţia luminii şi mişcarea unei mingi de tenis la intrarea într-un mediu unde se deplasează mai încet.

În acest mod, pentru teoriile ondulatorii şi corpusculare ale luminii o comparaţie experimentală între viteza luminii în aer şi cea din apă este decisivă. O astfel de măsurătoare a fost efectuată pentru prima dată de către Foucault în 1850; el a arătat clar că *lumina trece prin apă mai încet decît în aer*, eliminînd, astfel, teoria corpusculară a lui Newton.

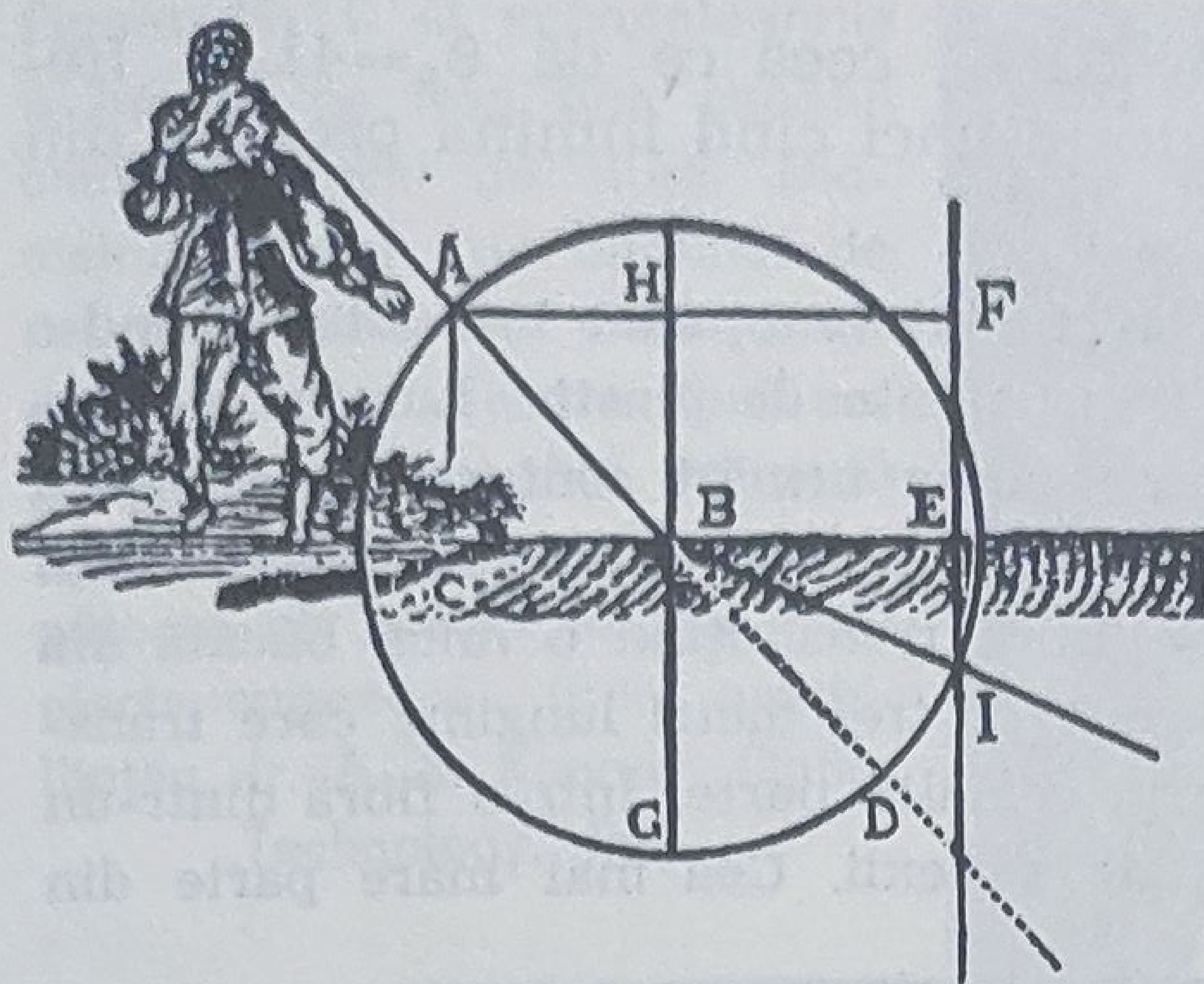


Figura 41-10. După teoria veche corpusculară (incorectă) a luminii *ABI* este drumul razei ce intră într-un mediu în care viteza ei este *mai mică*. Teoria ondulatorie (corectă) spune că pentru raza arătată viteza în mediul de jos (sub *BE*) trebuie să fie *mai mare*; din *Dioptica* lui Descartes (1637).

41-5 Reflexia totală internă

Să lăsăm raze de lumină dintr-un mediu optic mai dens (de ex. sticlă) să cadă pe suprafața de separare cu un mediu optic mai puțin dens (de ex. aer); vezi fig. 41-11. Pe măsură ce se mărește unghiul de incidență θ, se ajunge la situația în care (vezi raza *e*) raza este refractată în lungul suprafeței, unghiul de refracție fiind de 90°. Pentru unghiuri incidență mai mari decît acest *unghi critic* θ_c numai există rază refractată, obținîndu-se astfel fenomenul denumit *reflexie totală internă*.

Pentru a găsi unghiul critic facem $\theta_2=90°$ în legea refracției (vezi ec. 41-10)

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90°$$

sau

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (41\text{-}12)$$

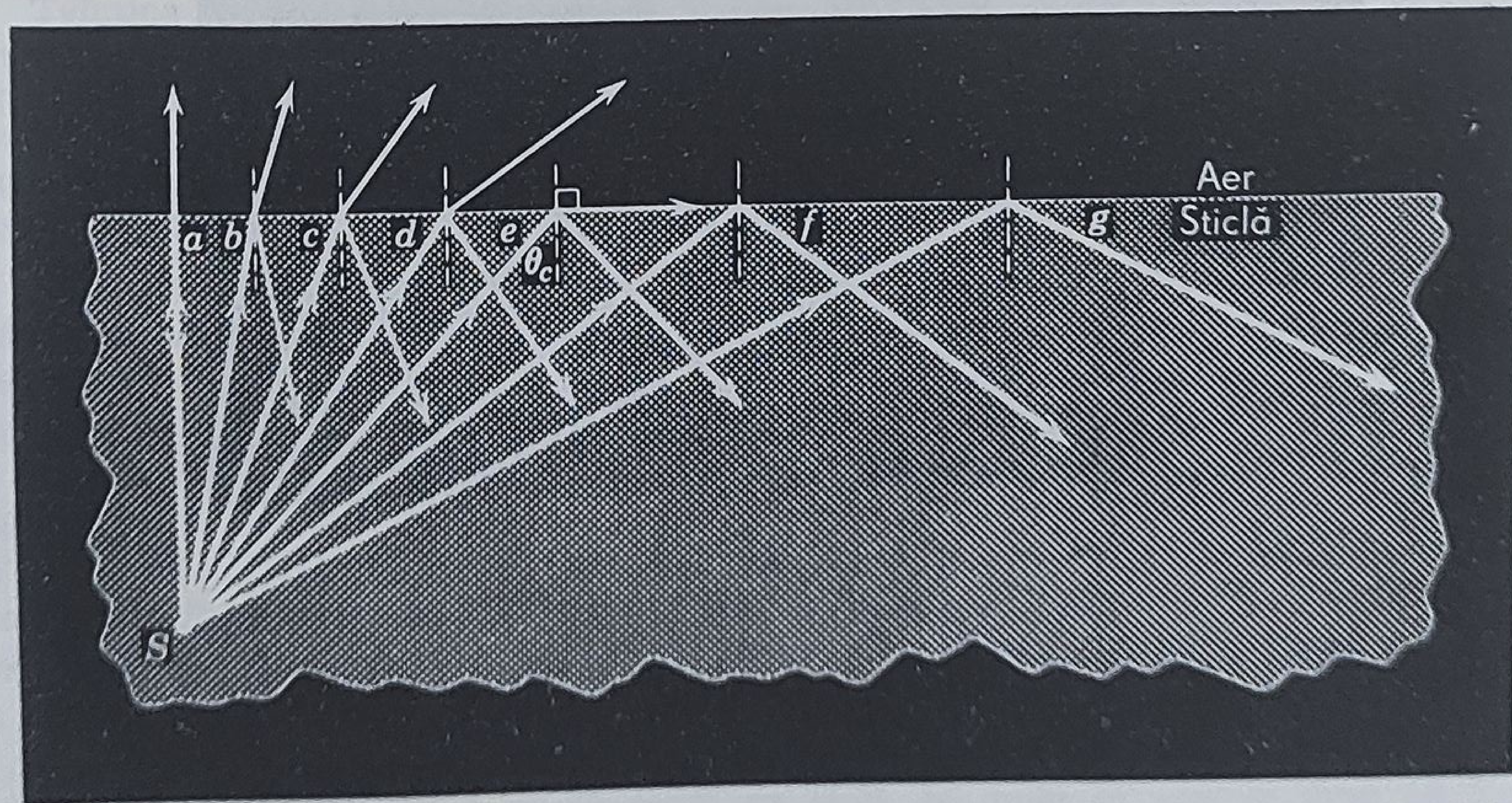


Figura 41-11. Reflexia totală internă a luminii de la o sursă *S*; unghiul critic este θ_c.

Pentru sticlă și aer sin $\theta_c = (1,00/1,50) = 0,667$, ceea ce dă $\theta_c = 41,8°$. Reflexia totală internă nu se poate produce atunci cînd lumina provine din mediul cu indice de refracție mai mic.

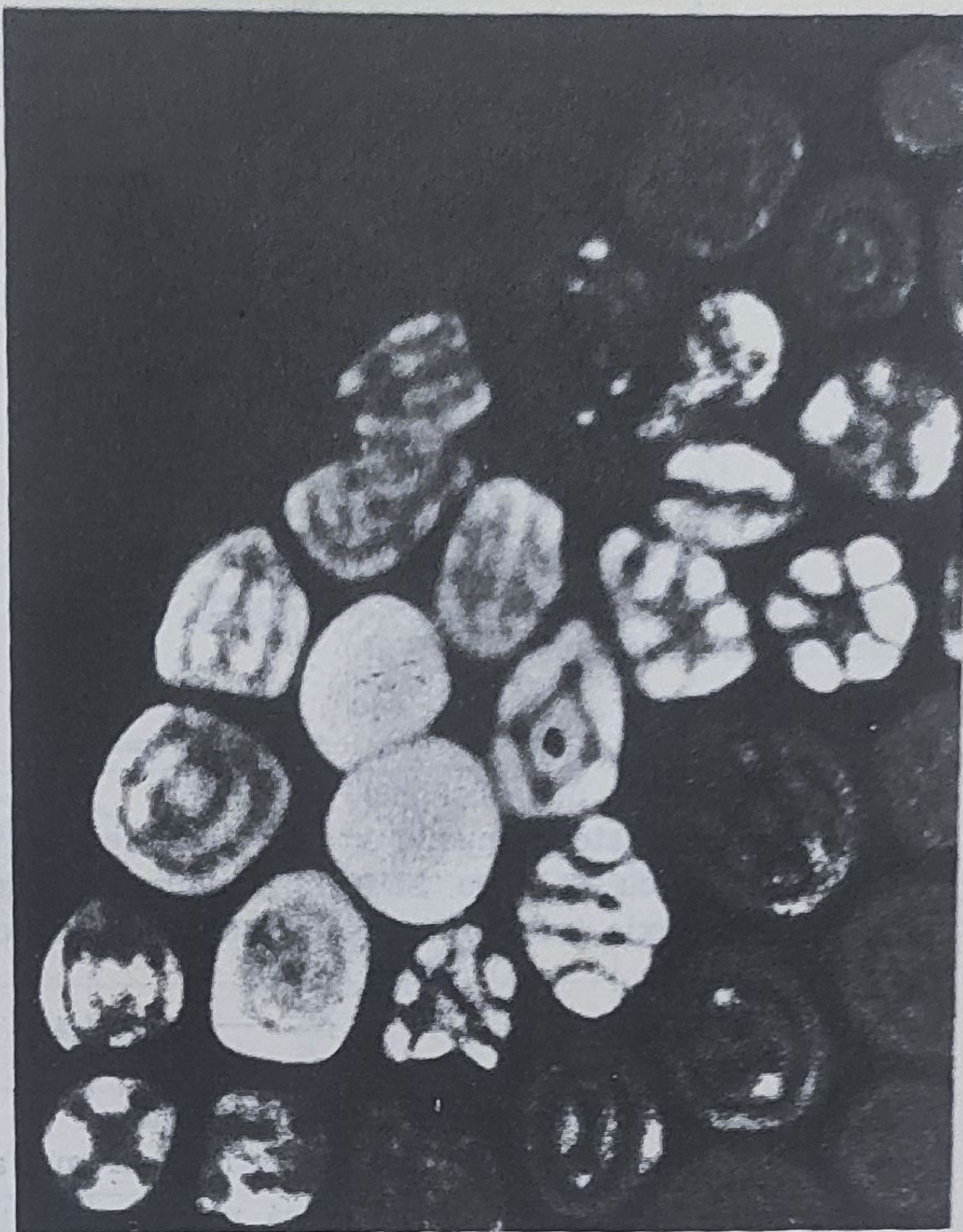
Lumina poate fi „condusă“ cu pierderi mici dintr-un punct într-altul lăsînd-o să intre prin unul din capetele unei bare transparente de plastic. Lumina va suferi reflexii totale interne pe suprafețele barei și va urmări conturul ei ajungînd pînă la capătul celălalt. Se pot transmite imagini dintr-un loc într-altul utilizînd un mănunchi de fibre fine de sticlă, fiecare fibră transmițînd o mică bucată din imagine*. Se pot face astfel de cabluri flexibile de trei metri lungime care transmit pînă la jumătate din energia ce intră prin cealaltă parte. Într-o fibră dintr-un astfel de cablu o rază poate suferi 48 000 de reflexii. Cea mai mare parte din



Figura 41-12. Un fascicul de fibre (jos) este plasat deasupra literei *S*. Deasupra, cu ajutorul unei oglinzi, vedem că imaginea, redusă în dimensiune, este transmisă spre capătul de sus al fasciculului prin reflexie internă totală în fibrele individuale (Prin amabilitatea Dr. N. S. Kapany, Optics Technology, Inc.).

* Vezi: „Optica Fibrelor“ de N. S. Kapany, *Scientific American*, noiembrie 1960.

Figura 41-13. O microfotografie a luminii ce iese prin capătul unui mănunchi de fibre. Diametrul fibrelor este apropiat de cel al lungimii de undă a luminii astfel că fiecare fibră acţionează ca un „ghid de undă optic". Avem o dovadă convingătoare că lumina este o undă electromagnetică. (Prin amabilitatea dr. A. S. Kopany, Optics Technology, Inc).



pierderea de energie este datorată absorbţiei în interiorul sticlei, reflexia fiind într-adevăr aproape totală. Printr-o singură fibră de 50 m lungime pot fi transmise cantităţi măsurabile de energie luminoasă.

Tehnica fibrelor optice a deschis posibilitatea multor dispozitive optice utile în transmiterea şi transformarea imaginilor luminoase. În figura 41-12 ve vede un mănunchi de fibre scurte al căror diametru se îngustează. Capătul mai larg este plasat deasupra literei S din cuvîntul OPTICS. Putem vedea cu ajutorul unei oglinzi plasate deasupra mănunchiului că litera S, micşorată a fost transmisă prin mănunchi pînă la capătul mai îngust prin reflexie totală internă.

În figura 41-13 este prezentată o vedere mărită a secţiunii unui astfel de mănunchi de fibre al căror diametru este atît de mic încît este de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii. Această condiţie violează spiritul aserţiunii din pag. 382, şi anume că dimensiunile transversale ale suprafeţelor de reflexie şi de refracţie sînt largi în comparaţie cu lungimea de undă a luminii. De aceea nu mai este posibilă descrierea reflexiei şi refracţiei luminii în termeni de raze, ca în figurile 41-10 şi 41-11. Figura 41-13 poate fi, totuşi, interpretată uşor pe baza teoriei electromagnetice a undelor luminoase şi constituie totodată o dovadă pictorială convingătoare în sprijinul acestei teorii. Fibrele se comportă ca ghiduri de undă* (vezi paragraful 39.3) şi figurile întunecate şi luminate reprezintă distri-

---

* O vergea dielectrică poate servi ca ghid de unde în acelaşi mod ca o conductă metalică şi are proprietăţi similare.

buţia vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ pentru diferite moduri de oscilaţie a undelor electromagnetice ce trec dealungul „ghidului".

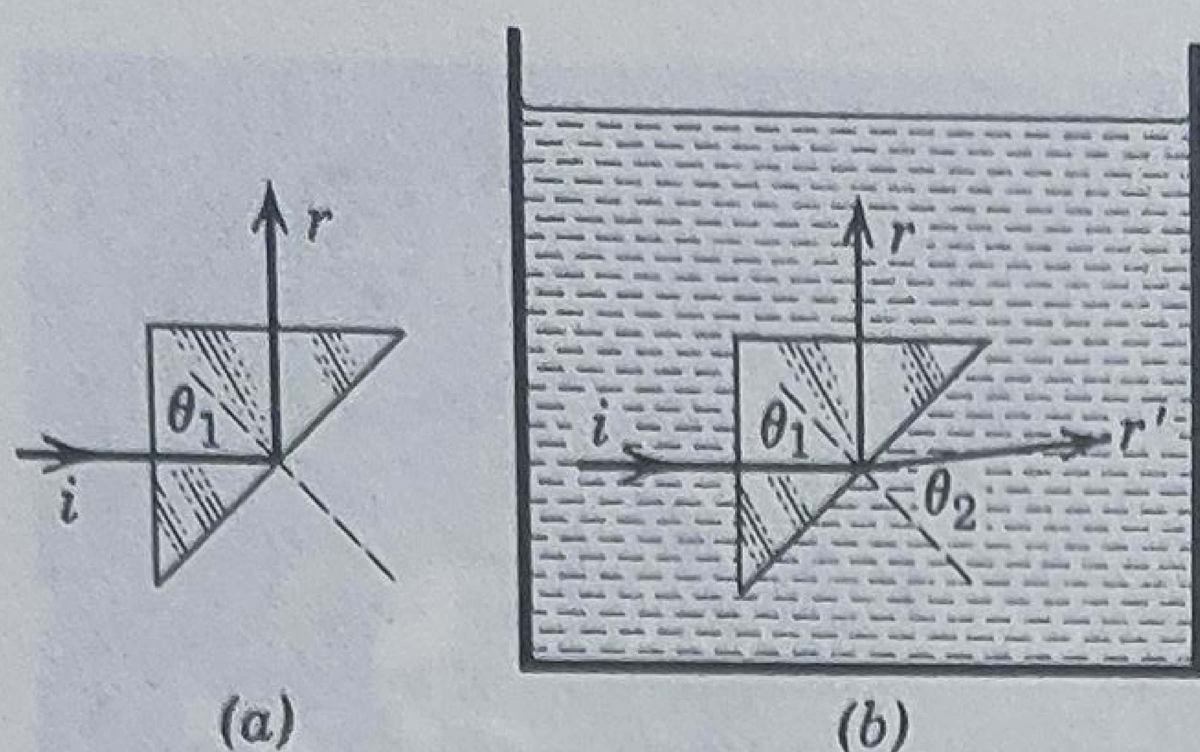


Figura 41-14. Exemplul 4.

Exemplul 4. În figura 41.14a este prezentată o prismă triunghiulară de sticlă; o rază incidentă normală pe una din feţe fiind total reflectată. Dacă θ_1 este de 45°, ce puteţi spune despre indicele de refracţie n al sticlei?

Unghiul θ_1 trebuie să fie mai mare sau egal decît unghiul critic θ_c unde θ_c este dat de ecuaţia (41-12)

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n}$$

în care, pentru toate scopurile practice, indicele de refracţie al aerului ($=n_2$) este considerat egal cu unitatea. Să presupunem că indicele de refracţie al sticlei este astfel încît reflexia totală internă tocmai apare, adică, $\theta_c = 45°$. Aceasta ar însemna

$$n = \frac{1}{\sin 45°} = 1{,}41.$$

Astfel, indicele de refracţie al sticlei trebuie să fie *egal sau mai mare decît 1,41.* Dacă ar fi mai mic, reflexia totală internă n-ar mai avea loc.

Exemplul 5. Ce se întîmplă dacă prisma din Exemplul 4 (presupunînd că $n=1{,}50$) este introdusă în apă ($n=1{,}33$)? Vezi fig. 41-14 b.

Noul unghi critic dat de ecuaţia 41-12, este

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}33}{1{,}50} = 0{,}887$$

care corespunde la $\theta_c = 62{,}5°$. Unghiul de incidenţă ($=45°$) este mai mic decît acesta astfel încît *nu* avem reflexie totală internă.

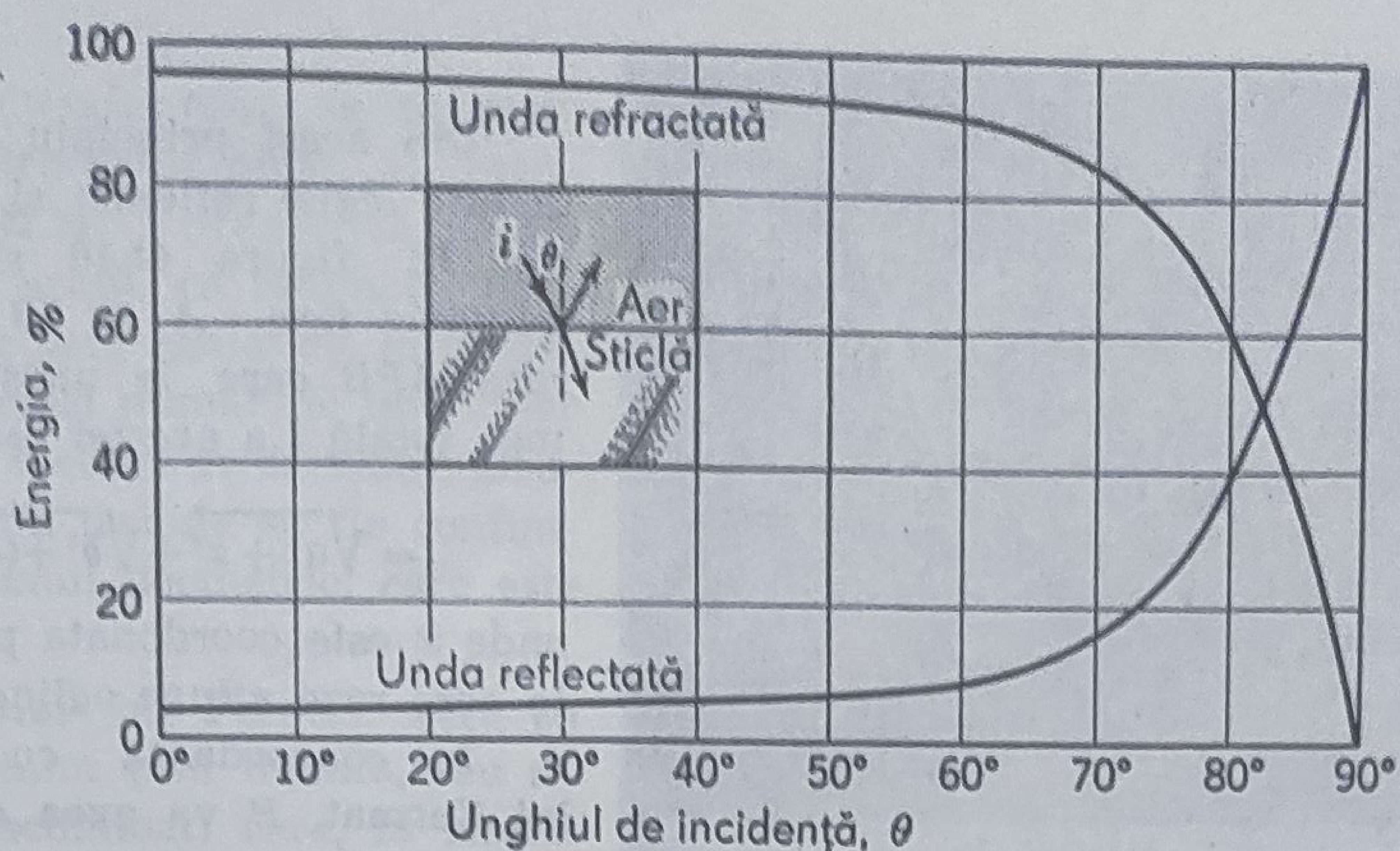
Există o rază reflectată, cu unghiul de reflexie de 45°, după cum se vede în fig. 41-14 b. Există deasemenea o rază refractată, cu unghiul de refracţie dat de

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$(1{,}50)\,(\sin 45°) = (1{,}33)\,\sin\theta_2$$

care dă $\theta_2 = 52{,}9°$.

Ecuaţiile lui Maxwell ne permit să calculăm modul în care se împarte energia incidentă între fasciculele reflectate şi refractate. În figura 41-15 este prezentată estimarea teoretică pentru (a) un fascicul de lumină din aer ce cade pe interfaţa sticlă-aer, şi (b) un fascicul de lumină din sticlă căzînd pe o asemenea interfaţă. În figura 41-15 a se observă că pentru unghiuri de incidenţă pînă la 50°, mai puţin de 10% din energia luminii este reflectată. La incidenţă razantă, totuşi, (adică unghiuri de incidenţă apropiate de 90°), suprafaţa devine un reflector excelent. Ne este tuturor familiară puterea reflectantă a unui drum ud pentru lumina farurilor unui automobil care cade aproape de incidenţa razantă.



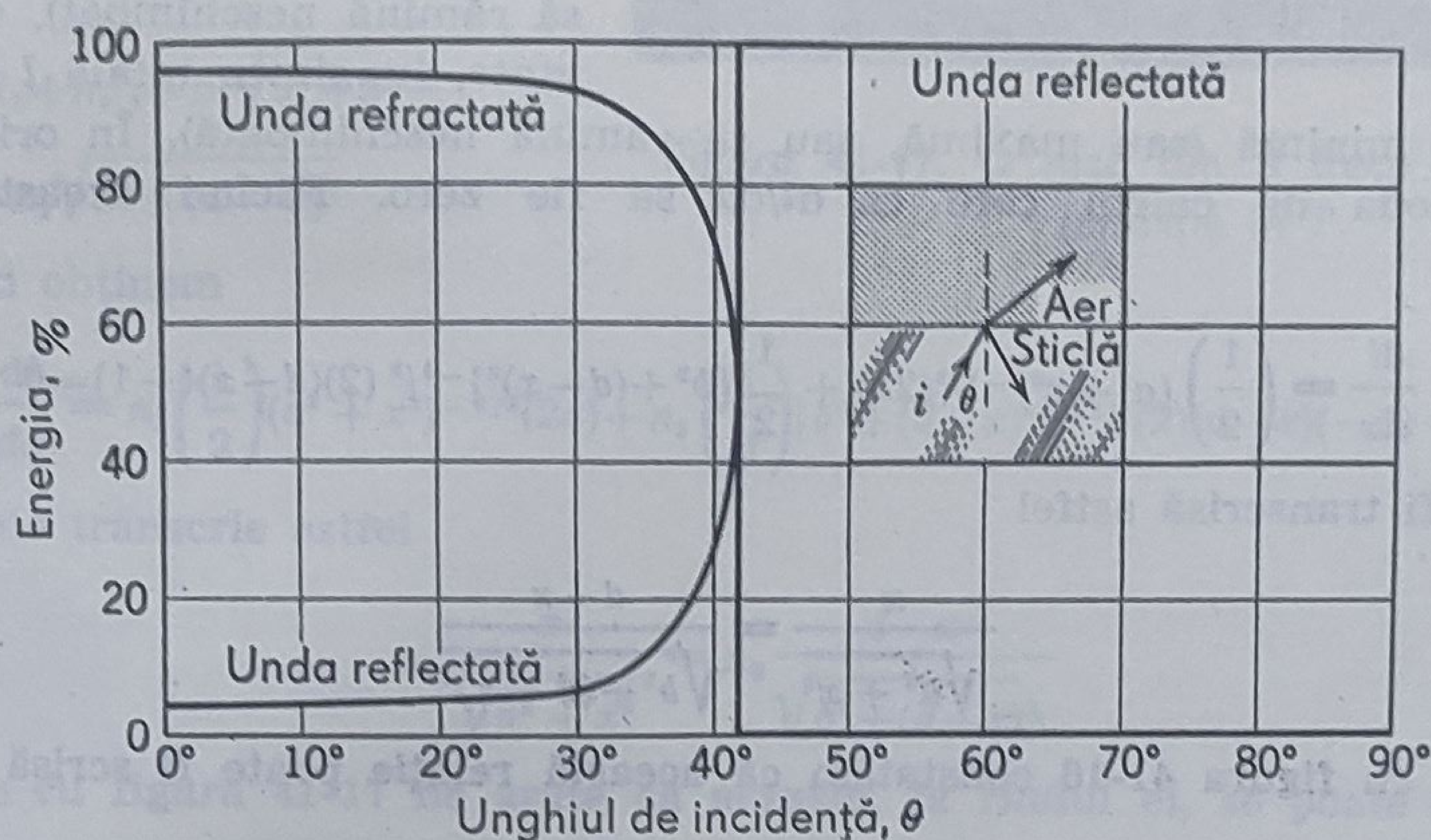


Figura 41-15. (*a*) Procentul de energie reflectată şi refractată cînd o undă incidentă din aer cade pe sticlă (n=1,50). (*b*) Aceeaşi pentru unda incidentă în sticlă, arătînd reflexia totală internă.

În figura 41-15 b se vede clar că la un anumit unghi critic (41,8° în acest caz; vezi ecuaţia 41-12) *toată* lumina este reflectată. Pentru unghiuri de incidenţă apreciabil sub această valoare, aproape 4% din energie este reflectată.

41-6 Principiul lui Fermat

Pierre Fermat a descoperit în 1650 un principiu remarcabil care în zilele noastre este adesea exprimat în termenii următori: *o rază de lumină trecînd de la un punct la altul va urma acel drum care, comparat cu drumurile alăturate, cere sau un timp minim, sau maxim, sau neschimbat (adică timpul va fi staţionar).*

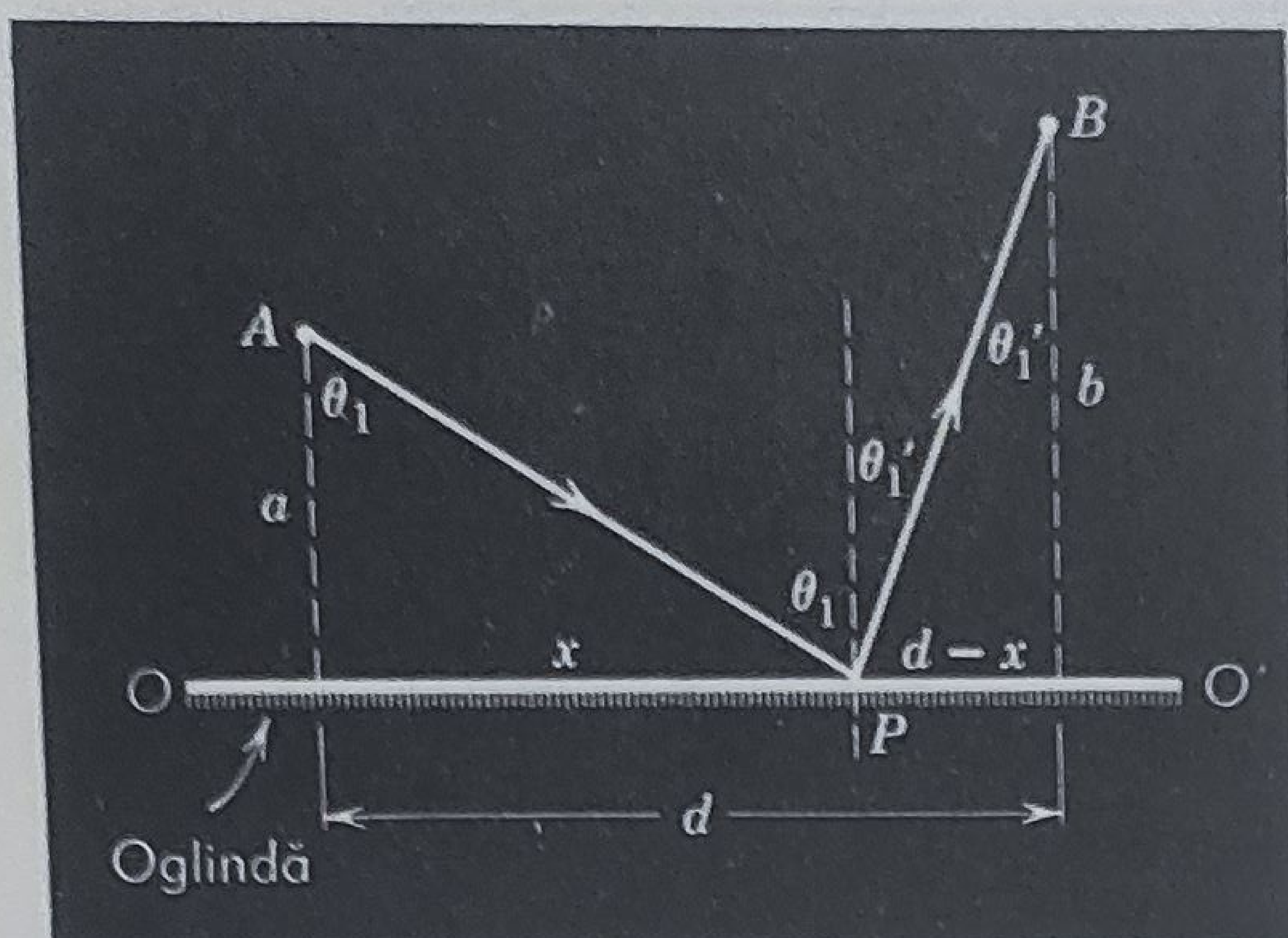


Figura 41-16. O rază din A trece prin B după reflexie în P.

Din acest principiu pot fi uşor deduse legile reflexiei şi ale refracţiei. În figura 41.16 sînt arătate punctele fixe A şi B precum şi raza APB care le uneşte*. Lungimea totală l a acestei raze este

$$l=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

unde x este coordonata punctului P în care raza atinge oglinda.

În concordanţă cu principiul lui Fermat, P va avea o astfel de poziţie încît timpul de trecere a luminii să fie minim (sau maxim, sau să rămînă neschimbat). Cu alte cuvinte, lungimea totală l a razei trebuie să fie minimă (sau maximă, sau să rămînă neschimbată). În oricare dintre cazuri, metoda de calcul cere ca dl/dx să fie zero. Făcînd această derivată obţinem

$$\frac{dl}{dx}=\left(\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-1/2}(2x)+\frac{1}{2}[b^2+(d-x)^2]^{-1/2}(2)(d-x)(-1)=0$$

care poate fi transcrisă astfel

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

Comparînd cu figura 41-16 constatăm că această relaţie poate fi scrisă ca

$$\sin\theta_1=\sin\theta_1'$$

sau

$$\theta_1=\theta_1'$$

care este tocmai legea reflexiei.

Pentru a obţine legea refracţiei din principiul lui Fermat, să considerăm figura 41-17, în care avem punctele A şi B în două medii diferite şi raza APB care le uneşte.

Timpul t este dat de

$$t=\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}.$$

Utilizînd relaţia $n=c/v$ aceasta poate fi scris ca

$$t=\frac{n_1l_1+n_2l_2}{c}=\frac{l}{c}.$$

---

* Presupunem că raza APB se află în planul figurii; vezi problema 20.

Mărimea $l(=n_1l_1+n_2l_2)$ se numește *lungimea drumului optic* al razei. Ecuația (41.11) (transcrisă astfel $\lambda=n\lambda_n$) ne arată că lungimea drumului optic este egală cu lungimea pe care același număr de unde l-ar avea dacă mediul ar fi vidul. Drumul optic nu trebuie să fie confundat cu drumul geometric, care este l_1+l_2.

Principiul lui Fermat cere ca l să fie minim (sau maxim, sau să rămînă neschimbat) care, la rîndul lui, implică alegerea lui x astfel încît $dl/dx=0$. Drumul optic este

$$l=n_1l_1+n_2l_2=n_1\sqrt{a^2+x^2}+$$
$$+n_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

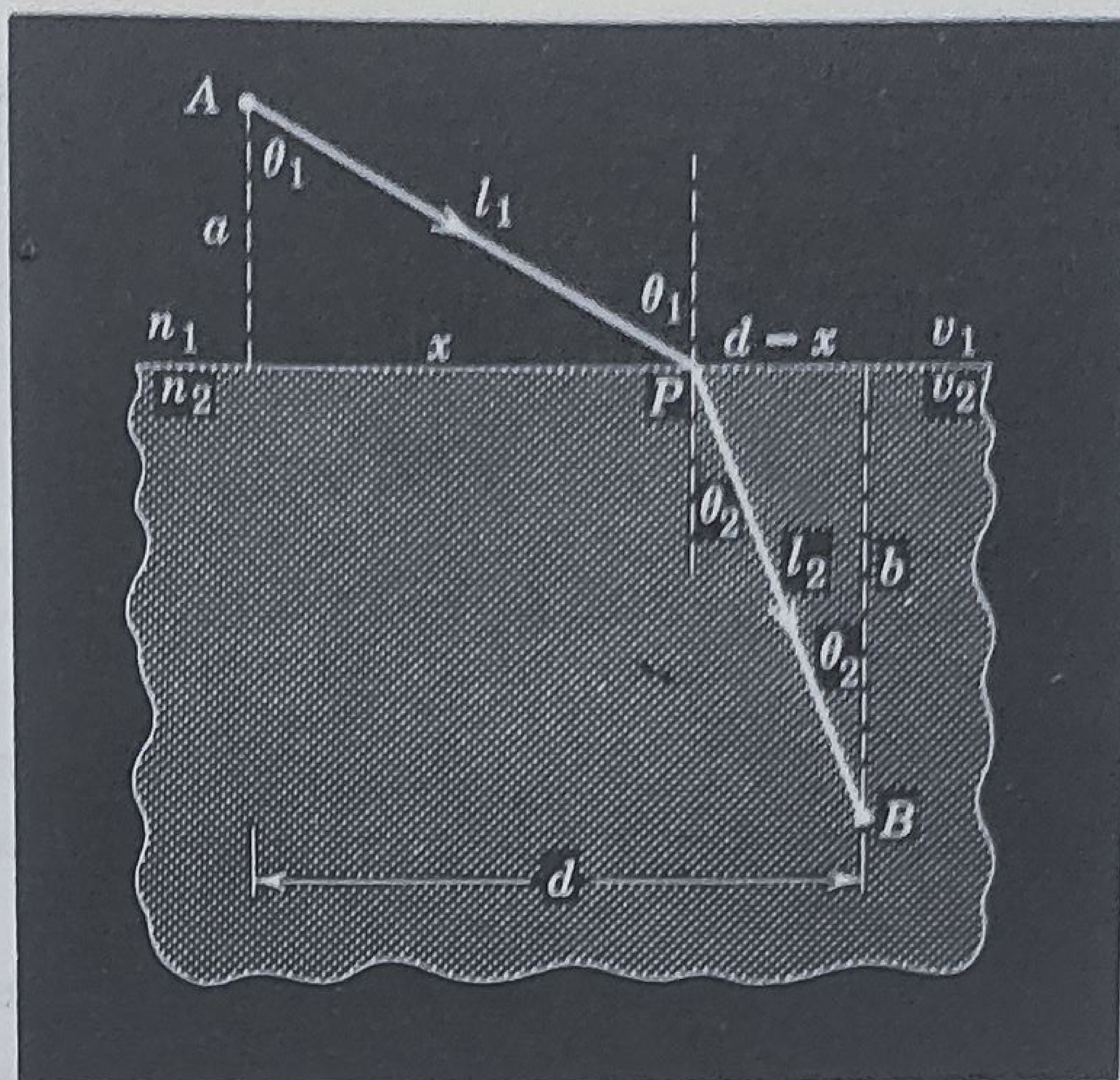


Figura 41-17. O rază din *A* trece prin *B* după refraxție în *P*.

Diferențiind obținem

$$\frac{dl}{dx}=n_1\left(\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-1/2}(2x)+n_2\left(\frac{1}{2}\right)[b^2+(d-x)^2]^{-1/2}(2)(d-x)(-1)=0$$

care se poate transcrie astfel

$$n_1\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=n_2\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

Comparația cu figura 41-17 ne arată că aceasta, la rîndul ei, se poate scrie

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

care este tocmai legea refracției.

În fiecare dintre exemplele din această secțiune timpul necesar, sau, ceea ce este echivalent, drumul optic, se dovedește a fi *minim*. Problema 22 ne prezintă un caz în care el poate fi maxim, minim, sau staționar.

Întrebări

1. Discutați propagarea undelor sferice și cilindrice utilizînd principiul lui Huygens.

2. Poate fi aplicat principiul lui Huygens și undelor sonore din aer?

3. Dacă principiul lui Huygens prezice legile reflexiei și ale refracției de ce este necesar sau dezirabil să vedem lumina ca o undă electromagnetică, cu toată complexitatea ce însoțește acest lucru?

4. V-ați aștepta ca undele sonore să asculte de legile reflexiei și ale refracției de care ascultă și undele luminoase?

5. O lumină de pe stradă văzută prin reflexie pe suprafața unduită a unei ape apare foarte alungită. Explicați.

6. Fasciculul de lumină din Fig. 41-1 a este lărgit la intrarea în apă. Explicați.

7. Cu cît la sută diferă viteza luminii albastre de cea a luminii roşii în sticla de cuarţ?

8. Pentru determinarea lungimii de undă a luminii pot fi utilizate (a) fenomenele de reflexie sau (b) fenomenele de refracţie?

9. Cum a decis măsurătoarea vitezei luminii în apă făcută de Foucault între teoriile ondulatorii şi corpusculare ale luminii?

10. De ce un diamant străluceşte mai tare decît o imitaţie de sticlă tăiată în acelaşi mod?

11. Este plauzibil ca lungimea de undă a luminii să se modifice în trecerea de la aer la sticlă dar frecvenţa ei nu? Explicaţi.

12. Cum s-ar putea determina indicii de refracţie relativi la apă ai mediilor din tabela 41-1 cu datele din acelaşi Tablou?

13. Vi se dă un cub de sticlă. Cum puteţi determina viteza luminii în acest cub (de la o sursă de sodiu)?

14. Descrieţi şi explicaţi ce vede un peşte cînd priveşte în diferite direcţii deasupra „orizontului" său.

15. Proiectaţi un periscop profitînd de reflexia totală internă. Care ar fi avantajele în comparaţie cu oglinzile argintate?

16. Ce caracteristici trebuie să aibă un material ca să servească drept „conductă de lumină"?

17. Poate fi vreodată drumul optic dintre două puncte mai mic decît drumul geometric dintre acele puncte?

Probleme

1. Capătul unui băţ este tîrît prin apă cu o viteză v care este mai mare decît viteza u a undelor din apă. Aplicînd construcţia lui Huygens undelor apei arătaţi că apare un front de undă conic al cărui semiunghi α este dat de

$$\sin \alpha = u/v.$$

Aceasta este familiara undă de provă a unei nave sau unda de şoc a unui obiect care se mişcă prin aer cu o viteză mai mare decît cea a sunetului, ca în figura 20-12.

2. Arătaţi că dacă o oglindă se roteşte cu unghiul α atunci raza reflectată este rotită cu unghiul 2α. Este acest rezultat rezonabil şi pentru $\alpha = 45°$?

3. Care este viteza luminii cu lungimea de undă de 5 500 Å în sticla de cuarţ; vezi figura 41-2?

4. Lungimea de undă a luminii galbene a sodiului în aer este 5 890 Å. (a) Care este frecvenţa ei? (b) Care este lungimea ei de undă în sticla cu indicele de refracţie 1,52? (c) Din rezultatele (a) şi (b) găsiţi viteza în sticlă.

5. S-a măsurat viteza luminii galbene a sodiului într-un lichid oarecare şi s-a găsit $1{,}92\ 10^8$ m/s. Care este indicele de refracţie a acestui lichid în raport cu aerul pentru lumina de sodiu?

6. Să presupunem dată viteza luminii în aer cu o eroare de să zicem, 1 km/s. Pentru a calcula viteza în vid, să presupunem că nu cunoaştem exact dacă n pentru aer este 1,00029 sau 1,00030. (a) Ce eroare în plus se introduce în valoarea calculată pentru c? (b) Estimaţi cu cîtă acurateţe ar trebui să fie cunoscut n pentru acest scop.

7. Arătaţi pe cale grafică în figura 41-6, utilizînd un raportor, că dacă θ razei incidente este *fie* mărit *ori* micşorat, ψ unghiul de deviaţie se măreşte. Situaţia simetrică din această

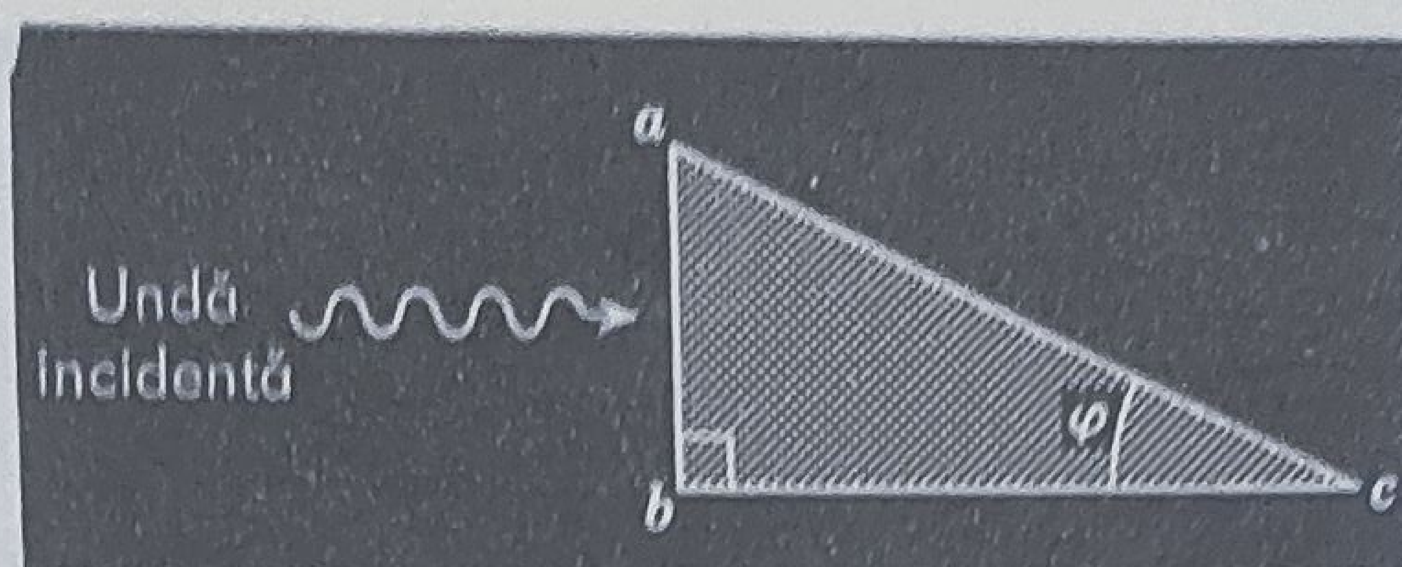


Figura 41-18.

figură se numește *poziția deviației minime*.

8. O rază de lumină cade normal pe fața unei prisme de sticlă (*ab*) cu indicele de refracție $n=1{,}52$ ca în Fig. 41-18. (*a*) Presupunînd că prisma este imersată în aer găsiți valoarea cea mai mare pentru unghiul Φ astfel încît raza să fie reflectată total pe fața *ac*. (b) Găsiți Φ în cazul în care prisma este imersată în apă.

9. Arătați că pentru o prismă subțire (Φ mic) și lumina nu prea depărtată de incidența normală (θ_1 mic) unghiul de deviație este independent de unghiul de incidență și este egal cu $(n-1)\ \theta$ (vezi fig. 41-6).

10. O prismă de sticlă cu unghiul de la vîrf de 60° are $n=1{,}60$. (*a*) Care este cel mai mic unghi de incidență pentru care o rază poate intra prin o față a prismei și ieși prin cealaltă față? (*b*) Ce unghi de incidență va fi necesar ca raza să treacă prin prismă în mod simetric, ca în figura 41-6?

11. O prismă de 60° este făcută din sticlă de cuarț. O rază de lumină cade pe o față făcînd un unghi de 45° cu normala. Trasați cu grije, grafic, raza prin prismă, arătînd drumurile străbătute de (*a*) lumina albastră (*b*) lumina galben-verde, (*c*) lumina roșie (vezi fig. 40-2 și 41-2).

12. Ptolemeu, care a trăit în Alexandria spre sfîrșitul secolului I e.n., a dat următoarele valori măsurate pentru unghiul de incidență θ_1 și un-

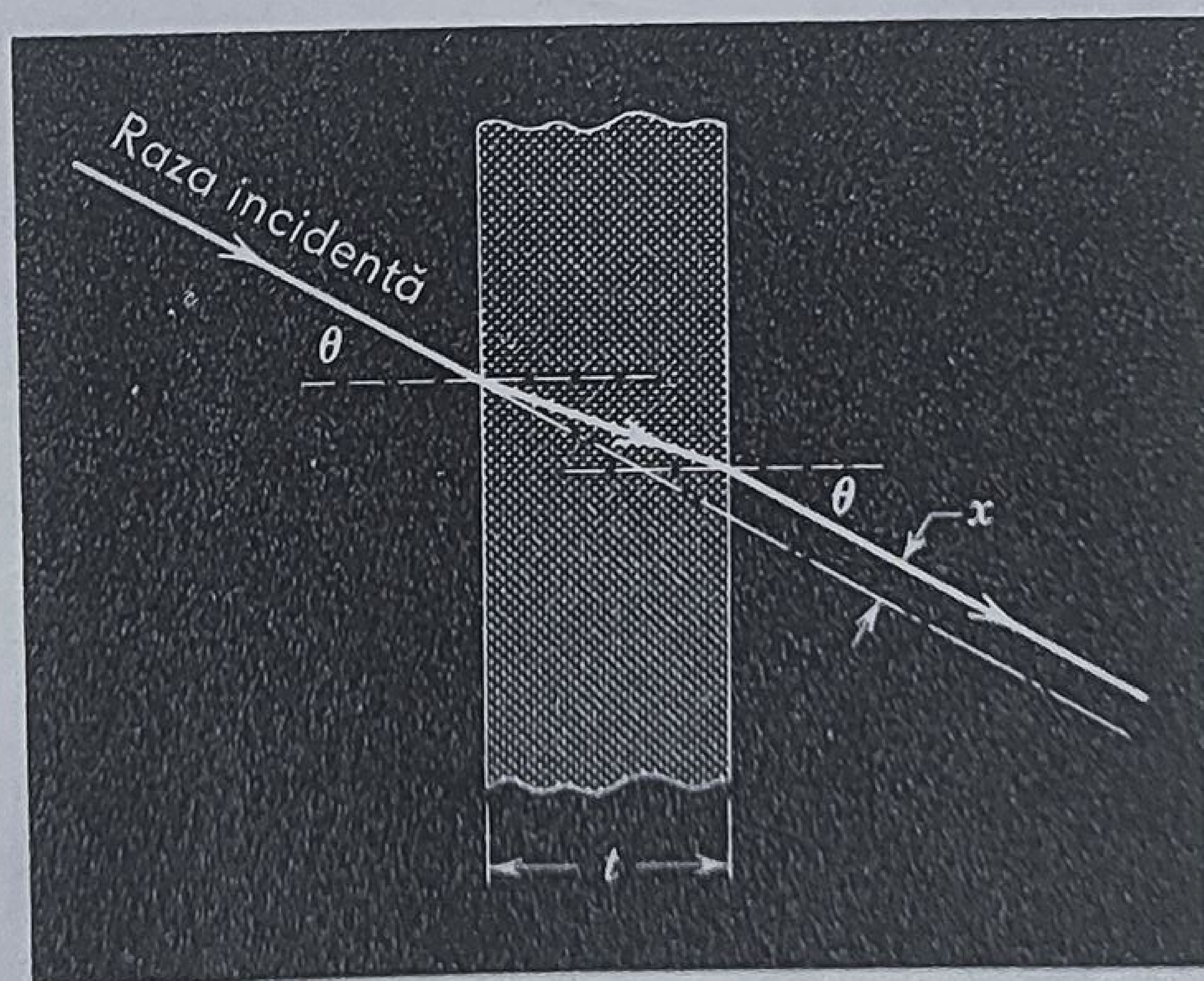


Figura 41-19.

ghiul de refracţie θ_2 pentru un fascicul de lumină ce trece din aer în apă:

θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
10°	7°45′	50°	35°0′
20°	15°30′	60°	40°30′
30°	22°30′	70°	45°30′
40°	29°0′	80°	50°0′

Sînt datele acestea în concordanţă cu legea lui Snell; dacă da, ce indice de refracţie rezultă? Aceste date sînt interesante ca fiind cele mai vechi înregistrări de măsurători de fizică.

13. Dovediţi că o rază de lumină incidentă pe suprafaţă unei foi plate de sticlă de grosime t iese prin cealaltă faţă paralelă cu direcţia iniţială dar deplasată într-o parte, ca în figura 41-19. Arătaţi că, pentru unghiuri de incidenţă θ mici, această deplasare este dată de

$$x = t\,\theta\,\frac{n-1}{n}$$

unde n este indicele de refracţie şi este măsurat în radiani.

14. O undă plană de lumină albă propagîndu-se în sticlă de cuarţ intersectează o suprafaţă plană a cuarţului, făcînd un unghi de incidenţă θ. Este posibil ca fasciculul reflectat intern să apară (a) albăstrui, (b) roşiatic? Aproximativ ce valoare a lui θ ar trebui utilizată? (Indicaţie: Lumina albă va apărea albăstruie dacă lungimile de undă corespunzînd roşului sînt scoase din spectru.)

15. O sursă de lumină punctiformă este plasată la distanţa h sub suprafaţa unui lac mare şi adînc. (a) Arătaţi că fracţiunea f de energie luminoasă ce iese direct din apă este independentă de h şi este dată de

$$f = \frac{1}{2n^2}$$

unde n este indicele de refracţie al apei. (Notă: S-a neglijat absorbţia în apă şi reflexia la suprafaţă — cu excepţia celei totale)((b) Evaluaţi această funcţie pentru $n = 1{,}33$.

16. În figura 41-20 este prezentată *prisma de deviaţie constantă.* Deşi este făcută dintr-o singură bucată de sticlă, ea este echivalentă cu două prisme 30°—60°—90° şi una 45°—45°—90°. Lumina albă este incidentă pe di-

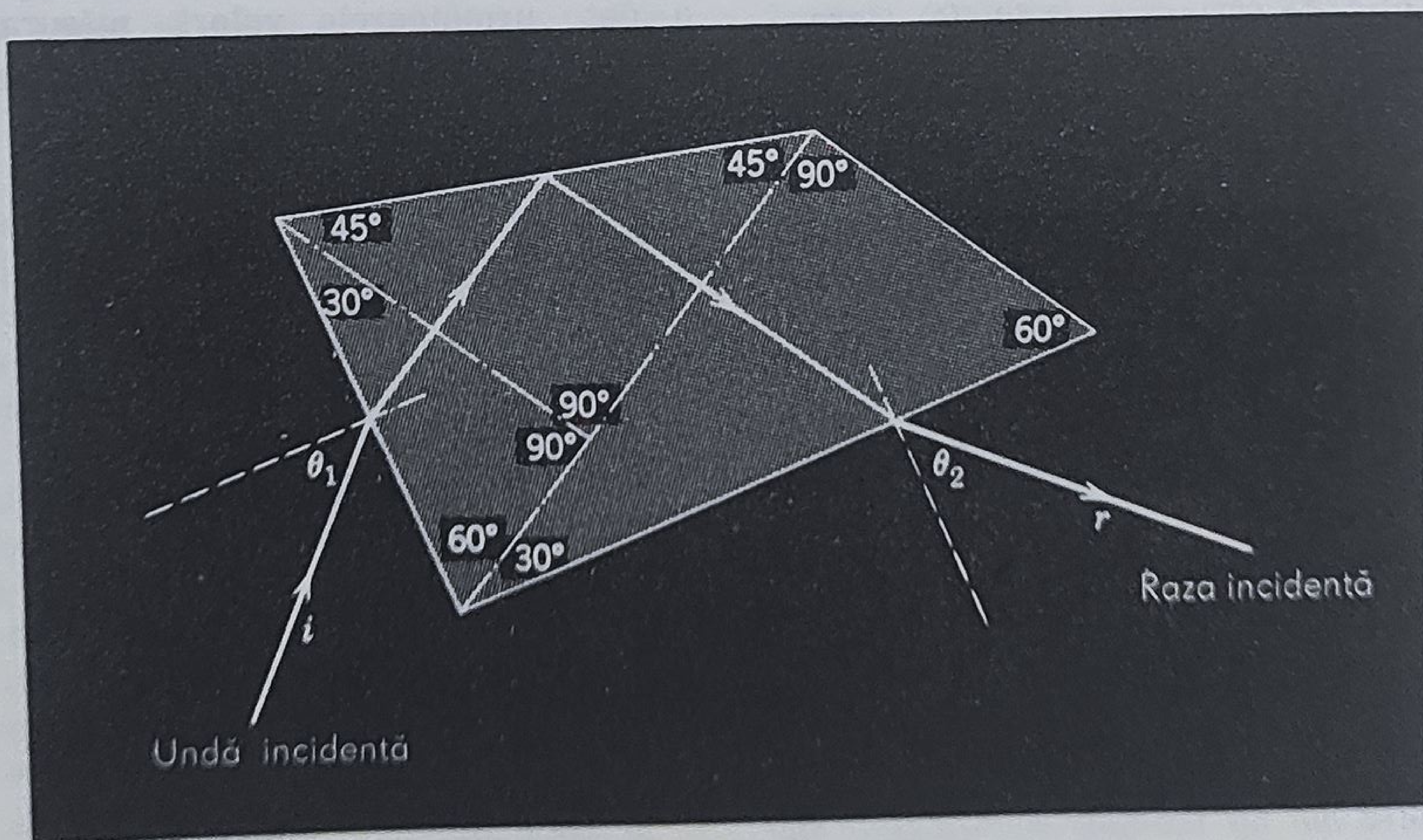


Figura 41-20.

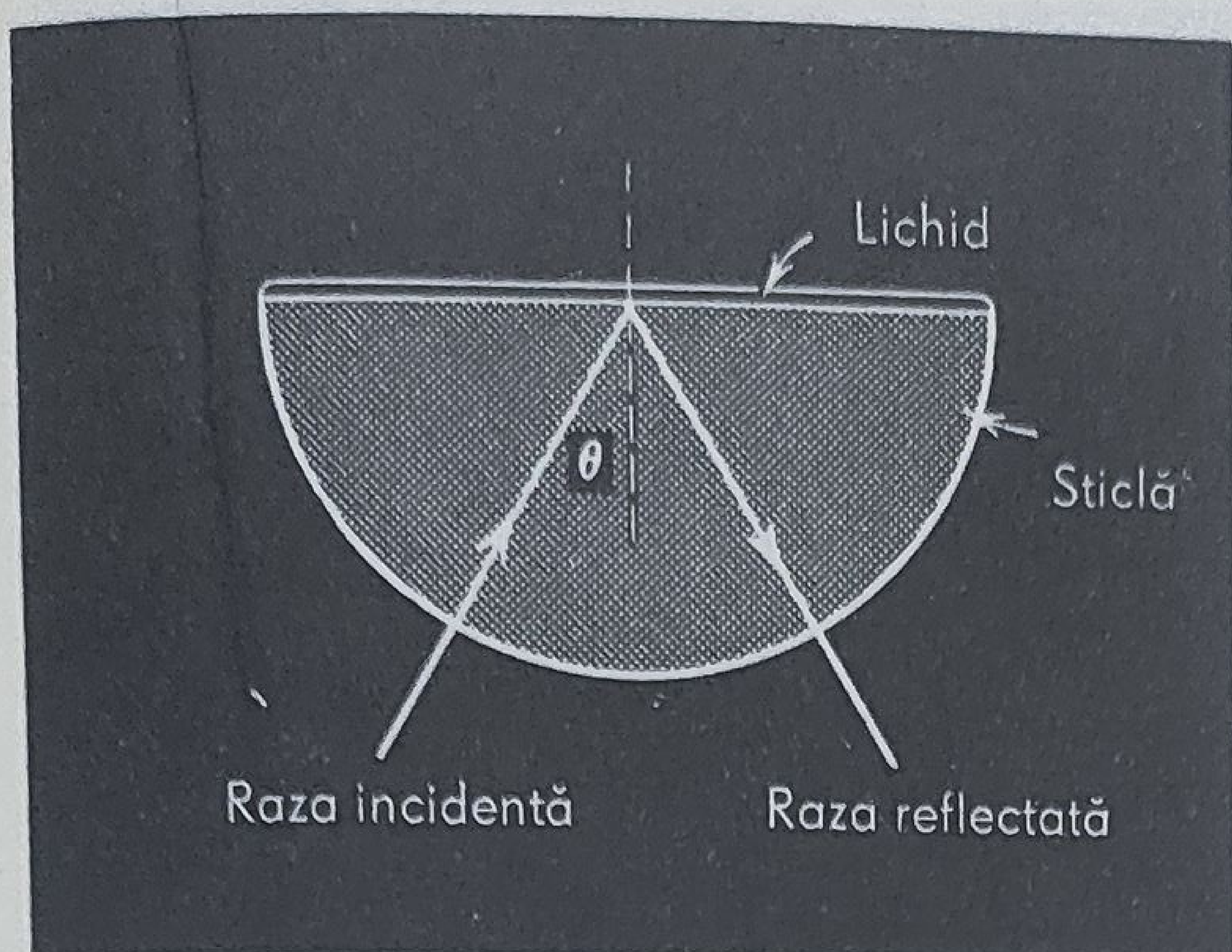


Figura 41-21.

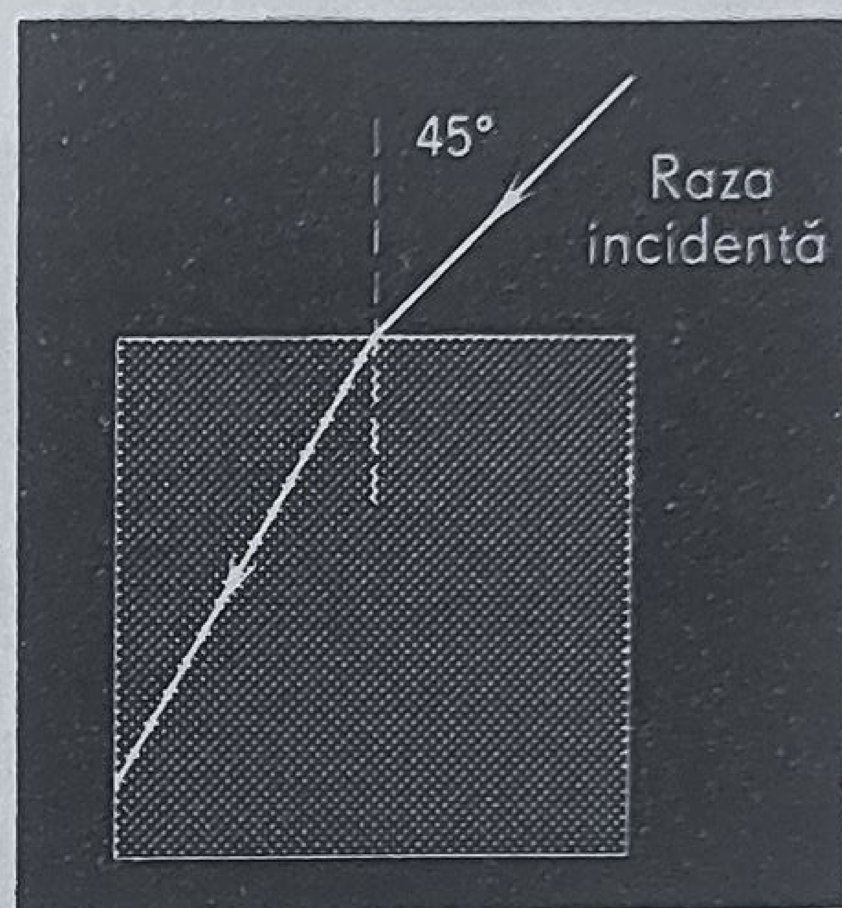


Figura 41-22.

recţia *i*. θ_1 se poate schimba rotind prisma astfel încît, la rîndul ei, lumina cu orice lungime de undă dorită să urmărească drumul arătat ieşind după *r*. Arătaţi că, dacă $\sin \theta_1 = \frac{1}{2} n$, atunci $\theta_2 = \theta_1$ şi fasciculele *i* şi *r* sînt perpendiculare.

17. O picătură de lichid poate fi plasată pe un bloc semicircular de sticlă ca în fig. 41-21. Arătaţi cum poate fi determinată indicele de refracţie al lichidului prin observarea reflexiei totale interne. Indicele de refracţie al sticlei este necunoscut şi trebuie deasemenea determinat. Este domeniul indicilor de refracţie ce pot fi măsuraţi în acest mod restrîns în vreun fel oarecare?

18. O rază de lumină cade pe un bloc de sticlă ca în figura 41-22. Care trebuie să fie indicele de refracţie al sticlei dacă apare reflexie totală pe faţa verticală?

19. Un cub de sticlă are o mică pată în centru. Ce părţi ale feţei cubului trebuie acoperite pentru a împiedica vederea petei din orice direcţie de privire? Ce fracţiune din suprafaţa cubului trebuie astfel acoperită? Presupuneţi un cub cu latura de 1,0 cm şi indicele de refracţie 1,50 (neglijaţi comportarea ulterioară a unei raze reflectate intern)

20. Utilizînd principiul lui Fermat arătaţi că raza reflectată, raza incidentă şi normal sînt în acelaşi plan.

21. Arătaţi că drumurile optice pentru reflexie şi refracţie în figura 41-16 şi 41-17 sînt minime în comparaţie cu alte drumuri alăturate ce unesc aceleaşi două puncte.

Capitolul 42

Reflexia şi refracţia - unde sferice şi suprafeţe sferice

42-1 Optica geometrică şi optica ondulatorie

În capitolul 41 au fost descrise reflexia și refracția undelor plane pe suprafețe plane. În acest capitol vom considera cazul mai general al undelor sferice căzînd pe suprafețe sferice de reflexie și de refracție. Toate rezultatele din Capitolul 41 vor apărea ca niște cazuri particulare ale rezultatelor din acest capitol, deoarece un plan poate fi considerat ca o suprafață sferică cu raza de curbură infinită.

Atît în capitolul 41 cît și în acest capitol ne folosim mult de *raze*. Deși o rază este o construcție convenabilă, se dovedește imposibilă izolarea fizică a uneia. Figura 42-1 *a* ne prezintă schematic o undă plană cu lungimea de undă λ căzînd pe o fantă cu lărgimea de $a=5\lambda$. Observăm că lumina se răspîndește în interiorul umbrei geometrice a fantei, un fenomen denumit *difracție*. Figurile 42-1 b ($a=3\lambda$) și 42-1 c ($a=\lambda$) ne arată că difracția devine mai pronunțată pe măsură ce a/λ tinde spre zero și că încercarea de a izola o singură rază din unda plană incidentă este nerealistă.

În figura 42-2 observăm unde de apă într-un *bazin de făcut unde* puțin adînc și produse prin atingerea periodică și automată a suprafeței apei cu un băț plat. Vedem că unda plană astfel generată se răspîndește prin difracție cînd găsește o poartă în bariera plasată de-a curmezișul. Difracția este o caracteristică a undelor de orice tip. Putem auzi după colțuri, de exemplu, datorită difracției undelor sonore.

Difracția undelor pe o fantă (sau alt obstacol, ca o sîrmă) rezultă din principiul lui Huygens. Să considerăm porțiunea frontului de undă care ajunge pe poziția fantei în figura 42-1. Fiecare punct de pe ea poate fi considerat sursa unei unde sferice Huygens divergente. „Curbarea“

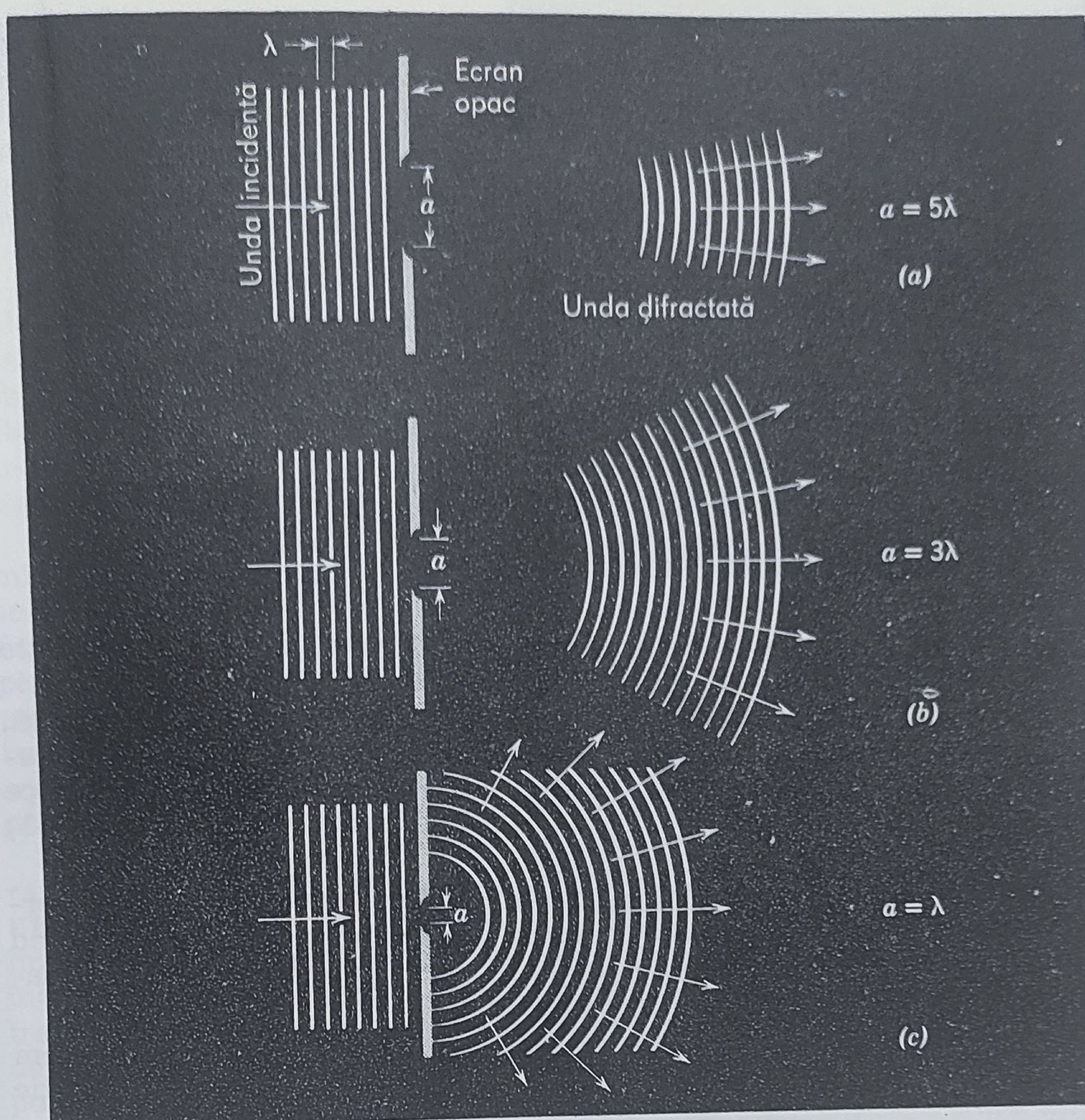


Figura 42-1. O incercare de a izola o rază prin reducerea lățimii *a* fantei eșuează din cauza difracției care devine mai pronunțată pe măsură ce a/λ se apropie de zero.

luminii în regiunea undei geometrice este asociată cu blocarea undelor Huygens din acele părți ale undei incidente ce se află în spatele marginilor fantei.

Figura 42-3 a fost realizată lăsînd să cadă un fascicul de lumină paralelă pe o fantă așezată la 50 cm în fața unei plăci fotografice. În figura 42-3 a lărgimea fantei era de aproximativ 6×10^{-3} mm. Banda centrală a fasciculului este însă mult mai largă, arătînd că lumina ei a fost răspîndită în umbra geometrică a fantei. În plus, apar multe maxime secundare, omise din figura 42-1 din considerente de simplitate. Figura 42-3 b arată ce se întîmplă dacă lărgimea fantei este *redusă* la jumătate. Maximul central devine *mai larg*, în conformitate cu figura 42-1. Figura 42-3 c arată efectul reducerii mărimii fantei cu un factor adițional de 7, pînă la $4 \cdot 10^{-4}$ mm. Maximul central este acum mult mai larg și maximele secundare, ale căror intensități relative la maximul central

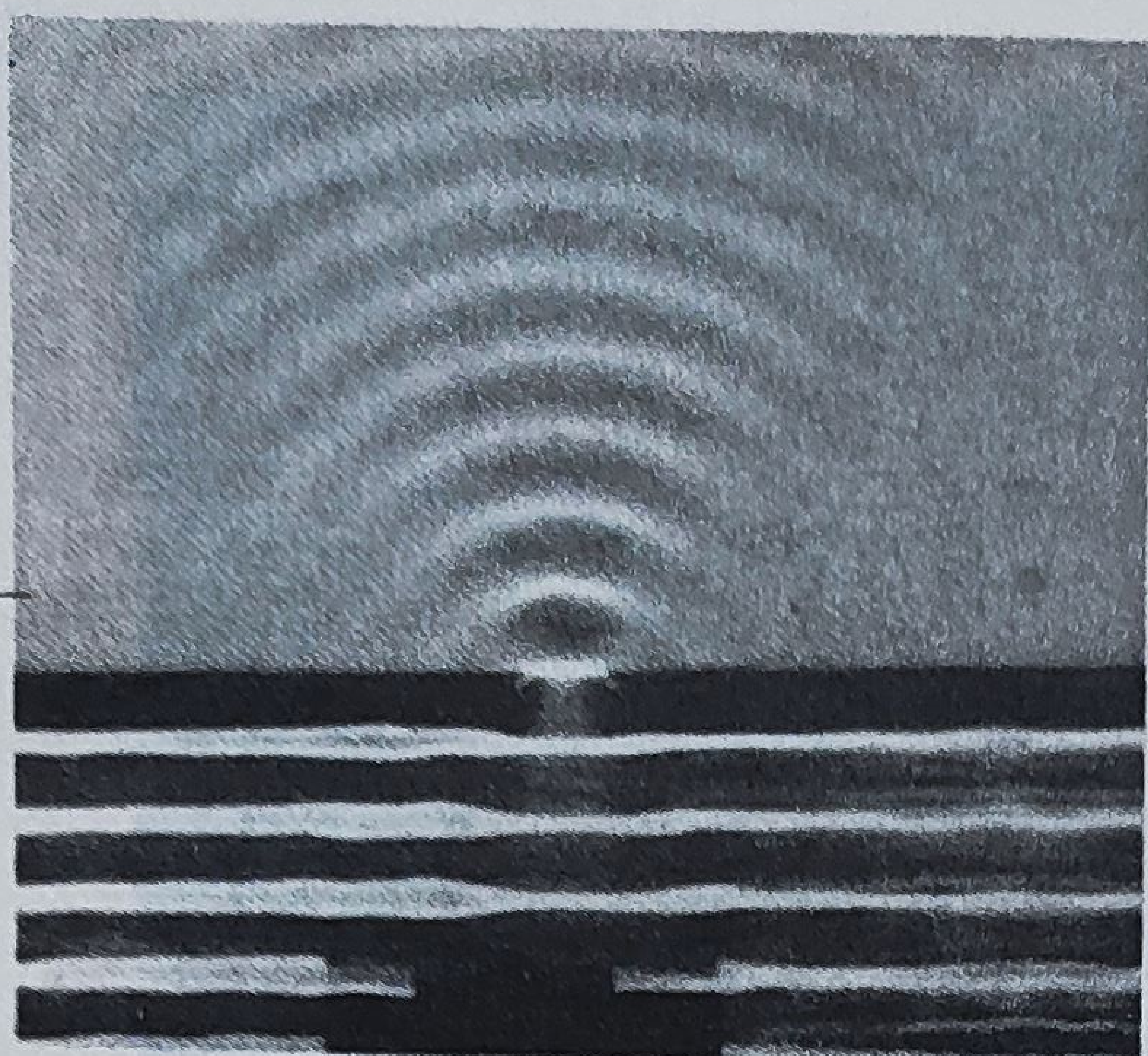


Figura 42-2. Difracția undelor de apă pe o crăpătură într-un recipient cu unduiri. De remarcat că lățimea crăpăturii are aproape aceeași dimensiune ca lungimea de undă (Prin amabilitatea Educațional Services Incorporated).

au fost în mod intenționat evidențiate prin supraexpunere, sînt foarte clare.

Dacă raportul a/λ este destul de mare, difracția poate fi ignorată, a fiind o măsură a celei mai mici dimensiuni a fantei sau a obstacolului. Dacă $a \gg \lambda$, lumina pare să se deplaseze ca niște linii paralele ce pot fi reprezentate de raze ce satisfac legile de reflexie (ecuația 41-1) și refracție (ecuația (41-2)).

În capitolul 41 această condiție, numită *optica geometrică*, era determinantă, dimensiunile laterale ale tuturor oglinzilor, prismelor etc., fiind mult mai mari decît lungimea de undă. În acest capitol presupunem satisfăcute condițiile pentru optica geometrică.

Dacă cerințele pentru optica geometrică nu sînt îndeplinite, nu putem descrie comportarea luminii prin raze ci trebuie să luăm în considerație

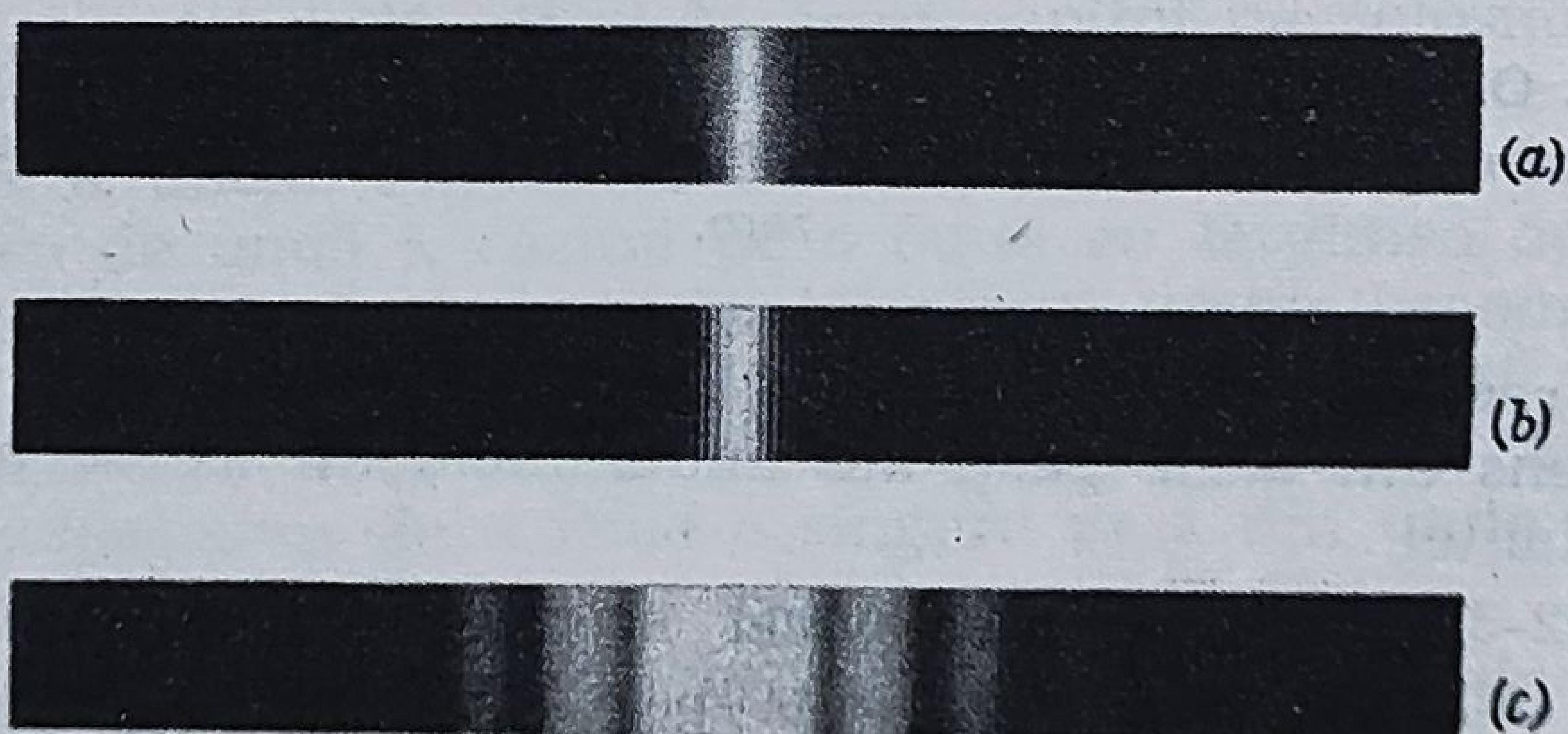


Figura 42-3. (*a*) Intensitatea luminii difractate de o fantă cu lățimea $a=6\times10^{-3}$ mm și căzînd pe un ecran la dintanța de 50 cm. (*b*) Lățimea fantei e redusă la jumătate. (*c*) Lărgimea fantei este dedusă de încă 7 ori. Notați că maximele secundare, ieșite în acest caz în evidență prin suprapunere, apar de fiecare parte a maximului central. Aceste maxime secundare au fost omise din figura 42-1.

natura sa ondulatorie. Aceasta se numește *optica ondulatorie;* optica geometrică este un caz limită. În următoarele capitole vom trata optica ondulatorie.

42-2 Unde sferice ● Oglinda plană

Figura 42-4 reprezintă o sursă punctiformă de lumină O, obiectul plasat la distanța o în fața unei oglinzi plane. Lumina cade pe oglindă ca o undă sferică reprezentată în figură prin raze care pornesc din O*. În punctul în care fiecare rază întîlnește oglinda construim o rază reflectată. Dacă se prelungesc razele reflectate, acestea se intersectează într-un punct I care este la aceeași distanță de oglindă ca și O; I se numește *imaginea* lui O.

Imaginile pot fi *reale* sau *virtuale*. Într-o imagine reală energia luminii trece de fapt prin punctul imagine; într-o imagine virtuală lumina se comportă ca și cum ar fi deviată din punctul imagine, cu toate că, de fapt, ea nu trece prin acest punct; vezi figura 42-4. Imaginile în oglinzile plane sînt întotdeauna virtuale. Din experiența zilnică știm cît de „reală" pare o astfel de imagine virtuală și cît de definită este localizarea sa în spatele oglinzii, chiar dacă acest spațiu este, de fapt, un perete de cărămizi.

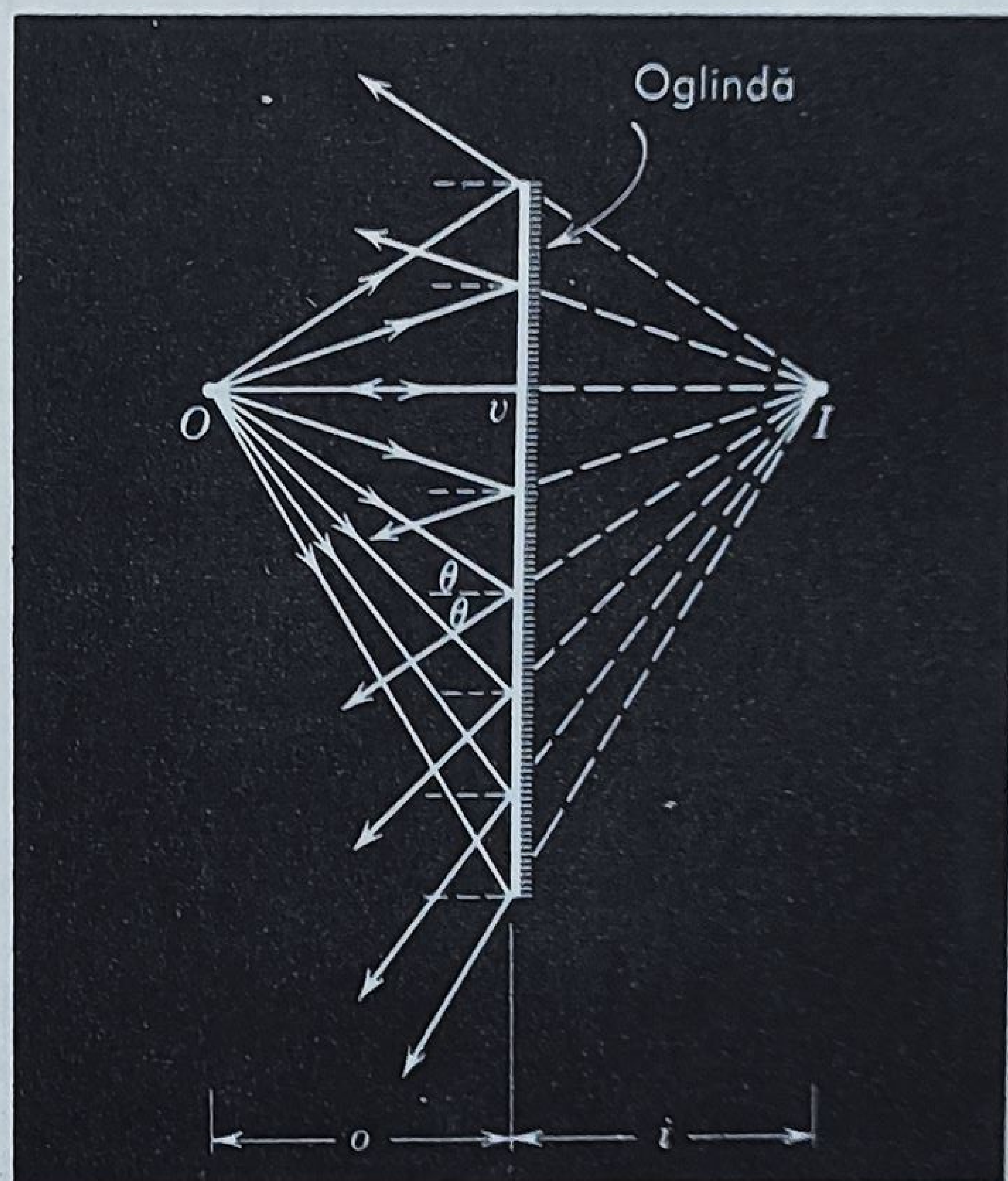


Figura 42-4. Un obiect punctual O formează o imagine virtuală I în planul oglinzii. Razele par că ies din I dar în realitate energia luminoasă nu trece prin acest punct.

Figura 42-5 reprezintă două raze din figura 42-4. Una întîlnește oglinda în v, după o linie perpendiculară. Cealaltă o întîlnește într-un punct arbitrar a, făcînd un unghi de incidență θ cu normala în acel punct. Geometria elementară arată că unghiurile aOv și aIv sînt de asemenea egale cu θ. Astfel triunghiurile dreptunghiulare aOv și aIv sînt congruente și

$$o = -i \qquad (42\text{-}1)$$

unde semnul minus a fost introdus pentru a arăta că I și O sînt de cele două părți ale oglinzii. Ecuația (42-1) nu depinde de θ, ceea ce înseamnă că *toate* razele ce întîlnesc oglinda trec prin I dacă sînt prelungite în spatele oglinzii,

* În discuția noastră despre reflexii în oglinzi în capitolul 41 (vezi figura 41-8) am presupus o undă incidentă *plană;* razele incidente erau în acest caz paralele.

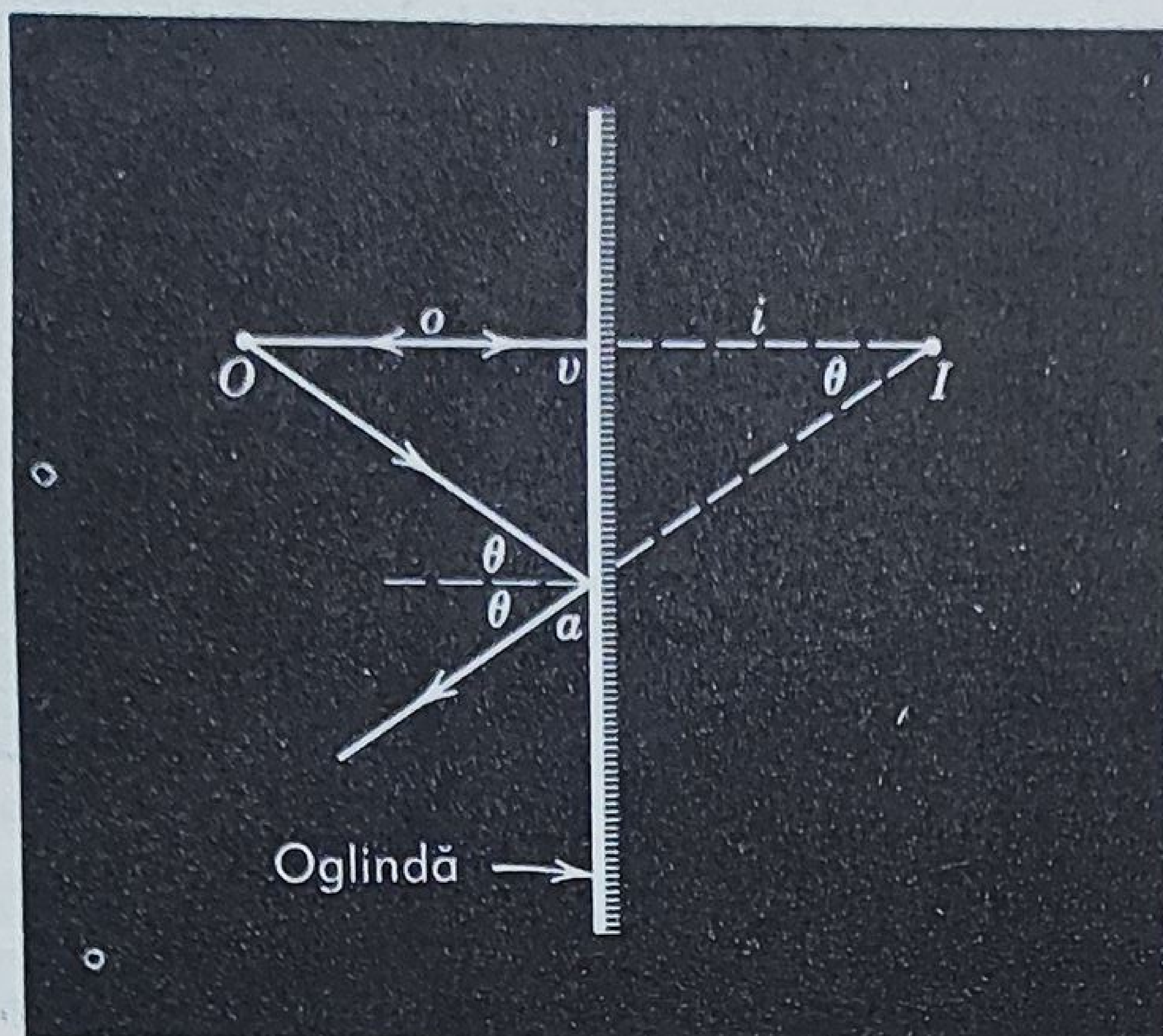


Figura 42-5. Două raze din figura 42-4; raza Oa face un unghi arbitrar cu normala.

așa ca mai sus. În afară de presupunerea că oglinda este într-adevăr plană și îndeplinirea condițiilor opticii geometrice, în deducerea ecuației (42-1) nu s-au mai făcut alte aproximații. Un punct obiect produce un punct imagine într-o oglindă plană, cu $o = -i$, oricît de mare este unghiul θ în figura 42-5.

Din cauza diametrului finit al pupilei ochiului, în ochi nu pot intra decît razele care sînt foarte apropiate. Pentru poziția ochiului ca în figura 42-6, numai o mică parte din oglindă participă efectiv la formarea imaginii; cealaltă parte poate fi acoperită sau îndepărtată. Dacă ochiul se deplasează în alt loc, o altă parte devine efectivă; locul imaginii virtuale I va rămîne neschimbat, atîta timp cît obiectul rămîne fix. Dacă obiectul este o sursă mai mare ca de exemplu capul unei persoane, se formează de asemenea o imagine virtuală. Din ecuația (42-1)

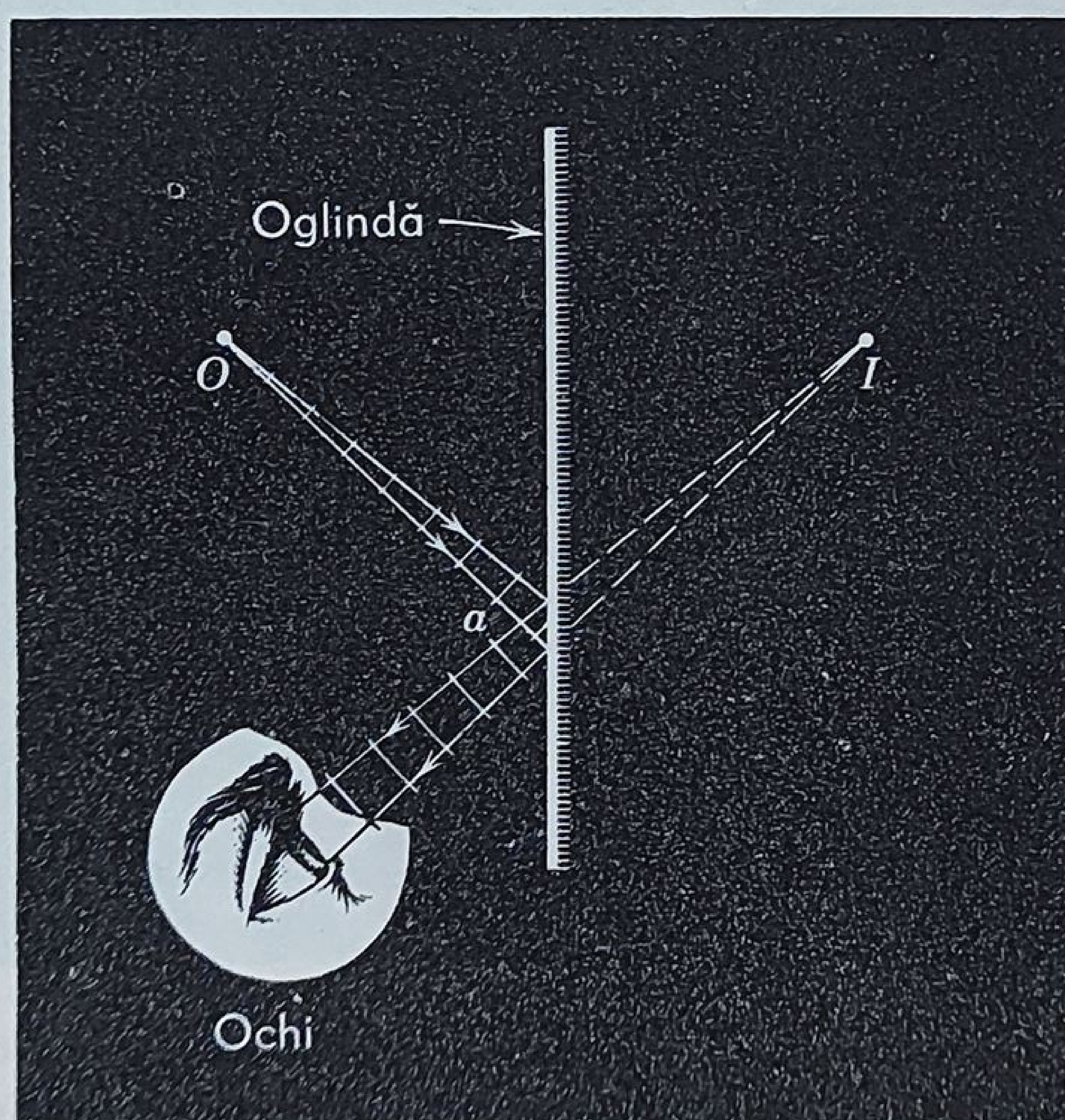


Figura 42-6. Un fascicul îngust de raze din O intră în ochi după reflexie în oglindă. Numai o mică porțiune din oglindă în jurul lui a este folosită. Micile arcuri de cerc reprezintă porțiuni din fronturile de undă sferice.

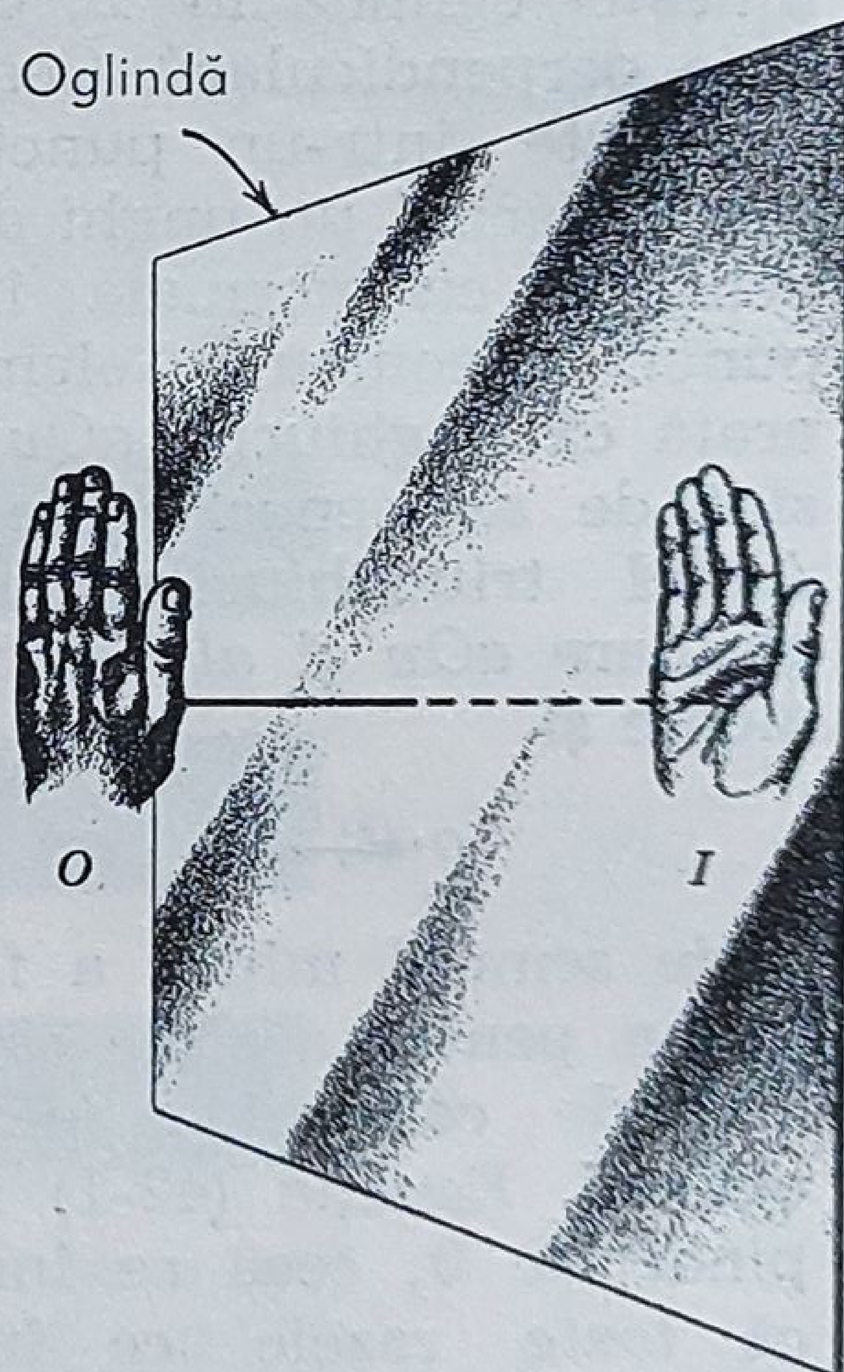


Figura 42-7. O oglindă plană inversează dreapta cu stînga.

rezultă că fiecare punct al sursei are un punct imagine care se găsește la o distanță egală în spatele planului oglinzii. Astfel imaginea reproduce obiectul punct cu punct.

Imaginile în oglinzile plane diferă de obiecte prin aceea că stînga și dreapta sînt inversate. Imaginea unei pagini tipărite diferă de pagina însăși. În mod similar, dacă un titirez este învîrtit în sensul acelor ceasornicului, imaginea, văzută într-o oglindă verticală, va părea că se învîrtește împotriva mersului acelor ceasornicului. Figura 42-7 reprezintă o imagine a mîinii stîngi, construită folosind aplicația punct cu punct a ecuației (42-1); imaginea are simetria mîinii drepte*.

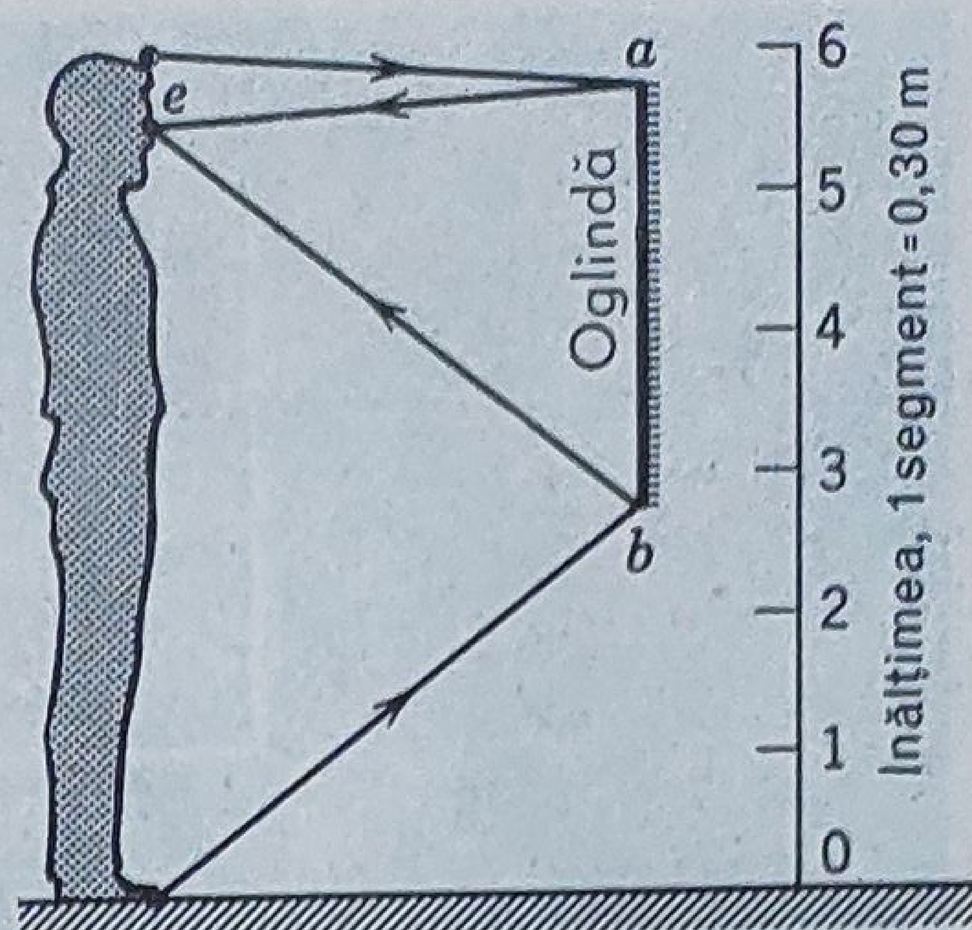


Figura 42-8. Exemplul 1. O persoană se poate vedea în întregime într-o oglindă care are jumătate din înălțimea persoanei.

Exemplul 1. Cît de înaltă trebuie să fie o oglindă ca o persoană de 185 cm să se vadă în întregime? Se presupune că ochii sînt cu 10 cm sub nivelul creștetului.

Figura 42-8 reprezintă drumurile razelor de lumină ce trec la limita creștetului capului și vîrfurile picioarelor. Aceste raze, alese astfel ca să atingă ochiul e după reflexie, întîlnesc oglinda verticală în punctele a și b, respectiv. Oglinda trebuie să ocupe numai regiunea dintre două puncte. Calculele arată că b este 85 cm, și a este 178 cm, deasupra podelei. Lungimea oglinzii este astfel 93 cm sau jumătate din înălțimea persoanei. De notat că înălțimea este independentă de distanța între persoană și oglindă. Oglinzile care s-ar găsi și sub punctul b vor reflecta podeau dintre persoană și oglindă.

Exemplul 2. Două oglinzi sînt așezate perpendicular și un punct obiect O este localizat pe bisectoare, ca în figura 42-9 a. Localizați imaginile. Imaginile I_1 și I_2 sînt formate din oglinzile ab și cd respectiv. Există de asemenea o a treia imagine; se poate considera ca fiind imaginea lui I_1 în oglinda cd sau imaginea I_2 în oglinda ab. Cele trei imagini ale obiectului O se găsesc pe un cerc cu centrul pe linia de intersecție a oglinzilor, planul cercului fiind perpendicular pe aceasta.

Pentru I_3 lumina care atinge ochiul observatorului este reflectată *de două ori* după ce părăsește sursa. Figura 42-9 b reprezintă un grup tipic de raze. Pentru I_1 și I_2, lumina este reflectată numai o dată, ca în figura 42-6.

42-3 Unde sferice ● Oglinda sferică

În figura 42-10 o undă sferică de lumină dintr-un obiect punctiform O care pe o oglindă sferică de rază de curbură r**. O linie prin O și centrul de curbură C formează o axă convenabilă de referință.

---

* Vezi „The Overthrow of Parity“ de Philip Morrison, Scientific American, aprilie 1957, pentru o discuție a distincției în natură între dreapta și stînga.

** O pătură sferică, văzută din interior, este *concavă* peste tot; văzută dinafară ea este convexă. În acest capitol concav sau convex vor fi totdeauna considerate din punctul de vedere al unui observator care privește din direcția luminii incidente.

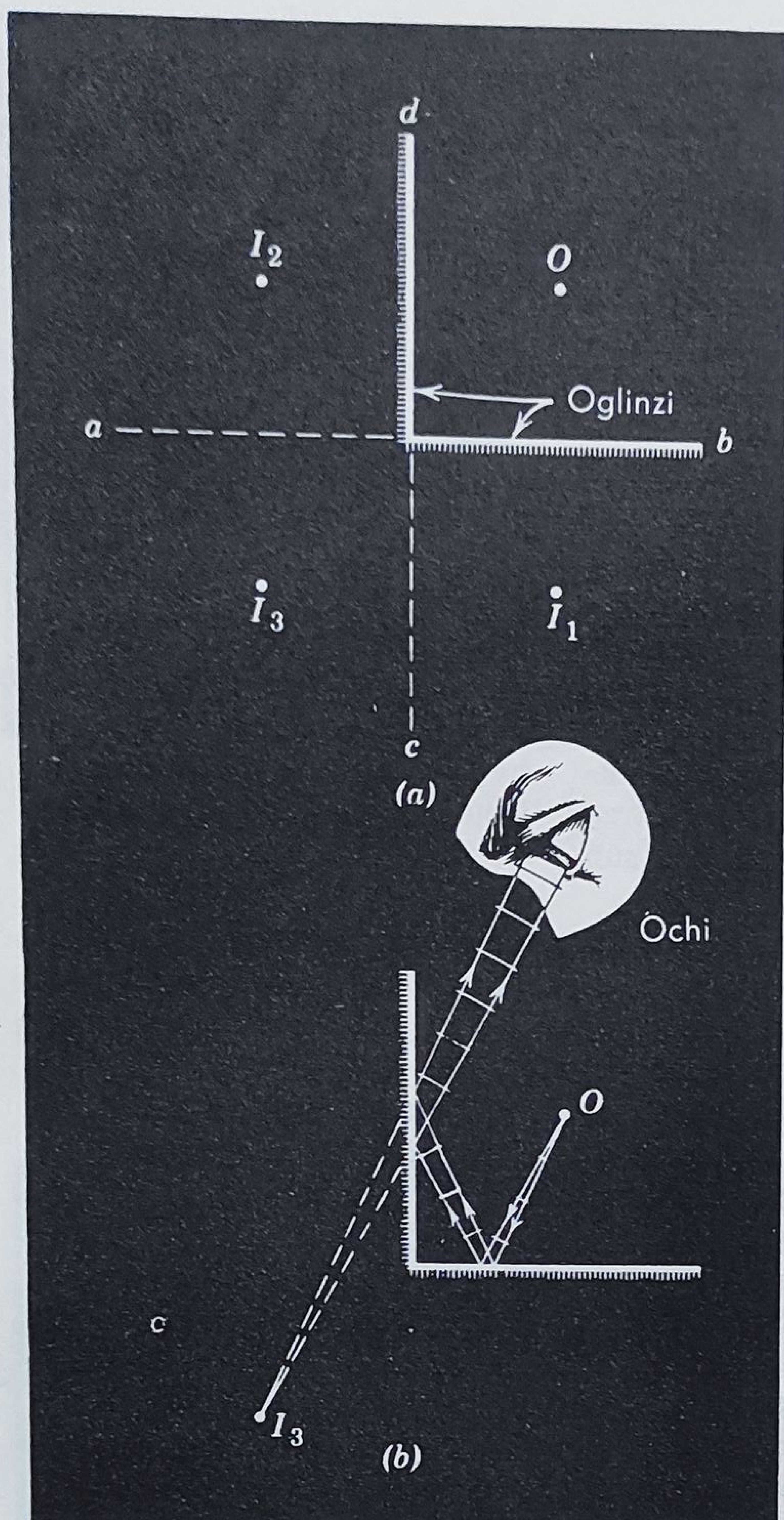


Figura 42-9. Exemplul 2. (*a*) Obiectul O are 3 imagini virtuale. (*b*) Un fascicul tipic de raze folosit pentru observarea lui I_3.

O rază din O care face un unghi arbitrar α cu această axă intersectează axa în I după reflexia în oglindă în a. O rază care părăsește O de-a lungul acestei axe, va fi reflectată înapoi după aceeași direcție în v și va trece de asemenea prin I. Astfel, cel puțin pentru aceste două raze, I este imaginea lui O; aceasta este o imagine *reală* deoarece energia luminii trece de fapt prin I. Să găsim acum pe I.

O teoremă utilă este aceea că unghiul exterior al unui triunghi este egal cu suma celor două unghiuri opuse interioare. Aplicînd aceasta triunghiurilor $OaCO$ și $OAIO$ în figura 42-10 se obține

$$\beta = \alpha + \theta$$

și

$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

Eliminînd θ între aceste ecuații avem

$$\alpha + \gamma = 2\beta \qquad (42\text{-}2)$$

Putem exprima unghiurile α, β și γ în radiani, astfel

$$\alpha \approx \frac{av}{vO} = \frac{av}{o}$$

$$\beta \approx \frac{av}{vc} = \frac{av}{r} \qquad (42\text{-}3)$$

$$\gamma \approx \frac{av}{vI} = \frac{av}{i}$$

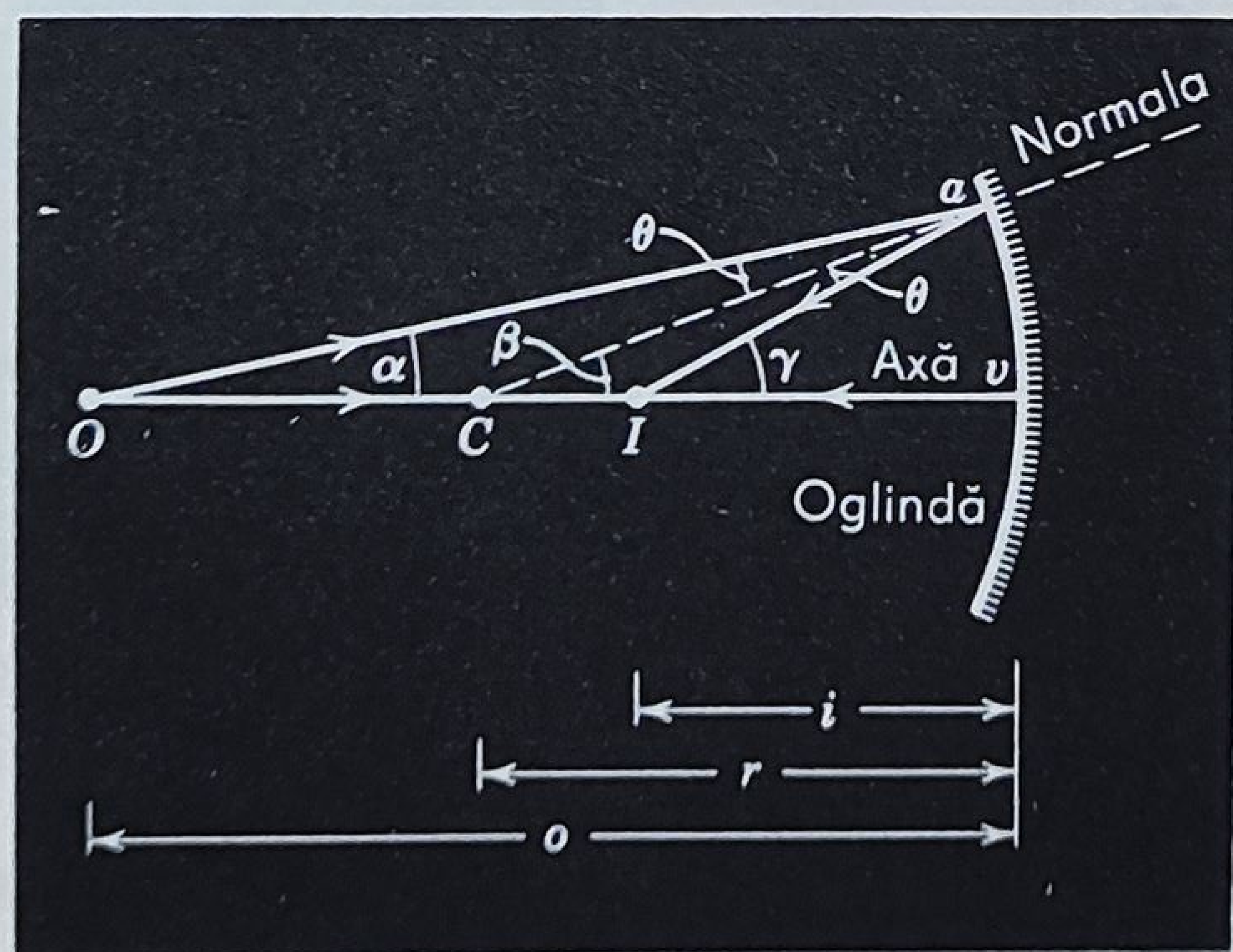


Figura 42-10. Două raze din O converg după reflexia într-o oglindă concavă sferică, formează o imagine în *I*.

De notat că doar ecuaţia pentru β este exactă, deoarece centrul de curbură al arcului *av* este în *C* şi nu în *O* sau *I*. Cu toate acestea, ecuaţiile pentru α şi γ sînt aproximativ corecte dacă aceste unghiuri sînt suficient de mici. *În tot ceea ce urmează presupunem că razele ce diverg din obiect fac un unghi mic* α *cu axa oglinzii.* Astfel de raze, care se găsesc lîngă axa oglinzii, se numesc *raze paraxiale.* Nu am găsit necesar să facem o astfel de presupunere pentru oglinzi plane. Substituind aceste ecuaţii în ecuaţia 42-2 şi eliminînd *av* obţinem

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r} \qquad (42\text{-}4)$$

în care *o* este *distanţa obiect* şi *i* este *distanţa imagine.* Amîndouă aceste distanţe sînt măsurate din *vîrful* oglinzii, care este punctul *v* în care axa întîlneşte oglinda.

Ecuaţia (42-4) nu trebuie să conţină α (sau β, γ, sau θ), pentru toate razele ce întîlnesc oglinda cu condiţia să fie suficient de paraxiale. Într-un caz real razele pot fi făcute atît de paraxiale cît se doreşte punînd o diafragmă circulară în faţa oglinzii, centrată potrivit vertexului *v;* aceasta impune o anumită valoare maximă a lui α.

Cu cît α în figura 42-10 devine mai mare, rămîne mai puţin adevărat că un punct obiect va forma un punct imagine; imaginea se va extinde şi va deveni difuză. Nu se poate stabili un criteriu fix pentru a decide dacă o rază este paraxială sau nu. Dacă valoarea maximă permisă a lui α este redusă, razele devin mai paraxiale şi imaginea va deveni mai clară.

Din nefericire, imaginea va deveni deasemenea mai puţin luminoasă deoarece oglinda va reflecta mai puţină energie. Trebuie făcut totdeauna un compromis între strălucirea imaginii şi calitatea imaginii.

Ca şi pentru oglinzile plane, imaginea (reală sau virtuală) într-o oglindă sferică poate fi văzută numai dacă ochiul este aşezat astfel încît razele de lumină ce pornesc din obiect să-l poată întîlni după reflexie. În figura 42-11 este reprezentat un fascicul de raze ce întîlnesc ochiul în poziţia *x;* pentru ochi este vizibilă doar o mică porţiune din oglindă, lîngă *a*. Dacă observatorul îşi schimbă poziţia ochiului în *y*, imaginea se va pierde pentru el deoarece oglinda nu există lîngă punctul *a′*.

Cu toate că ecuaţia 42-4 a fost dedusă pentru cazul special în care obiectul se află dincolo de centrul de curbură, ea este în general adevărată, oricum ar fi aşezat obiectul. Ecuaţia rămîne adevărată pentru oglinzi convexe, ca în figura 42-12.

La aplicarea ecuaţiei 42-4, trebuie urmărită o convenţie consistentă a semnelor pentru *o, i* şi *r*. Ca bază pentru convenţiile de semn care sînt folosite în această carte începem cu următoarea aserţiune:

> În figura 42-10, în care lumina *diverge* dintr-un obiect *real,* cade pe o oglindă *concavă* şi *converge* după reflexie pentru a forma o imagine *reală,* cantităţile *o, i* şi *r* în ecuaţia 42-4 sînt considerate valori numerice pozitive.

În deducerea ecuaţiei 42-4 s-a folosit figura 42-10 care poate fi folosită ca un ajutor în obţinerea semnelor corecte.

Să considerăm partea oglinzii dinspre care vine lumina incidentă. Deoarece oglinzile sînt opace, lumina, după reflexie, trebuie să rămînă

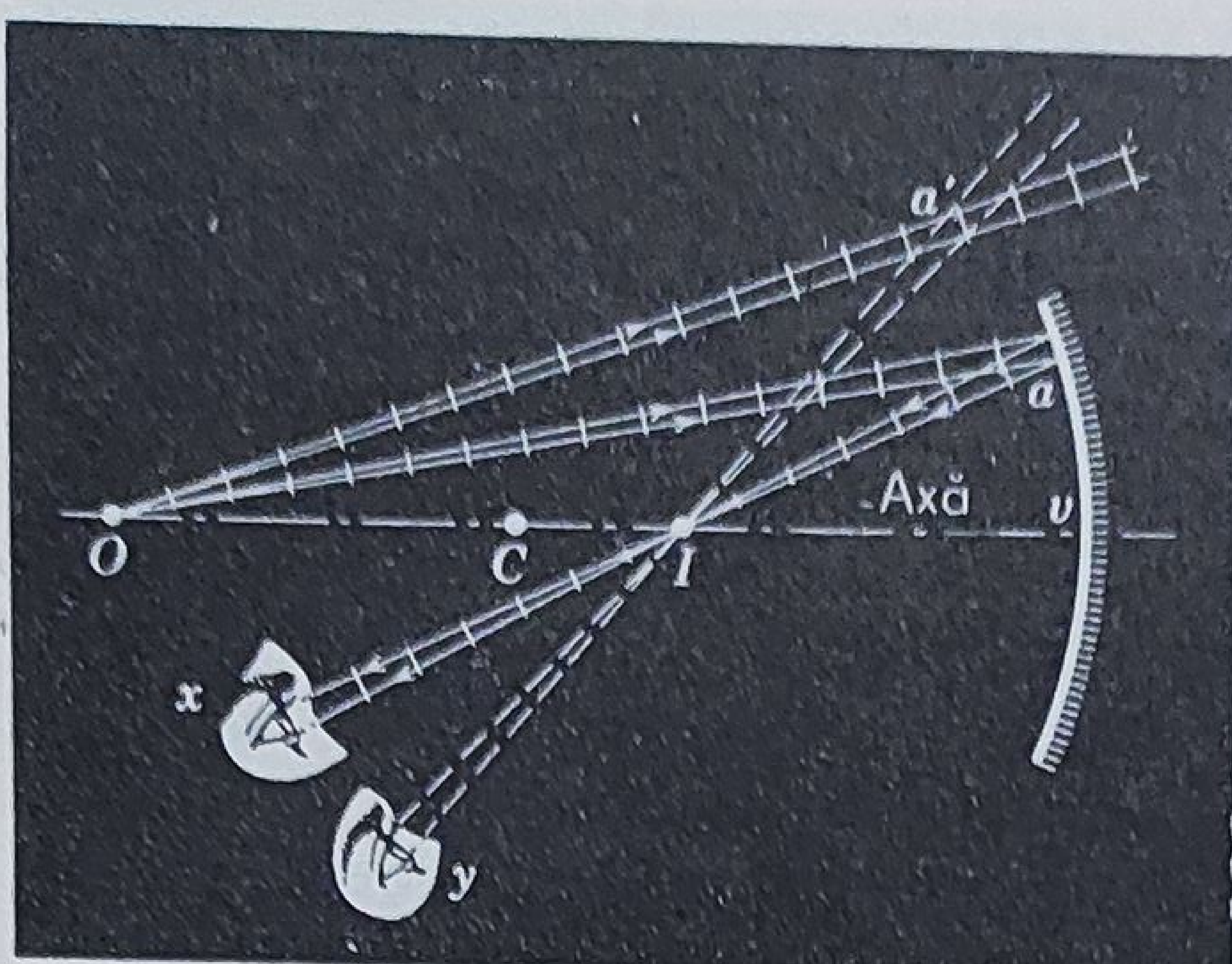


Figura 42-11. Ochiul trebuie potrivit convenabil pentru a vedea imaginea *I*.

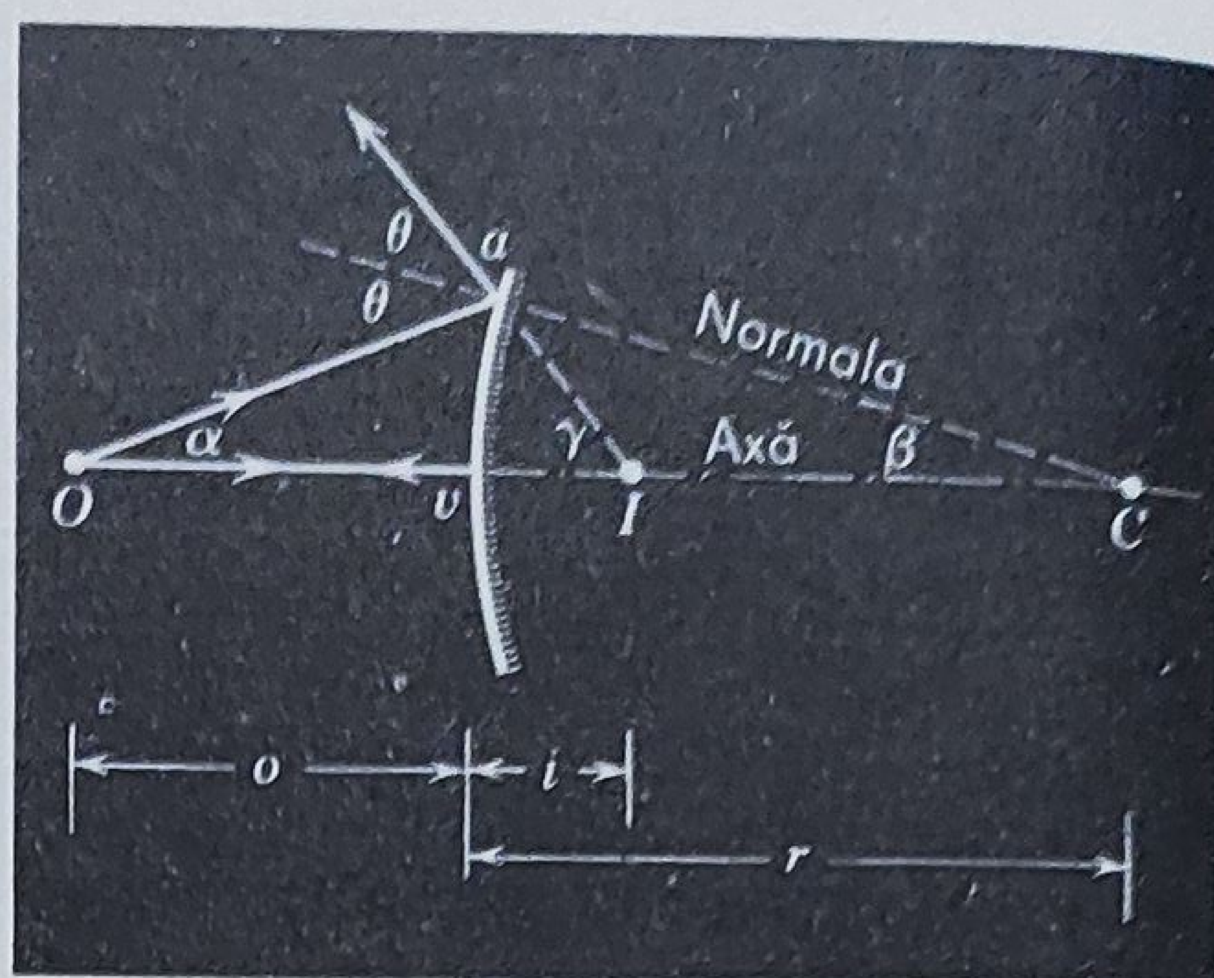


Figura 42-12. Două raze din O diverg după reflexie într-o oglindă sferică convexă, formînd o imagine virtuală în I, punctul de unde s-ar părea că apar. Comparaţi cu figura 42-10.

de această parte, şi dacă imaginea este formată aici va fi o imagine *reală*. De aceea, vom numi partea oglinzii dinspre care vine lumina *partea R (imagine reală)*. Vom numi partea din spate a oglinzii *partea V (partea virtuală)*, deoarece imaginile care se formează de această parte trebuie să fie virtuale; de această parte nu există energie luminoasă*.

În aserţiunea de mai sus am asociat imagini reale cu distanţe imagine pozitive. Aceasta sugerează prima noastră convenţie de semn:

1. Distanţa imagine i este pozitivă dacă imaginea (reală) se găseşte în partea R a oglinzii, ca în figura 42-10; i este negativă dacă imaginea (virtuală) se găseşte în partea V, ca în figura 42-12.

Dacă oglinda din figura 42-10, care este concavă văzută din direcţia luminii incidente, este făcută convexă, razele vor *diverge* după reflexie şi vor forma o imagine *virtuală*, ca în figura 42-12. Astfel, este sugerată a doua convenţie de semn:

2. Raza de curbură r este pozitivă dacă centrul de curbură al oglinzii se află în partea R, ca în figura 42-10; r este negativă dacă centrul de curbură se află în partea V, ca în figura 42-12.

Convenţiile de semn nu trebuie memorate ci deduse în fiecare caz din aserţiunea de bază din pagina 407, folosind figura 42-10 ca un ajutor mnemonic.

Pentru toate cazurile din această carte distanţa obiect o trebuie considerată pozitivă. În sistemele de două sau mai multe oglinzi (sau combinaţii de oglinzi şi suprafeţe refractante) este posibil să se aranjeze ca lumina *convergentă* să cadă pe oglindă. În astfel de cazuri obiectul se numeşte *virtual* şi distanţa obiect o este negativă; limităm discuţia noastră de aici la obiecte reale.

---

* Această numenclatură poate părea nenecesară şi incomodă în acest moment. O adoptăm din cauza extinderii sale ulterioare la suprafeţe refractante şi lentile.

Exemplul 3. O oglindă convexă are o rază de curbură de 20 cm. Dacă un punct sursă este plasat la 14 cm distanță de oglindă, ca în figura 42-12 unde este imaginea?

O construcție grafică aproximativă, aplicînd legile reflexiei în *a* pe figură, arată că imaginea va fi pe partea V a oglinzii și astfel va fi virtuală. Se poate verifica aceasta cantitativ și analitic din ecuația 42-2, cu mențiunea că r este negativă aici deoarece centrul de curbură al oglinzii se află în partea V. Avem

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}$$

sau

$$\frac{1}{+14\ \mathrm{cm}}+\frac{1}{i}=\frac{2}{-20\ \mathrm{cm}}$$

care dă $i=-5{,}8$ cm, în concordanță cu presupunerea grafică. Semnul negativ pentru i ne reamintește că imaginea este de partea V a oglinzii și astfel este virtuală.

Cînd lumina *paralelă* cade pe o oglindă (figura 42-13), punctul imagine (real sau virtual) este numit *punctul focal* F al oglinzii. Lungimea focală f este distanța dintre F și vertex. Dacă punem $o\to\infty$ în ecuația 42-4, atunci asigurînd lumina incidentă paralelă, avem

$$i=\frac{1}{2}r=f$$

Ecuația 42-4 poate fi atunci rescrisă

$$\frac{1}{0}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \qquad (42\text{-}5)$$

unde f, ca r, este considerată pozitivă pentru oglinzile ale căror centre de curbură sînt de partea R (adică, pentru oglinzi *concave* sau *convergente;* vezi figura 42-13 *a*) și negativă pentru cele ale căror centre de curbură se află pe partea V (adică, pentru oglinzi *convexe,* sau *divergente;* vezi figura 42-13 c). Figura 42-13 *b* reprezintă o undă plană incidentă care face un mic unghi α cu axa oglinzii. Razele sînt focalizate într-un punct al *planului focal* al oglinzii. Acesta este un plan perpendicular pe axul oglinzii în punctul focal.

Să considerăm acum obiecte care nu au puncte. Figura 42-14 reprezintă o lumînare în fața (*a*) unei oglinzi concave și (*b*) a unei oglinzi convexe. Am ales axa oglinzii astfel încît să treacă pe la baza lumînării și, bineînțeles, prin centrul de curbură. Imaginea oricărui punct în afara axei, ca de exemplu vîrful lumînării, poate fi găsită grafic, folosind următoarele fapte:

1. O rază care întîlnește oglinda după ce trece (sau direct, sau după ce a fost prelungită) prin centrul de curbură C se reîntoarce de-a lungul

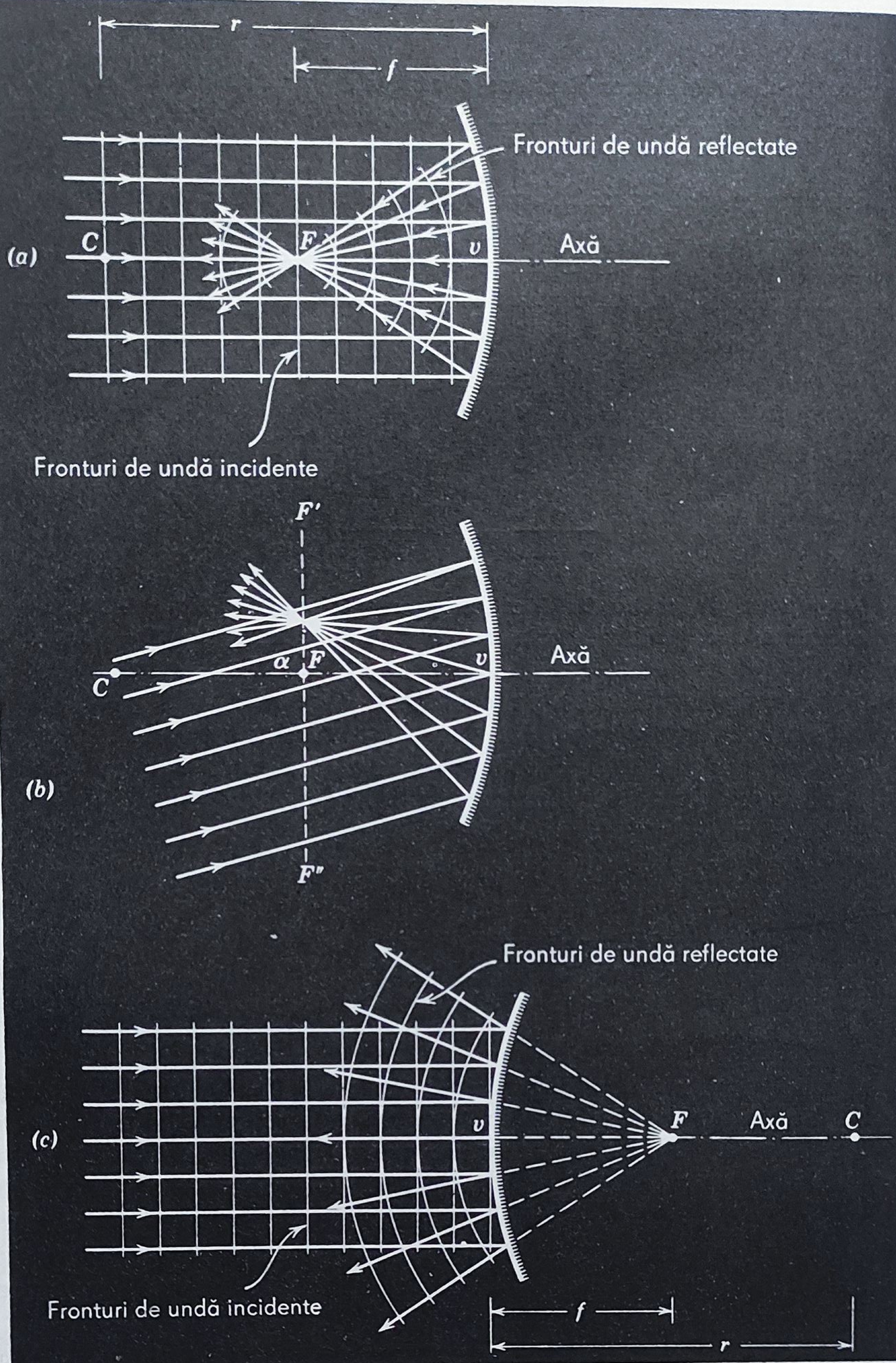


Figura 42-13. (*a*) Punctul focal pentru o oglindă sferică concavă, arătîndu-se atît razele cît și fronturile de undă. F și C se găsesc în partea R, punctul focal este real și lungimea focală f a oglinzii este pozitivă (ca în r). (*b*) Aceeași, cu excepția că lumina incidentă face un unghi α cu axa oglinzii; razele sînt focalizate într-un *punct în planul* focal $F'F''$. (*c*) Aceeași ca (*a*) cu excepția că oglinda este convexă; F și C este de partea V a oglinzii. Punctul focal este virtual și lungimea focală f este negativă (ca în r).

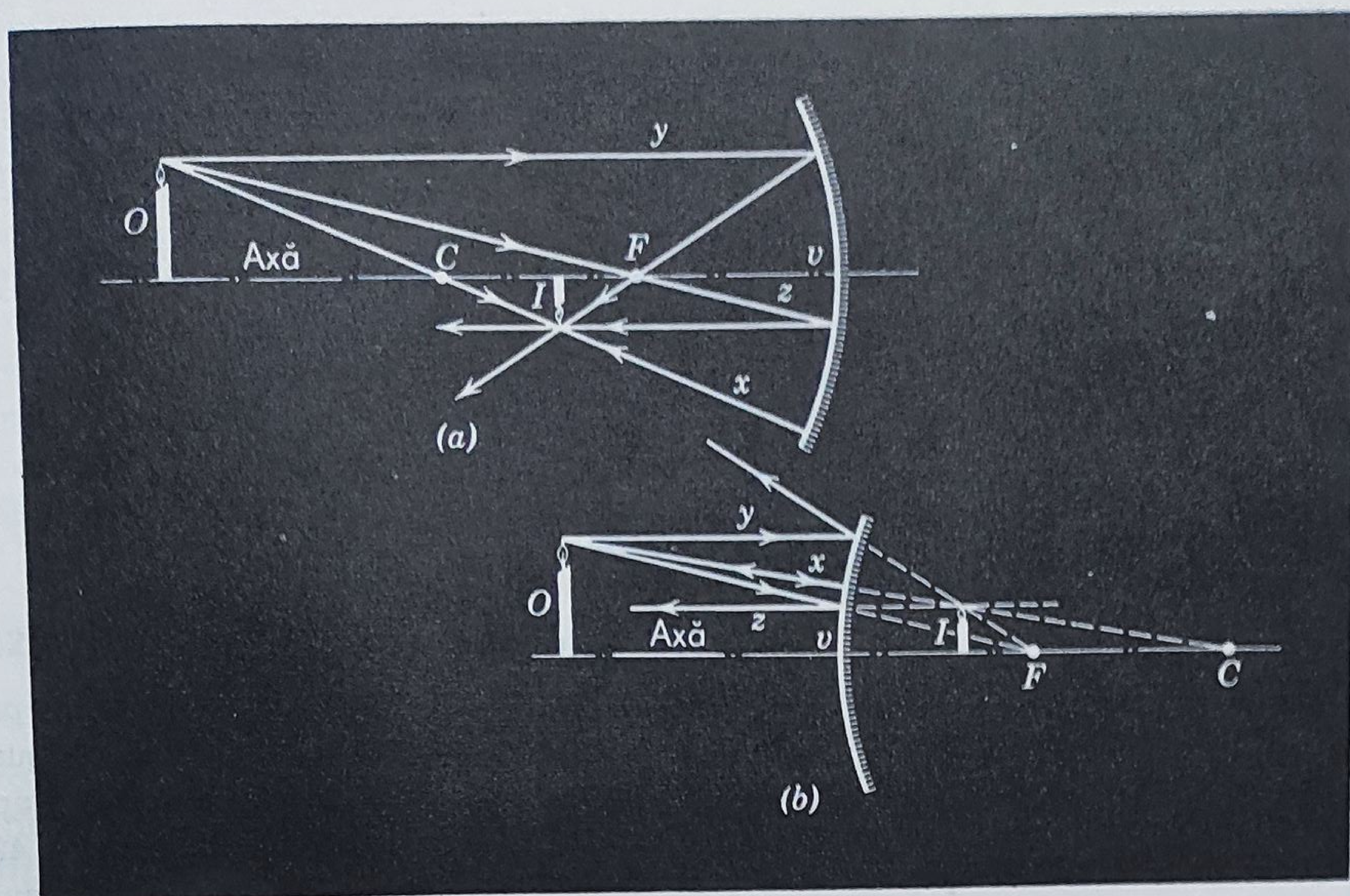


Figura 42-14. Imaginea unui obiect mare în (*a*) o oglindă concavă și (*b*) o oglindă convexă este localizată grafic. Oricare două din cele trei raze arătate sînt suficiente.

ei înseși (axa x în figura 42-13). Astfel de raze cad perpendicular pe oglindă.

2. O rază care întîlnește oglinda paralel cu axa trece (sau va trece după prelungire) prin punctul focal (raza y).

3. O rază care întîlnește oglinda după ce trece (direct sau după prelungire) prin punctul focal merge paralel cu axa (raza z).

Figura 42-15 reprezintă o rază *(dve)* care are originea în vîrful obiectului în figura 42-14 a, este reflectată în punctul v, și trece prin vîrful imaginii. Legea reflexiei cere ca această rază să facă unghiuri egale θ cu axa oglinzii. Pentru cele două triunghiuri dreptunghice asemenea din figură putem scrie

$$\frac{ce}{bd} = \frac{vc}{vb}$$

Cantitatea din stînga (fără să punem problema semnului) este *mărirea laterală* m a oglinzii. Dacă vrem să reprezentăm o imagine *inversată* cu o mărire negativă, putem defini în mod arbitrar m pentru acest caz ca — (ce/bd) Dacă $vc=i$ și $vb=o$, avem imediat

$$m = -\frac{i}{o} \tag{42-6}$$

Această ecuație dă mărirea pentru oglinzi sferice și plane în toate cazurile. Pentru o oglindă plană, $o=-i$ și mărirea presupusă este $+1$, care, în acord cu experiența, indică o imagine *dreaptă* de aceeași mărime cu obiectul.

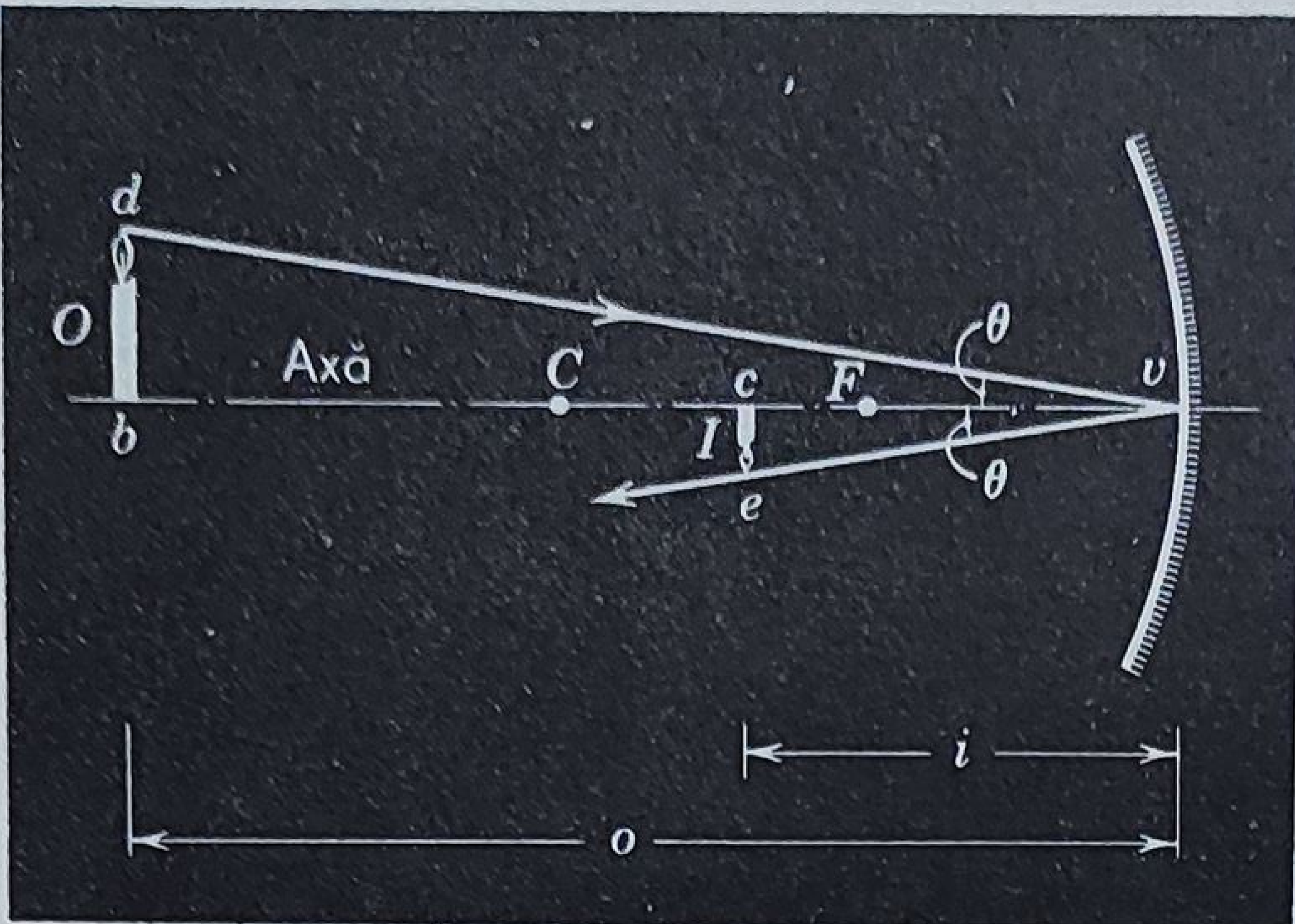


Figura 42-15. O rază particulară pentru aranjamentul din figura 42-14, utilizată pentru a arăta că *mărimea laterală m* este dată de $-i/o$.

Imaginile cu oglinzile sferice suferă anumite „defecte" care apar deoarece presupunerea că razele sînt paraxiale nu este complet justificată. În general, un punct sursă nu va produce un punct imagine; vezi problema 5. În afară de aceasta, apar distorsiuni deoarece mărirea variază cu distanța față de axa oglinzii. Ecuația 42-6 fiind strict corectă doar pentru axe paraxiale. Peste aceste defecte se suprapun *efecte de difracție* care apar deoarece principiul de bază al opticii geometrice, după care lumina călătorește după linii paralele, trebuie întotdeauna considerat ca o aproximație.

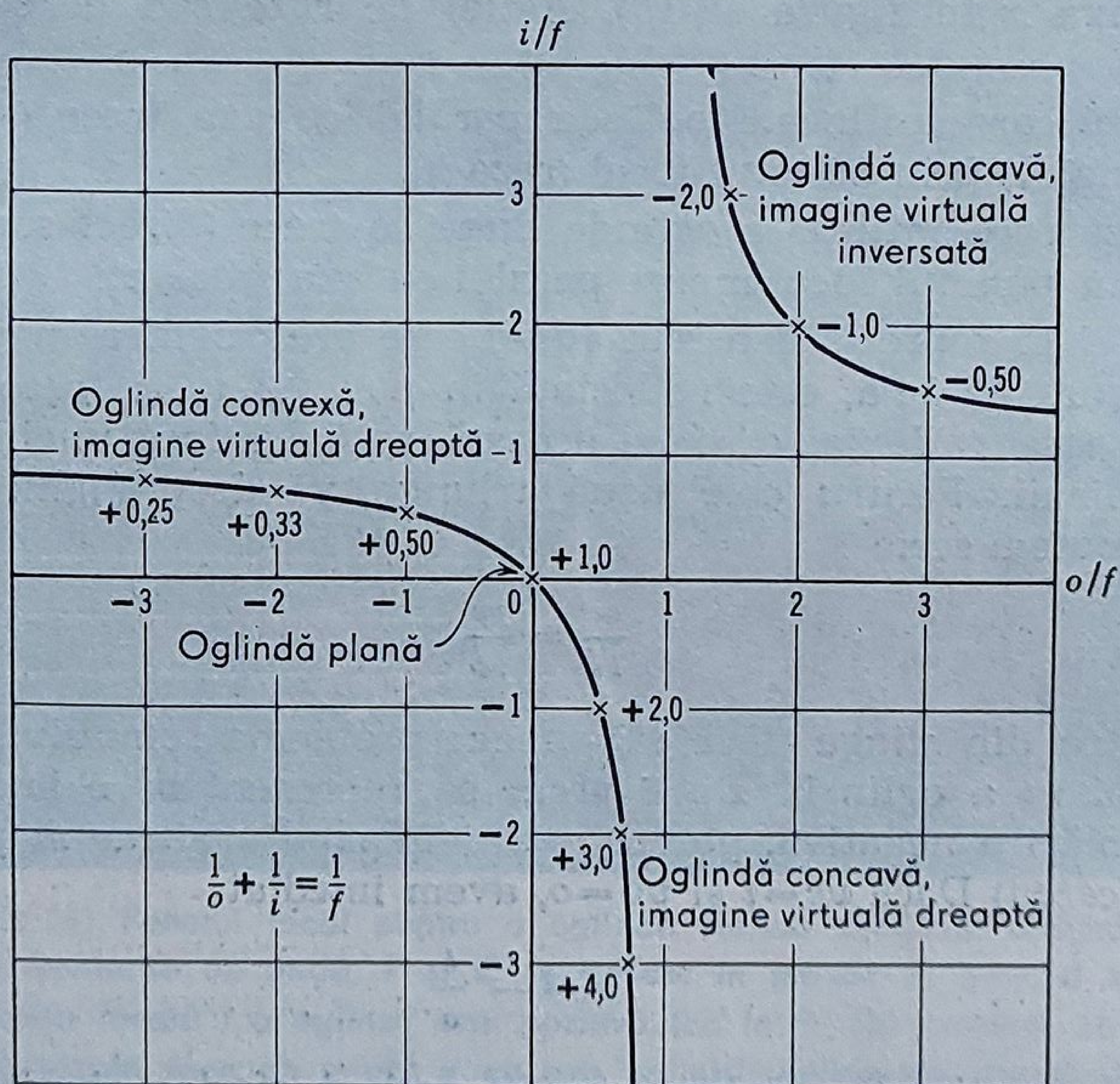


Figura 42-16. O reprezentare grafică a formulei oglinzii (Ecuația 42-5.). Numerele de pe curbe dau măririle laterale (ecuația 42-6.).

Figura 42-16 însumează previziunile ecuației oglinzii (ecuația 42-5) și ale ecuației măririi laterale (ecuația 42-6). Pentru oglinzi convexe imaginea este întotdeauna virtuală. Pentru oglinzi concave imaginea este virtuală dacă obiectul este în interiorul punctului focal ($o/f<1$) și reală în afară ($o/f>1$). Dacă $o \to \infty$ pentru ambele tipuri de oglinzi, imaginea se apropie de punctul focal ($i/f \to 1$). O oglindă plană ($m=+1$) este reprezentată în figură ca un punct în origină. Este potrivit ca acest punct să formeze punctul central pe ramura stînga jos în figura 42-16 deoarece amîndouă oglinzile convexă și concavă aproximează o oglindă plană dacă r crește în mărime, adică, dacă $f \to \infty$ (sau $o/f \to 0$ în figura 42-16, presupunînd o distanță obiect fixă).

42-4 Suprafețe sferice refractante

Figura 42-17 reprezintă un punct sursă O lîngă o suprafață sferică *refractantă* de rază de curbură r. Suprafața separă două medii ai căror indici de refracție diferă, *cel al mediului în care cade lumina incidentă fiind* n_1 iar cel al celeilalte părți a suprafeței fiind n_2.

Din O construim o linie prin centrul de curbură C al suprafeței refractante, stabilind astfel o axă convenabilă care interceptează suprafața în vertexul v. Din O construim o rază care face un unghi mic arbitrar α cu axa și întîlnește suprafața refractantă în a, fiind refractată conform relației

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Raza refractată intersectează axa în I. O rază din O care călătorește de-a lungul axei nu va fi deviată la intrarea în suprafață și va trece de asemenea prin I. Astfel, pentru aceste două raze cel puțin, I este imaginea lui O.

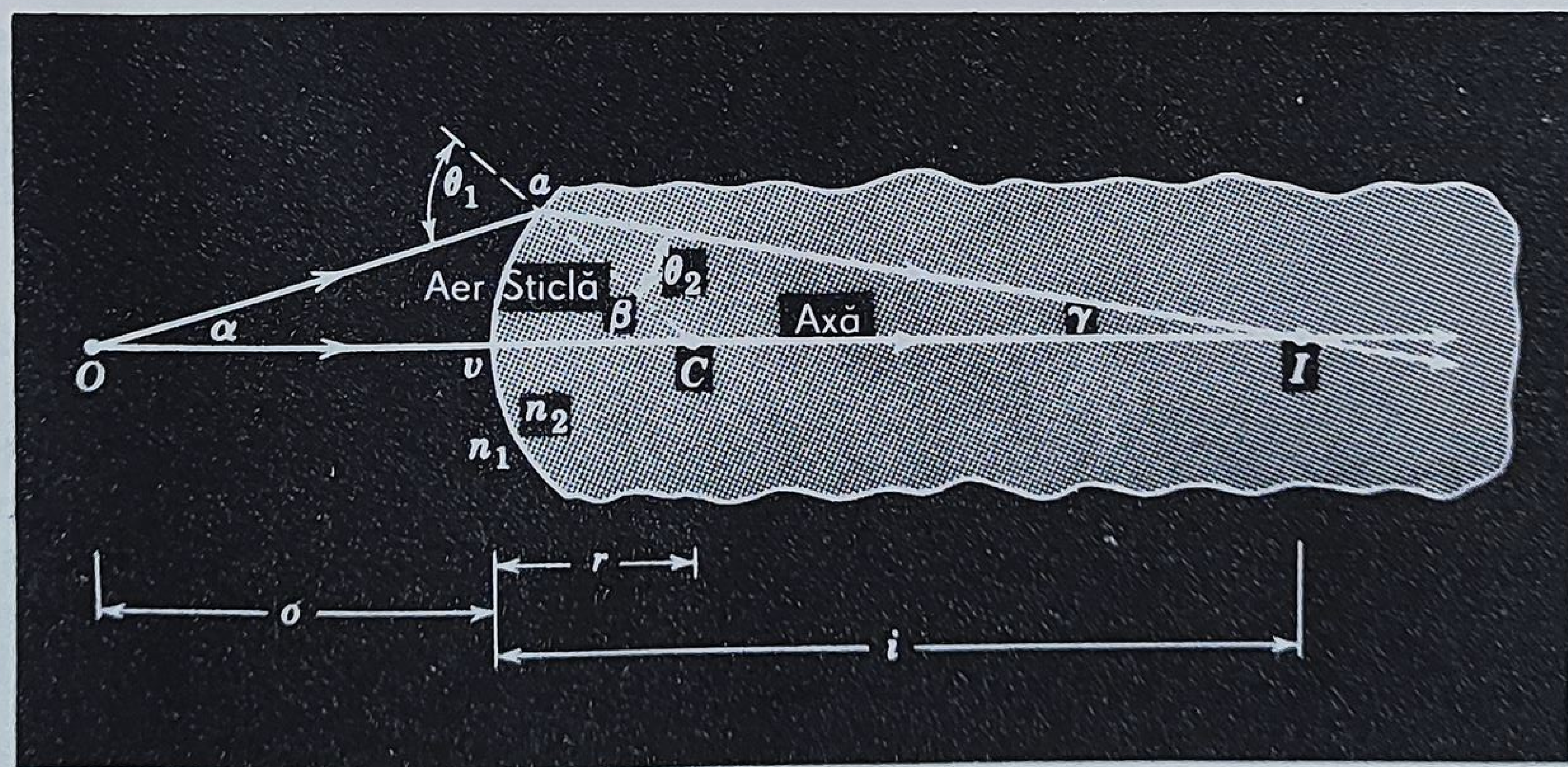


Figura 42-17. Două raze din O converg după refracția pe o suprafață sferică, formînd o imagine reală I.

În deducerea ecuației oglinzii, se folosește teorema: unghiul exterior al unui triunghi este egal cu suma unghiurilor interioare opuse. Aplicînd aceasta triunghiurilor *COaC* și *ICaI* avem

$$\theta_1 = \alpha + \beta \tag{47-7}$$

și

$$\beta = \theta_2 + \gamma \tag{42-8}$$

Dacă α este mic, unghiurile β, γ, θ_1 și θ_2 în figura 42-17 devin de asemenea mici. *Presupunem imediat că* α, *deci toate aceste unghiuri sînt arbitrar de mici;* această presupunere pentru o rază paraxială fiind făcută și pentru oglinzi sferice. Înlocuind sinușii unghiurilor cu unghiurile înseși — dacă unghiurile sînt mici — putem scrie legea refracției astfel

$$n_1\theta_1 \cong n_2\theta_2 \tag{42-9}$$

Combinînd ecuația 42-8 și 42-9 se obține

$$\beta = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 + \gamma$$

Eliminînd θ_1 între această ecuație și ecuația 42-7 conduce, după rearanjare, la

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \tag{42-10}$$

În radiani unghiurile α, β, γ din figura 42-17 sînt

$$\alpha \cong \frac{av}{o}$$

$$\beta = \frac{av}{r} \tag{42-11}$$

$$\gamma \cong \frac{av}{i}$$

Numai a doua ecuație este exactă. Celelalte două sînt aproximative deoarece *I* și *O* nu sînt centrele cercurilor în care *av* este un arc. Totuși, pentru raze paraxiale (α destul de mic) inexactitățile în ecuația 42-11 pot fi oricît de mici dorim. Substituirea ecuației 42-11 în ecuația 42-10 conduce imediat la

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{42-12}$$

Această ecuație este valabilă ori de cîte ori lumina este refractată din obiecte punctuale pe suprafețe sferice, presupunînd că razele sînt paraxiale. Ca și pentru formulele oglinzii, trebuie ca ecuația 42-12 să fie folosită cu atenție la semnele pentru *o*, *i* și *r*. Încă odată stabilim convențiile de semn avînd în vedere un caz particular, cel din figura 42-17:

În figura 42-17, în care lumina *diverge* dintr-un obiect *real*, cade pe o suprafață refractantă *convexă*, și *converge* după refracție pentru a forma o imagine *reală*, cantitățile *o*, *i* și *r* din ecuația 42-12 au valori numerice pozitive.

Figura 42-18. Imaginile reale sînt formate pentru oglinzi de aceeași parte ca și a luminii incidente dar de partea opusă pentru suprafețe refractante și oglinzi subțiri. Aceasta deoarece lumina incidentă este reflectată înapoi de oglinzi dar e transmisă prin suprafețele refractante.

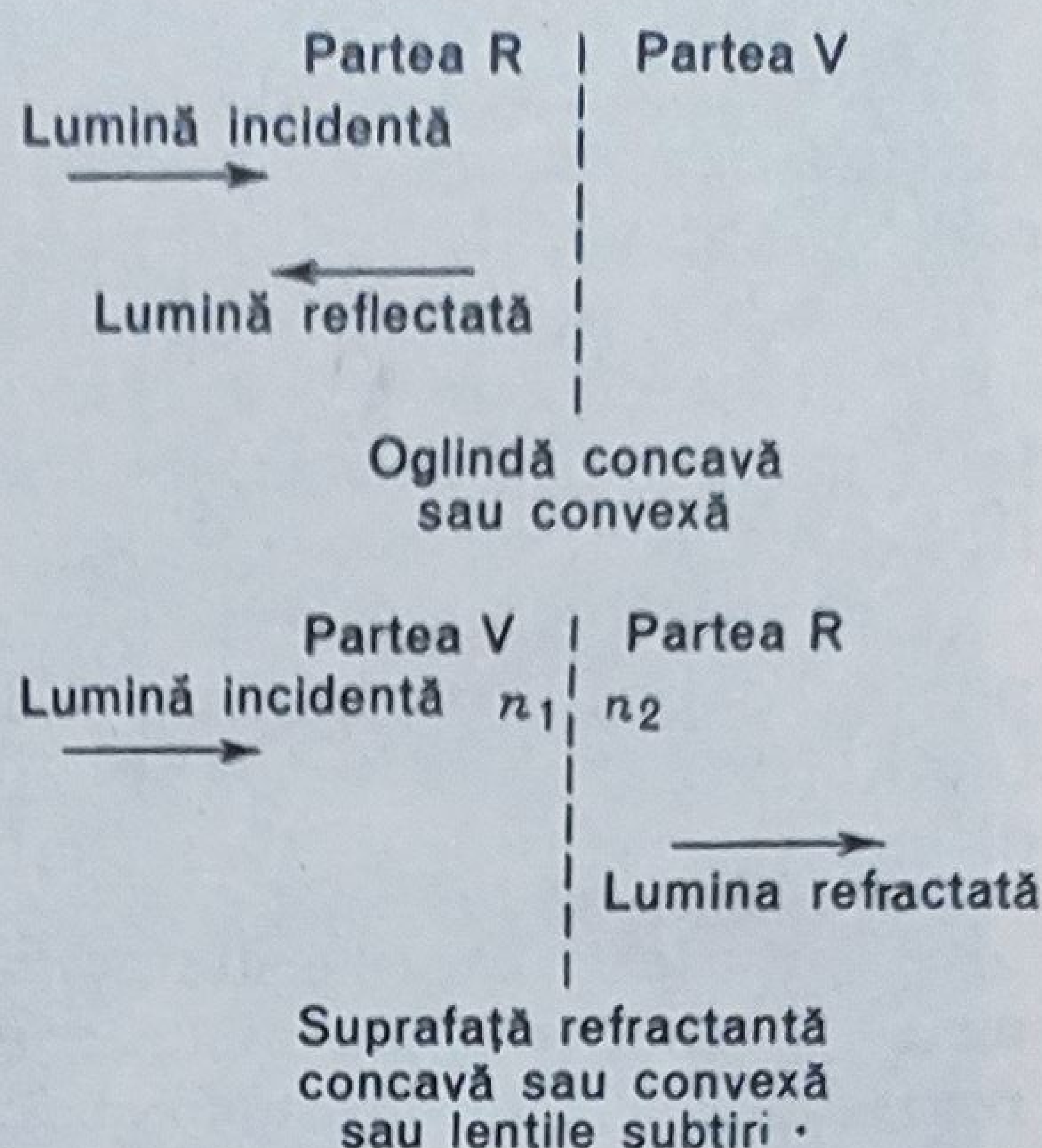


Figura 42-17 a fost folosită pentru deducerea ecuației 42-12, iar cititorul va trebui să și le asocieze în minte ca un ajutor pentru folosirea corectă a semnelor. Această aserțiune de bază este similară celei făcute pentru oglinzi la pagina 407.

Să ne fixăm atenția asupra părții suprafeței refractante dinspre care cade lumina incidentă. Spre deosebire de oglinzi, energia luminoasă *trece prin* suprafața refractantă în cealaltă parte, iar dacă se formează o imagine reală aceasta trebuie să apară de partea cealaltă, pe care o numim partea R. Partea dinspre care vine lumina este numită partea V deoarece aici apar imagini virtuale. Figura 42-18 sugerează această distincție importantă între reflexie și refracție.

În cele de mai sus am asociat imagini reale cu distanțe pozitive. Astfel sîntem conduși la convenția de semn:

1. Distanța imagine i este pozitivă dacă imaginea (reală) este de partea R a suprafeței refractante, ca în figura 42-17, i este negativă dacă imaginea (virtuală) se află în partea V, ca în figura 42-19.

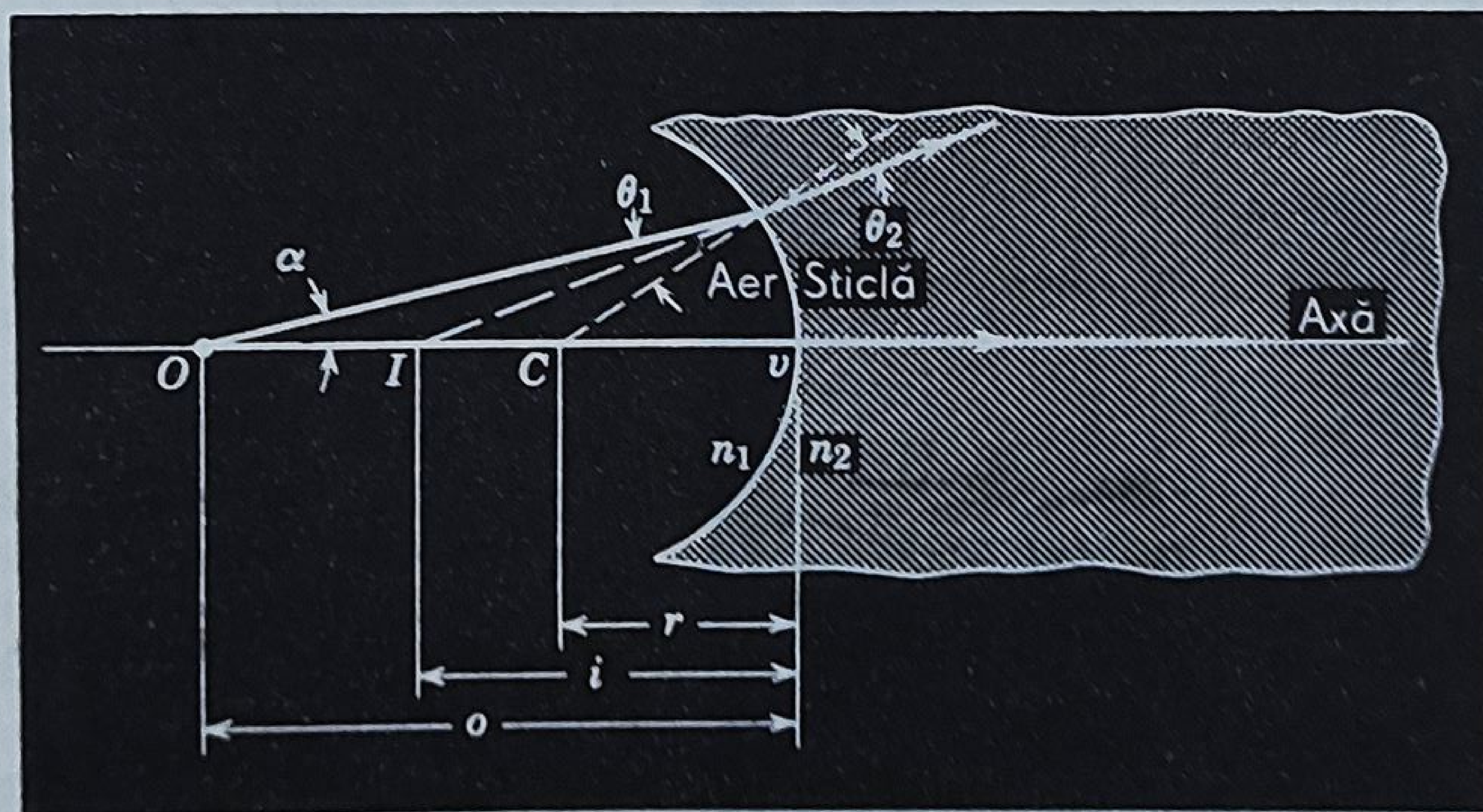


Figura 42-19. Două raze din O diverg după refracția pe o suprafață sferică, formînd o imagine virtuală *I*.

Suprafață refractanta din figura 42-12 este convexă. Dacă este făcută concavă (presupunînd o continuare $n_2 > n_1$), razele vor *diverge* după refracție și vor forma o imagine *virtuală*, ca în figura 42-19. Astfel sîntem conduși la a doua convenție de semn:

2. Raza de curbură r este pozitivă dacă centrul de curbură al suprafeței refractante se găsește în partea R, ca în figura 42-17; r este negativă dacă centrul de curbură se găsește în partea V, ca în figura 42-19.

Convențiile de semn pentru suprafețe refractante sînt aceleași ca pentru oglinzi (pagina 407), diferența fundamentală între cele două situații fiind inclusă în definițiile părților R și V în figura 42-18. Această diferență este ușor de memorat pe baze fizice.

Pentru toate cazurile din această carte distanța obiect o este pozitivă. În sistemele de două sau mai multe suprafețe refractante (sau combinații de suprafețe refractante și oglinzi) este posibil un aranjament în care lumina *convergentă* să cadă pe suprafața refractantă. În astfel de cazuri obiectul este numit *virtual* și distanța obiect O este negativă; limităm discuția noastră la obiecte reale.

Exemplul 4. Să se localizeze imaginea pentru geometria din figura 42-17, presupunînd raza de curbură 10 cm, $n_2=2{,}0$, iar $n_1=1{,}0$. Obiectul se află la 20 cm la stînga lui v.

Din ecuația 42-12,

$$\frac{n_1}{o} + \frac{o_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

avem

$$\frac{1{,}0}{+20\,\mathrm{cm}} + \frac{2{,}0}{i} = \frac{2{,}0 - 1{,}0}{+10\,\mathrm{cm}}$$

De notat că r este pozitivă deoarece centrul de curbură al suprafeței se găsește de partea R. Această relație dă $i=40$ cm în acord cu construcția grafică. Energia luminoasă trece de fapt prin I astfel că imaginea este reală, așa cum indică semnul pozitiv pentru i.

Exemplul 5. Un obiect este cufundat într-un mediu cu $n_1=2{,}0$ la 15 cm depărtare de suprafața sferică a cărei rază de curbură este —10 cm, ca în figura 42-20; r este negativă deoarece C se află în partea V. Localizați imaginea.

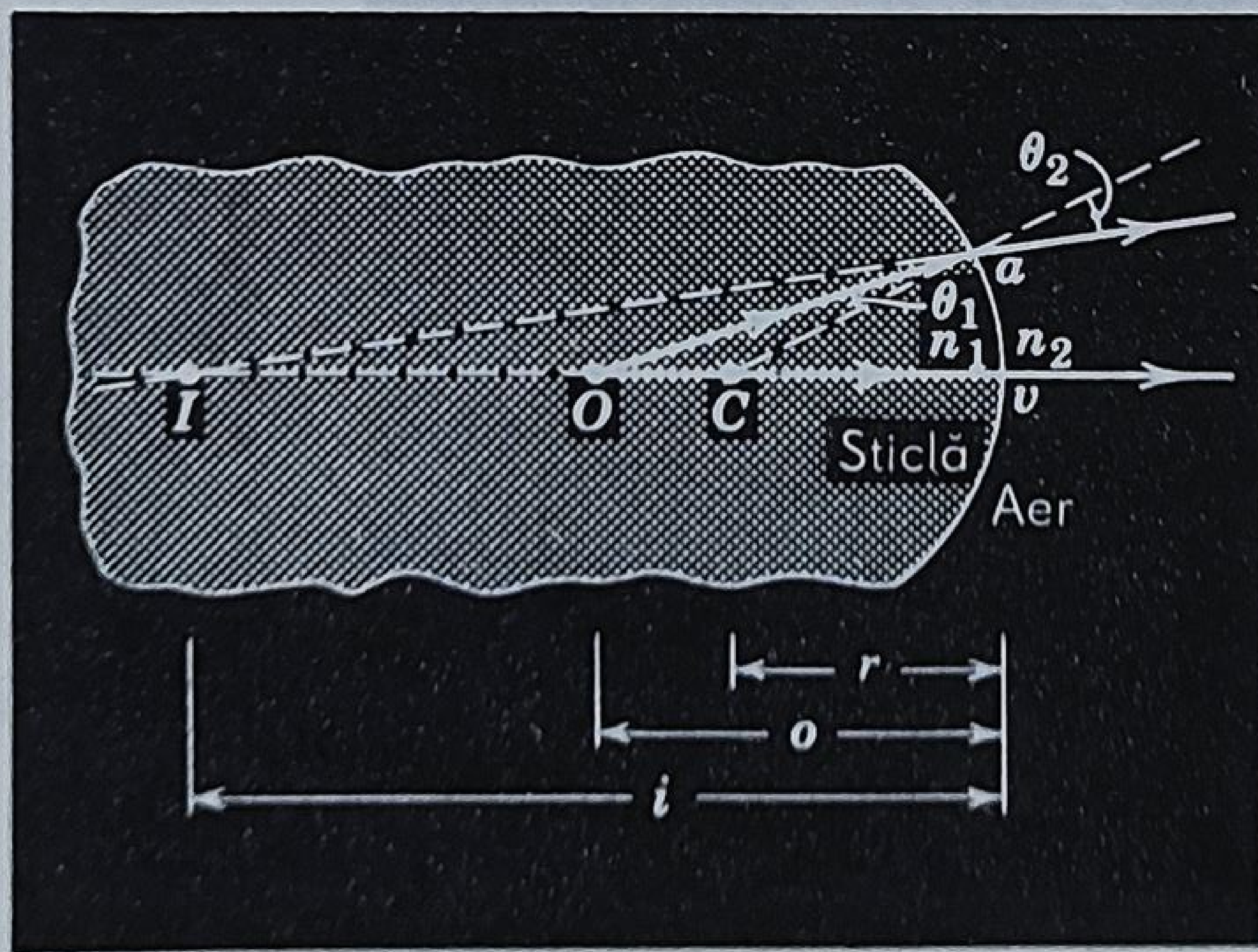


Figura 42-20. Două raze din O par că ies din *I* (imagine virtuală) după refracția pe o suprafață sferică.

Figura 42.20 reprezintă o rază trasată prin suprafață prin aplicarea legii refracției în punctul a. O a doua rază din O de-a lungul axei emerge pe aceeași direcție din v. Imaginea I se găsește prin prelungirea acestor raze în spate; este virtuală.

Din ecuația 42.12,

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

avem

$$\frac{2.0}{+15 \text{ cm}} + \frac{1,0}{i} = \frac{1,0 - 2,0}{-10 \text{ cm}}$$

care dă $i = -30$ cm, în conformitate cu figura 42.20 și cu convențiile de semn. De notat că n_1 se referă întotdeauna la mediul ce se află de acea parte a suprafeței din care vine lumina.

Exemplul 6. Care este relația între i și o dacă suprafața refractantă este plană?

O suprafață plană are o rază infinită de curbură. Punînd $r \to \infty$ în ec. 42.12 se obține

$$i = -o \frac{n_2}{n_1}$$

Figura 42.21 ilustrează situația grafic *(a)* pentru un obiect în aer văzut de sub apă și *(b)* pentru un obiect în apă văzut din aer. Aceasta arată că un scafandru, care privește în sus, la, să spunem, o creangă deasupra apei, o va crede mai sus decît este cu un factor 1,33/1,00. În mod similar, un observator din aer va crede că obiectele aflate pe fundul unui bazin cu apă sînt mai aproape de suprafață decît sînt de fapt, cu un factor, 1,00/1,33. Aceste considerații, fiind bazate pe ecuația 42.12, se mențin valabile doar pentru raze paraxiale, ceea ce înseamnă că razele incidente pot for-

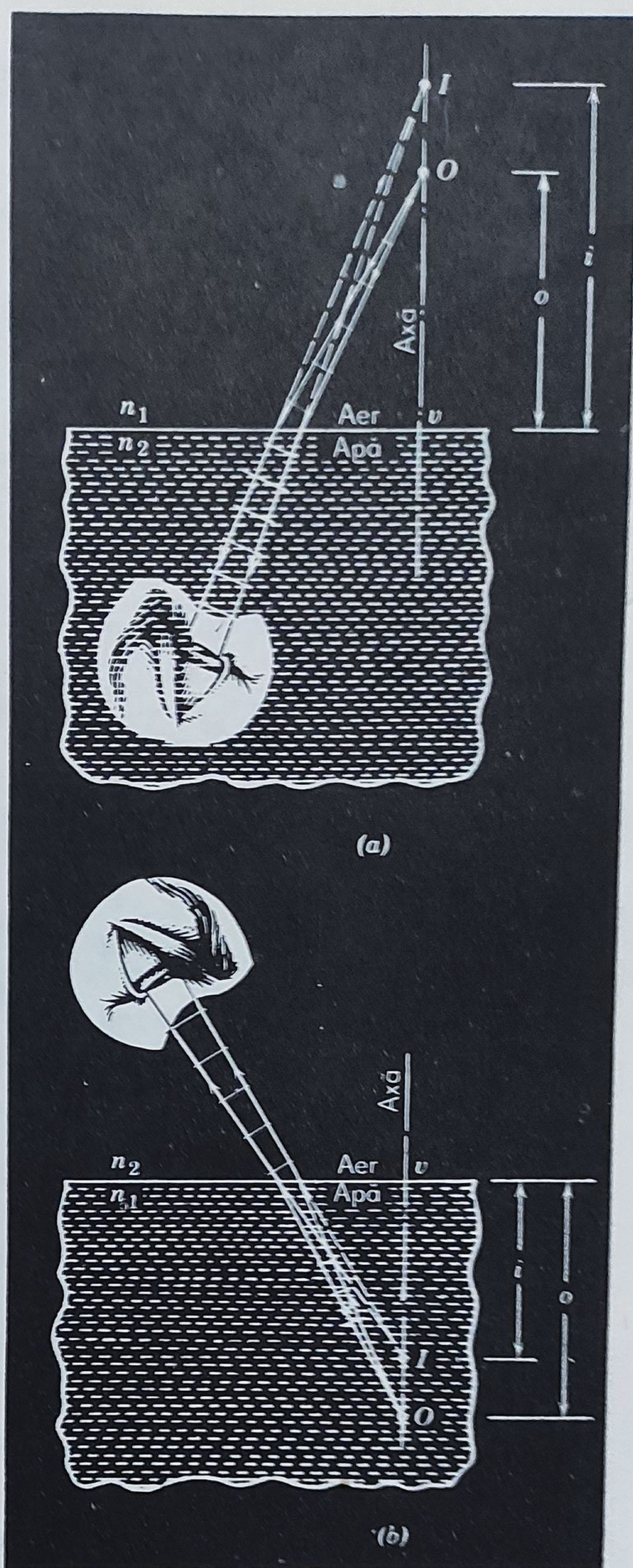


Figura 42-21. Refracția pe o suprafață plană la incidență aproape normală, arătîndu-se un fascicul îngust de raze și undele corespunzătoare ce intră în pupilă. *(a)* Sursa în aer și *(b)* sursa în apă.

ma doar un unghi mic cu normala; acest unghi a fost exagerat în figură, pentru claritate. De notat de asemenea că n_1 este întotdeauna indicele mediului care se găsește de partea suprafeței ce conține lumina incidentă.

42-5 Lentile subțiri

În multe situații de refracție există mai mult decît o suprafață refractantă. Aceasta este adevărat chiar pentru o lentilă de ochelari, lumina trecînd din aer în sticlă apoi din sticlă în aer. În microscoape, telescoape, aparate de fotografiat etc., există adesea mult mai mult decît două suprafețe.

Figura 42-22 a reprezintă o „lentilă" groasă de sticlă de lungime l ale cărei suprafețe au razele r' și r''. Un obiect punctual O' este așezat lîngă suprafața stîngă, după cum este arătat în figură. O rază ce părăsește O' de-a lungul axei nu-și schimbă direcția la intrarea sau ieșirea din lentilă deoarece cade pe fiecare suprafață după normală.

O a doua rază ce pleacă din O' și face un unghi oarecare cu axa, întîlnește suprafața în punctul a', este refractată, și întîlnește a doua suprafață în punctul a''. Raza este din nou refractată și traversează axa în I'', care fiind intersecția a două raze din O'', este imaginea punctul O', formată după refracția pe cele două suprafețe.

Figura 42-22 b reprezintă prima suprafață, care formează o imagine virtuală a lui O' în I'. Pentru localizarea lui I' folosim ecuația 42-12

$$\frac{n_1}{o}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

Punînd $n_1=1{,}0$ și $n_2=n$ și avînd în vedere că distanța imagine este negativă (adică, $i=-i'$ în figura 42-22 b), obținem

$$\frac{1}{o'}-\frac{n}{i'}=\frac{n-1}{r'} \tag{42-13}$$

În această ecuație i' va fi un număr pozitiv deoarece am introdus în mod arbitrar semnul minus potrivit unei imagini virtuale.

Figura 42-22 c reprezintă a doua suprafață. În afară de cazul cînd un observator din punctul a'' ar fi conștient de existența primei suprafețe, el ar putea gîndi că lumina ce ajunge în acest punct are originea în punctul I' în figura 42-22 b și că regiunea din stînga suprafeței este umplută cu sticlă. Astfel imaginea (virtuală) I' formată de prima suprafață servește ca obiect real O'' pentru a doua suprafață. Distanța dintre acest obiect și a doua suprafață este

$$o''=i'+l \tag{42-14}$$

Aplicînd ecuația 42-12 la a doua suprafață, punem $n_1=n$ și $n_2=1{,}0$ deoarece obiectul se comportă ca fiind în sticlă. Dacă folosim ecuația 42-14, ecuația 42-12 devine

$$\frac{n}{i'+l}+\frac{1}{i''}=\frac{1-n}{r''} \tag{42-15}$$

Să considerăm acum că grosimea l a „lentilei" din figura 42-22 este astfel de mică încît poate fi neglijată în comparație cu alte cantități

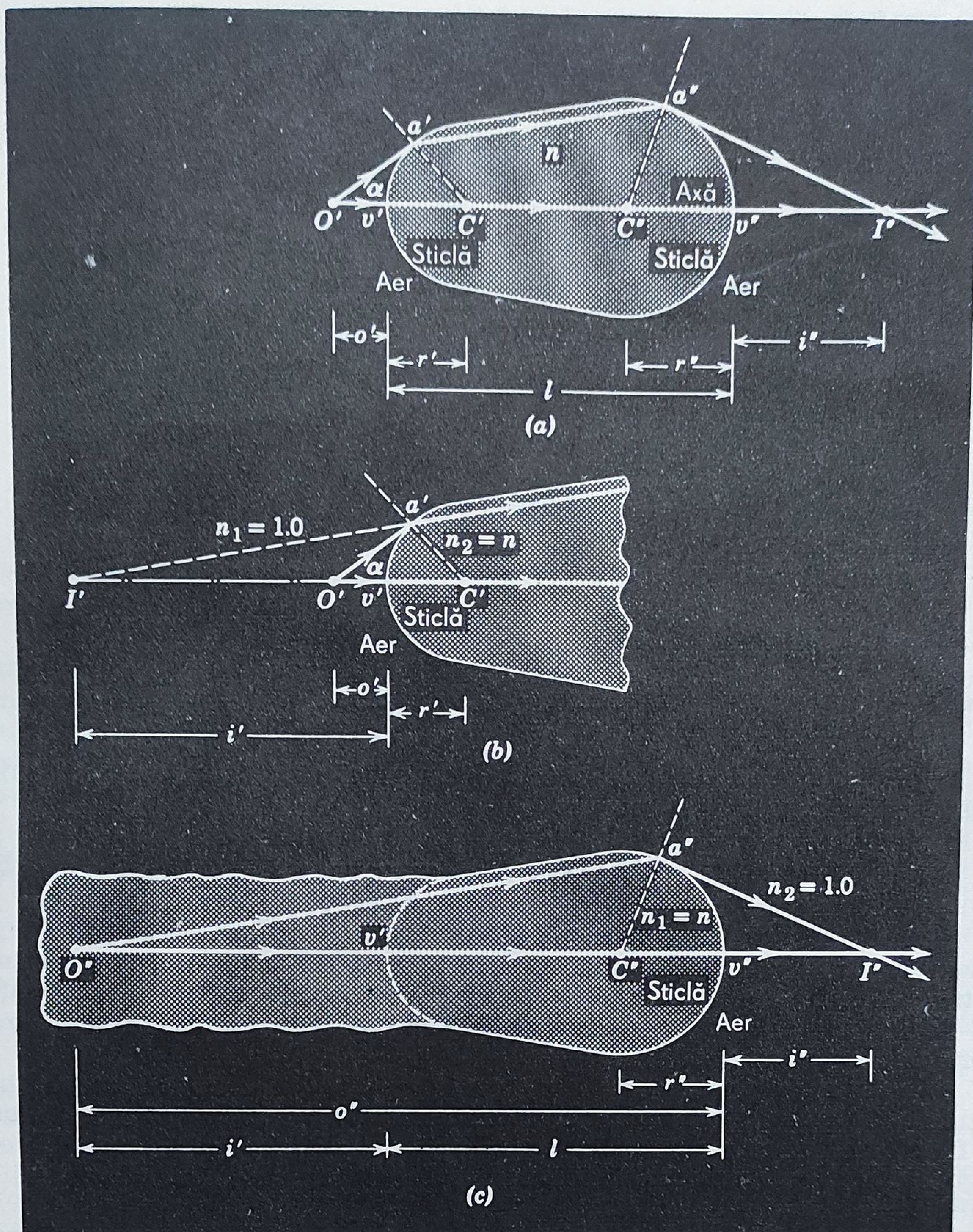


Figura 42-22. (*a*) Două raze din *O′* se intersectează în *I′* (imagine reală) după refracția pe două suprafețe sferice. (*b*). Prima suprafață și (c) a doua suprafață sînt arătate separat. Mărimile α și *n* sînt exagerate pentru claritate.

liniare din această figură (ca o', i', o'', i'', r' și r''). În tot ceea ce urmează vom folosi *aproximația lentilelor subțiri*. Punînd $l=0$ în ecuația 42-15 obținem

$$\frac{n}{i'} + \frac{1}{i''} = -\frac{n-1}{r''} \qquad (42\text{-}16)$$

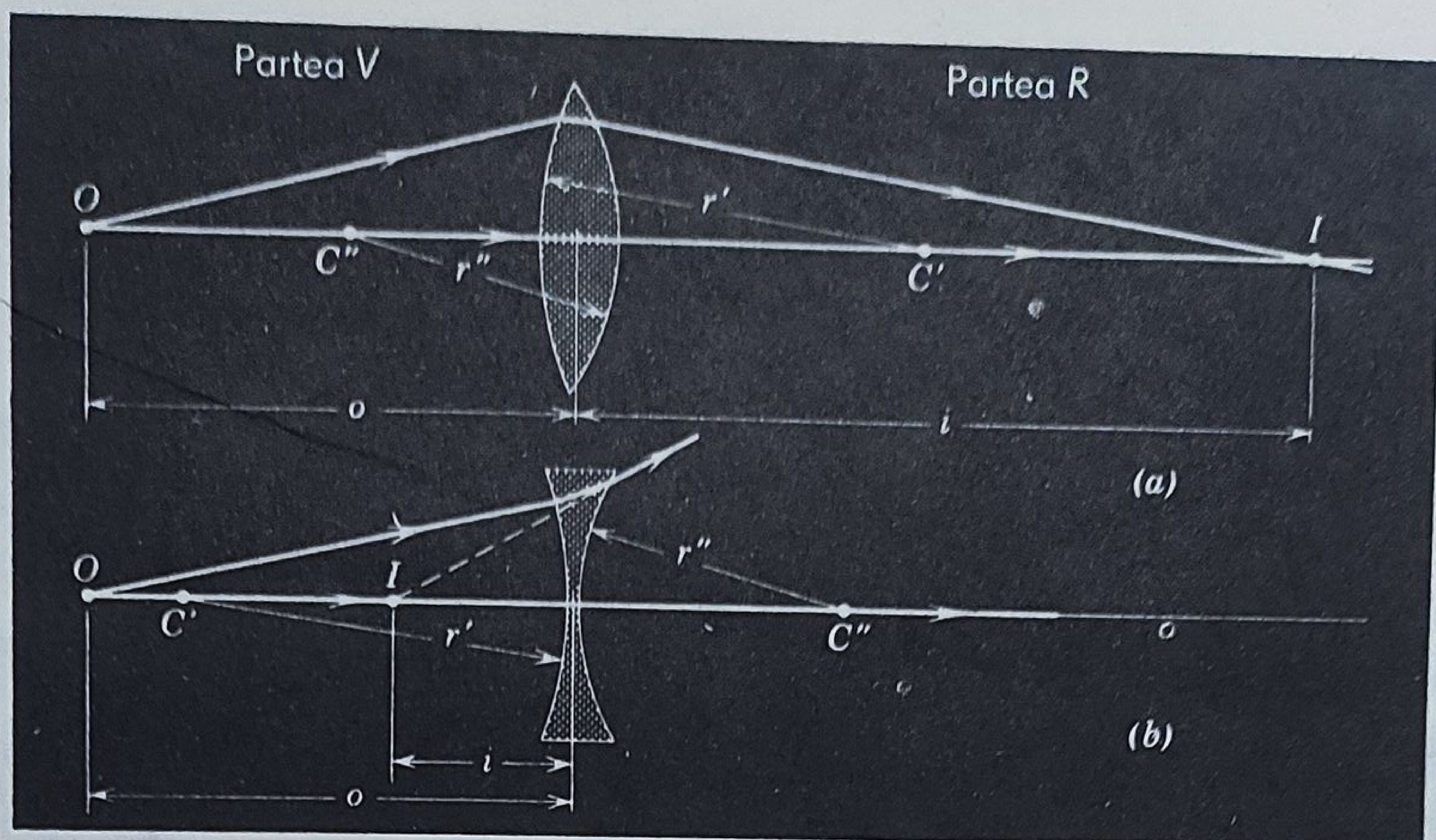


Figura 42-23. Ilustrații folosite pentru stabilirea convențiilor lentilelor subțiri.

Adunînd ecuația 42-12 și 42-16 avem

$$\frac{1}{o'}+\frac{1}{i''}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)$$

În sfîrșit, notînd distanța obiect de origine, simplu cu o iar distanța imagine finală cu i se obține

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right) \tag{42-17}$$

Această ecuație este valabilă numai pentru raze paraxiale și numai dacă lentila este atît de subțire încît nu există o diferență esențială între mărimile o și i măsurate pentru suprafețe diferite. În ecuația 42-17 r' se referă la prima suprafață atinsă de lumină cînd aceasta traversează lentila, iar r'' la a doua suprafață.

Convențiile de semn pentru ecuația 42-17 sînt aceleași ca pentru oglinzi și pentru suprafețe refractante. Deoarece lentila este presupusă a fi subțire, ne referim la partea R și partea V ale însăși lentilei (vezi figura 42-18) și nu la cele ale suprafețelor în mod separat. Convențiile de semn sînt deci următoarele:

Distanța imagine i este pozitivă și imaginea (reală) se găsește în partea R a lentilei, ca în figura 42-23 a; i este negativă dacă imaginea (virtuală) se găsește în partea V a lentilei, ca în figura 42-23 b.

2. Razele de curbură r' și r'' sînt pozitive dacă centrele lor de curbură se găsesc în partea R a lentilei. Ele sînt negative dacă centrele lor de curbură se găsesc în partea V. În figura 42-23 a, r' este pozitivă și r'' este negativă; în figura 42-23 b r' este negativă și r'' este pozitivă

Figura 42-24 a și c reprezintă lumina paralelă provenind de la un obiect îndepărtat căzînd pe o lentilă subțire. Locul imaginii este numit *punctul focal secund* F_2 al lentilei. Distanța dintre F_2 și lentilă se numește *distanța focală* f. *Primul punct focal* al unei lentile subțiri (F_1 în figură) este poziția obiectului pentru care imaginea se formează la infi-

nit. Pentru lentile subțiri primul și al doilea punct focal sînt opuse și echidistante față de lentilă.

Distanța focală poate fi calculată din ecuația 42-17, cu $o \rightarrow \infty$ și $i=f$. Acesta duce la

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right) \tag{42-18}$$

Această relație este numită *ecuația constructorului de lentile* deoarece permite calculul distanței focale a unei lentile în funcție de raza de curbură și indicele de refracție al materialului. Combinînd ecuația 42-17 și 42-18 ecuația lentilei subțiri se poate scrie

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \tag{42-19}$$

Figura 42-24 b reprezintă raze de lumină paralele care fac un mic unghi α cu axa lentilei; acestea se întîlnesc într-un focar în *planul focal* $F'F''$, așa cum se arată. Acesta este un plan normal la axa lentilei în punctul focal.

În figura 42-24 a notăm că toate razele din figură conțin același număr de lungimi de undă; cu alte cuvinte, au același *drum optic;* vezi capitolul 41-6. Lungimea drumului optic este aceeași deoarece fronturile de undă sînt suprafețe pentru care vibrația undei are aceeași valoare constantă și deoarece toate razele prezentate trec prin același număr de fronturi de undă.

Exemplul 7. Lentilele din figura 42-44 au raze de curbură de 40 cm și sînt făcute din sticlă cu $n=1{,}65$. Să se calculeze distanțele lor focale.

Dacă C' se află în partea R a lentilei în figura 42-24 a, r' este pozitiv ($=+40$ cm). Dacă C'' se află în partea V, r'' este negativ ($=-40$ cm). Substituind în ecuația 42-18 se obține

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)=(1{,}65-1)\left(\frac{1}{+40\text{ cm}}-\frac{1}{-40\text{ cm}}\right)$$

sau

$$f=+31\text{ cm}$$

O distanță focală pozitivă indică că în conformitate cu figura 42-24 a punctul focal F_2 este în partea R a lentilei și lumina paralelă converge după refracție pentru a forma o imagine reală.

În figura 42-24 c, C' se află în partea V a lentilei astfel încît r' este negativ ($=-40$ cm). Dacă r'' este pozitiv ($=+40$ cm) ecuația 42-17 dă

$$f=-31\text{ cm}$$

O distanță focală negativă indică, că în conformitate cu figura 42-24 c punctul focal F_2 este în partea V a lentilei și lumina incidentă diverge după refracție pentru a forma o imagine virtuală.

Localizarea imaginii pentru un obiect real ca de exemplu o lumînare (figura 42-25) poate fi făcută grafic folosind următoarele trei fapte:

1. O rază paralelă cu axa care cade pe lentilă trece, fie direct, fie prin prelungire, prin cel de-al doilea punct focal (raza x în figura 42-25).

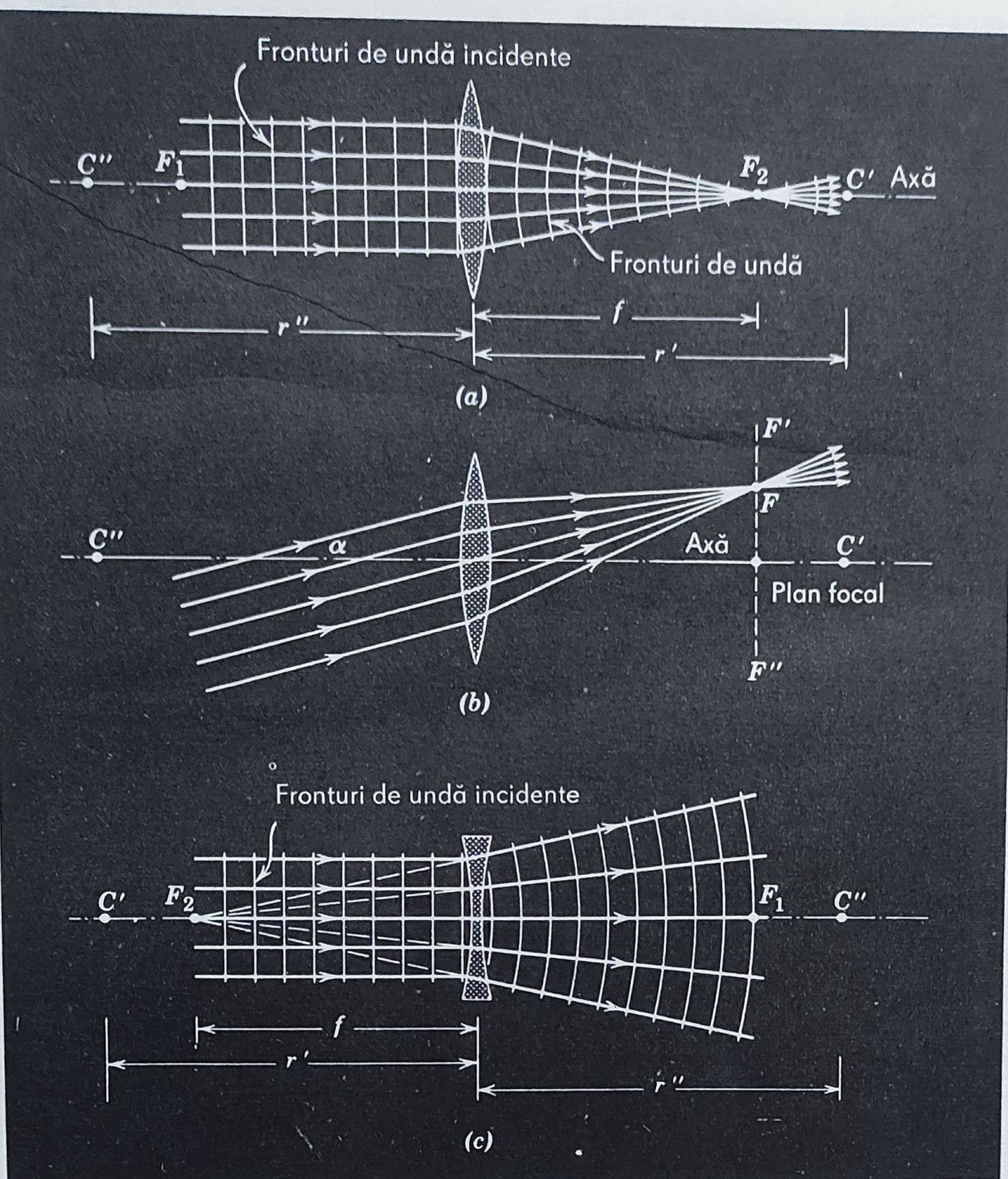


Figura 42-24. (*a*) Lumina paralelă trece prin al doilea punct focal F_2 al unei lentile convergente. (b) Lumina incidentă face un unghi α cu axa lentilei, razele fiind focalizate în $F'F''$. (c) Lumina paralelă, trecînd printr-o lentilă divergentă, pare că iese din al doilea punct focal F_2; c' și c'' sînt centrii de curbură pentru suprafețe; F_1 este primul punct focal.

2. O rază ce cade pe o lentilă după ce trece, fie direct, fie prin prelungire, prin primul punct focal va ieși din lentilă paralel cu axa (raza y).

3. O rază ce cade în centrul lentilei va trece prin ea fără să-și schimbe direcția, deoarece lentila, lîngă centru, se comportă ca o bucată subțire de sticlă cu pereți paraleli. Direcția razelor de lumină nu se schimbă, iar deplasările laterale nu se iau în considerație deoarece grosimea lentilei este considerată neglijabilă (raza z; vezi de asemenea problema 13, capitolul 41).

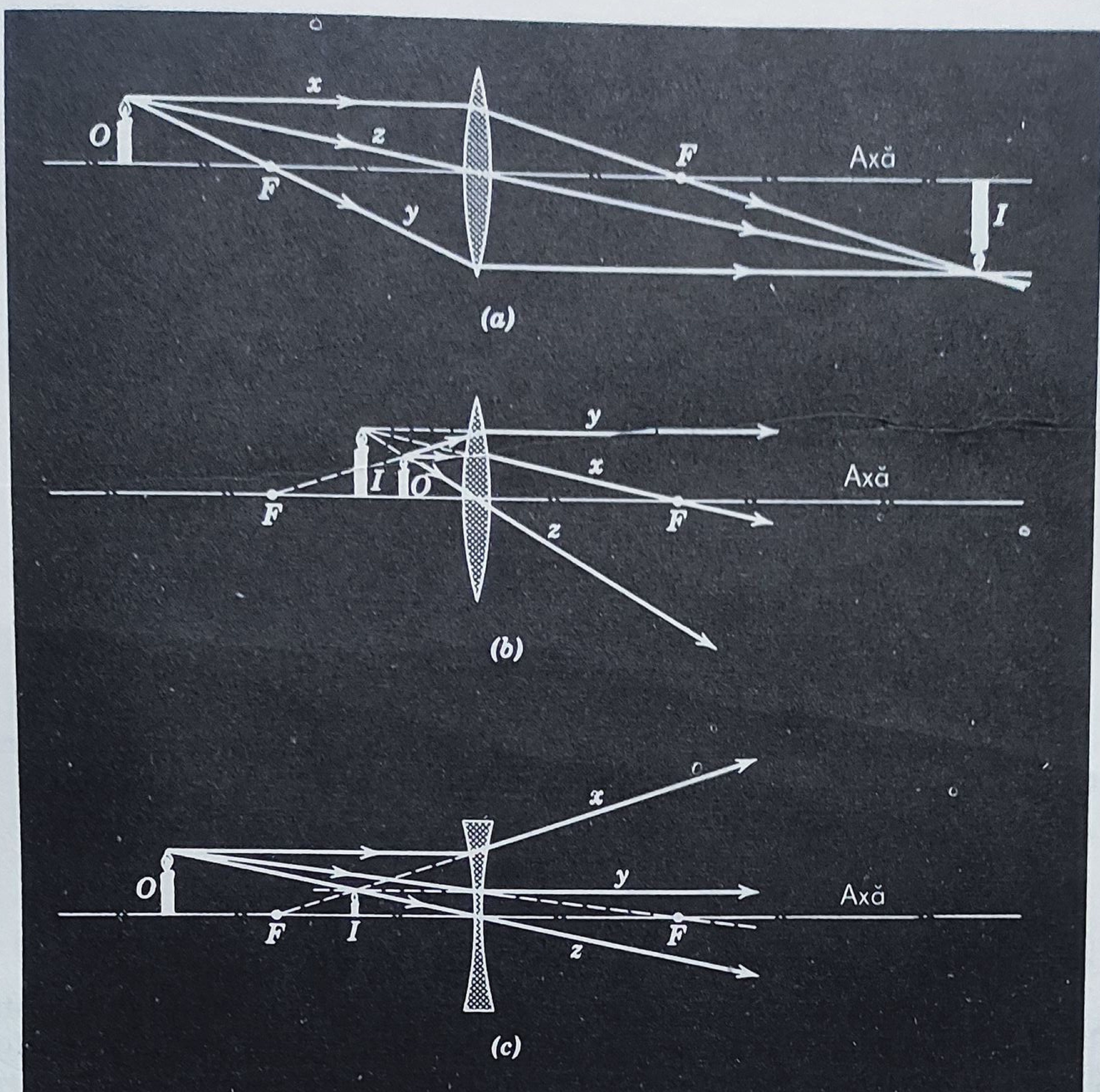


Figura 42-25. Arătînd localizarea grafică a imaginilor pentru trei lentile subțiri.

Figura 42-26, care reprezintă o parte din figura 42-25 a, reprezintă o rază ce trece din vîrful unui obiect prin centrul de curbură înspre vîrful imaginii. Pentru triunghiurile asemenea *abc* și *dec* putem scrie

$$\frac{de}{ab}=\frac{dc}{ac}$$

Partea dreaptă a acestei ecuații este i/o, iar partea stîngă este $-m$, unde m este *mărirea transversală*. Semnul minus este necesar deoarece dorim ca m să fie negativ pentru o imagine inversată. Aceasta înseamnă că

$$m=-\frac{i}{o} \tag{42-20}$$

care rămîne valabilă pentru orice tipuri de lentile și pentru orice distanțe obiect.

Exemplul 8. O lentilă convergentă are distanța focală de +24 cm. Un obiect este așezat la 9,0 cm distanță de lentilă ca în figura 42-25 b; să se descrie imaginea.

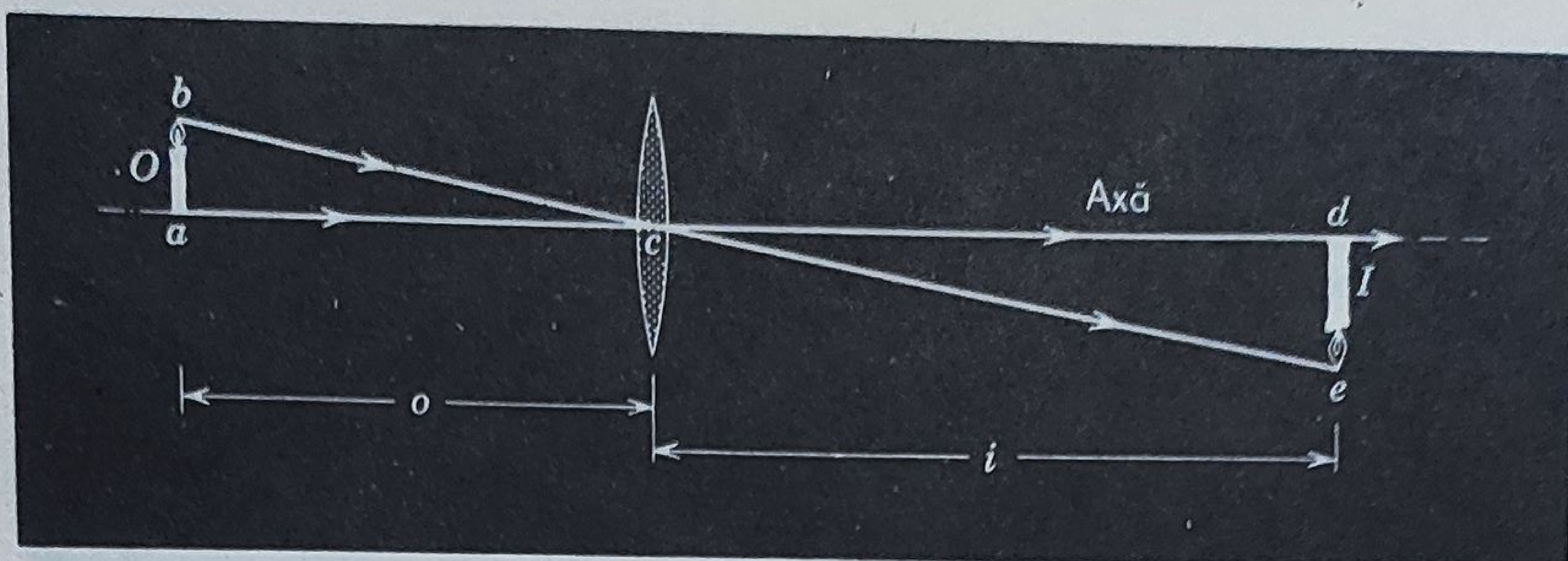


Figura 42-26. Două raze pentru situația din figura 32-25 *a*.

Din ecuația 42-19

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

avem

$$\frac{1}{+9{,}0\ \mathrm{cm}}+\frac{1}{i}=\frac{1}{+24\ \mathrm{cm}}$$

care dă $i=-14{,}4$ cm în conformitate cu figura. Semnul minus înseamnă că imaginea este în partea V a lentilei și este deci virtuală.

Mărimea laterală este deci dată de

$$m=-\frac{i}{o}=-\frac{-14{,}4\ \mathrm{cm}}{+9{,}0\ \mathrm{cm}}=+1{,}6$$

în conformitate cu figura. Semnul plus înseamnă o imagine dreaptă.

Imaginile formate de lentile au defecte similare celor discutate pentru oglinzi în pagina 412. Există defecte în legătură cu imposibilitatea formării unui punct imagine dintr-un punct obiect, cu variația măririi cu distanța față de axă, și cu difracția. Pentru lentile, nu și pentru oglinzi, există de asemenea *aberații cromatice* asociate cu faptul că proprietățile refractante ale lentilelor variază cu lungimea de undă deoarece și indicele de refracție al materialului lentilei variază. Dacă un obiect punctual emite lumină albă, imaginea, neglijînd alte defecte ale lentilei, va fi o serie de puncte colorate împrăștiate de-a lungul axei. Am văzut cu toții imaginile colorate produse de lentilele ieftine. O mare parte din tehnologia optică este formată din proiectarea lentilelor (mai des întîlnită, a sistemelor de lentile) pentru minimizarea defectelor lentilelor. În mod normal, suprafețele lentilelor nu sînt sferice.

Figura 42-27 este o reprezentare grafică a relației obiect-imagine pentru lentile subțiri; vezi ecuația 42-19 și ecuația 42-20. Faptul că sînt identice ca formă cu figura 42-16, care este valabilă pentru oglinzi, nu este surprinzător deoarece ecuațiile de bază pentru oglinzi și lentile subțiri (ecuațiile 42-19 și 42-5; ecuațiile 42-20 și 42.6) sînt identice. O lentilă convergentă de o anumită distanță focală este cantitativ similară cu o oglindă concavă de aceeași distanță focală, diferența fiind aceea că lentilele formează imagini reale în partea opusă obiectului (real), iar oglinda le formează de aceeași parte.

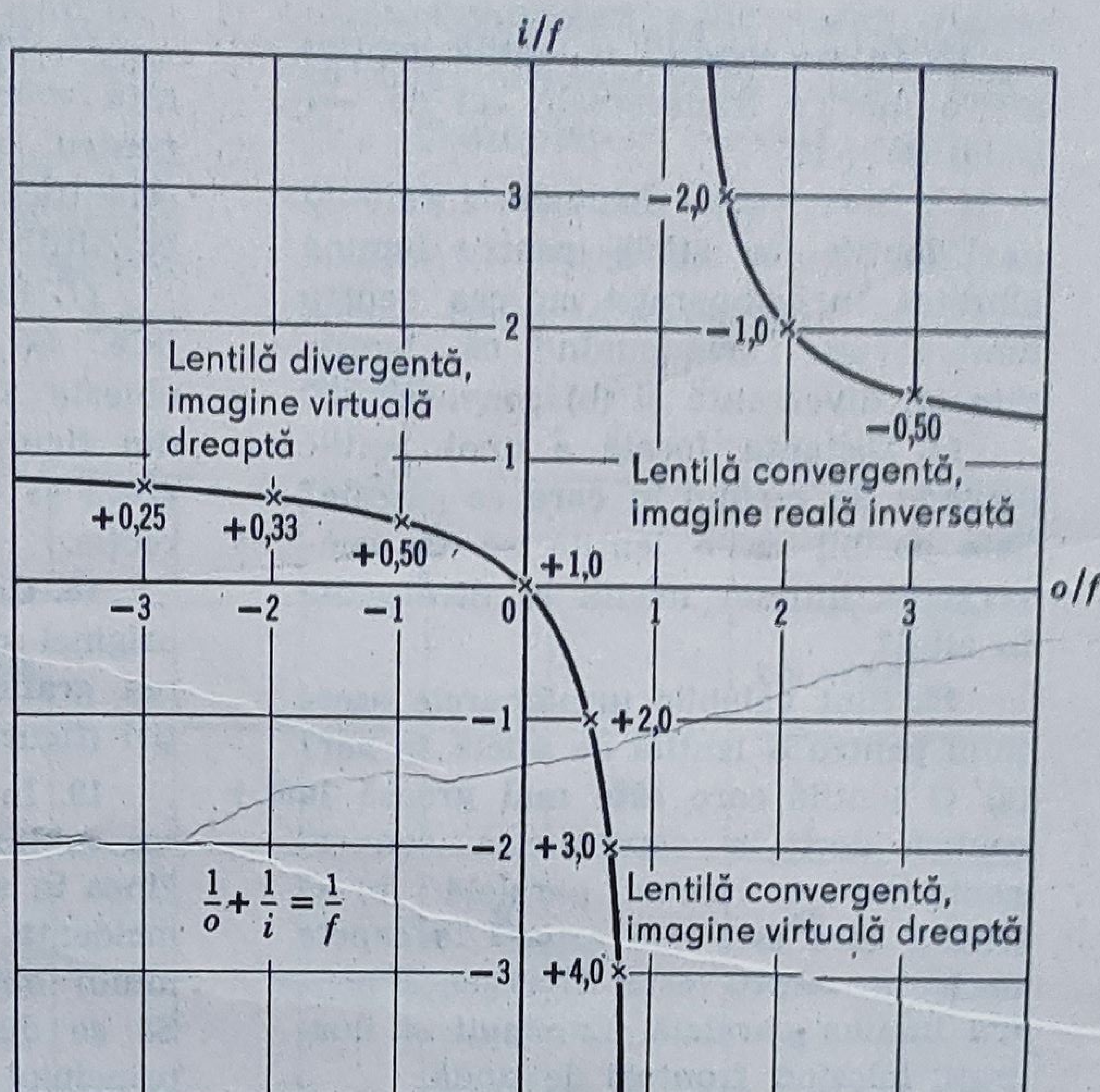


Figura 42-27. O reprezentare grafică a formulei oglinzilor subțiri (ecuația 42-19). Numerele de pe curbe dau mărimile laterale (ecuația 42-20). Comparați cu figura 42-16.

Întrebări

1. Dacă o oglindă inversează stînga și dreapta, de ce nu inversează partea de sus cu partea de jos?

2. Este posibilă fotografierea unei imagini virtuale?

3. Ce aproximații au fost făcute în deducerea ecuației oglinzii (ecuația 42-4):

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}?$$

4. Puteți să vă imaginați un test simplu sau o observare care să dovedească că legea reflexiei este aceeași pentru toate lungimile de undă, cu condiția să se folosească optica geometrică?

5. În ce condiții o oglindă sferică, care poate fi concavă formează (*a*) o imagine reală, (*b*) o imagine inversată, și (*c*) o imagine mai mică decît obiectul?

6. O lentilă subțire asimetrică formează o imagine a unui obiect punctul pe axa sa. Dacă lentila este întoarsă imaginea își schimbă locul?

7. De ce lentila are două puncte focale iar oglinda numai unul?

8. În ce condiții o lentilă subțire, convergentă sau divergentă, formează (a) o imagine reală, (b) o imagine inversată, și (c) o imagine mai mică decît obiectul?

9. Depinde adîncimea la care e cufundat un obiect sub apă de unghiul de observație din aer? Să se explice și să se ilustreze cu diagrame.

10. Un scafandru dorește să folosească un sac de plastic umplut cu aer ca o lentilă convergentă pentru a-l folosi sub apă. Schițați o secțiune potrivită prin sac.

11. Ce aproximații au fost făcute la deducerea ecuației lentilei (ecuația 42-19):

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}?$$

12. În ce condiţii o lentilă subţire are o mărire transversală (a) de —1 şi (b) de +1?

13. Cum este distanţa focală a unei lentile de sticlă pentru lumină albastră în comparaţie cu cea pentru lumină roşie presupunînd că lentila este (a) divergentă şi (b) convergentă?

14. Distanţa focală a unei lentile depinde de mediul în care se găseşte? Este posibil ca o lentilă să fie convergentă într-un mediu şi divergentă în altul?

15. Sînt valabile următoarele aserţiuni pentru o lentilă de sticlă în aer? (a) O lentilă care este mai groasă la centru decît la capete este convergentă pentru lumina paralelă. (b) O lentilă care este mai groasă la capete decît în centru este divergentă pentru lumina paralelă. Explicaţi şi ilustraţi, folosind fronturi de undă.

16. În ce condiţii va deveni infinită mărirea transversală ($m = -i/o$) pentru lentile şi oglinzi? Există vreo semnificaţie practică a unei astfel de condiţii?

17. Razele de lumină sînt reversibile. Să se discute în termeni de obiecte şi imagini dacă toate razele din figurile 42-10, 42-14, 42-17, 42-19, 42-23 şi 42-25 sînt reversibile în direcţie.

18. Ce semnificaţie se poate da originei coordonatelor în reprezentarea grafică a formulei lentilelor subţiri (figura 42-27)?

19. În legătură cu figura 42-24 a, am subliniat că toate razele ce au originea în acelaşi front de undă în unda incidentă au aceeaşi lungime a drumului optic pînă la punctul imagine. Să se discute aceasta în legătură cu principiul lui Fermat (capitolul 41-6)

Probleme

1. Să se rezolve exemplul 2 dacă unghiul dintre oglinzi este (a) 45°, (b) 60°, (c) 120°, obiectul fiind întotdeauna aşezat pe bisectoarea oglinzilor.

2. Două oglinzi plane fac un unghi de 90° una cu alta. Care este cel mai mare număr de imagini ale unui obiect aşezat între ele care poate fi observat? Obiectul *nu* se găseşte pe bisectoare.

3. Un mic obiect este aşezat la 10 cm în faţa unei oglinzi plane. Dacă cineva stă în spatele obiectului, la 30 cm de oglindă, şi priveşte la marginea acestuia, la ce distanţă trebuie să-şi focalizeze ochii?

4. Un mic obiect O este aşezat la o treime din distanţa între două oglinzi plane ca în figura 42-28. Trasaţi

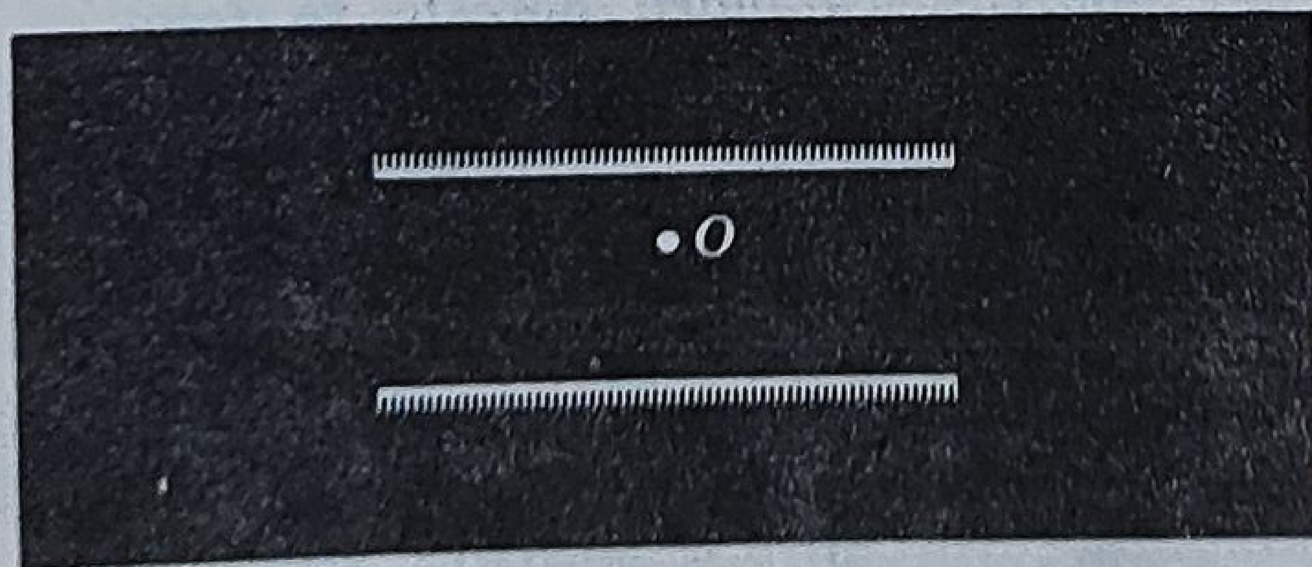


Figura 42-28.

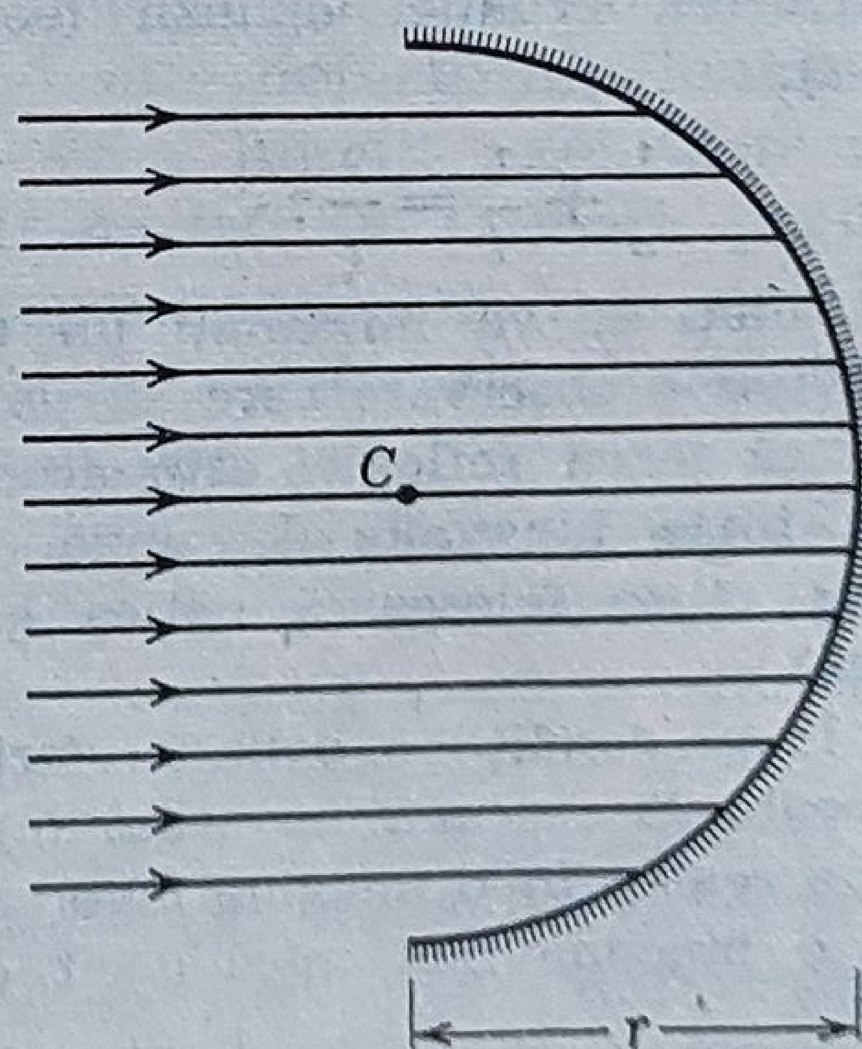


Figura 42-29.

fascicule potrivite de raze pentru a vedea primele patru imagini mai apropiate de obiect.

5. Desenați din nou figura 42-29 pe o foaie mare de hîrtie și trasați cu atenție razele reflectate, folosind legea reflexiei. Se formează un punct focal? Să se discute.

6. Completați acest tabel, fiecare coloană referindu-se la o oglindă sferică. Controlați-vă rezultatele printr-o analiză grafică. Distanțele sînt date în centimetri; dacă un număr nu are semn, poate avea oricare (plus sau minus)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Tip	concavă						convexă	
f	20		+20			20		
r					—40		40	
i					—10		4	
o	+10	+10	+30	+60				+24
m		+1		—0,5		+10,10		0,50
Imagine reală?		nu						
Imagine dreaptă?								nu

7. Un obiect liniar de lungime l se găsește pe axa unei oglinzi sferice, la distanța o de oglindă. (a) Să se arate că imaginea sa va avea o lungime l' unde

$$l' = l\left(\frac{f}{o-f}\right)^2$$

(b) Să se arate că *mărirea longitudinală* m' $(-l'/l)$ este egală cu m^2 unde m este mărirea laterală discutată în capitolul 42-3. (c) Există vreo condiție astfel ca, neglijînd toate defectele oglinzii, imaginea unui mic cub să rămînă un cub?

8. Ca un exemplu al relaxării condiției razelor paraxiale să se găsească, analitic, adîncimea aparentă a unui bazin de înot umplut cu apă $(n-1{,}33)$ de adîncime reală 2,5 m (a) văzut sub incidență normală și (b) văzut sub un unghi de 30° cu normala.

9. Un strat de apă $(n-1{,}33)$ de 2,0 cm plutește pe tetraclorură de carbon $(n-1{,}46)$ de 4,0 cm grosime. La ce distanță de suprafață pare să se găsească, văzut la incidența normală, fundul bazinului?

10. Completați următoarea tabelă,

fiecare coloană referindu-se la o suprafață sferică ce separă două medii cu indici diferiți de refracție. Distanțele sînt măsurate în centimetri

	a	b	c	d	e	f	g	h
n_1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	1,5
n_2	1,5	1,5	1,5		1,0	1,0	1,0	
o	+10	+10		+20	+10		+70	+100
i		−13	+600	−20	−6	−7,5		+600
r	+30		+30	−20		−30	+30	−30
Imagine reală?								

Să se deseneze o figură pentru fiecare situație și să se construiască grafic razele corespunzătoare. Să se presupună un obiect punctual.

11. Completați în acest tabel, fiecare coloană referindu-se la o lentilă subțire, în măsura posibilului. Controlați-vă rezultatele cu o analiză grafică. Distanțele sînt în centimetri, dacă un număr (exceptînd linia *n*) nu are semn, poate avea orice semn.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Tipul	covergentă								
f	10	+10	10	10					
r′					+30	−30	−30		
r″					−30	+30	−60		
i									
o	+20	+5	+5	+5	+10	+10	+10	+10	+10
n					1,5	1,5	1,5		
m			1	1				0,5	0,5
Imagine reală?									da
Imagine dreaptă?								da	

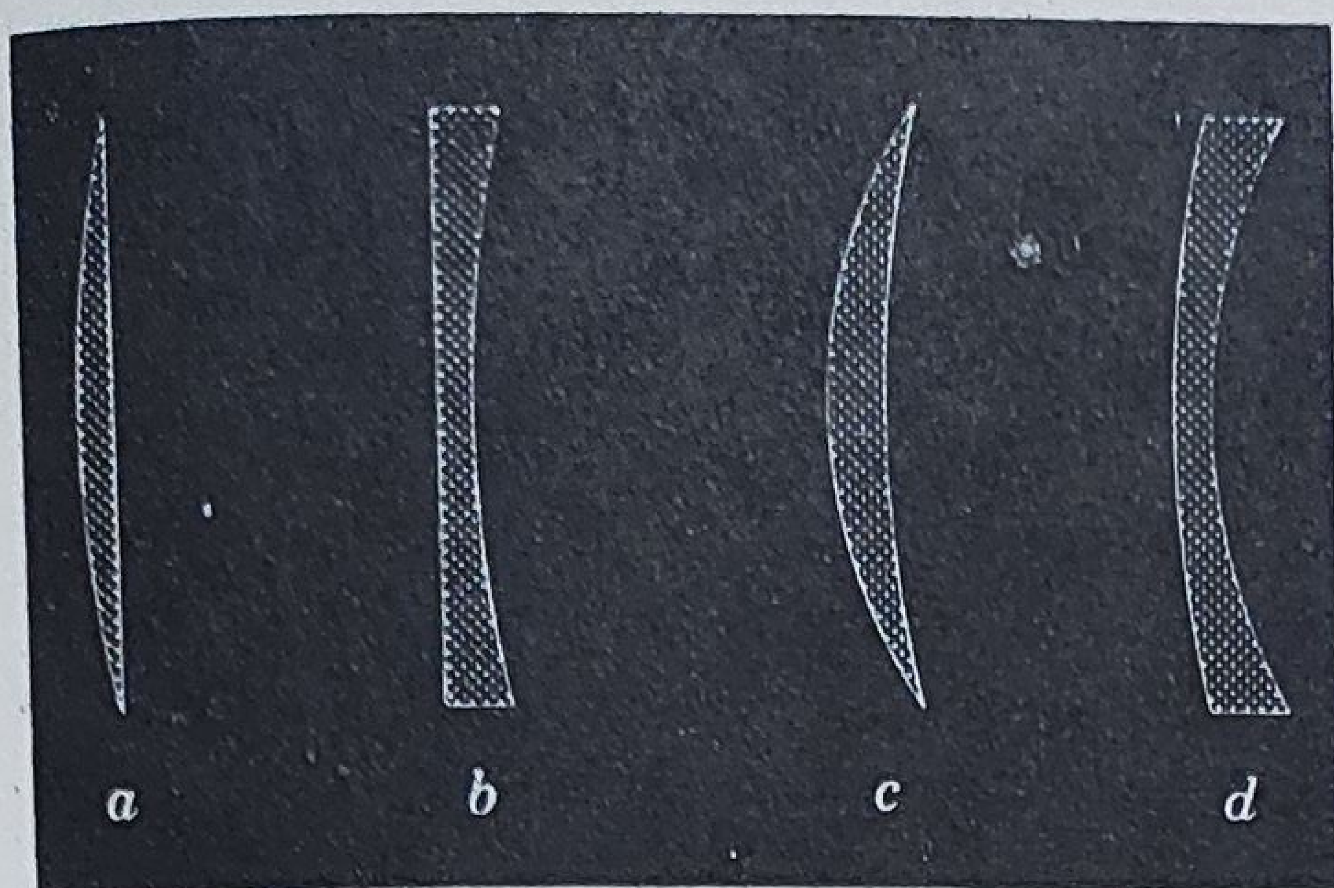


Figura 42-30.

Desenaţi o figură pentru fiecare situaţie şi construiţi grafic razele. Presupuneţi un obiect punctual.

12. Definiţi şi localizaţi şi al doilea punct focal (vezi pag. 420) pentru o suprafaţă sferică ca aceea din figura 42-17.

13. Un obiect luminos şi un paravan sînt fixate la distanţa D unul de altul. (a) Să se arate că o lentilă convergentă de distanţă focală f va forma o imagine reală pe ecran pentru două poziţii care sînt separate de

$$d=\sqrt{D(D-4f)}$$

(b) Să se arate că raportul între mărimile acestor două poziţii este

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2$$

14. Folosind ecuaţia constructorului de lentile (ecuaţia 42-18), să se arate care dintre lentilele din figura 42-30 este convergentă şi care divergentă pentru lumină incidentă paralelă.

15. Două lentile subţiri de distanţe focale f_1 şi f_2 sînt în contact. Să se arate că sînt echivalente cu o singură lentilă cu distanţa focală dată de

$$f=\frac{f_1f_2}{f_1+f_2}$$

16. Să se arate că distanţa între un obiect şi imaginea sa reală formată de o lentilă subţire convergentă este întotdeauna mai mare decît de patru ori distanţa focală a lentilei.

17. O lentilă dublu-convexă este făcută din sticlă cu un indice de refracţie de 1,50. O suprafaţă are raza de curbură de două ori mai mare decît a celeilalte şi distanţa focală de 6,0 cm. Care sînt razele de curbură?

18. Formula

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

se numeşte *forma Gauss* a formulei lentilelor subţiri. Altă formă a acestei formule, *forma Newton*, se obţine considerînd distanţa x între obiect şi primul punct focal şi distanţa X' între al doilea punct focal şi imagine. Să se arate că

$$XX'=f^2$$

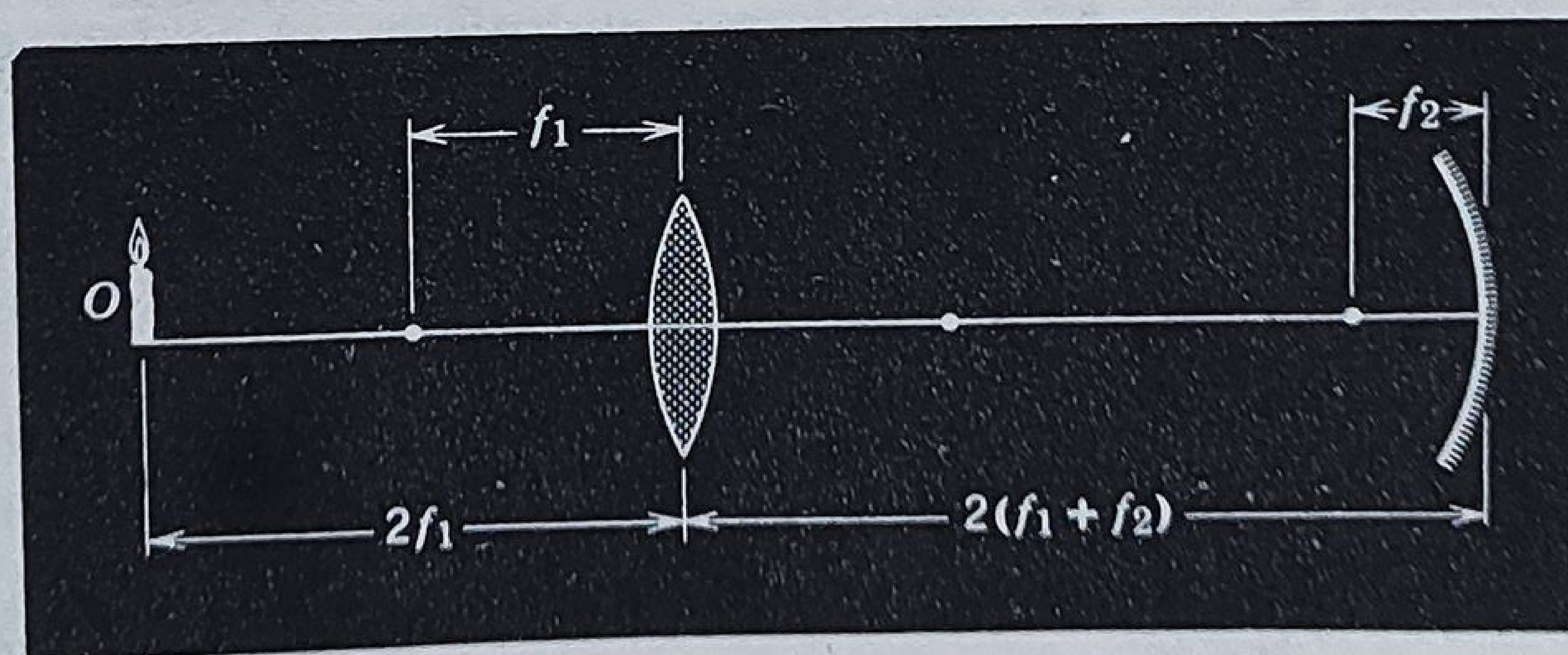


Figura 42-31.

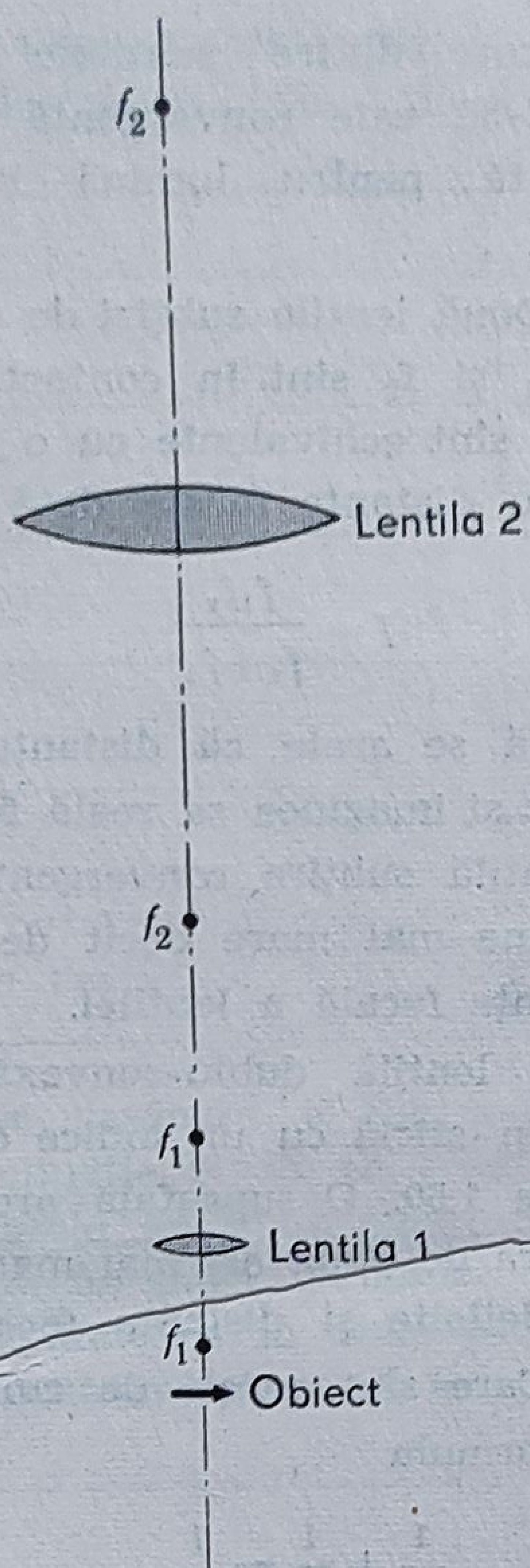


Figura 42-32.

19. Un fascicul paralel cade pe o sferă de sticlă sub incidenţă normală. Să se localizeze imaginea în funcţie de indicele de refracţie n şi raza sferei r.

20. Un obiect este plasat în faţa unei lentile convergente la o distanţă egală cu de două ori distanţa sa focală, f_1. De cealaltă parte a lentilei este aşezată o oglindă convergentă de distanţă focală f_2 aşezată la o distanţă $2(f_1+f_2)$ faţă de lentilă. (a) Să se localizeze imaginea finală, să se afle natura şi mărimea sa relativă. (b) Să se realizeze diagrama de raze. Vezi figura 42-31.

21. Un obiect este aşezat în centrul de curbură a unei lentile dublu-concave, cu razele de curbură egală. (a) Potrivit convenţiei folosite în această carte, care sînt semnele celor două raze de curbură? (b) Localizaţi imaginea în funcţie de raza de curbură r şi de indicele de refracţie, n, al sticlei. (c) Descrieţi natura imaginii. (d) Verificaţi rezultatul cu o diagramă de raze.

22. În figura 42-32 sînt reprezentate două lentile cu punctele lor focale. Cu obiectul dat, să se găsească imaginea formată de lentila 1 şi, folosind-o ca obiect pentru lentila 2, să se găsească imaginea finală. Să se discute natura celor două imagini. Verificaţi concluziile copiind figura la scară şi desenînd o diagramă de raze.

23. Un obiect se găseşte la 20 cm în stînga unei lentile cu distanţa focală de +10 cm. O altă lentilă de distanţă focală de +12,5 cm se află la 30 cm în dreapta primei lentile. (a) Utilizînd imaginea formată de prima lentilă ca obiect pentru a doua, să se găsească poziţia imaginii finale şi mărimea sa relativă. (b) Să se verifice concluziile desenînd sistemul de lentile la scară şi construind o diagramă de raze. (c) Să se descrie imaginea finală.

Capitolul 43

Interferența

43-1 Experiența lui Young

În paragraful 19-7 am văzut că dacă două unde de aceeași frecvență se deplasează aproximativ pe aceeași direcție și au o diferență de fază care rămîne constantă în timp, ele se pot combina astfel încît energia lor să nu fie uniform distribuită în spațiu ci să aibă maxime în anumite puncte și minime (chiar zerouri) în altele. Demonstrarea unor astfel de efecte de *interferență* în 1801 de către Thomas Young a pus pe o bază experimentală fermă teoria ondulatorie a luminii. Din experiențele sale, Young a reușit să deducă lungimea de undă a luminii, prima măsurătoare a acestei importante mărimi.

Young a lăsat lumina solară să cadă pe un mic orificiu S_0 făcut în ecranul A, ca în figura 43-1. Lumina emergentă se împrăștie prin difracție (vezi paragraful 42-1) și cade pe orificiile S_1 și S_2 din ecranul B. Difracția apare din nou și două unde sferice care se suprapun se propagă în spațiu la dreapta ecranului B.

Condiția din optica geometrică, adică $a \gg \lambda$ unde a este diametrul fantelor, nu este în mod sigur îndeplinită în această experiență. Fantele nu au umbre geometrice ci acționează ca surse elementare Huygens. Noi ne ocupăm aici (și în capitolele următoare) de *optica ondulatorie* și nu de optica geometrică.

Figura 43-2, făcută după un desen din 1830 al lui Young, arată regiunea dintre paravanele B și C. Zonele liniate reprezintă minimele perturbației de undă; spațiile albe reprezintă maximele. Dacă priviți razant dinspre latura din stînga în lungul figurii, veți remarca că de-a lungul liniilor notate cu x se produce o anulare a undei; între ele se produce o întărire. Dacă se așază un ecran oriunde în drumul undelor suprapuse, ne așteptăm să găsim alternativ pete luminoase și întunecate. Figura 43-3 reprezintă o fotografie a unei astfel de *franje de interferență;* în tehnica modernă, figurile sînt realizate cu fante foarte înguste.

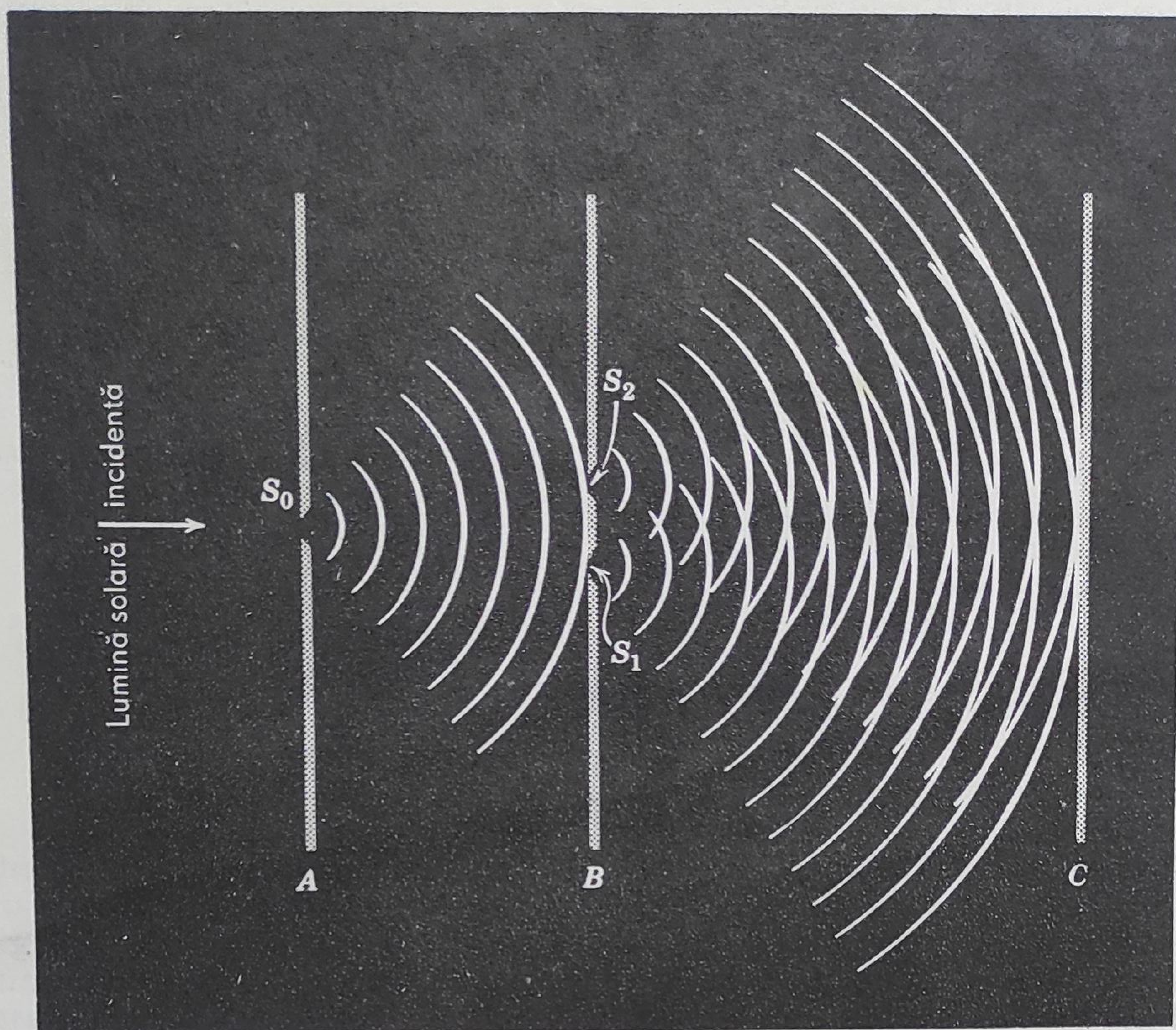


Figura 43-1. Arătînd cum a produs Thomas Young o figură de interferență lăsînd undele difractate din două orificii S_1 și S_2 să se suprapună pe un ecran c.

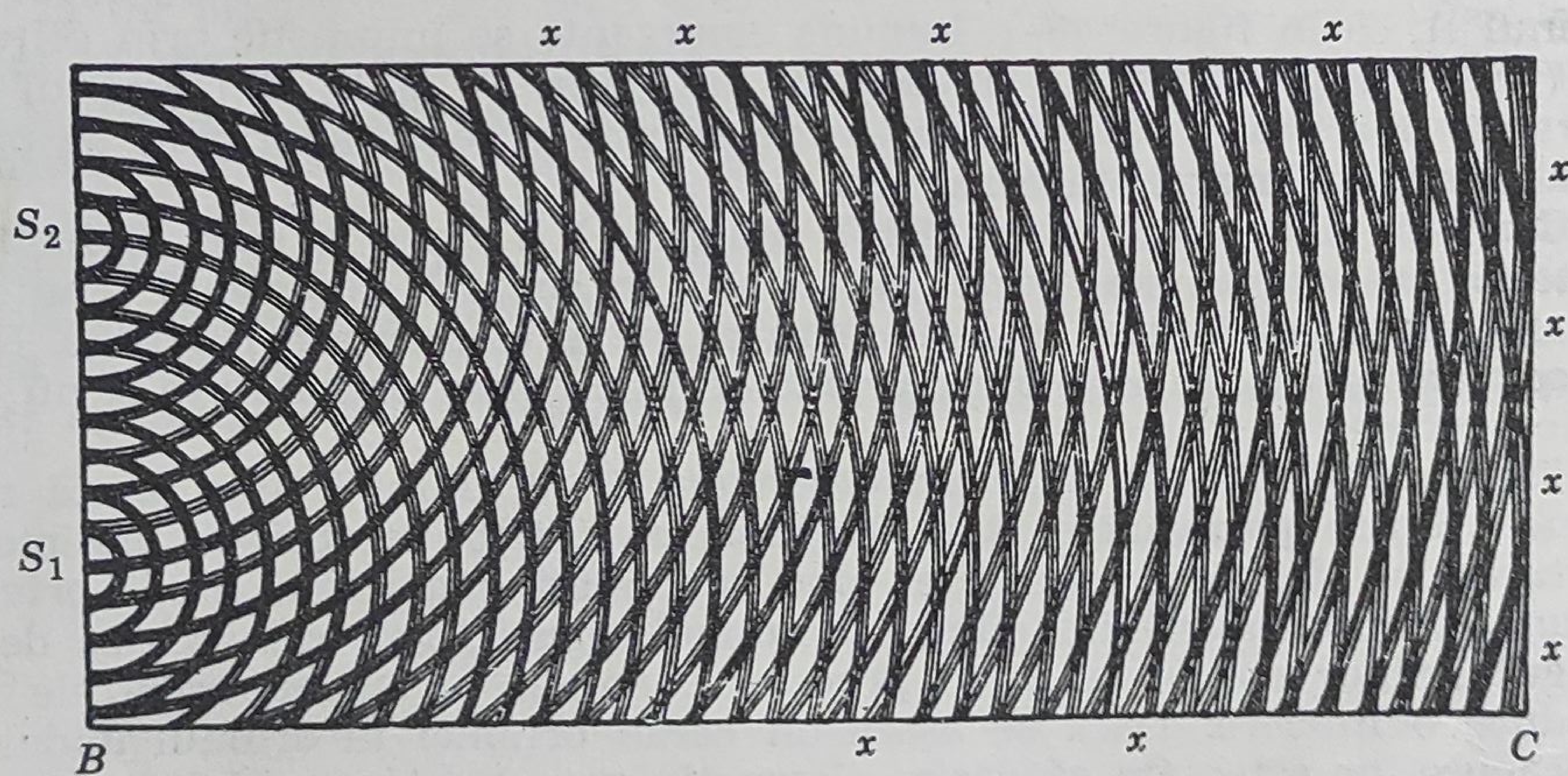


Figura 43-2. Desenul original al lui Thomas Young arătînd efectele de interferență pe suprapuneri de unde. Plasați ochiul lîngă marginea din stînga și priviți la de-a lungul figurii la unghi mic. (Din Thomas Young, Phil. Trasacions, 1803).

Figura 43-3. Franje de interferență pentru lumina monocromatică, făcute cu un aranjament ca în figura 43-1, utilizînd fante subțiri și lungi și cu orificii mici.



Interferența este un fenomen caracteristic ondulatoriu, ea nu este limitată doar la undele luminoase. Figura 43-4, de exemplu, reprezintă figura de interferență a undelor în apa unui bazin. Undele sînt generate de două vibratoare care bat apa în mod sincron, producînd două unde sferice ce se propagă.

Să analizăm acum cantitativ experiența lui Young, presupunînd că lumina incidentă consistă doar într-o singură lungime de undă. În figura 43-5 P este un punct arbitrar pe ecran, la distanțele r_1 și respec-

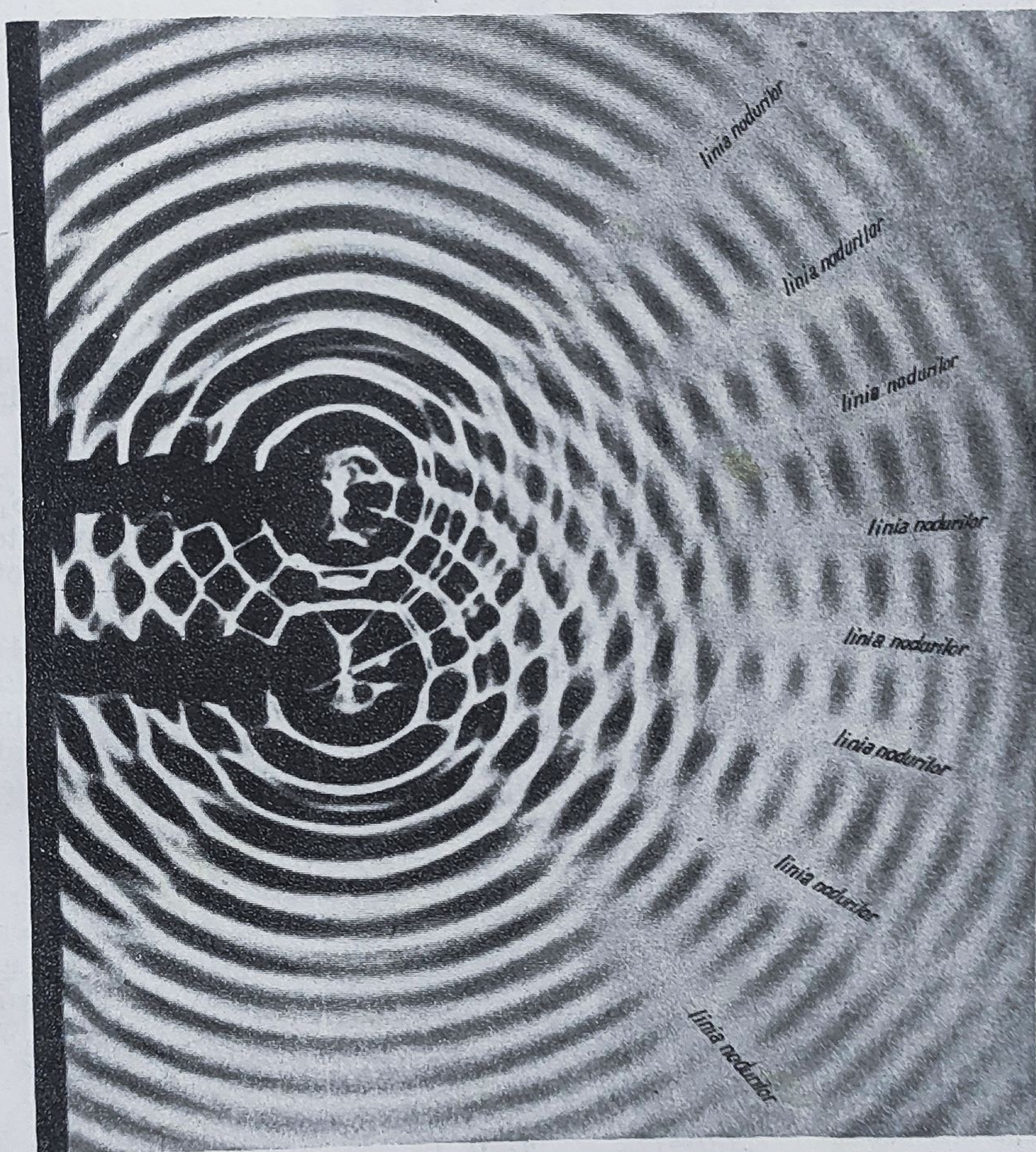


Figura 43-4. Interferența undelor de apă. Există o interferență distructivă de-a lungul liniilor marcate „linia nodurilor" și interferență constructivă, între aceste linii (Din amabilitatea Comitetului de Studii pentru Științe Fizice).

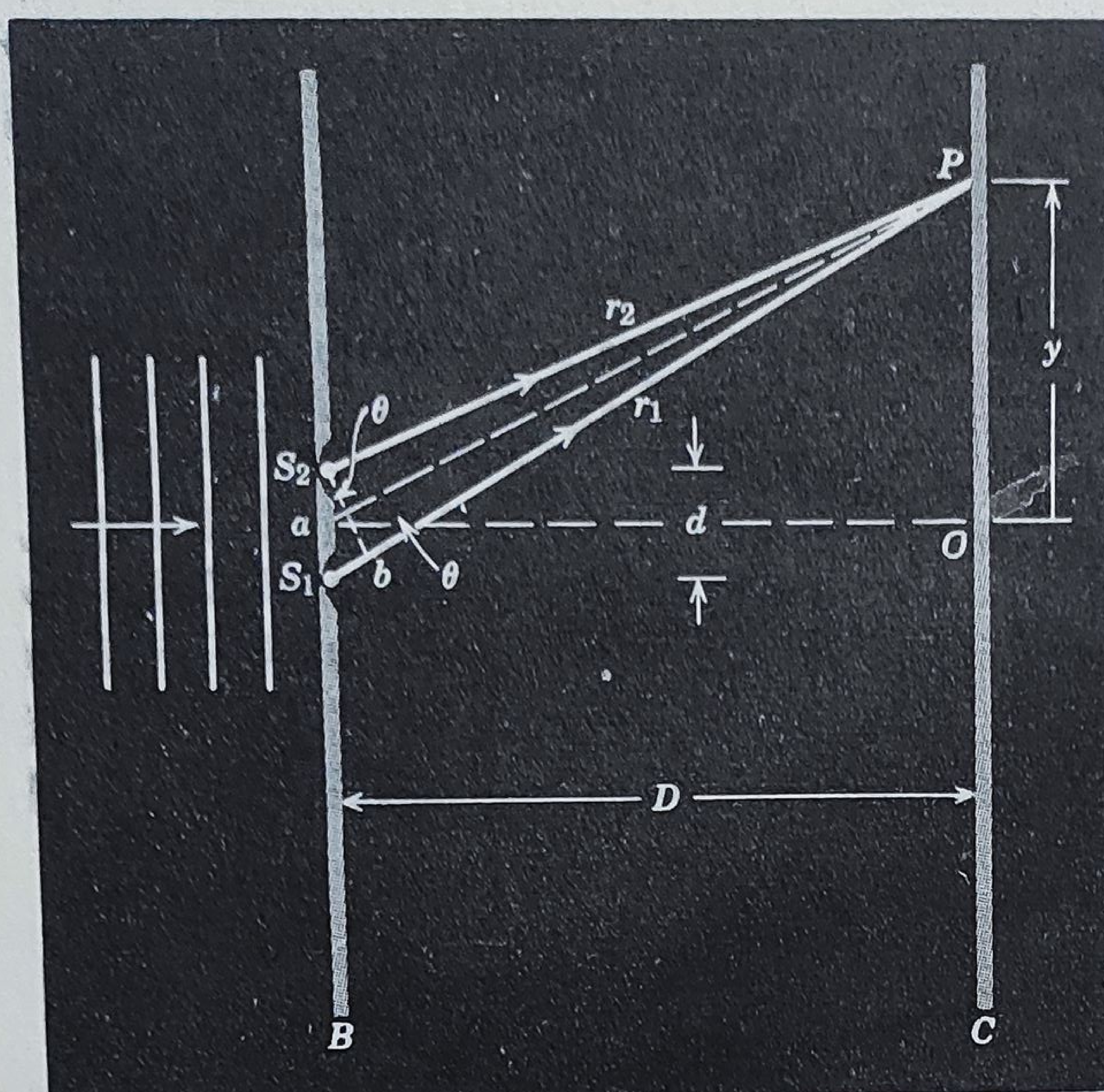


Figura 43-5. Raze din S_1 și S_2 se suprapun în P. „Lumina ce cade pe ecranul B se consideră paralelă. De fapt $D \gg d$, figura fiind distorsionată pentru claritate.

tiv r_2 de fantele înguste S_1 și respectiv S_2. Să trasăm o linie de la S_2 la b astfel încît segmentele PS_2 și Pb să fie egale. Dacă d, distanța între fante, este mult mai mică decît distanța D dintre cele două ecrane (raportul d/D a fost exagerat în figură pentru claritate), S_2b este atunci aproape perpendiculară pe r_1 și r_2. Aceasta înseamnă că unghiul S_1S_2b este aproape egal cu unghiul PaO amîndouă unghiurile fiind notate θ în figură. Aceasta este echivalent cu a spune că liniile r_1 și r_2 pot fi considerate paralele.

De obicei, în fața celor două fante se așază o lentilă, ca în figura 43-6, ecranul C fiind în planul focal al lentilei. În aceste condiții lumina focalizată în P trebuie să atingă lentila paralel cu linia Px, trasată din P prin centrul lentilei. În aceste condiții razele r_1 și r_2 sînt strict paralele chiar dacă condiția $D \gg d$ nu este îndeplinită. Lentila L poate să fie în practică lentila cristalinului, ecranul C fiind retina.

Cele două raze ce sosesc în P (figura 43-5 sau figura 43-6) din S_1 și S_2 sînt în fază cu fanta-sursă, amîndouă provenind din același front de undă al undei plane incidente. Deoarece razele au lungimi diferite de drum optic, ele ajung în P cu o diferență de fază. Numărul de lungimi de undă conținute în S_1b, care este de fapt diferența de drum, determină natura interferenței în P.

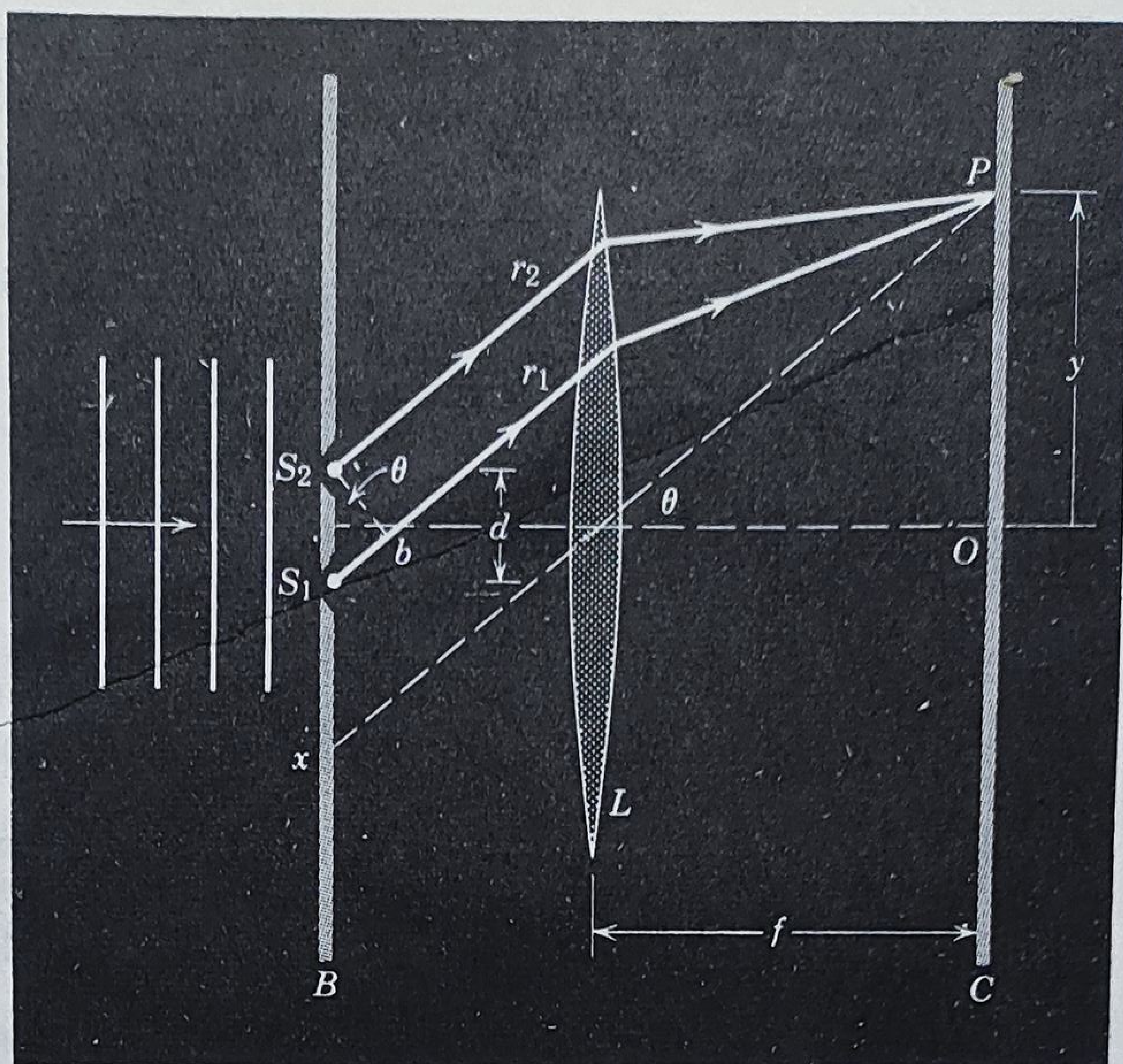
Pentru a avea un maxim în P, S_1b ($=d \sin \theta$) trebuie să conțină un număr întreg de lungimi de undă, sau

$$S_1b = m\lambda \qquad m=0, 1, 2, \ldots$$

care poate fi scrisă ca

$$d \sin \theta = m\lambda \qquad m=0, 1, 2, \ldots \text{ (maximele)} \qquad (43\text{-}1)$$

Figura 43-6. O lentilă folosită pentru producerea franjelor de interferență, comparați cu figura 43-5. Figura este din nou distorsionată pentru claritate deoarece în practică $f \gg d$.



De notat că fiecare maxim deasupra lui O în figura 43-5 și figura 43-6 are un maxim simetric sub O. Există și un maxim central descris de $m=0$.

Pentru un minim în P, S_1b $(=d \sin \theta)$ trebuie să conțină un număr întreg și jumătate de lungimi de undă, sau

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(minime)} \tag{43-2}$$

Dacă se utilizează o lentilă ca în figura 43-6, atunci se va forma o diferență de fază între razele de sub planul S_2b, lungimile drumului între acest plan și P fiind în mod clar diferite. În secțiunea 42-5, totuși, am văzut că pentru astfel de raze paralel focalizate de o lentilă, drumurile optice sînt identice. Două raze cu aceeași lungime a drumului optic conțin același număr de lungimi de undă, astfel încît nu rezultă nici o diferență de fază între razele ce trec prin lentilă.

Exemplul 1. Aranjamentul de două fante din figura 43-5 este iluminat cu lumină provenind dintr-o lampă cu vapori de mercur, astfel încît numai linia verde puternică $(\lambda = 5\,460\ \text{Å})$ să fie efectivă. Fantele au 0,10 mm fiecare, iar ecranul pe care apare interferența se află la 20 cm depărtare. Care este poziția unghiulară a primului minim? Dar al celui de-al doilea?

Pentru primul minim punem $m=0$ în ecuația 43-2, sau

$$\sin \theta = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{d} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(546 \cdot 10^{-9}\ \text{metri})}{0{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{matri}} = 0{,}0027$$

Această valoare pentru $\sin \theta$ este atît de mică încît o putem lua ca valoare pentru θ, exprimată în radiani; exprimată în grade este de 0,16°.

La al zecilea maxim (fără să ținem seamă de maximul central) putem pune $m=10$ în ecuația 43-1. Procedînd astfel și calculînd ca mai înainte se obține în poziție unghiulară de 3,8°. În aceste condiții se vede că împrăștierea unghiulară pentru prima aproximativ duzină de franje este mică.

Exemplul 2. În exemplul 1 care este distanța liniară pe ecranul C între maximele adiacente?

Dacă θ este destul de mic, putem folosi aproximația

$$\sin\theta \cong \operatorname{tg}\theta \cong \theta$$

Din figura 43-5 se vede că

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{D}$$

Substituind aceasta în ecuația 43-1, pentru $\sin\theta$ obținem

$$y = m\frac{\lambda D}{d} \qquad m=0,\ 1,\ 2, \ldots \text{ (maxime)}$$

Pozițiile a două maxime adiacente oarecare sînt date de

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d}$$

și

$$y_{m+1} = (m+1)\frac{\lambda D}{d}$$

Distanța dintre ele Δy se găsește prin scădere:

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} =$$

$$= \frac{(546\times 10^{-9}\text{ m})(2\cdot 10^{-2}\text{ m})}{0{,}10\times 10^{-3}\text{ m}} = 1{,}09\text{ mm}$$

Atita timp cît Θ în figura 43-5 și figura 43-6 este mic, distanța între franjele de interferență este independentă de m; adică, franjele sînt regulat distanțate. De notat că dacă lumina incidentă conține mai mult de o lungime de undă figurile de interferență separate, care vor avea diferite distanțe între franje, se vor suprapune.

Ecuația 43-1 poate fi folosită pentru determinarea lungimii de undă a luminii; citat din Thomas Young:

Comparînd mai multe experiențe, se constată că lărgimea ondulațiilor [adică a lungimii de undă] care constituie lumina roșie extremă trebuie să fie, în aer, aproximativ a 14 400-a mia parte dintr-un centimetru; și aceea a violetului extrem aproximativ a 24-a mia parte dintr-un centimetru; media întregului spectru, raportată la intensitatea luminii, fiind una la 18 300 de mii.

Valoarea dată de Young pentru media lungimii de undă din lumina solară (1/16 000 cm), poate fi scrisă ca 5 700 Å, care concordă destul de bine cu lungimea de undă pentru care sensibilitatea ochiului are un maxim, 5 550 Å (vezi figura 40-2). Dar bineînțeles că opera lui Young a fost primită nu fără critică.

Unul din contemporanii săi, evident un ferm credincios al teoriei corpusculare, scria:

„Am vrea să ridicăm umilul nostru glas împotriva inovaţiilor care nu au alt efect decît să împiedice progresul ştiinţei şi să reînnoiască toate acele fantome sălbatice ale imaginaţiei pe care Bacon şi Newton le-au izgonit din templul lor. Acest articol nu conţine nimic care să merite numele fie de experienţă, fie de descoperire".

Nu-i nevoie să mai spunem, posteritatea a decis în favoarea lui Young.

43-2 Coerenţa

Analiza deducerii ecuaţiilor 43-1 şi 43-2 arată că o cerinţă fundamentală pentru existenţa unor franje bine determinate pe ecranul C în figura 43-1 este aceea că undele de lumină care se deplasează de la S_1 şi S_2 spre orice punct P de pe acest ecran trebuie să aibă o foarte bine definită diferenţă de fază Φ care rămîne constantă în timp. Dacă această condiţie este îndeplinită, va apărea o figură de interferenţă stabilă şi bine determinată. În anumite puncte P, Φ este independent de timp şi este dat de valoarea $n\pi$ unde $n=1, 3, 5, \ldots$ astfel încît rezultanta intensităţii va fi zero şi va rămîne astfel în tot timpul observaţiei. În alte puncte Φ este dat de $n\pi$ unde $n=0, 2, 4, \ldots$, iar rezultanta intensităţii va fi maximă. În aceste condiţii cele două unde emergente din fantele S_1 şi S_2 sînt complet *coerente.*

Să îndepărtăm acum sursa din figura 43-1 şi să înlocuim fantele S_1 şi S_2 cu două surse de lumină complet independente, ca de exemplu două fire subţiri incandescente aşezate una lîngă alta într-un glob de sticlă. Pe ecranul C nu vor mai apărea franje de interferenţă ci doar o iluminare relativ uniformă. Acest lucru se poate interpreta dacă facem ipoteza că pentru surse de lumină complet independent diferenţa de fază între cele două raze ce sosesc în P variază în mod aleator în timp. La un anumit moment condiţiile sînt favorabile pentru anulare, iar peste un interval scurt de timp (poate 10^{-8} sec.) vor fi favorabile pentru întărire. Această comportare aleatoare este valabilă pentru toate punctele de pe ecranul C iar rezultatul este că ecranul este uniform luminat. În fiecare punct intensitatea este egală cu suma intensităţilor razelor provenind din S_1 şi S_2. În aceste condiţii cele două unde emergente din S_1 şi S_2 sînt complet *incoerente*.

De notat că pentru lumină complet coerentă *(1)* amplitudinile se adună vectorial, luîndu-se în consideraţie în mod corespunzător diferenţa de fază, şi apoi *(2)* amplitudinea rezultantă se ridică la pătrat obţinîndu-se o cantitate proporţională cu intensitatea rezultantă. În schimb, pentru lumină complet incoerentă (1) se ridică la pătrat amplitudinile individuale pentru a obţine cantităţi proporţionale cu intensităţile individuale şi apoi (2) se adună aceste intensităţi individuale pentru a obţine intensitatea rezultantă. Acest procedeu este în conformitate cu rezultatele experimentale care arată că pentru surse complet independente intensitatea rezultantă în fiecare punct este întotdeauna mai mare decît intensitatea produsă de o singură sursă luată individual.

Mai rămîne de explicat în continuare care sînt condițiile experimentale în care se produc unde coerente sau incoerente și care este explicația pentru coerență în funcție de modul de producere al radiației. Să considerăm la început un fascicul de microunde paralele ce provin dintr-o antenă conectată cu un cablu coaxial la un oscilator bazat pe o cavitate electromagnetică rezonantă. Oscilațiile cavității vezi capitolul 38-6) sînt complet periodice în timp, și produc în antenă o variație periodică în timp a lui $\vec{E}$ și $\vec{B}$. În figura 39-11 este reprezentată unda emergentă la o distanță destul de mare față de antenă. De notat că (1) unda este infinit extinsă în timp, atît în trecut ($t>0$) cît și în viitor $t<0$); vezi figura 43-7, *a*. În orice punct prin care trece unda perturbația ($\vec{E}$ sau $\vec{B}$) variază în timp în mod perfect periodic. (2) În punctele foarte îndepărtate de antenă fronturile de undă sînt plane paralele de întindere infinită, perpendiculare pe direcția propagării. În orice moment de timp perturbația variază cu distanța de-a lungul direcției propagării într-un mod perfect periodic.

Două unde generate de o undă călătoare ca cea din figura 39-11 sînt complet coerente. Un mod de obținere a două astfel de unde este așezarea unui ecran opac cu două fante în calea undei inițiale. Undele emergente din fante vor avea întotdeauna o diferență de fază constantă în orice punct al regiunii în care ele se suprapun și se pot produce franje de interferență. De asemenea se pot stabili ușor unde radio coerente, ca de altfel și unde electrice în solide, lichide și gaze. Cele două vîrfuri ale vibratorului din figura 43-4, de exemplu, produc două unde coerente în apa bazinului.

Tehnica producerii a două unde din una singură (și astfel dintr-o singură sursă) poate verifica dacă fronturile de undă într-un fascicul paralel sînt în mod real plane, adică, dacă toate punctele dintr-un plan perpendicular pe direcția propagării au aceeași fază la un moment dat. Divizînd unda în alt mod, ar fi posibil să se verifice dacă unda este într-adevăr periodică după un număr mai mare de cicluri de oscilație. Acest lucru se poate realiza dacă se inserează la 45° în undă o foaie dintr-un material ce are proprietatea de a produce două unde, una (care va fi perpendiculară pe direcția undei incidente) prin reflexie, iar a doua (care va fi în direcția undei incidente) prin transmisie. În regiunea vizibilă, o astfel de foaie, numită *oglindă semi-argintată*, poate fi realizată prin depunerea pe o placă de sticlă a unui film de argint. Printr-o utilizare potrivită a oglinzilor (vezi capitolul 43-7) aceste două subunde pot fi recombinate într-o undă progresivă unică, într-o direcție oarecare. Dacă înainte de combinare undele parcurg distanțe diferite, în unda rezultantă se regăsesc o mostră din unda inițială și o mostră din aceeași undă după mai multe cicluri. Dacă unda inițială este într-adevăr periodică în spațiu și în timp, cele două subunde vor fi complet coerente și la recombinarea lor se vor produce franje de interferență.

Dacă părăsim domeniul surselor de microunde și considerăm sursele de lumină vizibilă ca de exemplu fire incandescente sau o descărcare electrică în gaz, se constată o diferență fundamentală. În amîndouă aceste surse procesul fundamental de emisie se produce individual în atomi, iar aceștia nu pot acționa într-un mod coordonat *(coerent)*. Actul emiterii luminii de către un atom durează, în general, aproximativ

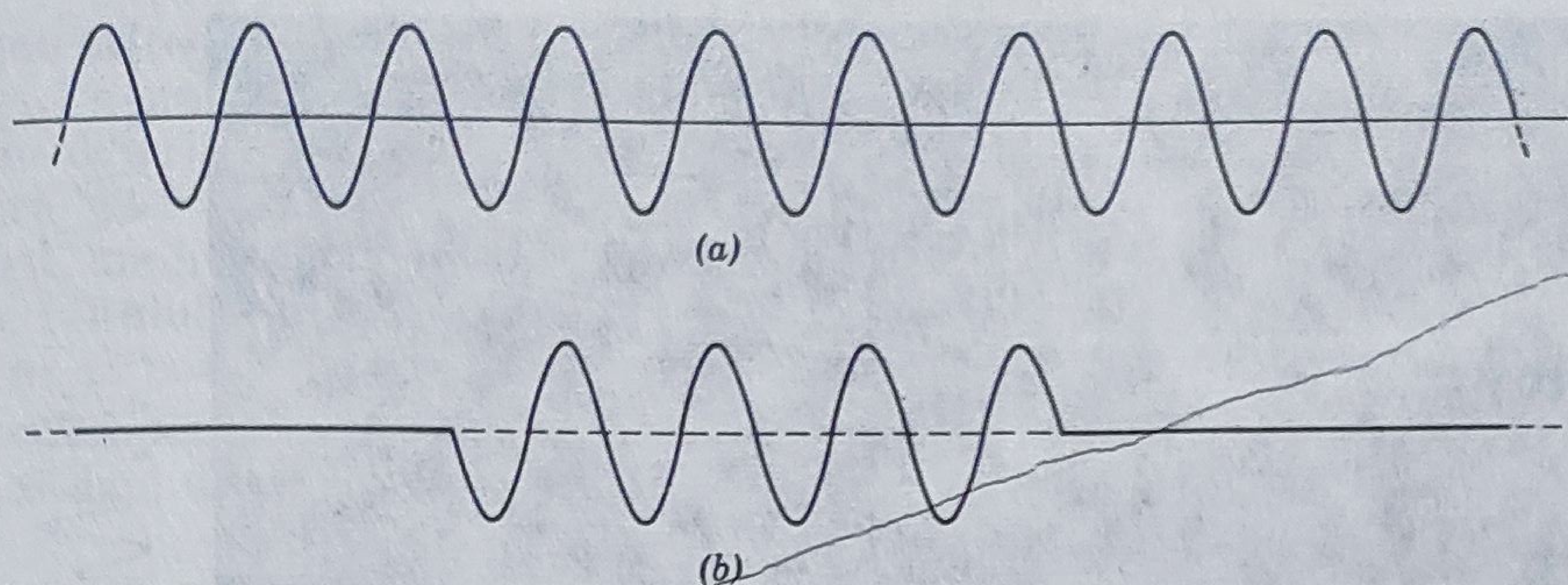


Figura 43-7. *(a)* O secțiune dintr-o undă infinită și *(b)* un tren de undă.

10^{-8} sec., iar lumina emisă constă dintr-un *tren de unde* (figura 43-7 *b*). Pentru aceste intervale de timp de emisie trenurile de undă au lungimi de cîțiva metri.

Efectele de interferență produse de surse de lumină obișnuită sînt puse în evidență așezînd o fantă foarte îngustă (S_0 în figura 43-1) direct în fața sursei. Aceasta asigură ca trenurile de undă care ating fantele S_1 și S_2 din ecranul B de pe figură să aibă originea în aceeași mică regiune din apropierea sursei. Undele difractate ce ies din S_1 și S_2 reprezintă astfel aceeași mulțime a trenurilor de undă și sînt coerente una față de cealaltă. Dacă faza luminii emise de S_0 se schimbă, această schimbare este transmisă simultan către S_1 și S_2. Astfel, în orice punct al ecranului C, diferența de fază între undele emise de cele două fante este menținută constantă și va apare o figură staționară de interferență.

Dacă lărgimea fantei S_o în figura 43-1 este mărită treptat se observă experimental că maximele de interferență se reduc în intensitate, iar intensitatea minimelor nu mai este strict zero. Cu alte cuvinte, franjele devin mai puțin distincte. Dacă S_o este foarte largă, mărimea maximelor și micșorarea minimelor sînt atît de pronunțate, încît conduc la o luminare uniformă. În aceste condiții, se observă că undele ce provin din S_1 și S_2 trec de la o coerență completă la incoerență totală. Între aceste două limite, undele se numesc parțial coerente.

Coerența parțială poate fi de asemenea demonstrată pentru două unde, inserînd o „oglindă semi-argintată“, la 45° într-o undă inițială. Cele două unde astfel produse, prin reflexie și transmisie, parcurg distanțe diferite înainte de a se recompune. Dacă diferența de drum este mică în comparație cu lungimea de undă medie a trenului de unde, franjele de interferență vor fi foarte bine delimitate, iar minimele vor fi practic zero. Dacă diferența de drum este mărită în mod deliberat, franjele vor deveni mai puțin distincte, iar în final, dacă diferența de drum devine mai mare decît lungimea de undă medie a trenului, franjele vor dispare. Astfel, într-un anumit aranjament experimental este posibil să se facă o trecere fină de la coerența totală, trecînd prin coerența parțială, la o totală incoerență.

Lipsa de coerență a luminii produse de surse obișnuite de lumină ca firele incandescente este datorată faptului că atomii emitenți nu acționează coordonat *(coerent)*. Totuși, în 1960, s-a dovedit posibilă construirea unor surse de lumină vizibilă în care atomii într-adevăr acționează

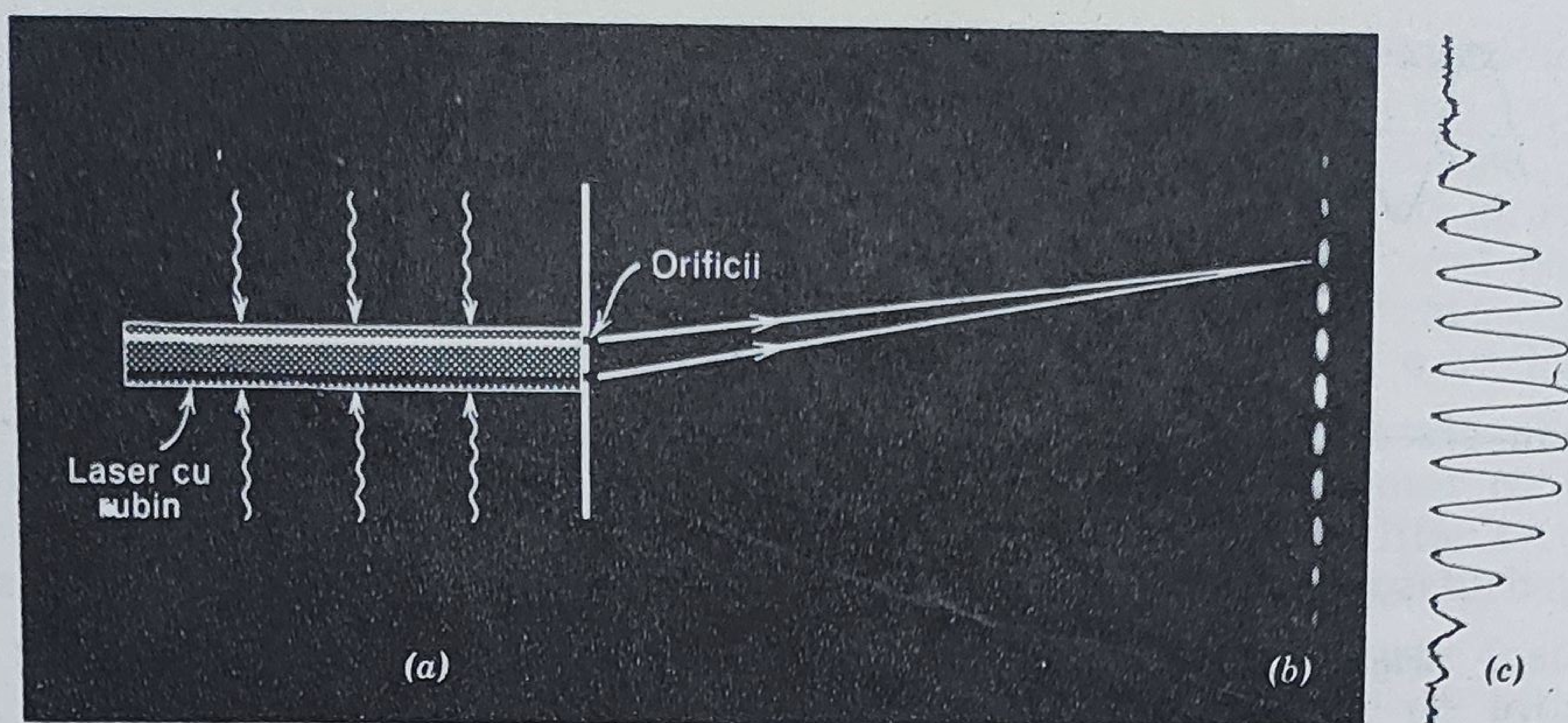


Figura 43-8. Un ecran cu două găuri mici este lipit de extremitatea unui maser optic. (*a*) Lumina ce trece prin orificii formează o figură de interferență pe o bandă de film fotografic plasat în (*b*). Faptul că se formează o astfel de imagine arată că lumina emisă de laser este coerentă în toată secțiunea fasciculului. Imaginea de pe film se vede în (*b*). În (*c*) este radat un grafic al gradului de impresionare al filmului. (Amabilitatea lui D. F. Nelson și R. J. Collins, Bell Telephone Laboratories).

coordonat, în care lumina emisă are un înalt grad de coerență. Astfel de dispozitive se numesc *maseri optici* sau *laseri**; lumina emisă este monocromatică într-un grad foarte mare, intensă și foarte colimată. Coerența luminii emise poate fi demonstrată așezînd un ecran cu două orificii în drumul undei emergente. Va rezulta o figură de interferență, ca în figura 43-8. Aceste metode permit, un anumit grad de control asupra luminii vizibile cu posibilitatea extinderii pentru unde radio și microunde. Aplicațiile practice ale laserilor, inclusiv amplificarea semnalelor slabe luminoase, utilizarea undelor luminoase ca purtătoare de informație din punct în punct (vezi problema 13) și producerea temperaturilor înalte prin încălzire locală internă, rămîn în continuare un domeniu care poate fi din plin exploatat.

43-3 Intensitatea în experiența lui Young

Să presupunem că componentele cîmpului electric a două unde (figura 43-5) variază cu timpul, în punctul P astfel

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \tag{43-3}$$

și

$$E_2 = E_0 \sin (\omega t + \Phi) \tag{43-4}$$

* Laser, ca și maser, este un cuvînt construit din inițiale, însemnînd „light amplification through stimulated emission of radiation". Cititorul interesat poate consulta articolul „Maseri optici" de Arthur L. Schawlow, Scientific American, iunie 1961.

unde ω $(=2\pi\nu)$ este pulsaţia undelor şi Φ este diferenţa de fază dintre ele. De notat că Φ depinde de poziţia punctului P, care la rîndul său, este descrisă pentru un aranjament geometric dat, de unghiul θ. (Figura 43-5 şi figura 43-6). Presupunem că fantele sînt atît de înguste încît lumina difractată de fiecare iluminează uniform partea centrală a ecranului. Aceasta înseamnă că lîngă centrul ecranului E_0 este independent de poziţia lui P, adică de valoarea lui θ.

Componenta perceptibilă (care determină percepţia de lumină)* în P este dată de

$$E=E_1+E_2 \tag{43-5}$$

şi (vezi ecuaţia 19-17)

$$E=E_\theta \sin(\omega t+\beta) \tag{43-6 a}$$

unde

$$\beta=\frac{1}{2}\Phi \tag{43-6 b}$$

şi

$$E_\theta=2E_0 \cos\beta=E_m \cos\beta \tag{43-6 c}$$

E_m, amplitudinea maximă pentru E_θ este egală cu suma amplitudinilor undelor ce se combină $(=2E_0)$, în cazul unei suprapuneri constructive. Ecuaţiile 43-6 trebuie verificate cu atenţie. Amplitudinea E_θ a rezultantei componentelor perceptibile care determină intensitatea franjelor de interferenţă va depinde strîns de valoarea lui θ, adică, de poziţia-punctului P din figura 43-5 şi 43-6.

În secţiunea 19-6 am arătat că intensitatea I a unei unde, măsurată eventual în watt/m^2, este proporţională cu pătratul amplitudinii. Atunci, pentru unda rezultantă, ignorînd constanta de proporţionalitate.

$$I_\theta \propto E_\theta^2 \tag{43-7}$$

Relaţia pare plauzibilă dacă amintim (ecuaţia 30-27) că densitatea energiei într-un cîmp electric este proporţională cu *pătratul* mărimii cîmpului electric. Aceasta este adevărată pentru cîmpuri electrice rapid, variabile, ca de exemplu pentru o undă de lumină, ca şi pentru cîmpuri statice.

Raportul intensităţilor a două unde de lumină este egal cu raportul pătratelor amplitudinilor cîmpurilor lor electrice. Dacă I_0 este intensi-

---

* Drept „componenta (vibraţie) perceptibilă" într-o undă luminoasă este considerat frecvent cîmpul electric de intensitate $\vec{E}$ deoarece cîmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$ nu are efect asupra ochiului, iar în diferiţi detectori de lumină efectul este slab. Presiunea radiaţiei (vezi paragraful 40-2) este unul din aceste efecte. De notat de asemenea, că ecuaţia 43-5 cu toate că trebuie să fie vectorială, în cele mai multe cazuri vectorii $\vec{E}$ în două unde ce interferă sînt paraleli şi este suficientă o ecuaţie algebrică.

tatea undei rezultante în P și I_0 este intensitatea unei unde individuale, atunci

$$\frac{I_0}{I_\theta}=\left(\frac{E_0}{E_\theta}\right)^2 \tag{43-8}$$

Combinînd această relație cu ecuația 43-6 c, se ajung la

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \beta = I_m \cos^2 \beta \tag{43-9}$$

De notat că intensitatea undei rezultante în orice punct P variază de la zero [pentru un punct în care Φ $(=2\beta)=\pi$, de exemplu la I_m, care este de patru ori mai mare decît intensitatea I_o a fiecărei unde de exemplu pentru un punct în care Φ $(=2\beta)=o$]. Să calculăm acum pe I_θ în funcție de unghiul θ (figura 43-5 sau 43-6).

Diferența de fază Φ în ecuația 43-4 este asociată cu diferența de drum S_1b (figura 43-5 sau 43-6). Dacă S_1b este $\frac{1}{2}\lambda$, Φ va fi π; dacă S_1b este λ, Φ este 2π etc. Aceasta sugerează că

$$\frac{\text{diferența de fază}}{2\pi}=\frac{\text{diferența de drum}}{\lambda},$$

$$\Phi=\frac{2\pi}{\lambda}(d \sin \theta)$$

sau, în sfîrșit, din ecuația 43-6 b,

$$\beta-\frac{1}{2}=\Phi=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \tag{43-10}$$

Această expresie pentru β poate fi substituită în ecuația 43-9 pentru I_θ, ceea ce va conduce la exprimarea acesteia din urmă în funcție de θ. Pentru ușurință, reunim aici expresiile pentru amplitudinea și intensitatea interferenței produse de un sistem de două fante

/ Ecuația 43-6 c /	$E_\theta = E_m \cos\beta$	interferența	(43-11 c)
/ Ecuația 43-9 /	$I_\theta = I_m \cos^2\beta$	pentru fante	(43-11 b)
/ Ecuația 43-10 /	$\beta=\left(\frac{1}{2}\Phi\right)\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$	înguste ($a \ll \lambda$)	(43-11 a)

Pentru a găsi pozițiile maximelor de intensitate, punem

$$\beta=m\pi \qquad m=0, 1, 2, \ldots$$

în ecuația 43-11 b. Din ecuația 43-11 c se obține

$$d \sin \theta=m\lambda \qquad m=0, 1, 2, \ldots \quad \text{(maxime)}$$

care este ecuația stabilită în secțiunea 43-1 (ecuația 43-1). Pentru a găsi minimele intensității scriem

$$\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad m=0, 1, 2, \ldots \quad \text{(minime)}$$

care se reduce la ecuația 43-2 anterior stabilită.

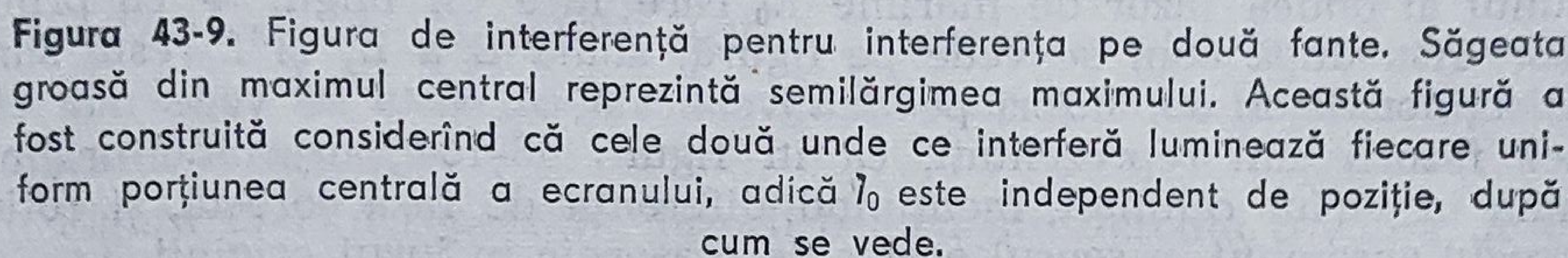


Figura 43-9. Figura de interferență pentru interferența pe două fante. Săgeata groasă din maximul central reprezintă semilărgimea maximului. Această figură a fost construită considerînd că cele două unde ce interferă luminează fiecare uniform porțiunea centrală a ecranului, adică I_0 este independent de poziție, după cum se vede.

Figura 43-9 reprezintă graficul intensității pentru interferență produsă de două fante. Linia continuă orizontală este I_0; aceasta descrie intensitatea (uniformă) pe ecran dacă una dintre fante este acoperită. Dacă cele două surse sînt incoerente intensitatea va fi uniformă pe ecran și egală cu $2I_0$; vezi linia orizontală întreruptă din figura 43-9. Pentru surse coerente este de așteptat ca energia să fie pur și simplu redistribuită. Astfel, intensitatea medie a figurii de interferență trebuie să fie $2I_0$, ca și pentru surse incoerente. Aceasta reiese imediat dacă înlocuim în ecuația 43-11 *b* factorul $\frac{1}{2}$ și reamintim că $I_m=4I_0$. Am stabilit de multe ori că valoarea medie a pătratului sinusului sau cosinusului peste unul sau mai multe cicluri este $\frac{1}{2}$.

43-4 Adunarea vibrațiilor electrice

În secțiunea 43-3 am asociat două vibrații dependente de timp, și anume

$$E_1=E_0 \sin \omega t \tag{43-3}$$

și

$$E_2=E_0 \sin (\omega t+\Phi) \tag{43-4}$$

care au aceeași frecvență unghiulară ω și amplitudine E_0 dar care au o diferență de fază Φ între ele. În acest caz rezultatul (ecuația 43-11 *a* și *c*) se poate obține cu ușurință pe cale algebrică.

În capitolele următoare vom încerca să adunăm mai multe vibrații, adesea o infinitate, cu amplitudini individuale infinitezimale. Deoarece metodele analitice devin mai dificile în astfel de cazuri, vom descrie o metodă grafică, ilustrînd-o prin rededucerea ecuației 43-11 *a*.

O componentă sinusoidală ca cea reprezentată de ecuația 43-3 poate fi reprezentată grafic, folosind un vector rotativ. În figura 43-10 *a* un

vector de mărime E_0 este rotit în jurul originii în sensul acelor de ceasornic cu frecvența unghiulară ω. În practica electrotehnicii un astfel de vector rotativ se numește *fazor*. The wave disturbance alternativă E_1 (ecuația 43-3) este reprezentată de proiecția acestui fazor pe axa verticală.

O a doua componentă (vibrație) care produce percepția luminii, E_2, de aceeași amplitudine E_0 dar cu o diferență de fază Φ diferită față

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \Phi) \tag{43-4}$$

poate fi reprezentată grafic (figura 43-10 *b*) ca proiecție pe axa verticală a unui al doilea fazor de mărime E_0 care face un unghi Φ cu primul fazor. Așa după cum se vede pe figură, suma E a E_1 și E_2 este suma proiecțiilor celor doi fazori pe axa verticală. Aceasta se vede mai clar dacă fazorii sînt reprezentați, ca în figura 43-10 *c*, desenînd originea unuia în vîrful celuilalt, menținînd diferența de fază corectă, și rotind întregul ansamblu în sensul acelor de ceasornic în jurul originii.

În figura 43-10 *c* E poate fi de asemenea considerat ca proiecția pe axa verticală a unui fazor de lungime E_θ, care este vectorul sumă a doi fazori de mărime E_0. De notat că suma (algebrică) a proiecțiilor a doi fazori este egală cu proiecția vectorului sumă a celor doi fazori.

În multe probleme de optică se ia în considerație doar *amplitudinea E* rezultantă a acestor componente și nu variația sa în timp. Aceasta se întîmplă deoarece ochiul și alte instrumente de măsură comune sînt sensibile la intensitatea rezultată a luminii (adică a pătratului amplitudinii) și nu pot detecta variația rapidă în timp a luminii vizibile. Pentru lumina de sodiu, de exemplu (λ = 5 890 Å), frecvența

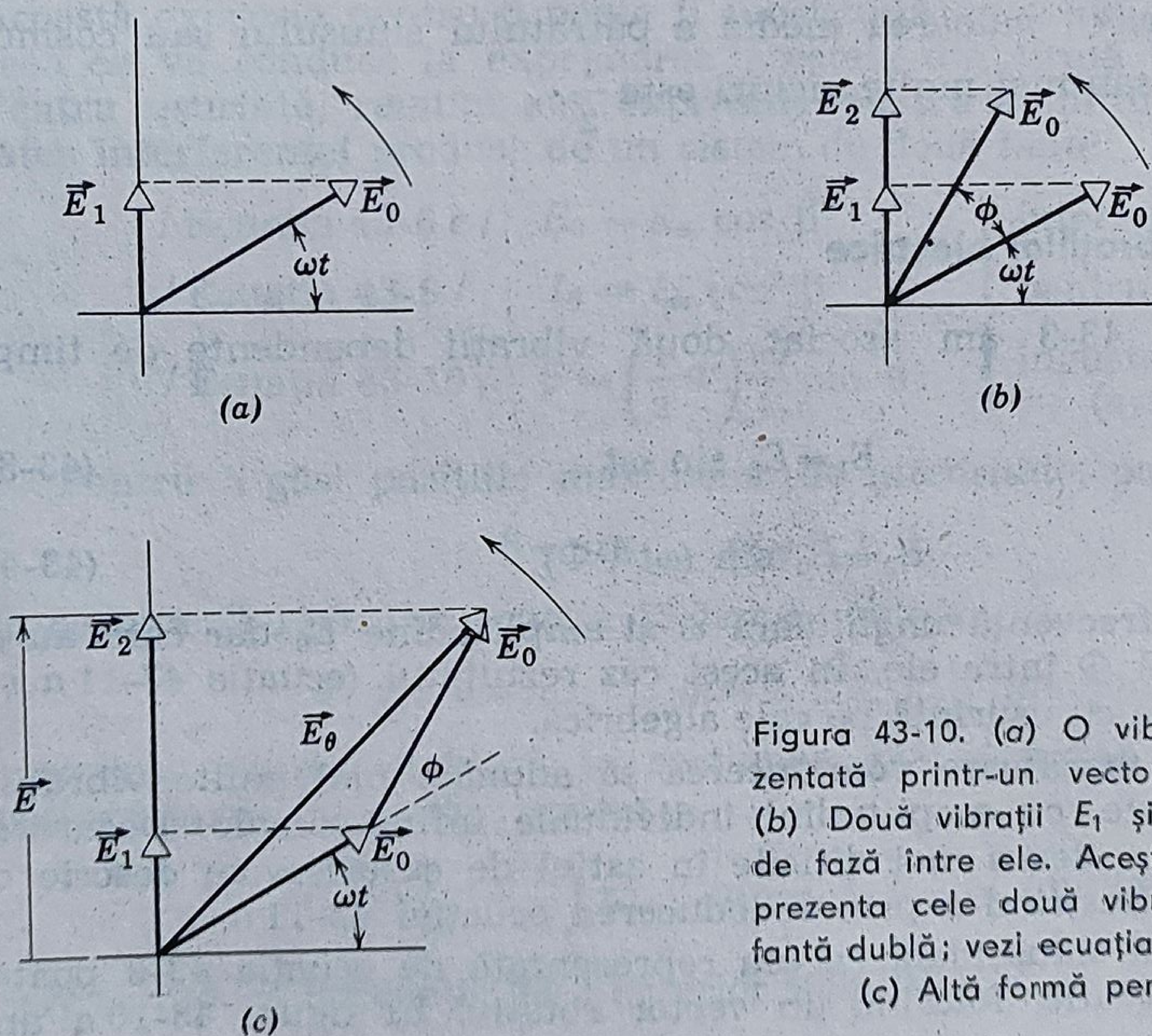


Figura 43-10. (*a*) O vibrație E_1 este reprezentată printr-un vector rotitor sau fazor. (*b*) Două vibrații E_1 și E_2 cu o diferență de fază între ele. Acești doi fazori pot reprezenta cele două vibrații în problema cu fantă dublă; vezi ecuația 43-3 și acuația 43-4. (*c*) Altă formă pentru desenul (*b*).

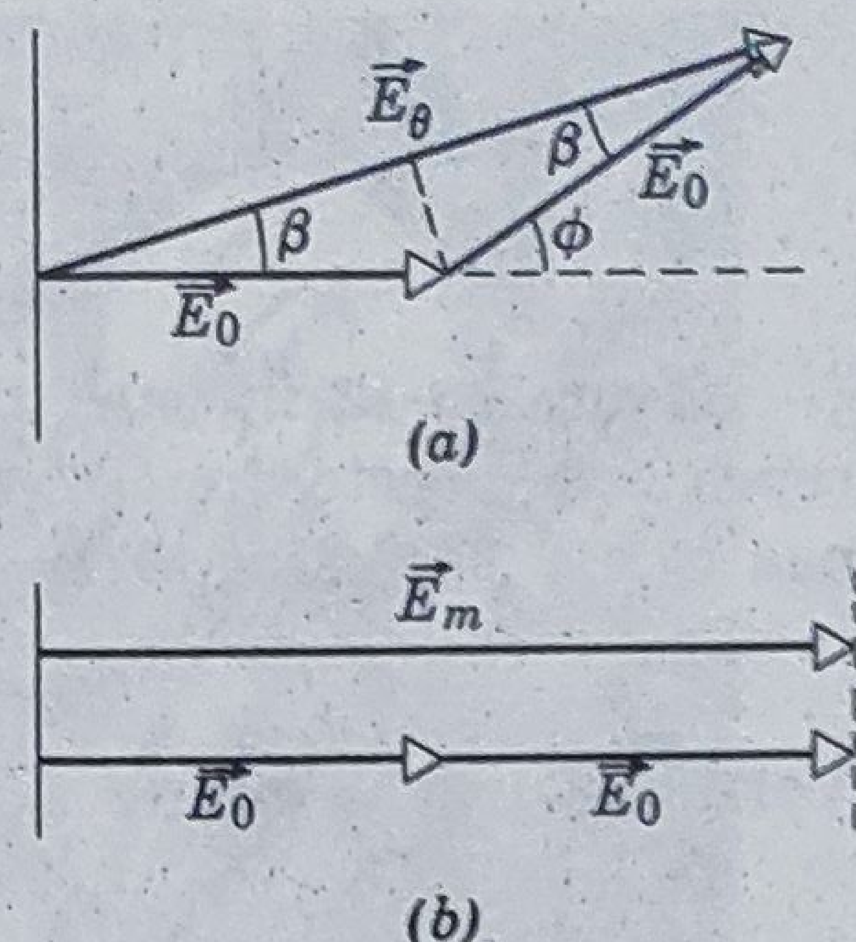


Figura 43-11. (a) O construcție pentru amplitudinea E_θ, rezultînd din două vibrații de amplitudine E_0 și diferența de fază Φ. (b) Amplitudinea maximă posibilă pentru aceste vibrații este pentru $\Phi=0$ și are valoarea $E_m=2E_0$.

$\nu\,(=\omega/2\pi)$ este de $5\cdot 1\times 10^{14}$ cicli/sec. Adesea, rotația fazorilor poate să nu fie luată în considerație, mărigînindu-ne atenția la aflarea mărimii fazorului rezultant.

Figura 43-11 *a* reprezintă fazorii pentru interferența produsă de două fante la timpul $t=0$; să o comparăm cu figura 43-10 *c*. Se vede că

$$E_\theta = 2E_0 \cos\beta = E_m \cos\beta$$

în care, din teorema care spune că unghiul exterior al unui triunghi (Φ) este egal cu suma unghiurilor interioare opuse ($\beta+\beta$)

$$\beta = \frac{1}{2}\Phi$$

Acesta este chiar rezultatul obținut algebric mai înainte; de comparat ecuația 43-11 *a* și *c*.

Într-un caz mai general, am putea dori să găsim rezultanta unui număr (>2) de vibrații variind sinusoidal. Procedeul general este următorul:

1. Se construiesc o serie de fazori reprezentînd funcțiile de adunat. Aceștia se reprezintă cap la cap, menținînd relația de fază corespunzătoare dintre fazorii adiacenți.

2. Se construiește vectorul sumă. Lungimea sa dă amplitudinea rezultantei. Unghiul dintre aceasta și primul fazor este faza rezultantei în raport cu primul fazor. Proiecția acestui fazor pe axa verticală dă variația în timp a vibrației rezultante.

Exemplul 3. Să se găsească grafic rezultanta $E(t)$ a următoarelor vibrații

$$E_1 = 10 \sin \omega t$$

$$E_2 = 10 \sin (\omega t + 15°)$$

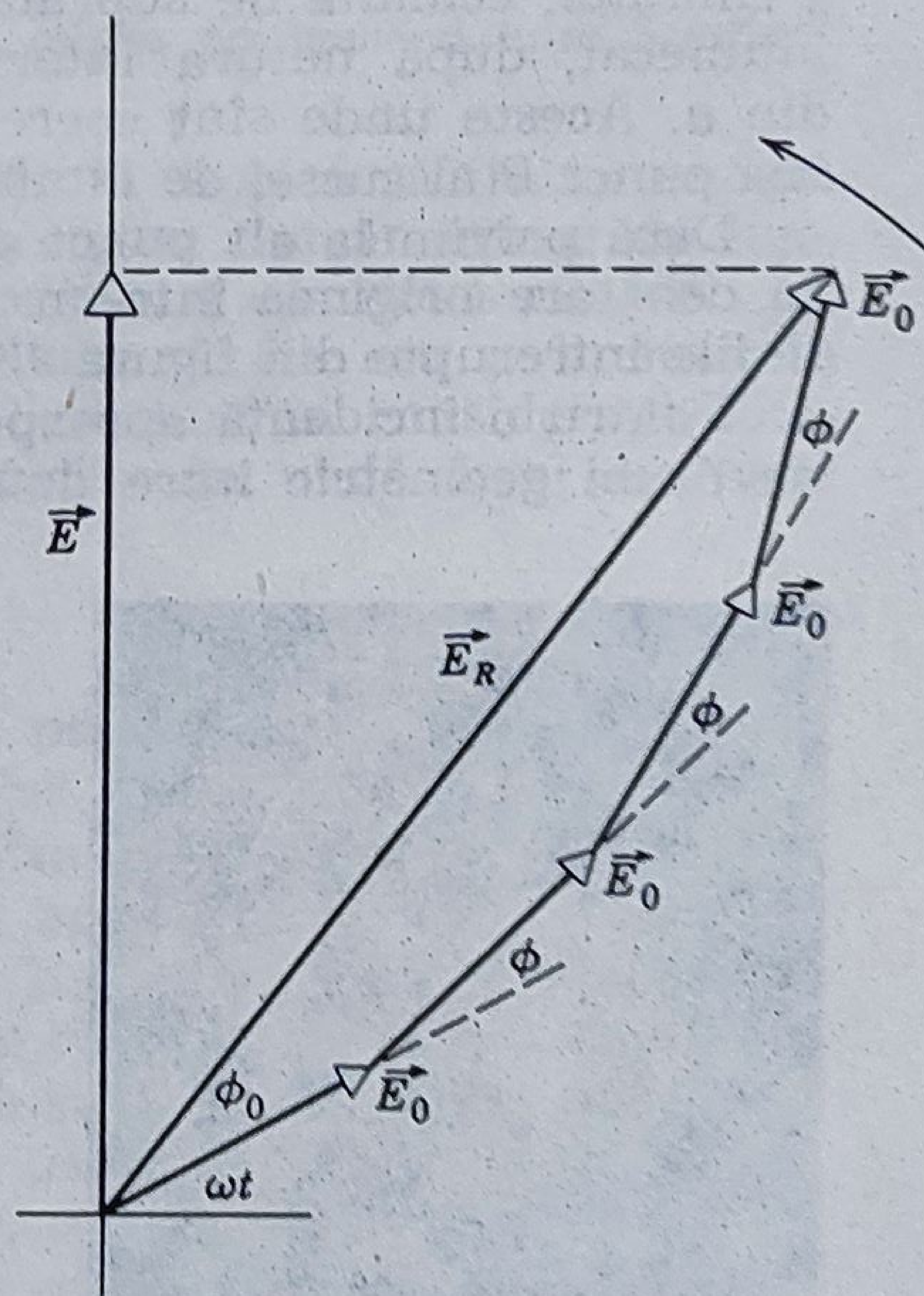


Figura 43-12. Exemplul 3. Sînt adunate grafic patru vibrații utilizînd metoda fazorilor.

$$E_3 = 10 \sin(\omega t + 30°)$$

$$E_4 = 10 \sin(\omega t + 45°)$$

Figura 43-12 în care E_0 este egal cu 10, reprezintă ansamblul a patru fazori ce reprezintă aceste funcții. Vectorul sumă, dintr-o măsurare grafică are amplitudinea E_R de 38 și faza Φ_0 în raport cu E_1 de 23°. Cu alte cuvinte

$$E(t) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 38 \sin(\omega t + 23°)$$

Verificați trigonometric rezultatul.

43-5 Interferența produsă de pelicule subțiri

Culorile baloanelor de săpun, peliculelor de ulei, sau ale altor pelicule subțiri sînt rezultatul interferenței. Figura 43-13 reprezintă efectele de interferență într-o peliculă subțire de apă cu săpun luminată cu lumină monocromatică.

Figura 43-14 reprezintă o peliculă de grosime uniformă d și indice de refracție n, ochiul fiind focalizat în punctul a. Pelicula este iluminată de o sursă extinsă S de lumină monocromatică. În această sursă există un punct P, astfel că două raze, desemnate de săgețile simplă și respectiv dublă, pot părăsi P și atinge ochiul (reprezentat în figură), după ce au trecut prin punctul a. Aceste două raze parcurg drumuri diferite de la P pînă la ochi, una fiind reflectată de suprafața superioară a filmului, cealaltă de suprafața inferioară. Punctul a apare luminat sau întunecat, după natura interferenței între cele două unde care pleacă din a. Aceste unde sînt coerente deoarece amîndouă au originea în același punct P al sursei de lumină.

Dacă privim la alt punct al peliculei, să zicem a', lumina care ajunge la ochi are originea într-un punct diferit, P' al sursei, așa cum arată liniile întrerupte din figura 43-14.

Pentru o incidență aproape normală ($\theta \cong 0$ în figura 43-14) diferența de drum geometric între două raze din P va fi aproape $2d$. Ne putem

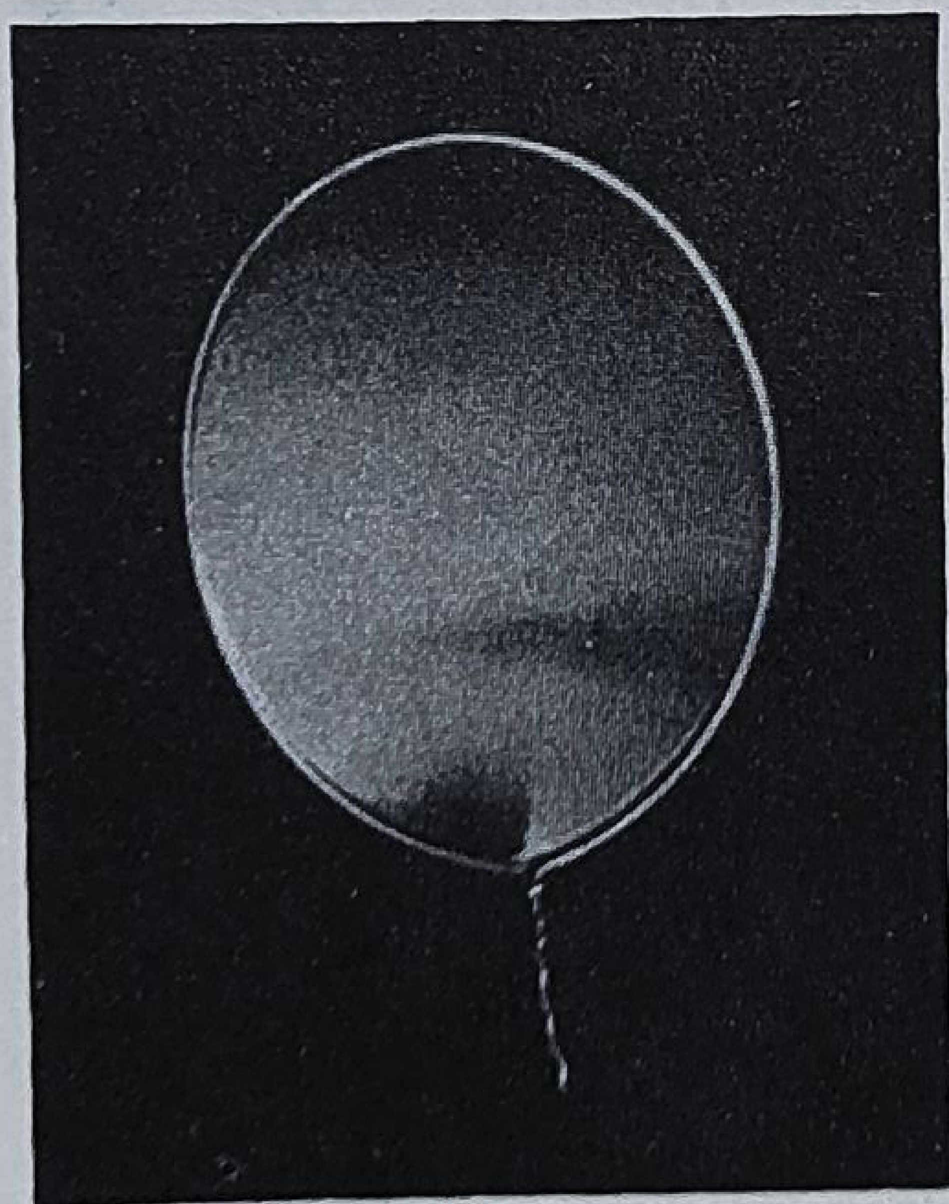


Figura 43-13. O peliculă de apă cu săpun pe o buclă de sîrmă văzută în lumina reflectată. Segmentul negru de sus nu este o ruptură. El apare deoarece filmul prin scurgere este așa de subțire acolo încît apare interferență distructivă între lumina reflectată de suprafața din față și cea reflectată de suprafața din spate. Reamintiți-vă că aceste două unde diferă ca fază cu 180°.

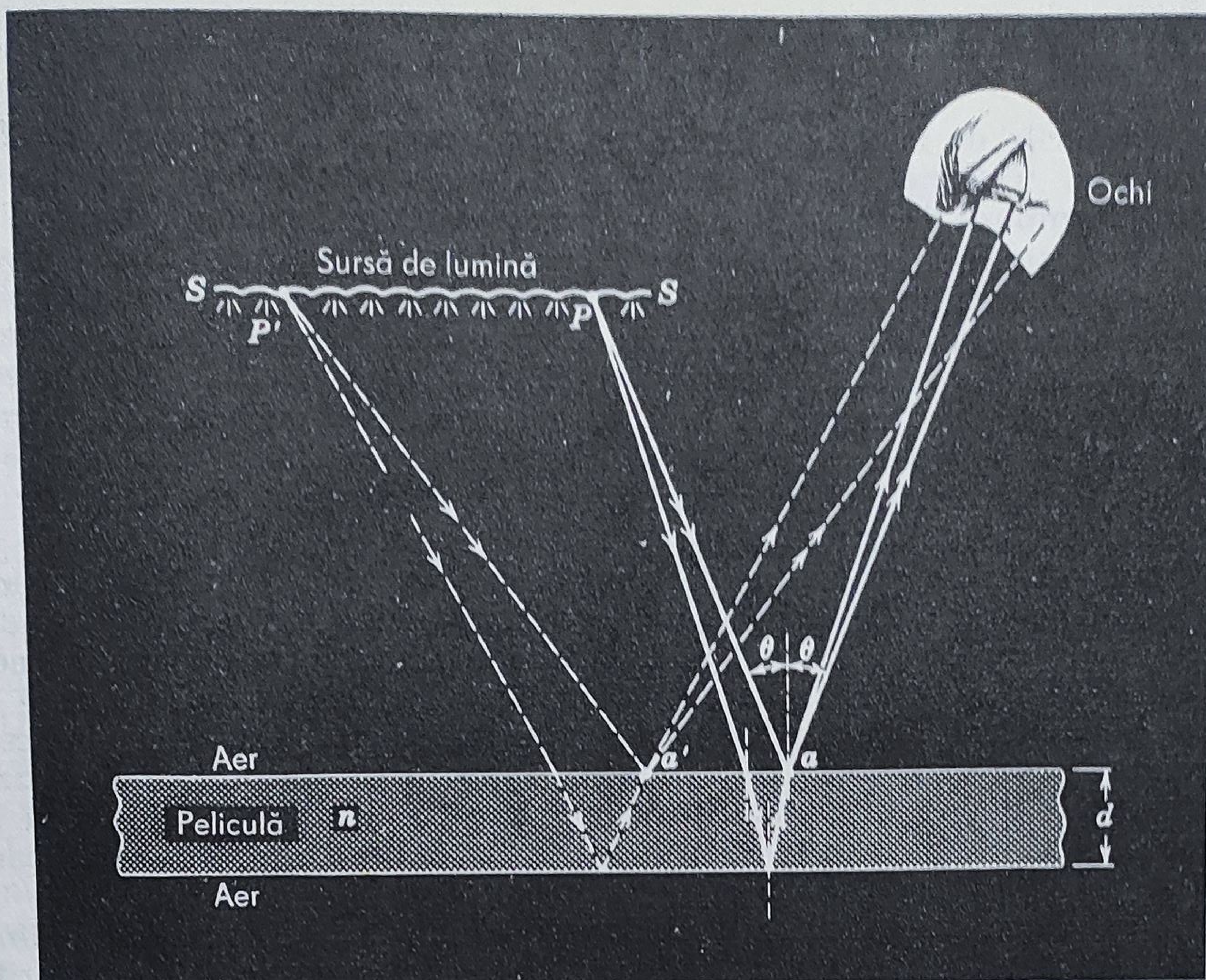


Figura 43-14. Interferența prin reflexie pe o peliculă subțire presupunînd sursa *S* extinsă.

aștepta ca unda rezultantă reflectată de peliculă lîngă a să fie un maxim de interferență dacă distanța $2d$ este egală cu un număr întreg de lungimi de undă. Această afirmație poate fi modificată din două motive.

În primul rînd, lungimea de undă trebuie să fie cea a luminii în peliculă, λ_n și nu cea din aer; λ; adică trebuie luat în considerație drumul optic și nu drumul geometric. Lungimile de undă λ și λ_n (vezi ecuația 41-11) se găsesc în relația

$$\lambda_n = \lambda / n \qquad (43\text{-}12)$$

Pentru a ajunge la al doilea motiv, să presupunem că pelicula este atît de subțire, încît $2d$ este mult mai mică decît o lungime de undă. Diferența de fază dintre cele două unde este atunci aproape de zero și este de așteptat ca o astfel de peliculă să apară luminoasă în reflexie. Cu toate acestea, apare întunecată. Acest lucru se explică privind figura 43-13, unde acțiunea gravității produce o peliculă în formă de pană, extrem de subțire în partea de sus. Pe măsură ce continuă curgerea, zona întunecată își mărește suprafața. Pentru a explica acest fenomen și alte fenomene similare, presupunem că una dintre cele două raze din figura 43-14 suferă o schimbare bruscă de fază cu π $(=180°)$ asociată fie cu reflexia pe suprafața aer-peliculă, sau cu transmisia prin ea. Așa după cum se dovedește, această schimbare de fază este suferită de raza reflectată de suprafața superioară. Cealaltă rază nu-și schimbă brusc faza nici

la transmisia prin suprafaţa superioară, nici la reflexia pe suprafaţa inferioară.

Schimbările de fază la reflexia undelor transversale în coarde au fost discutate în secţiunea 19-9. Pentru a extinde aceste idei să considerăm o coardă compusă din figura 43-15, formată din două părţi de mase diferite pe unitatea de lungime, întinse sub o anumită tensiune. Dacă o oscilaţie se deplasează spre dreapta (figura 43-15 *a*) apropiindu-se de joncţiune, se vor forma o oscilaţie reflectată şi o oscilaţie transmisă, oscilaţia reflectată fiind *în fază* cu cea incidentă. În figura 43-15 *b* situaţia este inversată, oscilaţie incidentă formîndu-se acum în partea mai puţin masivă a coardei. În acest caz oscilaţia reflectată diferă în fază cu π ($=180°$) faţă de oscilaţia incidentă. În ambele cazuri oscilaţia transmisă este în fază cu oscilaţia incidentă.

Figura 43-15 *a* reprezintă, de exemplu, o undă de lumină în sticlă care atinge o suprafaţă care mărgineşte un mediu mai puţin dens din punct de vedere optic (de indice de refracţie mai mic), de exemplu, aer. Figura 43-15 *b* ar putea reprezenta o undă de lumină în aer, ce trece în sticlă. În concluzie, dacă reflexia pe suprafaţa unui mediu cu indicele de refracţie *mai mic*, unda reflectată *nu suferă nici o schimbare de fază*, dacă indicele de refracţie este *mai mare*, are loc o schimbare de fază în valoare de π*. Unda transmisă nu suferă în nici un caz vreo schimbare de fază.

Putem acum să luăm în consideraţie ambii factori care determină natura interferenţei, şi anume, diferenţele de drum optic şi schimbările de fază la reflexie. Pentru ca ambele raze din figura 43-14 să se combine astfel încît să rezulte un *maxim* al intensităţii, presupunînd incidenţa normală, trebuie să avem

$$2d=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_n \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Termenul $\frac{1}{2}\lambda_n$ apare din cauza schimbării de fază la reflexie, o schimbare de fază de 180° fiind echivalentă cu o jumătate de lungime de undă.

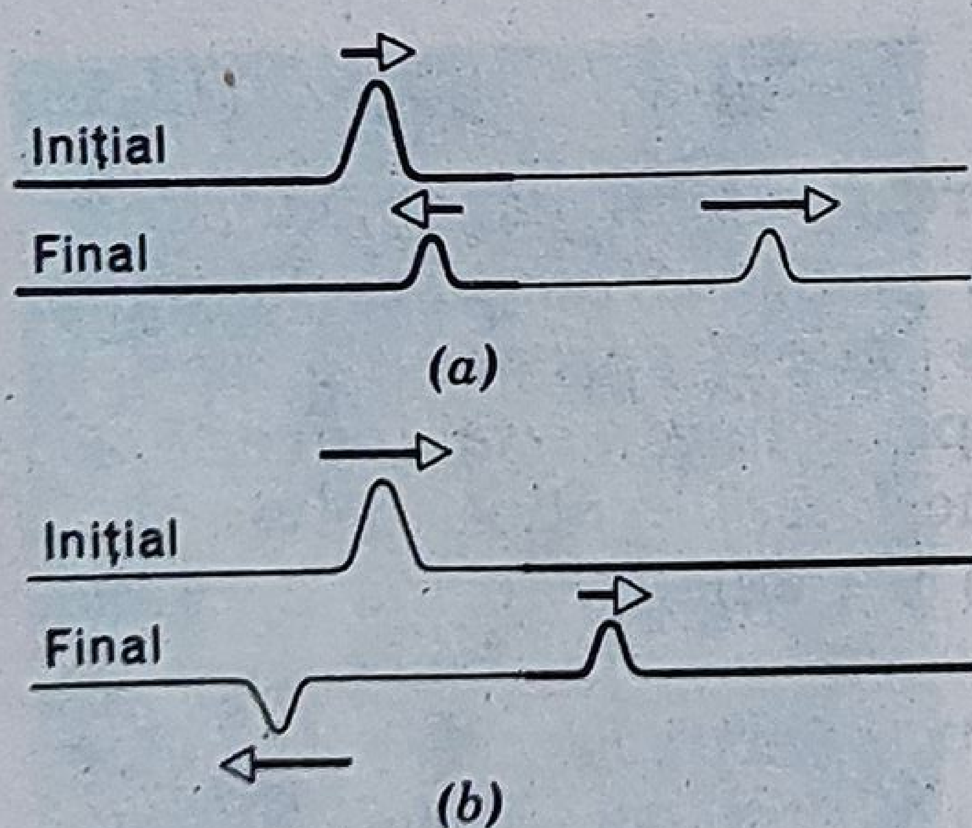


Figura 43-15. Schimbări de fază la reflexia pe legătura între două coarde întinse. (*a*) Pulsul incident în coarda mai grea (*b*) pulsul incident în coarda mai uşoară.

---

* Aceste afirmaţii, care pot fi demonstrate riguros cu ajutorul ecuaţiilor lui Maxwell (vezi secţiunea 43-6) trebuie modificate pentru lumina ce cade pe suprafaţa reflectată la un unghi ce creează condiţia pentru reflexie totală. De asemenea, se fac modificări pentru reflexia pe suprafeţele metalice.

Înlocuind λ_n cu λ/n avem în sfîrşit

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\lambda\right) \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(maxime)} \tag{43-13}$$

Condiţia pentru un *minim* de intensitate este

$$2dn = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(minime)} \tag{43-14}$$

Aceste ecuaţii sînt valabile dacă indicele de refracţie al peliculei este sau mai mare sau mai mic decît indicii mediilor din *fiecare* parte a peliculei. Schimbarea de fază relativă de 180° pentru cele două suprafeţe se produce numai în aceste cazuri. Un exemplu pentru care se aplică Ecuaţia 43-13 şi ecuaţia 43-14 este o peliculă de apă în aer şi o peliculă de aer în spaţiul dintre două plăci de sticlă. Exemplul 5 furnizează un caz în care aceste ecuaţii nu se aplică.

Dacă grosimea peliculei nu este uniformă, ca în figura 43-13, în care pelicula este în formă de pană, în anumite părţi apare o interferenţă constructivă, în alte părţi apare interferenţa distructivă. Vor apare astfel linii de maximă şi minimă intensitate — franje de interferenţă. Acestea se numesc *franje de grosime constantă*, fiecare franjă fiind produsă de punctele pentru care pelicula are o grosime d constantă. Dacă pelicula este iluminată cu lumină albă şi nu cu lumină monocromatică, lumina reflectată de diferite părţi ale peliculei va fi modificată de apariţia diferitelor interferenţe constructive sau distructive. Aceasta explică culorile strălucitoare ale baloanelor de săpun şi ale peliculelor de ulei.

Franjele de tipul descris, adică franjele care apar localizate pe peliculă în funcţie de grosimea peliculei, sînt posibile doar dacă pelicula este „*subţire*“, ceea ce înseamnă că d nu este mai mare decît cîteva lungimi de undă ale luminii. Pentru pelicule foarte groase (de exemplu $d \approx$ cm), diferenţa de drum între două raze (figura 43-14) va fi egală cu mai multe lungimi de undă, iar diferenţa de fază într-un anumit punct al peliculei se va schimba rapid pe măsură ce ne deplasăm chiar pe o mică distanţă faţă de a. Pentru pelicula „subţire“, totuşi, diferenţa de fază în a rămîne aproximativ aceeaşi pentru punctele din vecinătate; pentru fiecare punct al peliculei există o strălucire locală. Franjele de interferenţe se produc şi pentru pelicule groase, poziţia lor nu este însă pe peliculă ci la infinit. Vezi. secţiunea 43-7.

Exemplul 4. O peliculă de apă ($n = 1{,}33$) în aer are grosimea de 3 200 Å. Dacă este iluminată în lumină albă cu incidenţă normală, ce culoare va fi reflectată?

Rezolvînd ecuaţia 43-13 pentru λ

$$\lambda = \frac{2dn}{m + \frac{1}{2}} = \frac{(2)(3\,200\ \text{Å})(1{,}33)}{m + \frac{1}{2}} = \frac{8\,500\ \text{Å}}{m + \frac{1}{2}} \quad \text{(maxime)}$$

Din ecuaţia 43-14 minimile sînt date de

$$\lambda = \frac{8\,500\ \text{Å}}{m} \quad \text{(minime)}$$

Maximele şi minimele apar pentru următoarele lungimi de undă:

m	0(max)	1(min)	1(max)	2(min)	2(max)
λ, Å	17 000	8 500	5 700	4 250	3 400

În regiunea vizibilă se găseşte doar maximul pentru $m=1$ (vezi figura 40-2); lumina ce corespunde acestei lungimi de undă este galbenă-verzuie. Dacă pelicula este luminată cu lumină albă, la reflexie componenta galben-verzuie va fi intensificată.

Exemplul 5. *Oglinda nereflectantă.* Lentilele sînt adesea învelite în pelicule subţiri din materiale transparente ca MgF_2 ($n=1,38$) în scopul micşorării reflexiei pe suprafaţa de sticlă, prin interferenţă. Cît de groasă trebuie să fie o peliculă pentru a produce un minim de reflexie în centrul spectrului vizibil (5 500 Å)?

Presupunem că lumina cade pe lentilă sub incidenţa aproape normală (în figura 43-16 θ este exagerat pentru calitate) şi vom căuta interferenţa distructivă între razele r şi r_1. Ecuaţia 43-14 nu este aplicabilă deoarece în acest caz *fiecare* rază îşi schimbă faza cu 180°, pentru ca reflexia pe ambele suprafeţe ale peliculei de MgF_2 se face dintr-un mediu de indice de refracţie mai mare.

De asemenea nu există o schimbare netă de fază între cele două reflexii, ceea ce înseamnă că diferenţa de drum optic pentru interferenţa distructivă este $\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ (vezi ecuaţia 43-13), şi

$$2dn=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad m=0,\ 1,\ 2, \ldots \qquad \text{(minime)}$$

Rezolvînd pentru d şi punînd $m=0$ avem

$$d=\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2n}=\frac{\lambda}{4n}=\frac{5\,500\ \text{Å}}{(4)(1{,}38)}=1\,000\ \text{Å}$$

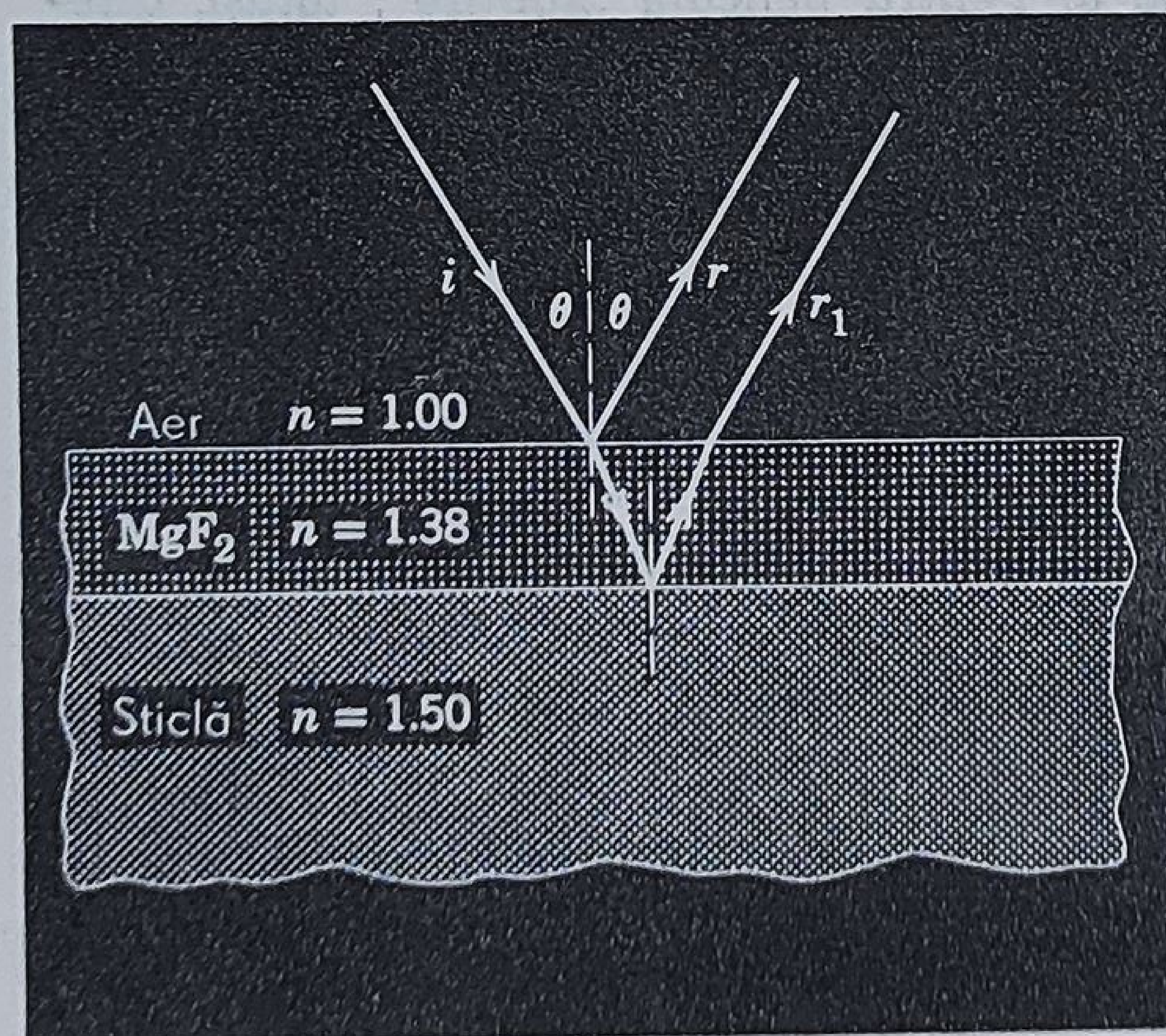


Figura 43-16. Exemplul 5. Reflexiile nedorite din sticlă pot fi reduse acoperind sticla cu o peliculă transparentă subţire.

Exemplul 6. *Inelele lui Newton*. Figura 43.17 reprezintă o lentilă cu rază de curbură R așezată pe o placă perfect plană, iluminată de sus cu lumină de lungime de undă λ. Figura 43.18 reprezintă franjele circulare de interferență (inelele lui Newton) care apar ca urmare a grosimii variabile a peliculei de aer dintre lentile și placă. Să se afle razele maximelor circulare de interferență.

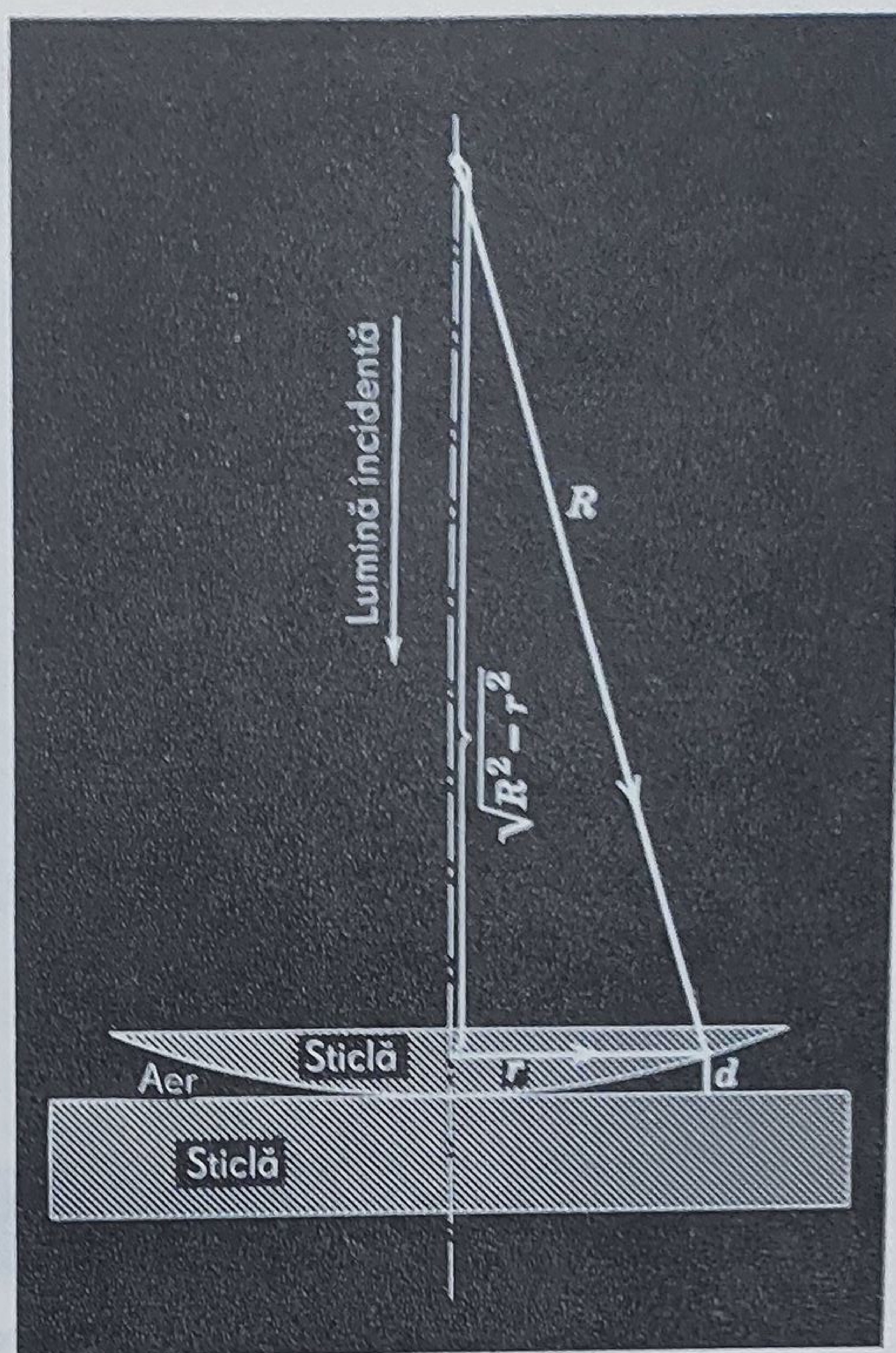


Figura 43-17. Exemplul 6. Aparat pentru observarea inelelor lui Newton.

Raza care produce o schimbare de fază de 180° este cea de la marginea peliculei și nu cea din centru, deoarece aceasta este reflectată dintr-un mediu cu indice de refracție mai mare. Condiția pentru maxim rămîne neschimbată,

$$2d=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{43-15}$$

indicele de refracție al peliculei de aer fiind presupus egal cu unitatea. Din figura 43.17 putem scrie

$$p=R-\sqrt{R^2-r^2}=R-R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}$$

Dacă $r/R \ll 1$, paranteza dreaptă se poate dezvolta cu ajutorul teoremei binomului, păstrînd doar doi termeni, astfel

$$d=R-R\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2+\cdots\right]\cong\frac{r^2}{2R}$$

Utilizînd ecuația 43-15 avem

$$n=\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda R} \qquad m=0,1,2,\ldots$$

adică razele inelelor luminoase. Dacă se utilizează lumină albă, fiecare componentă a spectrului va produce propriile franje circulare, care se suprapun.

43-6. Schimbările de fază la reflexie

G. G. Stokes (1819—1903) a folosit pentru investigarea reflexiei luminii la interfața a două medii principiul reversibilității optice. Principiul afirmă că dacă nu există absorbție o rază de lumină reflectată sau refractată își va relua drumul

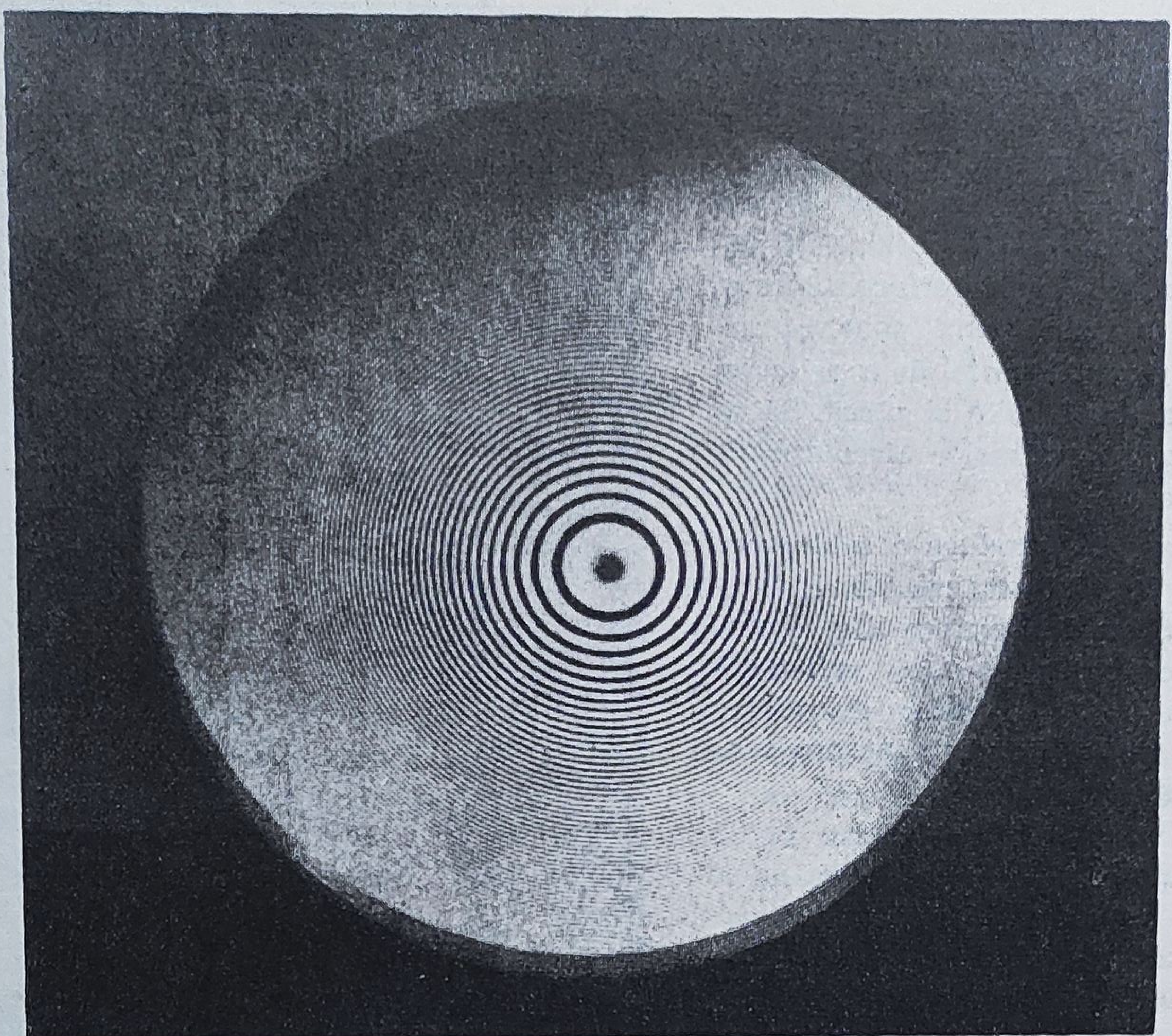


Figura 43-18. Exemplul 6. Inelele lui Newton. (Amabilitatea lui Bausch & Lomb Optical Co.)

dacă se inversează direcţia. Aceasta ne reaminteşte că orice sistem mecanic poate evolua la fel înainte sau înapoi, cu condiţia să nu existe absorbţie de energie din cauza frecării etc.

Figura 43-19 *a* reprezintă o undă de amplitudine E reflectată şi refractată pe o suprafaţă ce separă mediile 1 şi 2, cu $n_2 > n_1$. Amplitudinea undei reflectate este $r_{12}E$, unde r_{12} este *coeficientul amplitudinii de reflexie*. Amplitudinea undei refractate este $t_{12}E$, unde t_{12} este *coeficientul amplitudinii de transmisie*.

Vom considera posibile doar schimbările de fază de 0 şi 180°. Dacă $r_{12} = +0,5$, de exemplu, avem o reducere de 1/2 în amplitudine la reflexie şi nici o schimbare de fază. Pentru $r_{12} = -0,5$ avem o schimbare de 180° în fază deoarece

$$E \sin (\omega t + 180°) = -E \sin \omega t$$

Figura 43-19 b arată că dacă inversăm aceste două raze, acestea se vor compune producînd raza originală în direcţia opusă. Raza $r_{12}E$, reprezentată de săgeata din figură, este reflectată şi refractată, producînd razele de amplitudine r_{12}^2 şi respectiv $r_{12}t_{12}E$. Raza $t_{12}E$, reprezentată de săgeata triplă din figură, este de asemenea reflectată şi refractată, producînd razele de amplitudine $t_{12}t_{21}E$ şi $t_{12}r_{21}E$. De notat că r_{12} descrie o rază în mediul 1 reflectată din mediul 2, iar r_{21} descrie o rază din mediul 2 reflectată din mediul 1. În mod similar, t_{12} descrie o rază ce trece din mediul 1 în mediul 2; t_{21} descrie o rază ce trece din mediul 2 în mediul 1.

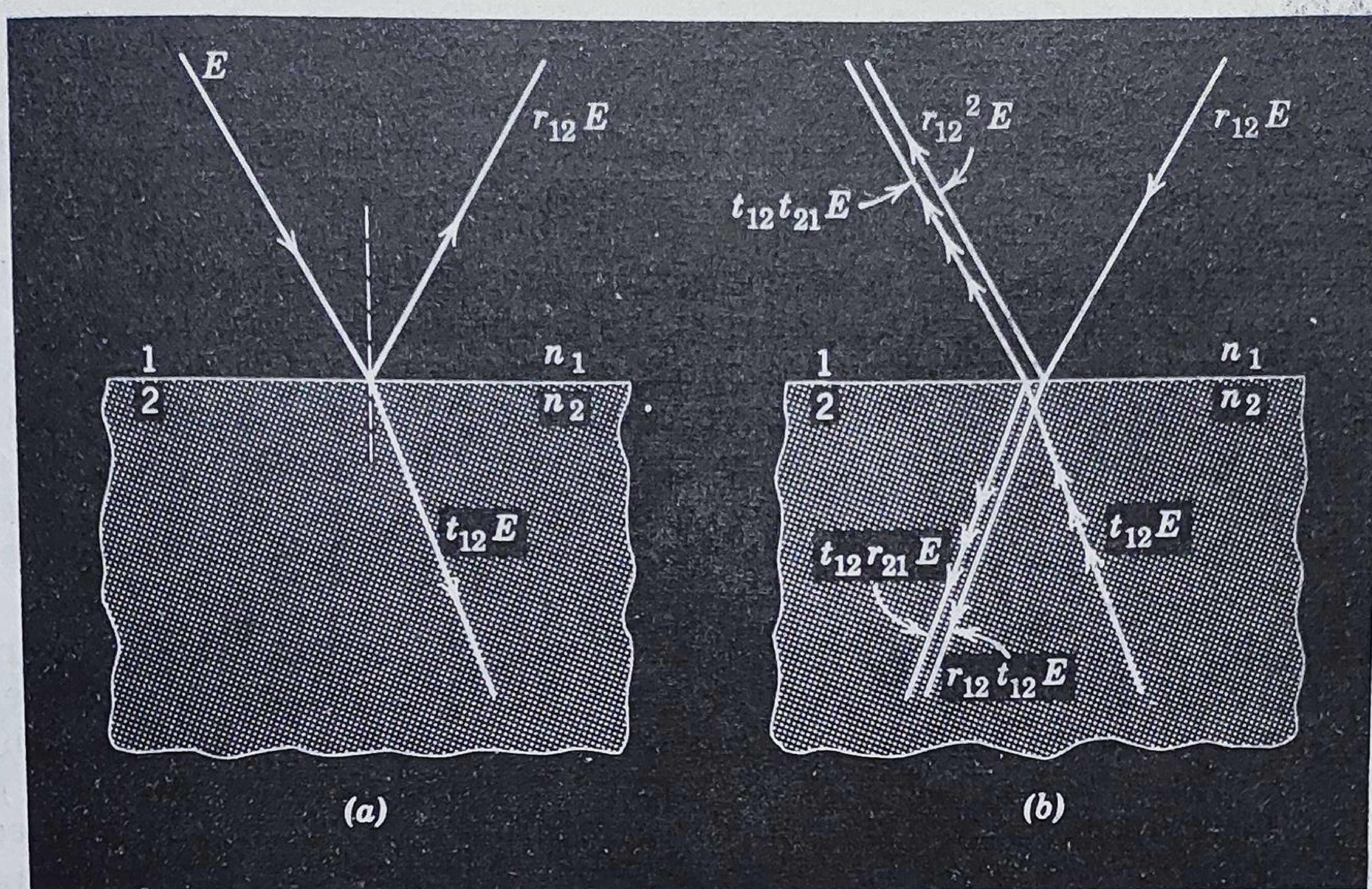


Figura 43-19. (a) O rază este reflectată și refractată la interfața aer-sticlă. (b) Situația inversată optic; cele două raze din stînga jos trebuie să se anuleze.

Cele două raze din stînga sus în figura 43-19 b trebuie să fie echivalente cu raza incidentă din figura 43-19 a, inversată; cele două raze din figură stînga jos în figura 43-19 a trebuie să se anuleze. A doua cerință conduce la

$$r_{12}\,t_{12}\,E+t_{12}\,r_{21}\,E=0,$$

sau

$$r_{12}=-r_{21}.$$

Acest rezultat ne arată că două unde, una reflectată din mediul 1 și una reflectată din mediul 2, se comportă diferit și anume numai una dintre ele suferă o schimbare de fază de 180°. Bazîndu-ne pe experiență, se arată că, așa cum am făcut-o mai sus, raza reflectată dintr-un mediu mai dens din punct de vedere optic este aceea care își schimbă faza.

43-7 Interferometul Michelson

Un interferometru este un dispozitiv care este folosit la măsurarea lungimilor sau variațiilor de lungime, cu o mare acuratețe, cu ajutorul franjelor de interferență. Vom descrie interferometrul construit de Michelson în 1881.

Să considerăm lumina care pleacă din punctul P al sursei S (figura 43-20) și cade pe oglinda semi-argintată M. Această oglindă este acoperită cu un strat de argint suficient de subțire pentru a transmite jumătate din lumina incidentă și a reflecta jumătate din aceasta; în figură am presupus că oglinda, prin convenție are o grosime neglijabilă. În M lumina se împarte în două unde. Una își continuă drumul prin

transmisie spre oglinda M_1; cealaltă își continuă drumul prin reflexie spre M_2. Undele sînt reflectate în fiecare dintre aceste oglinzi și sînt trimise înapoi de-a lungul direcției lor de incidență, eventual atingînd ochiul E. Dacă undele sînt coerente, provenind din același punct al sursei, atunci vor interfera.

Dacă oglinzile M_1 și M_2 sînt strict perpendiculare una pe cealaltă, efectul este același ca al luminii ce vine dintr-o sursă S și cade pe un strat uniform de aer, mărginit de sticlă, de grosime egală cu $d_2—d_1$. Vor apare franje de interferență, provocate de micile variații ale unghiului de incidență sub care cade lumina ce provine din puncte diferite ale sursei. Pentru pelicule *subțiri*, cu ajutorul unei foarte mici schimbări ale unghiului de incidență, se poate evidenția o diferență de drum de o lungime de undă.

Dacă M_2 este deplasată înainte sau înapoi, efectul este variația grosimii stratului echivalent de aer. Să presupunem că centrul franjei centrale (circulare) este luminos și M_2 este deplasat astfel încît prima franjă să apară în centrul figurii. Drumul unui fascicul de lumină ce cade pe M_2 a fost schimbat cu o lungime de undă. Aceasta înseamnă (deoarece lumina trece de două ori prin stratul echivalent de aer) că oglinda a fost deplasată cu o jumătate de lungime de undă.

Interferometrul este folosit pentru măsurarea variațiilor de lungime urmărind cîte franje de interferență trec prin cîmpul vizual în timpul deplasării oglinzii M_2. Aceste măsurători de lungime devin mai precise cu cît numărul de franje este mai mare.

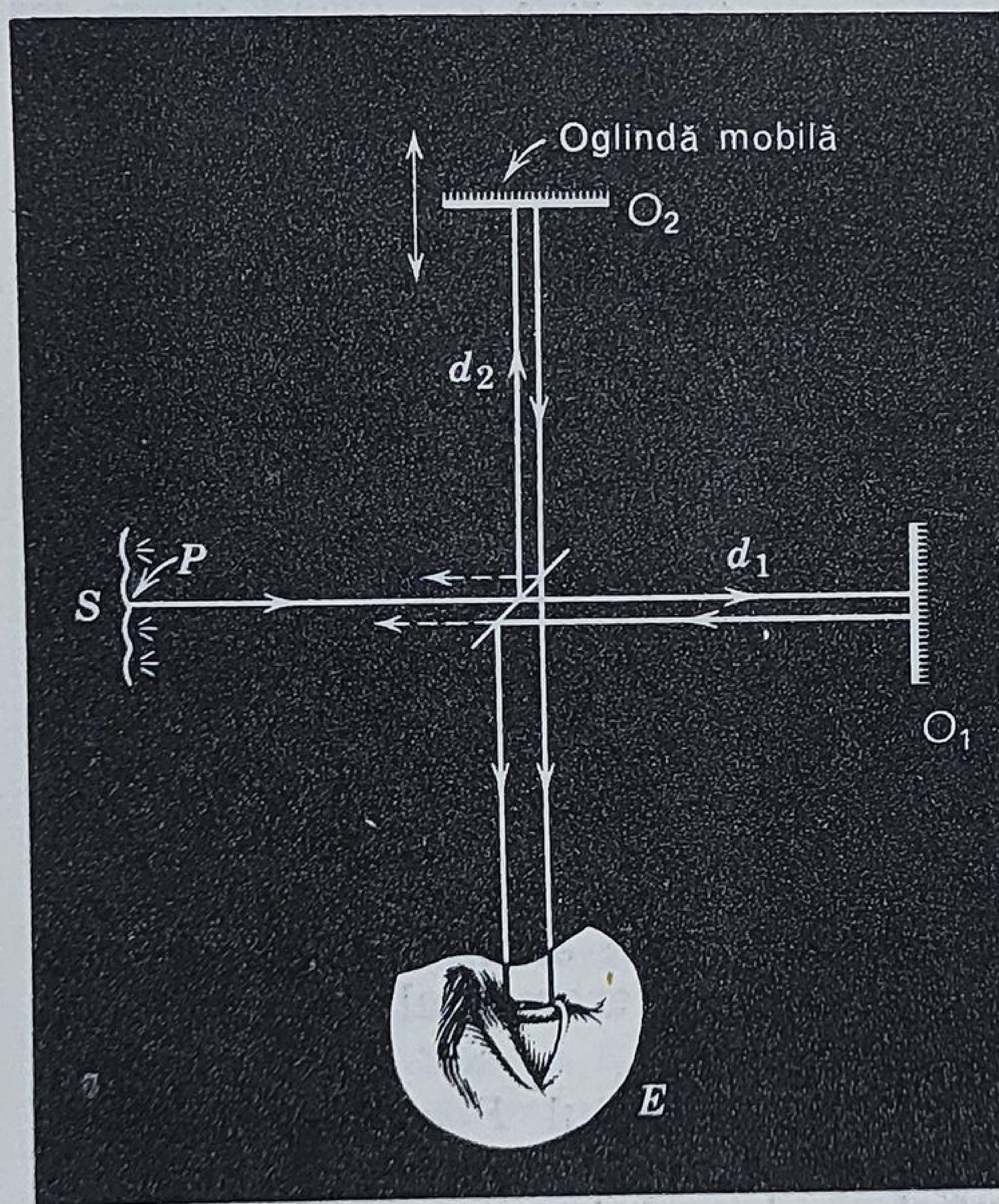


Figura 43-20. Interferometrul lui Michelson, arătîndu-se drumul unei raze particulare ce iese în punctul *P* din sursa extinsă *S*.

Michelson a măsurat lungimea metrului etalon, păstrat la Paris, în lungimi de undă a luminii roșii monocromatice emise dintr-o sursă ce conținea cadmiu. El a arătat că metrul etalon era echivalent cu 1 553 163,5 lungimi de undă ale luminii roșii a cadmiului.

Fizicienii au discutat foarte mult despre avantajele *definirii* metrului etalon în termenii lungimi de undă a unei radiații monocromatice față de baza etalon. Aceasta ar face ca stabilirea lungimii etalon să fie simplu de determinat în orice laborator din lume. De asemenea, ar îmbunătăți acuratețea măsurătorilor de lungime, deoarece n-ar mai trebui să se compare un obiect necunoscut cu un obiect standard (baza etalon), folosindu-se tehnica interferometrică, ci s-ar putea mă-

sura *direct* obiectul necunoscut, într-un sens absolut. În plus, se înlătură şi primejdia deteriorării etalonului, deoarece sursele de lumină şi interferometrele vor fi (probabil) oricînd disponibile.

În 1961 a fost adoptat printr-o convenţie internaţională un astfel de etalon atomic standard de lungime. Citām dintr-un articol* ce consemnează evenimentul:

> Lungimea de undă a radiaţiei portocaliu-roşu a kriptonului-86 a înlocuit bara de platină-iridiu a etalonului. La început lungimea de undă a acestei radiaţii a fost definită ca o funcţie de lungimea metrului etalon. Acum metrul este definit ca un multiplu (1 650 763,73) al lungimii de undă a radiaţiei.

Radiaţia kriptonului-86 a fost preferată aceleia a cadmiului sau a altor surse deoarece produce franje de interferenţă mai fine în interferometru, în cadrul măsurătorilor de lungime ce folosesc lungimi mari ale drumurilor optice.

43-8 Interferometrul lui Michelson şi propagarea luminii

În paragraful 40-4 am prezentat ipotezele lui Einstein, acum bine verificate, conform cărora în spaţiul liber lumina se propagă cu aceeaşi viteză c indiferent care este viteza relativă a sursei şi a observatorului. Am arătat că aceste ipoteze le contrazic pe acelea ale fizicienilor secolului nouăsprezece în ceea ce priveşte propagarea undelor. Pentru aceşti fizicieni era dificil, avînd în vedere formarea lor în fizica clasică a timpului să creadă că o undă se poate propaga fără să aibă un mediu de propagare. Dacă s-ar putea stabili un astfel de mediu, viteza c a luminii ar fi bineînţeles interpretată *în conformitate cu acel mediu*, astfel după cum viteza sunetului se referă la un mediu cum este aerul.

Cu toate că pentru lumină nu este evident nici un fel de mediu, fizicienii au postulat unul, numit *eter*** şi au emis ipoteza că proprietăţile sale nu sînt detectabile cu mijloace obişnuite ca de exemplu cîntărirea.

În 1881 (24 ani înaintea ipotezelor lui Einstein) A. A. Michelson a forţat eterul, presupunînd că există, să suporte o verificare fizică di-

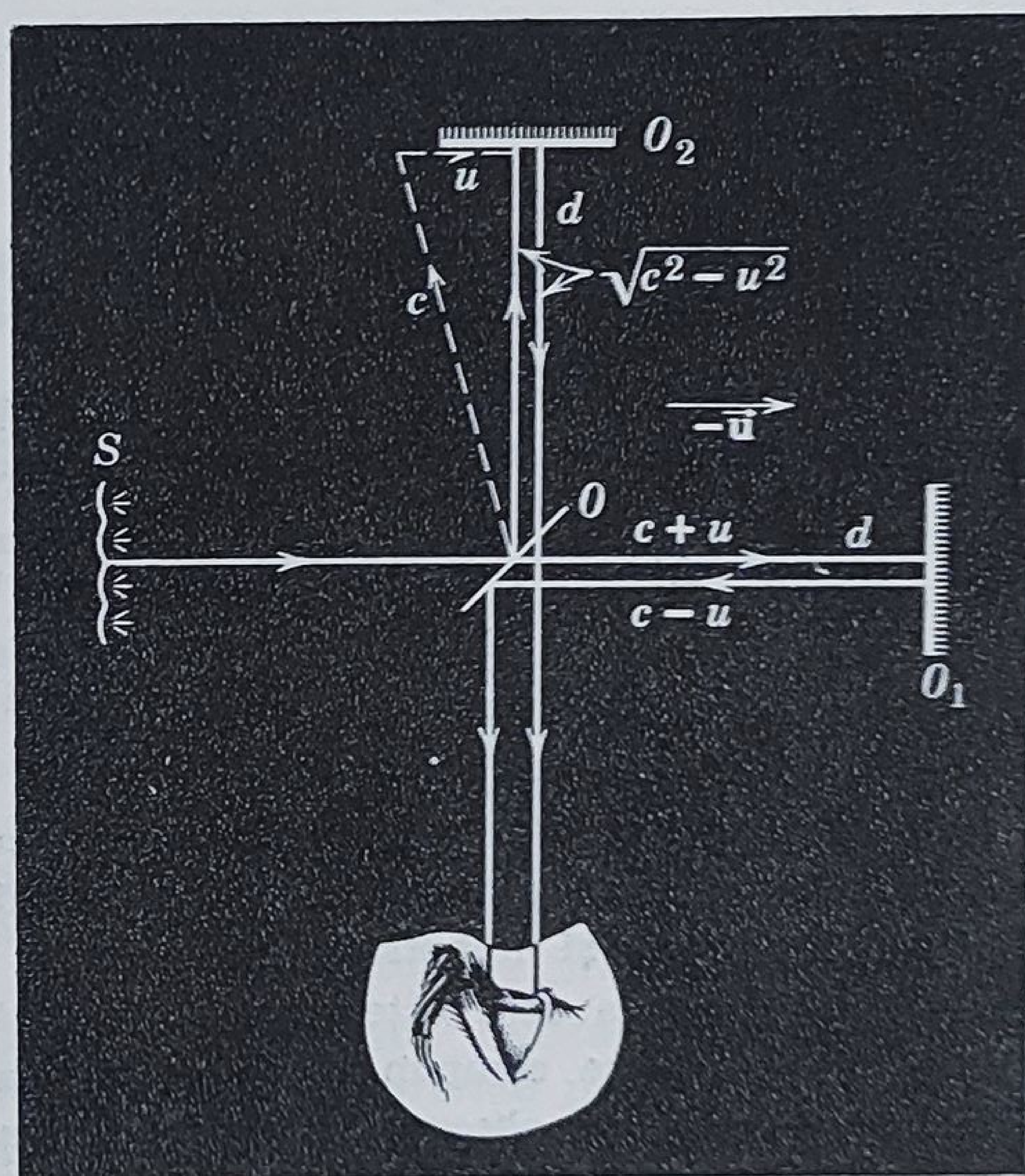


Figura 43-21. „Eterul" curge cu viteza $-u$ prin interferometrul Michelson. Vitezele undelor sînt arătate pe baza ipotezei (incorecte) a eterului.

* Scientific American, p. 75, decembrie 1960 (n.a.).
** Mai precis, eter *luminos* (n.a.).

rectă. În particular, Michelson, mai tîrziu E. W. Morley, au încercat să măsoare viteza u care pămîntul se mişcă în eter. Interferometrul lui Michelson a fost instrumentul faimoasei experienţele Michelson — Morley.

Pămîntul împreună cu interferometrul deplasîndu-se cu viteza $\vec{u}$ prin eter este echivalent cu interferometrul în repaus şi eterul deplasîndu-se cu viteza $-\vec{u}$, aşa cum se arată în figura 43-21. Să considerăm o undă deplasîndu-se în direcţia MM_1M şi o undă în direcţia MM_2M. Prima corespunde din punct de vedere clasic unui om care vîsleşte într-o barcă pe distanţa d în sensul curentului şi aceeaşi distanţă împotriva curentului, a doua corespunde unei bărci conduse pe distanţa d traversînd curentul şi înapoi.

În ipoteza existenţei eterului viteza luminii pe drumul MM_1, este $c+u$; pe drumul M_1M este $c-u$. Timpul pentru o călătorie completă este

$$t_1 = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = d\,\frac{2c}{c^2-u^2} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{1-(u/c)^2}$$

Viteza luminii, *în ipoteza eterului,* pentru drumul MM_2 este $\sqrt{c^2-u^2}$, ca în figura 43-21. Aceeaşi viteză rămîne valabilă pentru drumul M_2M, astfel că timpul pentru un drum complet este

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Diferenţa de timp între cele două drumuri este

$$\Delta t = t_1 - t_2 =$$

$$= \frac{2d}{c}\left\{\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1} - \left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Presupunînd $u/c \gg 1$, putem dezvolta cantităţile din parantezele drepte folosind teorema binomului, păstrînd doar primii termeni:

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\left\{\left[1+\left(\frac{u}{c}\right)^2+\cdots\right] - \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\cdots\right]\right\} =$$

$$= \frac{2d}{c}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right\} = \frac{du^2}{c^3} \qquad (43\text{-}16)$$

Să rotim acum întregul interferometru cu 90°. Drumurile parcurse de lumină îşi schimbă acum semnificaţia, MM_1M fiind acum, „traversarea curentului" iar MM_2M „în sensul şi împotriva curentului". Diferenţa de timp dintre cele două unde care ajung la ochi este acum inversată; aceasta schimbă diferenţa de fază dintre undele ce se compun şi de asemenea poziţiile maximelor de interferenţă. *Experienţa constă în observaţia deplasării franjelor de interferenţă în timpul rotaţiei aparatului.*

Variaţia în diferenţa de timp este $2\Delta t$, ceea ce corespunde unei deplasări a franjelor cu $2\,\Delta t/T$ unde T $(-\lambda/c)$ este perioada de vibraţie a luminii. Deplasarea maximă aşteptată (în număr de franje) la 90° (vezi ecuaţia 43-16) este

$$\Delta N - \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta tc}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2 \qquad (43\text{-}17)$$

Fie $d=11$ metri (obţinută printr-o reflexie multiplă în interferometru) şi $\lambda=5,9\times10^{-7}$ metri. Dacă se presupune că u este aproximativ viteza orbitală a pămîntului, atunci $u/c\approx10^{-4}$. Atunci variaţia maximă a numărului de franje la rotaţia interferometrului cu 90° este

$$\Delta N=\frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2=\frac{(2)(11\text{ metri})}{5,9\cdot10^{-7}\text{ metri}}(10^{-4})^2=0,4$$

chiar dacă se aştepta o variaţie de aproximativ 0,04 franje, Michelson şi Morley erau siguri că se poate observa o variaţie de 0,01. *Totuşi din experienţă a reieşit că nu se poate produce o variaţie observabilă de franje.*

Analogia între o undă de lumină *în* eter şi o barcă în apă, care apărea evidentă în 1881 este pur şi simplu incoerentă. Deducţiile bazate pe această analogie sînt incorecte pentru undele de lumină. Dacă se porneşte însă de la ipotezele lui Einstein, rezultatul negativ observat este prevăzut cu claritate, viteza luminii fiind c pentru toate direcţiile. Mişcarea pămîntului în jurul soarelui şi rotaţia interferometrului nu au nici un efect, după Einstein, asupra vitezei undelor de lumină în interferometru.

Cu toate că ipotezele lui Einstein sînt complet consistente cu rezultatul negativ al experienţei Michelson-Morley, trebuie să fie clar că această experienţă nu poate servi ca o dovadă a ipotezelor lui Einstein. Einstein spunea că nu există un număr, chiar mare, de experienţe care să-i dea dreptate dar ar putea exista doar una care să-i infirme ipotezele. Încrederea ce o avem astăzi în ipotezele lui Einstein se bazează pe concordanţa unui mare număr de experienţe, destinate să le verifice. „Unica experienţă" care să dovedească că Einstein a greşit nu a fost pînă acum găsită.

Întrebări

1. Experienţa lui Young este o experienţă de interferenţă sau de difracţie, sau amîndouă?

2. Efectele de interferenţă apar şi pentru undele sonore? Reamintim că sunetul este o undă longitudinală iar lumina este o undă transversală.

3. În experienţa lui Young de interferenţă produsă de două fante, folosind o sursă monocromatică de laborator, de ce este necesar ecranul A (figura 43-1)? Ce se va întîmpla dacă orificiul din acest ecran ar fi treptat lărgit?

4. Descrieţi intensitatea luminii pe ecranul C din figura 43-5 dacă una dintre fante este acoperită cu un filtru roşu, iar cealaltă cu un filtru albastru, unda incidentă fiind albă.

5. Este coerenţa un fenomen important în reflexie şi refracţie?

6. Definiţi cu atenţie şi faceţi distincţie între unghiurile θ şi Φ care apar în ecuaţia 43-10.

7. Dacă una din fantele din figura 43-5 este acoperită, ce schimbare va apare în intensitatea luminii în centrul ecranului?

8. Ce schimbări apar în figura de interferenţă dacă aparatul din figura 43-5 este pus sub apă?

9. Care sînt condiţiile pentru un maxim de intensitate dacă privim o peliculă subţire prin *transmisie?*

10. Pata centrală din inelele lui Newton, privind prin reflexie este luminoasă sau întunecată? Explicaţi.

11. De ce pelicula din figura 43-14 trebuie să fie „subţire" pentru a putea vedea figura de interferenţă de tipul descris?

12. De ce lentilele acoperite cu pelicule (vezi exemplul 5) par roșii în lumina reflectată?

13. O persoană își umezește ochelarii pentru a-i curăța. Apa evaporîndu-se, observă că pentru scurt timp lentilele devin nereflectante. Explicați.

14. O lentilă este acoperită cu un strat subțire de substanță pentru reducerea reflexiei, ca în exemplul 5. Ce se întîmplă cu energia care fusese anterior reflectată? Este absorbită de înveliș?

15. Mici variații ale unghiului de incidență nu schimbă mult condițiile de interferență pentru pelicule „subțiri" dar le schimbă pentru pelicule „groase". De ce?

16. Sînt cunoscute caracteristicile direcționale ale antenei de radar ca receptor de radiație. Ce se poate spune despre caracteristicile sale direcționale ca emițător?

17. O persoană care stă într-o cameră întunecată și privește pe o fereastră mică, poate vedea o altă persoană care stă afară în lumina soarelui. A doua persoană nu o poate vedea pe prima. Este acesta un eșec al principiului reversibilității optice? Se presupune că nu există absorbție de lumină.

PROBLEME

1. Proiectați un sistem de două fante care să producă franje de interferență la 1° distanță între ele pe un ecran. Presupuneți lumină de sodiu ($\lambda = 5\,890$ Å).

2. Două surse punctuale emit unde coerente (figura 43-22). Să se arate că așa cum sînt date, curbele pentru care diferența de fază pentru razele r_1 și r_2 este constantă, sînt hiperbole. Extindeți analiza pentru trei dimensiuni. (Indicație: O diferență de fază constantă implică o distanță constantă între r_1 și r_2).

pretat conform teoriei relativității a lui mină.

18. De ce este necesar să se rotească interferometrul în experiența Michelson-Morley?

19. Cum este rezultatul negativ al experienței Michelson-Morley interpretat conform teoriei relativității lui Einstein?

20. Dacă este posibilă interferența dintre două unde de lumină de frecvențe diferite, cineva ar putea observa bătăi, așa după cum se obțin bătăi pentru undele sonore ce provin din două surse cu frecvențe foarte puțin diferite. Să se discute cum se poate obține experimental acest fenomen.

21. În experiența lui Young cu două fante presupunem că ecranul A din figura 43-1 conține *două* fante, foarte înguste, paralele, în loc de una. (a) Să se arate că dacă spațiul dintre aceste fante este ales corespunzător franjele de interferență pot fi făcute să dispară. (b) În ce condiții fasciculele care provin din fantele S_1 și S_2 din ecranul B sînt coerente? Acestea nu produc franje de interferență. (c) Să se discute ce s-ar întîmpla cu franjele de interferență în cazul în care fanta din ecranul A ar fi treptat mărită.

3. Un sistem de două fante produce franje de interferență pentru lumina de sodiu ($\lambda = 5\,890$ Å) distanțate între ele cu 0,20°. Pentru ce lungime de undă distanța unghiulară va fi cu 10% mai mare?

4. Un sistem de două fante produce franje de interferență pentru lumina de sodiu ($\lambda = 5\,890$ Å) distanțate între ele cu 0,20°. Care va fi distanța unghiulară dacă întregul sistem este cufundat în apă?

5. Într-un sistem de două fante, una dintre ele este acoperită cu un

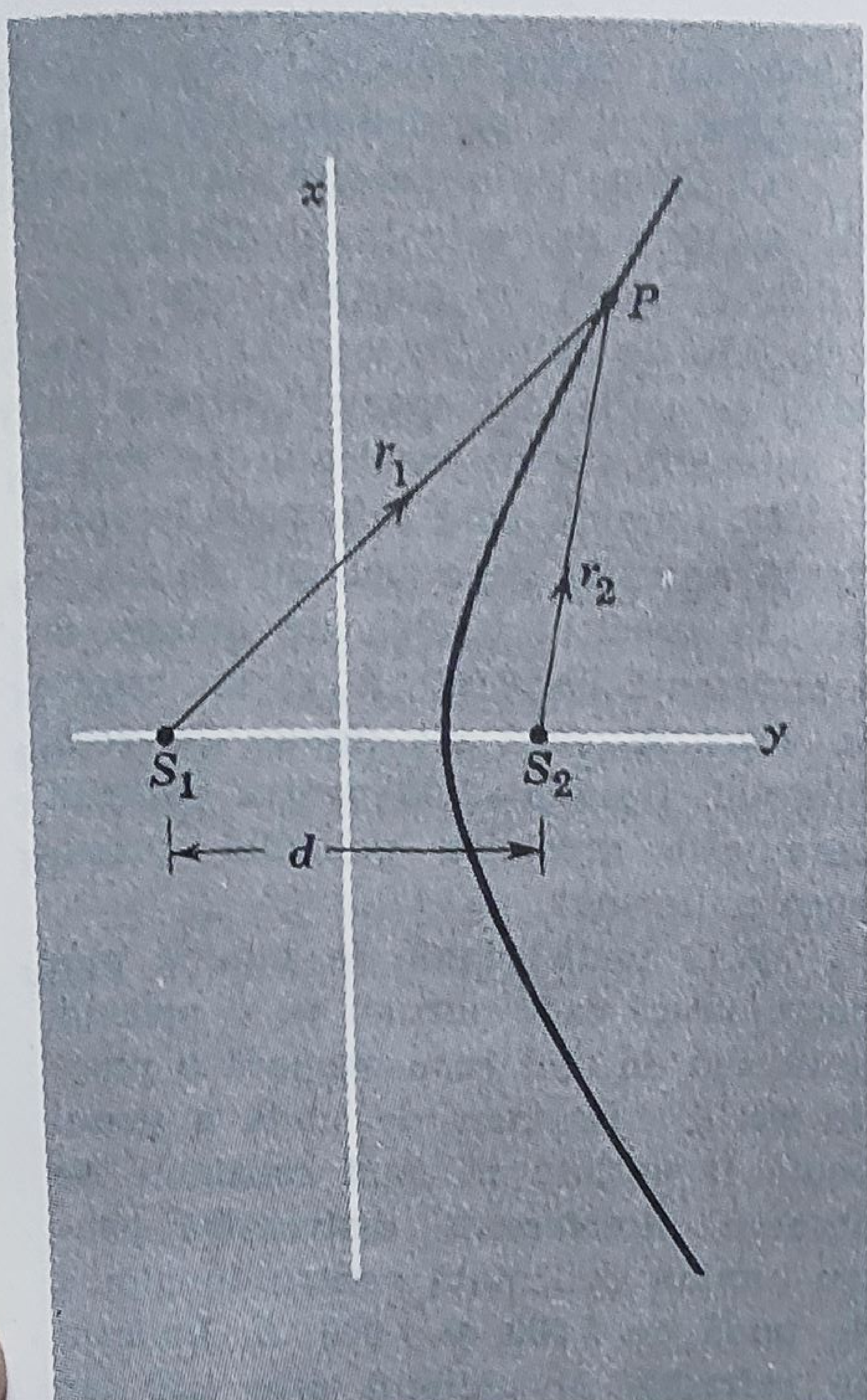


Figura 43-22.

strat de mică ($n=1{,}58$). În punctul central de pe ecran se găsește a șaptea franjă luminoasă. Dacă $\lambda=5\,500$ Å, care este grosimea stratului de mică?

6. Lumina de sodiu ($\lambda=5\,890$ Å) cade pe două fante ce se află la distanța $d=2{,}0$ mm. În figura 43-5 D este de 4 cm. Care este eroarea în procente făcută la localizarea celei de-a zecea franje dacă nu se presupune $D \gg d$?

7. Lumina de sodiu ($\lambda=5\,890$ Å) cade pe două fante ce se află la distanța $d=0{,}20$ mm. O lentilă subțire ($f=+1{,}0$ metru) este așezată lîngă o fantă (figura 43-6). Care este distanța liniară între franjele formate pe un ecran așezat în planul focal al lentilei?

8. În figura 42-23 S_1 și S_2 sînt surse punctuale de radiație, excitate de același oscilator. Sursele sînt coerente și în fază. Separate de distanța de 4,0 metri, ele emit cantități de putere egală sub forma unor unde electromagnetice cu lungimea de undă de 1,0 metru. (a) Să se găsească pozițiile primului (adică al celui mai apropiat), al celui de-al doilea și al celui de-al treilea maxim al semnalului primit, dacă detectorul este deplasat în lungul axei Ox. (b) Este intensitatea celui mai apropiat minim zero? Justificați răspunsul.

9. Una dintre fantele unui sistem de două fante este mai largă decît cealaltă, astfel încît amplitudinea luminii ce ajunge în partea centrală a ecranului provenind de la această fantă acționînd individual este de două ori mai mare decît cea care provine din cealaltă fantă acționînd individual. Să se găsească o expresie pentru I_0 în funcție de θ conform ecuației 43-11 b și c.

10. Să se arate că semidistanța $\Delta\theta$ între franjele de interferență produse de două fante (vezi săgeata din figura 43-9) este dată de

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{2d}$$

unde θ este destul de mic încît $\sin\theta \approx \theta$.

11. Să se calculeze suma cantităților următoare (a) vectorial și (b) analitic:

$$y_1=10 \sin \omega t$$

$$y_2=8 \sin (\omega t+30°)$$

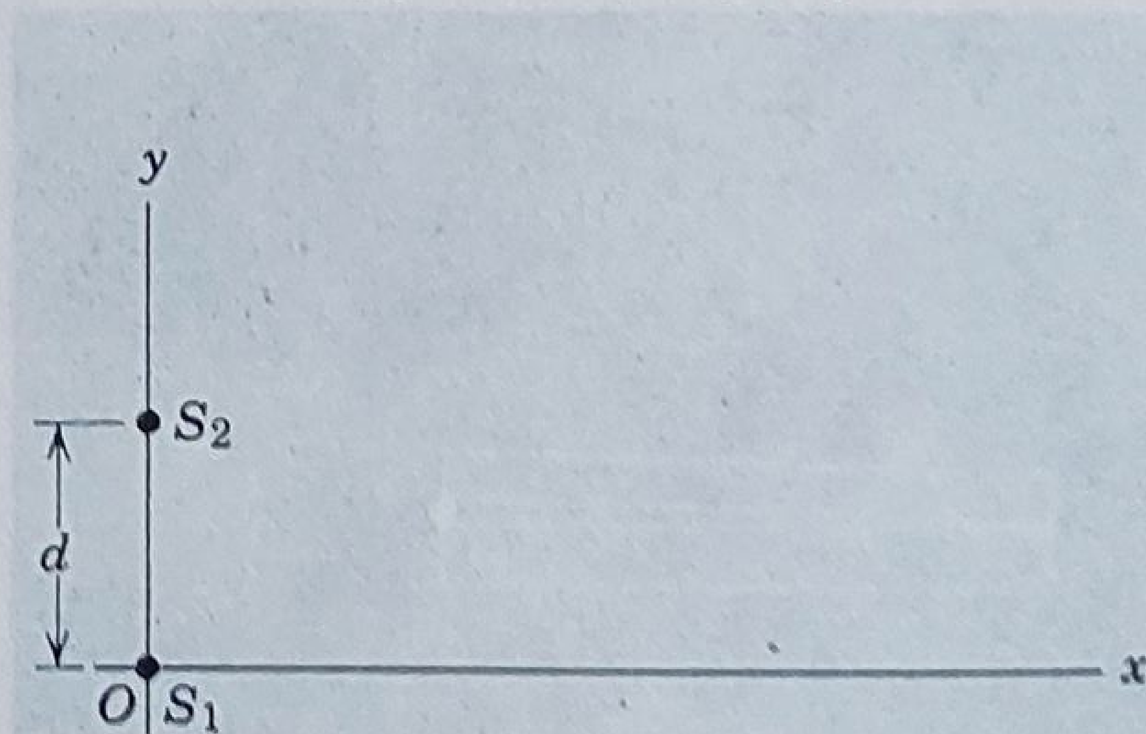


Figura 43-23.

12. Să se adune grafic următoarele cantități, folosind metoda vectorială:

$$y_1=10 \sin \omega t$$

$$y_2=15 \sin (\omega t+30°)$$

$$y_3=\ 5 \sin (\omega t-45°)$$

13. Banda de frecvență pentru un canal de televiziune este de 4×10^6 cicli/sec. Dacă ar fi posibil să se transmită semnale de televiziune în partea vizibilă a spectrului electromagnetic, utilizîndu-se maserul optic sau laserul, cîte astfel de canale ar putea fi alocate în spectrul vizibil? Presupunem că acest spectru se găsește între 4 000 și 7 000 Å.

14. Pentru formarea inelelor lui Newton se folosește o lentilă cu raza de curbură $R=5{,}0$ metri și diametrul de 2,0 cm. (a) Cîte inele se produc? (b) Cîte inele se vor vedea dacă sistemul este cufundat în apă ($n=1{,}33$)? Presupunem că $\lambda=5\,890$ Å.

15. Dacă un lichid este introdus între lentilă și placă, diametrul inelului al zecelea din inelele lui Newton variază de la 1,40 la 1,27 cm. Să se găsească indicele de refracție al lichidului.

16. O sursă extinsă de lumină ($\lambda=6\,800$ Å) luminează normal două plăci de sticlă de cîte 12 cm lungime care se ating la o margine și sînt separate la celălalt capăt de un fir de 0,048 mm (figura 43-24). Cîte franje luminoase apar pe distanța de 12 cm?

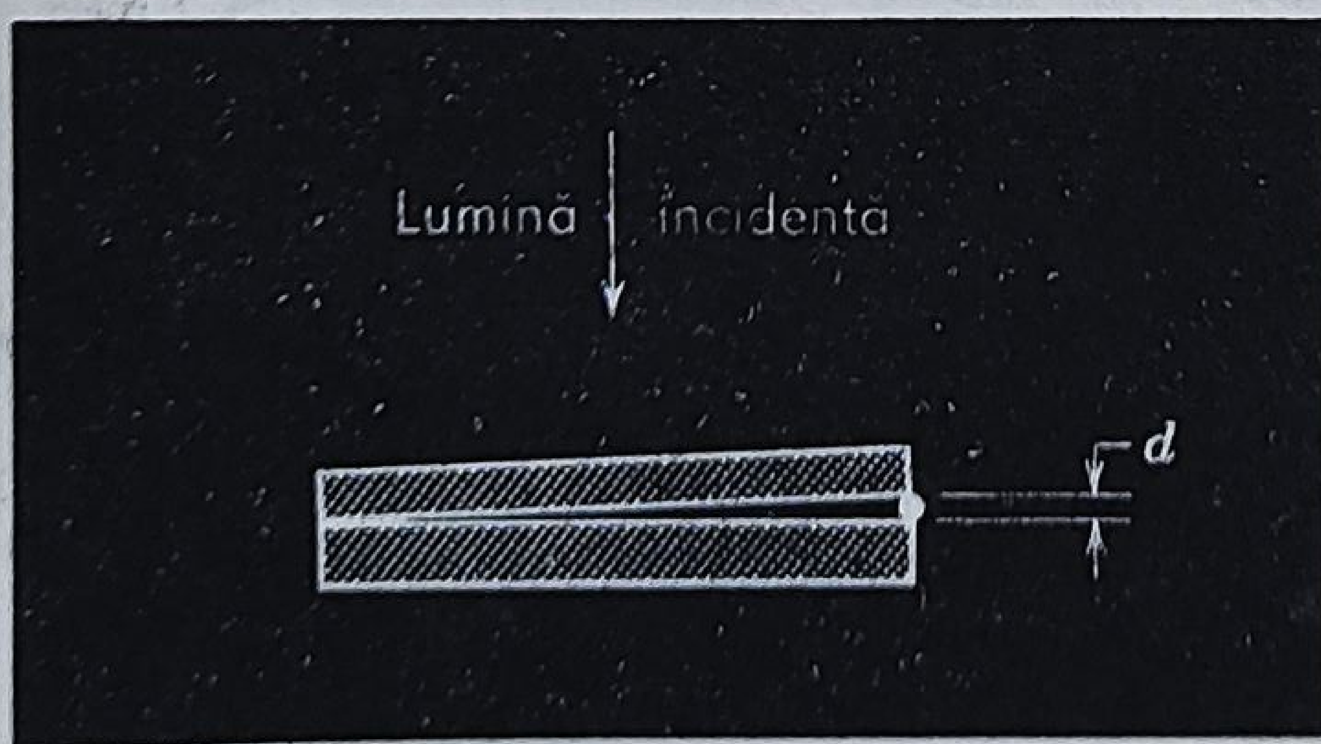


Figura 43-24.

17. O peliculă subțire cu grosime de 4×10^{-5} cm este iluminată cu lumină normală pe suprafața sa. Indicele său de refracție este 1,5. Ce lungimi de undă din spectrul vizibil vor fi intensificate în fasciculul reflectat?

18. Lumina albă reflectată la incidență normală de o peliculă de săpun are, în spectrul vizibil, un maxim de interferență la 6 000 Å și un minim la 4 500 Å, fără alt minim în acest interval. Dacă $n=1{,}33$ pentru peliculă, care este grosimea peliculei, presupusă uniformă?

19. O undă plană de lumină monocromatică cade normal pe o peliculă uniformă de ulei care acoperă o placă de sticlă. Lungimea de undă a sursei poate fi variată în mod continuu. Se observă interferența distructivă pentru lumina reflectată pentru lungimile de undă de 5 000 și 7 000 Å. Indicele de refracție al uleiului este 1,30 iar cel al sticlei este 1,50. Să se găsească grosimea peliculei de ulei.

20. În exemplul 5 se presupune că nu există reflexie pentru lungimea de undă de 5 500 Å, la incidență normală. Să se calculeze factorul cu care se diminuează reflexia prin acoperire la 4 500 și la 6 500Å.

21. O undă plană monocromatică în aer cade la incidență normală pe o peliculă subțire de ulei ce acoperă o placă de sticlă. Lungimea de undă a sursei poate fi variată continuu. Pentru lungimile de undă de 5 000 și 7 000 Å și numai pentru acestea în intervalul ales, se observă interferență distructivă. Indicele de refracție al sticlei este 1,50. Să se arate că indicele de refracție al uleiului trebuie să fie mai mic decît 1,50.

22. Lumina albă reflectată la incidență perpendiculară de un balon de săpun are, în spectrul vizibil, un maxim unic de interferență (la $\lambda=6\,000$ Å)

şi un mic minim în partea violet a spectrului. Dacă $n=1,33$, să se calculeze grosimea peliculei de săpun.

23. Dacă oglinda M_2 din interferometrul Michelson este deplasată cu 0,233 mm se pot număra 792 franje. Care este lungimea de undă a luminii?

24. O peliculă subţire cu $n=1,40$ pentru lumina cu lungimea de undă de 5 890 Å este aşezată pe unul din braţele interferometrului lui Michelson. Dacă se observă o deplasare de 7,0 franje, care este grosimea peliculei?

25. (a) Care este lungimea de undă a radiaţiei portocaliu-roşu a kriptonului-86 în angstromi? Se ia 1 Å$=10^{-10}$ metri. b) Are această întrebare sens, dacă se consideră că metrul este definit în unităţi de lungime de undă? Explicaţi.

26. Un interferometru Michelson este folosit cu o sursă luminoasă formată de un tub de descărcare cu sodiu. Radiaţia galbenă a sodiului este constituită din două lungimi de undă, 5 890 şi 5 896 Å. Se observă că pe măsură ce oglinda M_2 este deplasată (figura 43-20), figura de interferenţă apare şi dispare periodic. (a) Să se explice acest efect. (b) Să se calculeze variaţia de drum între două apariţii succesive ale figurii de interferenţă.

Capitolul 44

Difracţia

44-1 Introducere

Difracţia, aşa cum se arată în figura 42-3, este curbarea luminii lîngă un obstacol cum este de exemplu marginea unei fante. Difracţia luminii se poate observa privind printre două detege la o sursă îndepărtată de lumină, ca de exemplu o firmă de neon sau privind pe stradă printr-o umbrelă de pînză. Efectele obişnuite de difracţie sînt mici şi nu sînt luate în consideraţie. De asemenea, multe surse de lumină au o suprafaţă întinsă astfel încît figura de difracţie produsă de un punct al sursei se suprapune peste cele produse de alte puncte ale sursei. Se suprapun de asemenea şi efectele produse de diferite lungimi de undă, astfel că efectul total nu este relevant.

Difracţia a fost descoperită de Francesco Maria Grimaldi (1618—1663), iar fenomenul era cunoscut de Huygens (1629—1695) şi de Newton

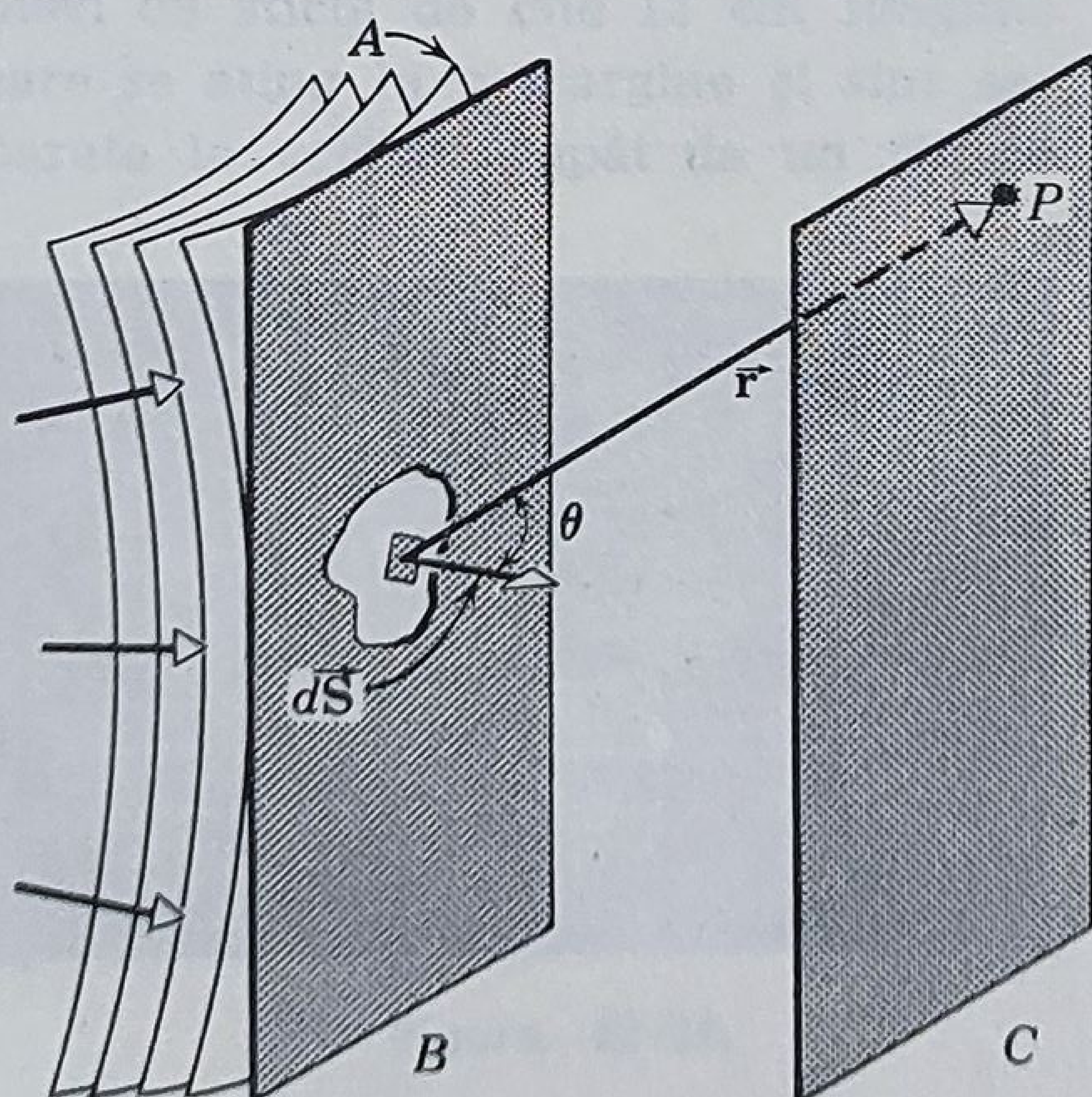


Figura 44-1. Lumina este difractată pe apertura din ecranul B şi luminează ecranul C. Intensitatea din P poate fi găsită împărţind frontul de undă din B în radiatori elementari dS şi combinînd efectele lor în P.

(1642—1727). Newton nu a văzut în el însă nici o justificare pentru o teorie ondulatoare a luminii. Huygens, cu toate că era partizanul teoriei ondulatorii, nu era și cel al difracției! El a imaginat undele secundare ca fiind efective doar în punctul de tangență al învelitoarei lor comune, negînd astfel posibilitatea difracției. Cităm din cuvintele sale:

Și astfel vedem motivele pentru care lumina... este produsă numai în linii paralele astfel încît ea nu luminează nici un obiect decît dacă se află în drumul dintre sursă la obiect pe o astfel de linie.

Pentru a explica difracția, Fresnel (1788—1827) a aplicat principiul lui Huygens (care este cunoscut în Europa sub numele de principiul Huygens—Fresnel). În acele timpuri undele de lumină erau considerate unde mecanice în atotcuprinzătorul eter. Am văzut (secțiunea 39-5) că Maxwell (1831—1879) a arătat că undele de lumină nu sînt mecanice în natură ci electromagnetice. Einstein (1879—1955) a întregit punctul nostru modern de vedere asupra undelor de lumină eliminînd necesitatea existenței eterului.

Figura 44.1 reprezintă o situație de difracție. Suprafața A este un front de undă care cade pe B, care este un ecran opac cu un orificiu de formă oarecare; C este un ecran de difuzie care primește lumina ce trece prin orificiu. Intensitatea luminii în C poate fi calculată împărțind frontul de undă în arii elementare dS, fiecare devenind a sursă de unde secundare Huygens. Intensitatea luminii dintr-un punct oarecare P se află compunînd vibrațiile perceptibile (adică vectorii $\vec{E}$) ai undelor care provin din radiatorii elementului și ating punctul P.

Perturbația în P diferă în amplitudine și în fază deoarece (*a*) radiatorii elementari sînt la distanțe diferite de P, (*b*) lumina părăsește radiatorii sub unghiuri diferite cu normala la frontul de undă (vezi pag. 385) și (*c*) unii radiatori sînt ecranați de B; alții nu. Calculele de difracție — simple în principiu — pot deveni complicate în practică. Calculul trebuie repetat pentru fiecare punct de pe ecranul C pentru care vrem să aflăm intensitatea luminii. Acest mod de calcul l-am folosit și pentru calculul intensității pentru sistemul de două fante din secțiunea 43-3. Acolo calculul era simplu deoarece am presupus doar doi radiatori elementari, cele două fante înguste.

În figura 44-2 *a* este reprezentat un caz general de *difracție Fresnel*, în care o sursă de lumină și/sau un ecran pe care se formează o figură de difracție, aflat la o distanță finită față de orificiul difractant; fronturile de undă care cad pe orificiul difractant și cele care îl părăsesc pentru a lumina un punct oarecare P pe ecranul difuzant nu sînt în acest caz plane; razele corespunzătoare nu sînt paralele.

Problema se simplifică dacă sursa S și ecranul C sînt distanțate față de orificiul difractant, ca în figura 44-2 *b*. Acest caz limită se numește *difracția Fraunhofer*. Fronturile de undă care sosesc la orificiul difractant de la o sursă îndepărtată S sînt plane, iar razele asociate acestor fronturi sint paralele. Condițiile Fraunhofer se pot îndeplini în laborator utilizînd două lentile convergente, ca în figura 44-2 c. Prima dintre acestea transformă unda divergentă din sursă într-o undă plană. A doua lentilă determină undele ce părăsesc orificiul difractant să conveargă în punctul P, Toate razele care luminează P vor părăsi orificiul paralel cu linia

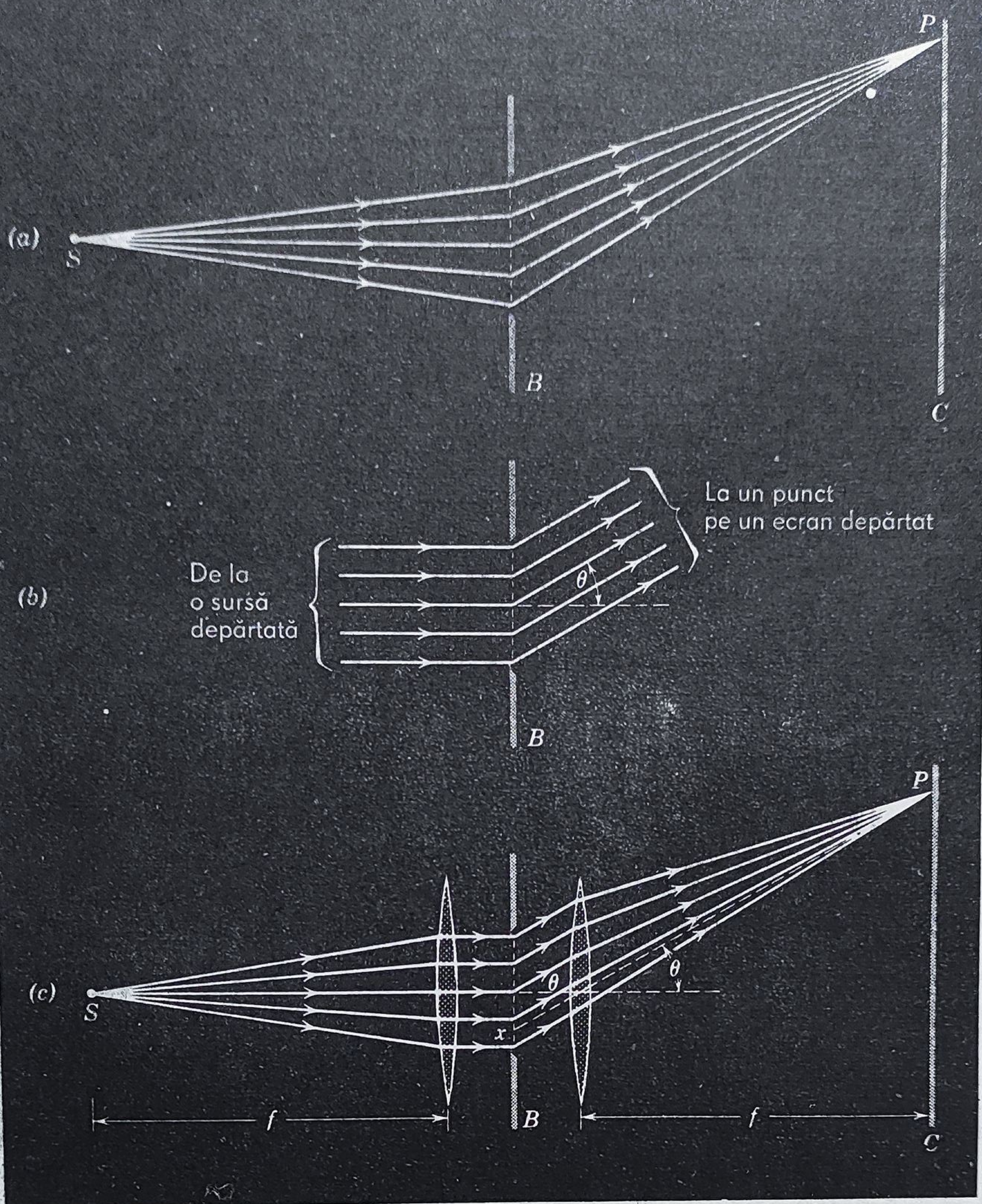


Figura 44-2. (*a*) Difracție Fresnel. (*b*) Sursa *S* și ecranul *C* sînt deplasate la mare distanță rezultînd difracția Fraunhofer. (*c*) Condițiile de difracție Fraunhofer produse de lentile lăsînd sursa *S* și ecranul *C* în pozițiile originale.

întreruptă Px trasată din P prin centrul acestei a două lentile. Să presupunem îndeplinite condițiile Fraunhofer în cazul experienței lui Young din paragraful 43-1 (vezi figura 43-5).

Cu toate că difracția Fraunhofer este un caz limită al difracției Fresnel, este un caz important și poate fi ușor mînuit din punct de vedere matematic. În această carte ne vom ocupa numai de difracția Fraunhofer.

44-2 O singură fantă

Figura 44-3 reprezintă o undă plană ce cade sub incidența normală pe fantă lungă de lărgime a. Să ne concentrăm atenția asupra punctului central P_0 al ecranului C. Razele care ies din fanta spre P_0 cu toate aceleași lungimi ale drumurilor optice, așa cum am văzut în secțiunea 42-5. Dacă ele sînt în fază în planul fantei, vor rămîne în fază și în P_0, iar punctul central din figura de difracție ce apare pe ecranul C este un maxim de intensitate.

Să considerăm acum alt punct pe ecran. Razele de lumină care ajung în P_1 (figura 44-4) pleacă din fantă sub un unghi θ. Raza r_1 are originea vor fi în fază și nu vor produce nici un efect în P_1*. În realitate, fiecare distanța bb' să fie egală cu o jumătate de lungime de undă, r_1 și r_2 nu vor fi în fază și nu vor produce nici un efect în P_1. În realitate, fiecare rază ce provine din partea superioară a fantei va fi anulată de o rază din partea inferioară aflată într-un punct cu $a/2$ sub prima rază. Punctul

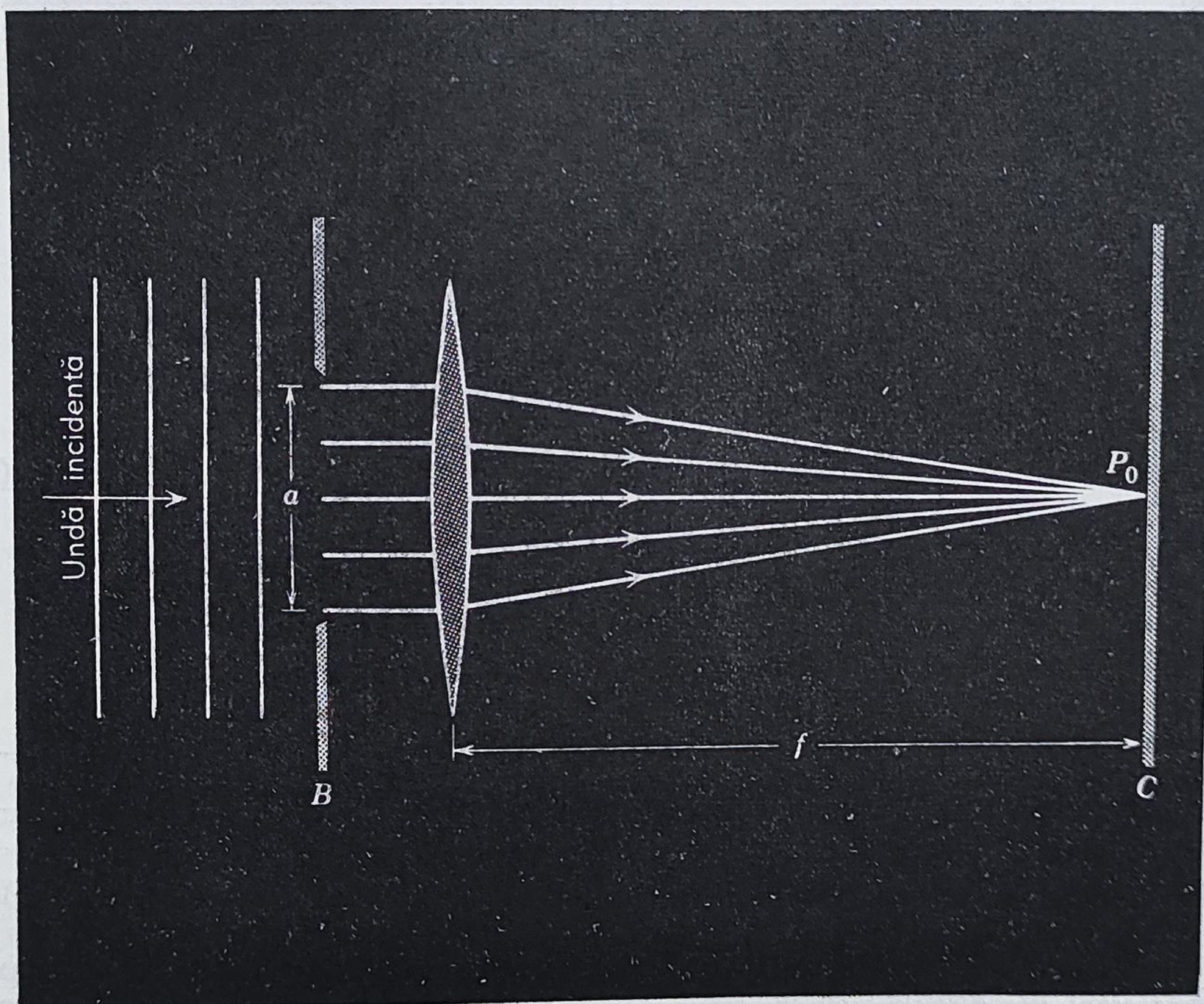


Figura 44-3. Condițiile la maximum central al figurii de difracție. Fanta se extinde pe o anumită distanță deasupra și dedesubtul figurii, această distanță fiind mult mai mare decît lărgimea a a fantei

---

* Oricare relație de fază ce există între r_1 și r_2 în planul reprezentat prin linia întreruptă din figura 44-4 care trece prin b', există de asemenea în P_1, rămînînd neafectată de lentilă. (vezi secțiunea 42-5). (n.a.).

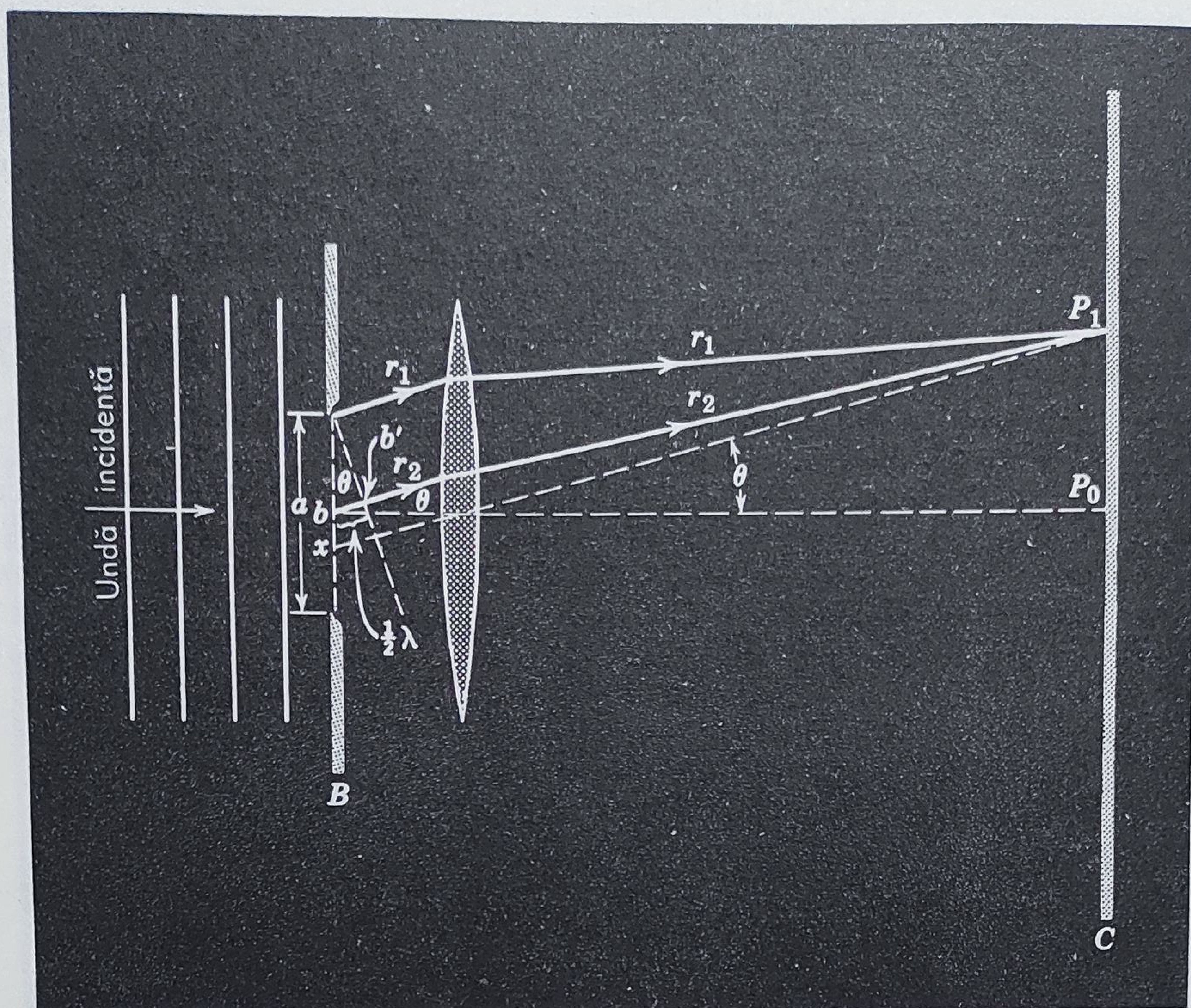


Figura 44-4. Condițiile pentru primul minim al figurii de difracție.

P_1, primul minim al figurii de difracție va avea intensitatea zero (de comparat cu figura 42-3).

Condiția reprezentată în figura 44-4 este

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

sau

$$a \sin \theta = \lambda \tag{44-1}$$

Așa cum am stabilit mai devreme (vezi figura 42-1) maximul central devine mai larg cu cît fanta este mai îngustă. Dacă lărgimea fantei este egală cu o lungime de undă ($a = \lambda$), primul apare la $\theta = 90°$, ceea ce înseamnă că maximul central ocupă în întregime emisfera următoare. În secțiunea 43-1 am presupus o condiție asemănătoare în discuția asupra experienței lui Young.

În figura 44-5 fanta este împărțită în patru zone egale, din fiecare parte superioară a zonelor plecînd cîte o rază. Fie θ astfel ales încît distanța bb' să fie egală cu o jumătate de lungime de undă. Razele r_1 și r_2 se vor anula în punctul P_2. Razele r_3 și r_4 sînt de asemenea defazate cu o jumătate de lungime de undă și se vor anula. Să considerăm acum cele patru raze ce pornesc de la o anumită distanță sub razele anterioare. Aceste raze se vor anula de asemenea, două cîte două. Putem pro-

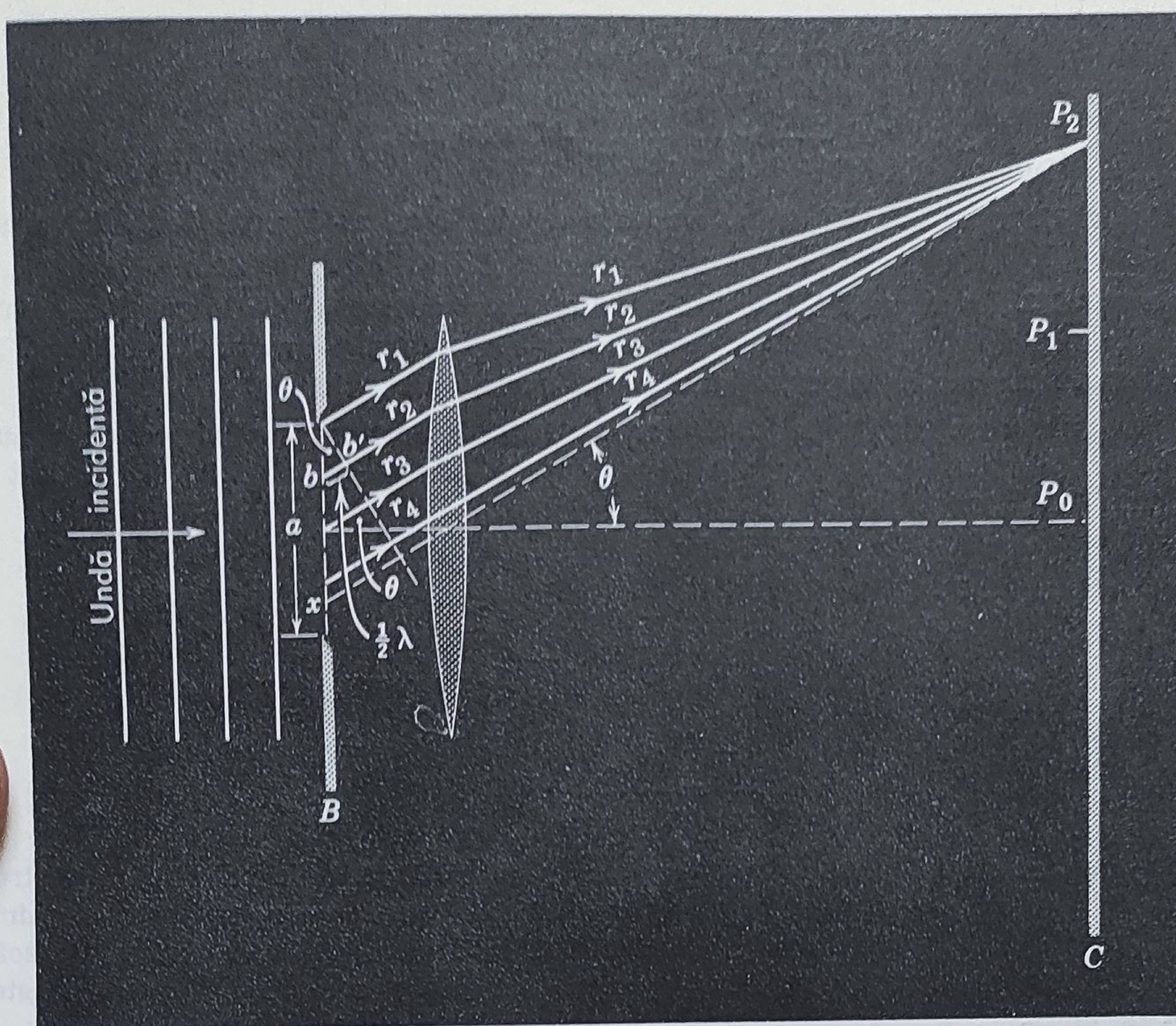


Figura 44-5. Condiţiile pentru al doilea minim al figurii de difracţie.

ceda la fel în continuare, ajungînd la concluzia că lumina nu ajunge în P_2; am obţinut astfel al doilea punct de intensitate zero.

Condiţia descrisă (figura 44-5) cere ca

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

sau

$$a \sin \theta = 2 \lambda$$

Prin extensie, formula generală pentru minimele de difracţie de pe ecranul C, este

$$a \sin \theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \text{ (minime)} \qquad (44\text{-}2)$$

La aproximativ jumătate de distanţă între o pereche de minime adiacente se află un maxim. Cititorul trebuie să ia în consideraţie simplificarea care a rezultat în urma examinării condiţiilor Fraunhofer în loc de condiţiile Fresnel.

Exemplul 1. O fantă de lărgime a este iluminată cu lumină albă. Pentru ca valoare a lui a primul minim pentru lumina roşie ($\lambda = 6\,500$ Å) se va afla la $\theta = 30°$?

Pentru primul minim, în ecuația 44-2 $m=1$. Atunci

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{(1)\ (6500 Å)}{\sin 30°} = 13\,000\ Å$$

De notat că lărgimea fantei trebuie să fie de două ori mai mare decît lungimea de undă.

Exemplul 2. În exemplul 1, care este lungimea de undă λ' a luminii al cărei prim maxim de difracție (fără a ține seama de maximul central) se găsește la $\theta = 30°$, coincizînd astfel cu primul minim pentru lumina roșie?

Acest maxim se găsește la jumătatea distanței între primul și al doilea minim, El poate fi găsit fără a face o eroare prea mare punînd $m=1{,}5$ în ecuația 44-2

$$a \sin\theta \cong 1{,}5\ \lambda'$$

Dar, din exemplul 1

$$a \sin\theta = \lambda$$

Împărțind, se obține

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1{,}5} = \frac{6\,500 Å}{1{,}5} = 4\,300\ Å$$

Lumina de această lungime de undă are culoarea violet. Al doilea maxim pentru lumina de lungime de undă de 4 300 Å va coincide *întotdeauna* cu primul minim pentru lumina de lungime de undă de 6 500 Å, indiferent de lărgimea fantei. Dacă fanta este relativ îngustă, unghiul θ pentru care apar această suprapunere este destul de mare.

44-3 O singură fantă — Privire calitativă

Figura 44-6 reprezintă o fantă de lărgime a împărțită în N benzi paralele de lărgime Δx. Fiecare bandă acționează ca un emițător de unde Huygens și produce o vibrație perceptibilă caracteristică în punctul P, a cărei poziție pe ecran pentru un aranjament particular al aparatului, poate fi descrisă de unghiul θ.

Dacă benzile sînt suficient de înguste — să presupunem — pentru toate punctele de pe o bandă lumina parcurge același drum optic pînă în P, deci va fi în fază în momentul în care ajunge în P. Amplitudinea ΔE_0 ale vibrației în P provenind din benzi diferite sînt egale dacă θ (figura 44-6) nu este prea mare.

Limităm discuția la punctele care se găsesc pe, sau infinit de aproape de planul din figura 44-6. Se poate arăta că acest procedeu este valabil pentru o fantă a cărei lungime este mult mai mare decît lărgimea sa a. Această presupunere a fost făcută în mod tacit atît mai devreme în acest capitol, cît și în capitolul 43; vezi figurile 43-5 și 44-3, de exemplu.

Vibrațiile pentru benzi adiacente au o diferență de fază constantă între ele în P, fiind dată de

$$\frac{\text{diferența de fază}}{2\pi} = \frac{\text{diferența de drum}}{\lambda}$$

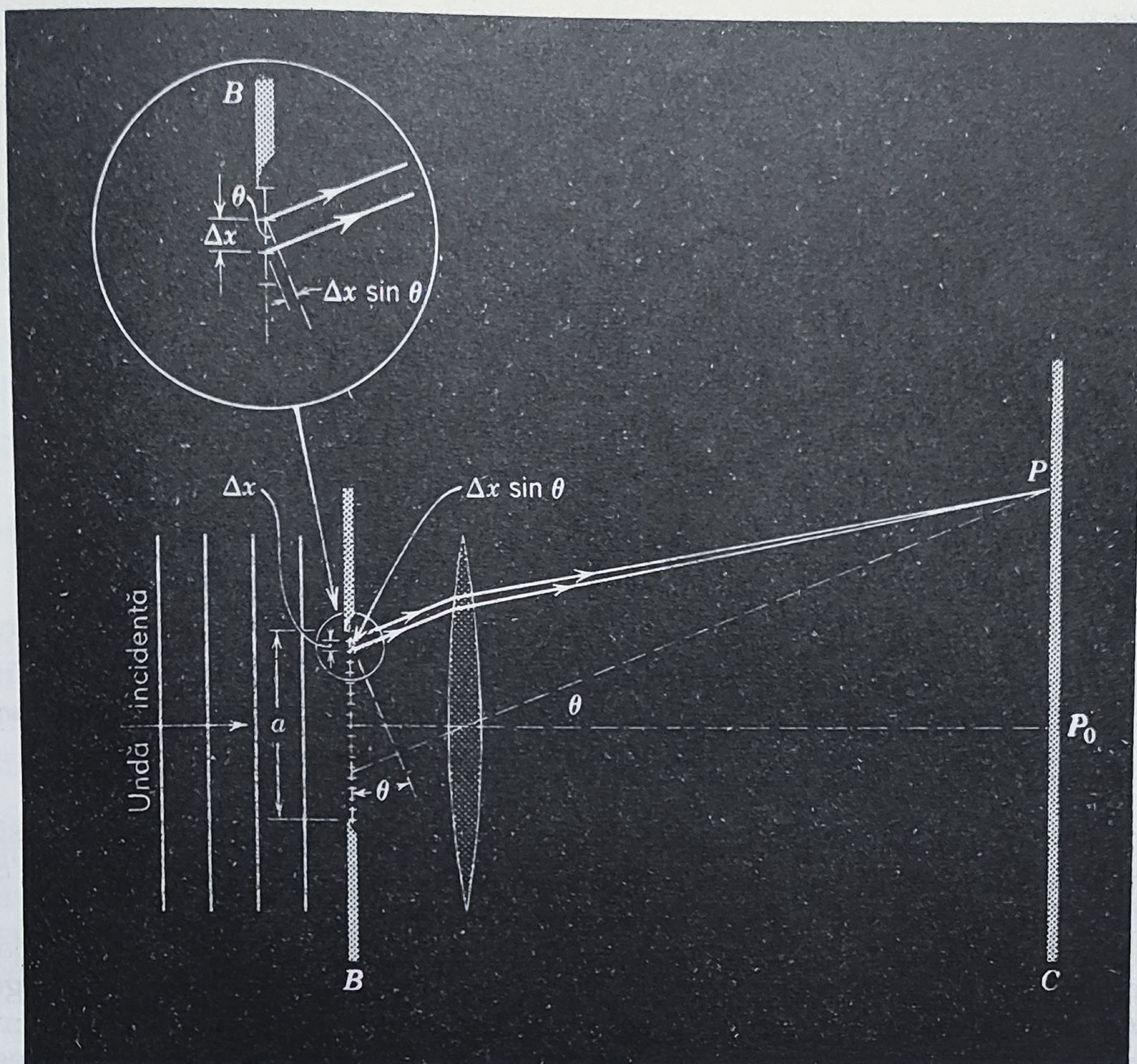


Figura 44-6. O fantă de lărgime *a* este împărțită în *N* benzi de lărgime Δx. Figura mărită ne arată mai clar condițiile pentru cea de a doua bandă. La limită, fanta este împărțită într-un număr infinit de benzi (adică $N \to \infty$) de lărgimea diferențială *dx*. Pentru claritate în această fotografie și în cea următoare luăm N=18.

sau

$$\Delta\Phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(\Delta x \sin \theta) \qquad (44\text{-}3)$$

unde $\Delta x \sin \theta$ este, așa cum se vede pe figură, diferența de drum pentru razele ce au originea în vîrfurile benzilor adiacente. Astfel, în *P*, se vor compune *N* vectori cu aceeași amplitudine ΔE_0, cu aceeași frecvență și aceeași diferență de fază $\Delta\Phi$ între vectorii alăturați, pentru a produce o vibrație rezultantă. Ne întrebăm atunci, pentru diferite valori ale lui $\Delta\Phi$ (adică, pentru diferite puncte *P* pe ecran, ce corespund la valori diferite pentru θ (vezi ecuația (44-3)), care este amplitudinea E_θ a vibrației rezultante? Vom găsi răspunsul reprezentînd vibrații individuale ΔE_0 ca fazori și calculînd amplitudinea fazorului rezultant, așa cum a fost descris în secțiunea 43-4.

În centrul figurii de difracție θ este egal cu zero, iar variația de fază între benzile adiacente (vezi ecuația 44-3) este de asemenea zero. Așa

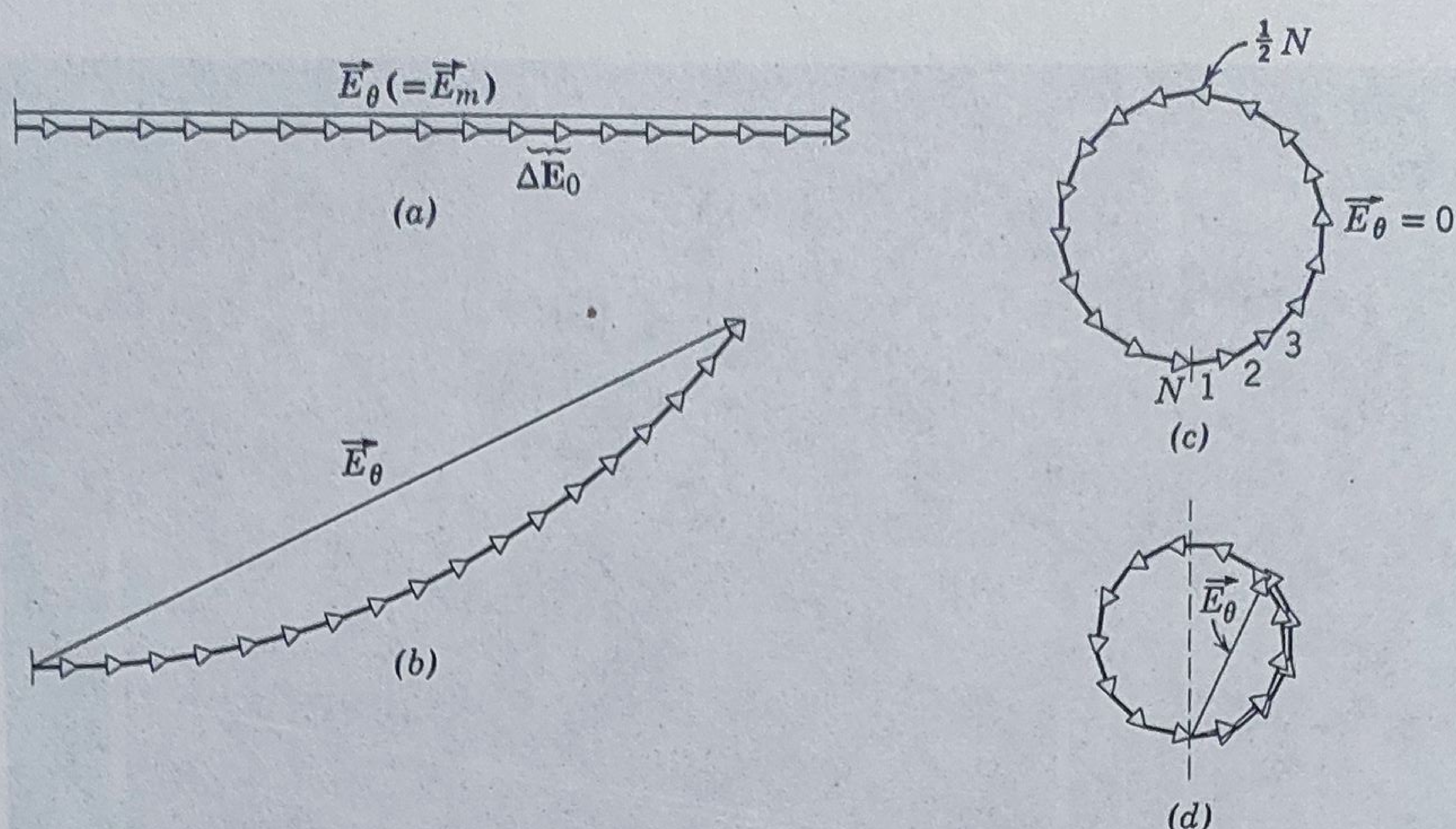


Figura **44-7.** Condițiile pentru (*a*) maximal central, (*b*) o direcție puțin diferită față de maximul central, (c) primul minim și (d) primul maxim de lîngă maximul central pentru difracția pe o fantă. Această situație corespunde valorii N=18 (figura 44-6.).

după cum se vede în figura 44-7 a, săgețile fazorilor în acest caz sînt puse cap la cap iar amplitudinea rezultantei au valoarea sa maximă E_m. Aceasta corespunde centrului maximului central.

Dacă ne deplasăm spre o valoare θ diferită de zero, ΔΦ ia o valoare nenulă bine determinată (vezi din nou ecuația 44-3) iar șirul de săgeți este acum cel din figura 44-7 b. Amplitudinea rezultantă E_θ este mai mică decît înainte. De notat că lungimea unui „arc“ de mici săgeți este aceeași pentru ambele figuri și mai mult este aceeași pentru toate figurile din această serie. Cînd θ crește mai departe se ajunge la situația (figura 44-7 c în care lanțul săgeților face o buclă de 360°, vîrful ultimei săgeți atingînd coada primei săgeți. Această situație corespunde la $E_\theta = 0$, adică, primului minim. Pentru această condiție raza de la marginea fantei (1 în figura 44-7 c) este defazată cu 180° față de raza din centrul fantei (1/2 *N* în figură 44-7 c). Aceste relații de fază concordă și cu figura 44-4 care reprezintă de asemenea primul minim.

Dacă θ crește mai departe, diferența de fază continuă să crească și lanțul de săgeți se încolăcește și mai mult cu un unghi mai mare de 360°, ca în figura 44-7 d, ce corespunde primului maxim după maximul central. Făcînd această comparație, să ne reamintim că săgețile marcate în figura 44-7 cu E_θ corespund *amplitudinilor* vibrației și nu *intensităților*. Amplitudinile trebuiesc indicate la pătrat pentru obținerea intensităților corespunzătoare (vezi ecuația 43-7).

44-4. O singură fantă — Studiu cantitativ

„Arcul“ micilor săgeți în figura 44-8 desemnează fazorii care dau în amplitudine și fază, unda perturbată care atinge punctul *P* arbitrar, de pe ecranul din figura 44-6, și corespunde unei valori particulare θ a

unghiului. Amplitudinea rezultantă în P este E_0. Dacă împărțim fanta din figura 44-6 în benzi infinitezimale de lărgimea dx arcul săgeților din figura 44-8 se apropie de un arc de cerc, a cărui rază R este dată în figură.

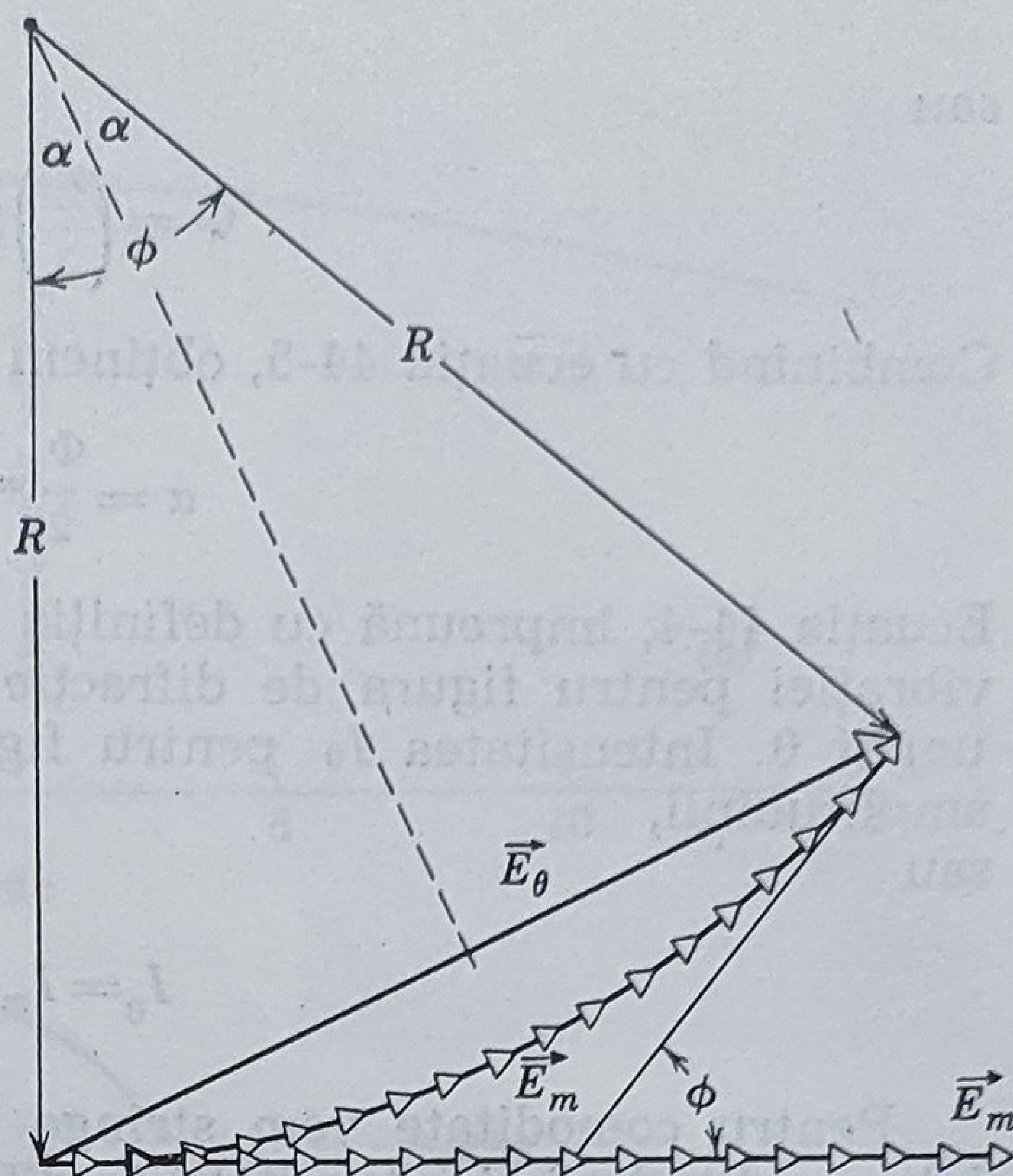


Figura 44-8. Construcție utilizată pentru evaluarea intensității în difracția pe o fantă. Situația corespunde aceleia din figura 44-7.

Lungimea arcului este E_m, amplitudinea în centrul figurii de difracție, pentru că în centrul figurii vibrațiile sînt toate în fază și acest „arc" devine o linie dreaptă ca în figura 44-7 a.

Unghiul Φ din partea inferioară a figurii 44-8 reprezintă diferența de fază dintre vectorii infinitezimali din extremitățile stîngă și dreaptă ale cercului E_m. Aceasta înseamnă că Φ este diferența de fază a razelor din partea de sus și de jos a fantei din figura 44-6. Din geometria figurii 44-8 se vede că Φ este și unghiul dintre cele două raze marcate cu R. Din această figură se poate scrie.

$$E_\theta = 2R \sin\frac{\Phi}{2}$$

Măsurat în radiani, Φ este, din figură,

$$\Phi = \frac{E_m}{R}$$

Combinînd, obținem

$$E_\theta = \frac{E_m}{\Phi/2} \sin\frac{\Phi}{2}$$

sau

$$E_\theta = E_m \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (44\text{-}4)$$

unde

$$\alpha = \frac{\Phi}{2} \qquad (44\text{-}5)$$

Din figura 44-6, reamintindu-ne că Φ este diferența de fază dintre razele din partea de sus și de jos a fantei și că diferența de drum dintre aceste raze este $a \sin\theta$, avem

$$\frac{\text{diferența de fază}}{2\pi} = \frac{\text{diferența de drum}}{\lambda}$$

sau

$$\Phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(a \sin \theta)$$

Combinînd cu ecuaţia 44-5, obţinem

$$\alpha = \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \qquad (44\text{-}6)$$

Ecuaţia 44-4, împreună cu definiţia din ecuaţia 44-6, ne dă amplitudinea vibraţiei pentru figura de difracţie cu o singură fantă şi pentru orice unghi θ. Intensitatea I_0 pentru figură este proporţională cu pătratul amplitudinii,
sau

$$I_\theta = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad (44\text{-}7)$$

Pentru comoditate vom strînge împreună, şi vom renumăra, formulele amplitudinii şi intensităţii în difracţia pe o singură fantă.

[Ecuaţia 44-4] $E_0 = E_m \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (44-8 *a*)

[Ecuaţia 44-7] $I_0 = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$ (44-8 *b*)

[Ecuaţia 44-6] $\alpha = \left(\frac{1}{2}\Phi\right) = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$ (44-8 *c*)

} difracţia pe o singură fantă

În figura 44-9 este reprezentat grafic I pentru diferite valori ale lui a/λ. De notat că figura de difracţie devine mai îngustă pe măsură ce a/λ creşte; comparaţi această figură cu figura 42-1 şi 42-3.

În ecuaţia 44-8 *b* apar minime atunci cînd

$$\alpha = m\pi \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \qquad (44\text{-}9)$$

Combinînd cu ecuaţia 44-8 *c* sîntem conduşi la

$$a \sin \theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \qquad \text{minime}),$$

care e rezultatul obţinut şi în secţiunea precedentă (ecuaţia 44-2). Totuşi, în acea secţiune, am obţinut *numai* acest rezultat, neavînd nici o informaţie cantitativă asupra intensităţii figurii de difracţie în locurile în care nu este zero. Aici (ecuaţia 44-8) am obţinut informaţii complete despre intensitate.

Exemplul 3. *Intensităţile maximelor secundare de difracţie.* Calculaţi, aproximativ, intensităţile relative ale maximelor secundare în figura difracţiei Fraunhofer pe o singură fantă.

Maximele secundare se află aproximativ la jumătatea distanţelor dintre minime şi se obţin (compară cu ecuaţia 44-9) din

$$\alpha \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

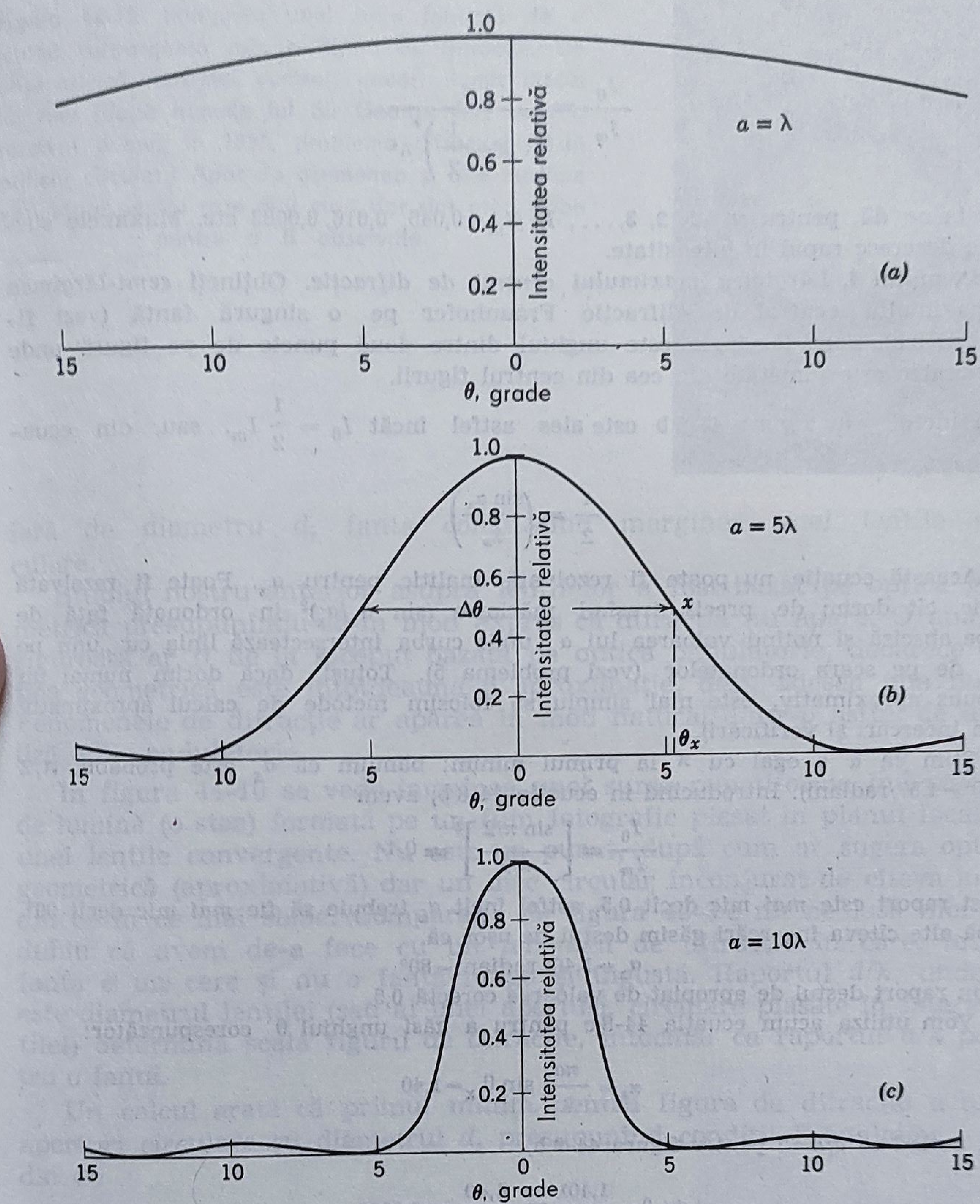


Figura 44-9. Intensitatea relativă în difracţia pe o fantă pentru trei valori ale raportului a/λ. Săgeata în (*b*) reprezintă semilărgimea $\Delta\theta$ maximului central.

Substituind în ecuaţia 44-8 b, avem

$$I_0 = I_m \left[\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\pi\right)}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi} \right]^2$$

care se reduce la

$$\frac{I_0}{I_m}=\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$$

Aceasta ne dă, pentru $m=1, 2, 3, \ldots$, $I_0/I_m=0,045$, $0,016$, $0,0083$ etc. Maximele succesive descresc rapid în intensitate.

Exemplul 4. *Lărgimea maximului central de difracţie.* Obţineţi *semi-lărgimea* $\Delta\theta$ maximului central de difracţie Fraunhofer pe o singură fantă (vezi figura 44-9 b). Semi-lărgimea este unghiul dintre două puncte de pe figură unde intensitatea este jumătate din cea din centrul figurii.

Punctul x în figura 44-9 b este ales astfel încît $I_\theta=\frac{1}{2}I_m$, sau, din ecuaţia 44-8 b,

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{\sin\alpha_x}{\alpha_x}\right)^2$$

Această ecuaţie nu poate fi rezolvată analitic pentru α_x. Poate fi rezolvată grafic, cît dorim de precis, trasînd mărimea $(\sin\alpha_x/\alpha_x)^2$ în ordonată faţă de α_x pe abscisă şi notînd valoarea lui α_x unde curba intersectează linia cu „unu pe doi" de pe scara ordonatelor (vezi problema 5). Totuşi, dacă dorim numai un răspuns aproximativ, este mai simplu să folosim metode de calcul aproximativ (prin încercări şi verificări).

Ştim că α e egal cu π la primul minim; bănuim că α_x este probabil, $\pi/2$ ($=90°=1.57$/radiani). Introducînd în ecuaţia 44-8 *b*, avem

$$\frac{I_\theta}{I_m}=\left[\frac{\sin\pi/2}{\pi/2}\right]^2=0,4$$

Acest raport este *mai mic* decît 0,5, astfel încît α_x trebuie să fie *mai mic* decît 90°. După alte cîteva încercări găsim destul de uşor că

$$\alpha_x=1,40 \text{ radiani}=80°$$

dă un raport destul de apropiat de valoarea corectă 0,5.

Vom utiliza acum ecuaţia 44-8 *c* pentru a găsi unghiul θ corespunzător:

$$\alpha_x=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_x=1,40$$

sau, notînd că $a/\lambda=5$ pentru figura 44-9 *b*,

$$\sin\theta=\frac{1,40\lambda}{\pi a}=\frac{1,40}{5\pi}=0,0892$$

Semi-lărgimea $\Delta\theta$ a maximului central (vezi figura 44-9 b) este dată de

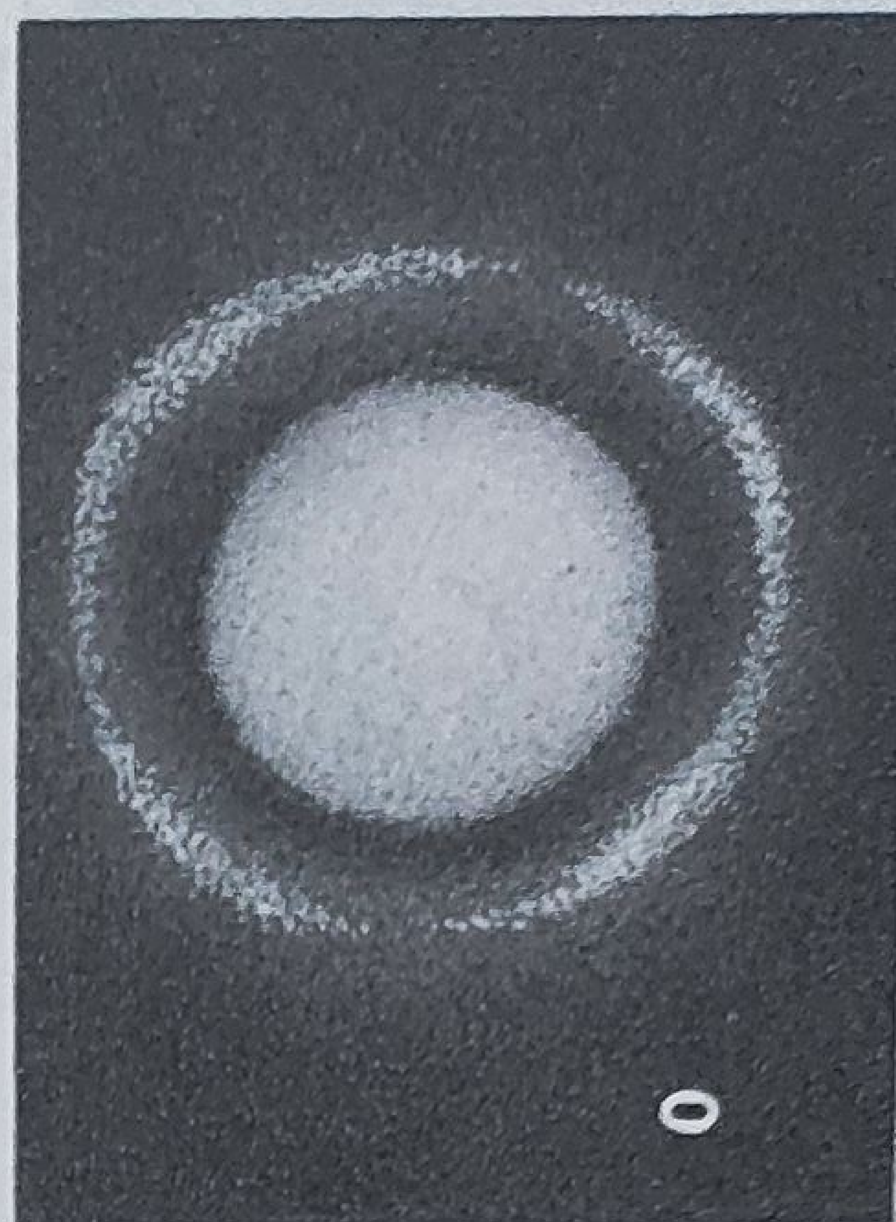
$$\Delta\theta=2\theta_x=2 \text{ arc sin } 0,0892=2\times5,1°=10,2°$$

care e în concordanţă cu figura.

44-5 Difracţia pe o fantă circulară

Difracţia apare atunci cînd un front de undă este parţial blocat de un obiect opac, ca de exemplu un disc metalic sau un ecran opac conţinînd o fantă (gaură). Vom considera aici difracţia pe o fantă circu-

Figura 44-10. Imaginea unei stele formată de o lentilă convergentă este o figură de difracție. De observat că maximul central, uneori numit discul lui Airy (după numele lui Sir George Airy care a rezolvat primul, în 1835, problema difracției pe un orificiu circular.) Apar de asemenea și alte maxime secundare pentru raze mai mari dar sînt prea slabe pentru a fi observate.



lară de diametru d, fanta constituind marginea unei lentile circulare.

Studiul nostru anterior asupra lentilelor a fost bazat pe optica geometrică presupunîndu-se în mod expres că difracția nu apare. O analiză riguroasă ar fi de la început bazată pe optica ondulatorie, deoarece optica geometrică este întotdeauna o aproximație, deși, adesea una bună. Fenomenele de difracție ar apărea în mod natural dintr-o astfel de analiză optic-ondulatorie.

În figura 44-10 se vede imaginea unei surse punctiforme îndepărtate de lumină (o stea) formată pe un film fotografic plasat în planul focal al unei lentile convergente. Nu este un punct, după cum ar sugera optica geometrică (aproximativă) dar un disc circular înconjurat de cîteva inele din ce în ce mai slabe. Comparația cu figura 42-3 c nu ne lasă nici un dubiu că avem de-a face cu un fenomen de difracție în care, totuși fanța e un cerc și nu o fantă lungă și îngustă. Raportul d/λ, unde d este diametrul lentilei (sau al unei aperturi, circulare plasate în fața lentilei) determină scala figurii de difracție, întocmai ca raportul a/λ pentru o fantă.

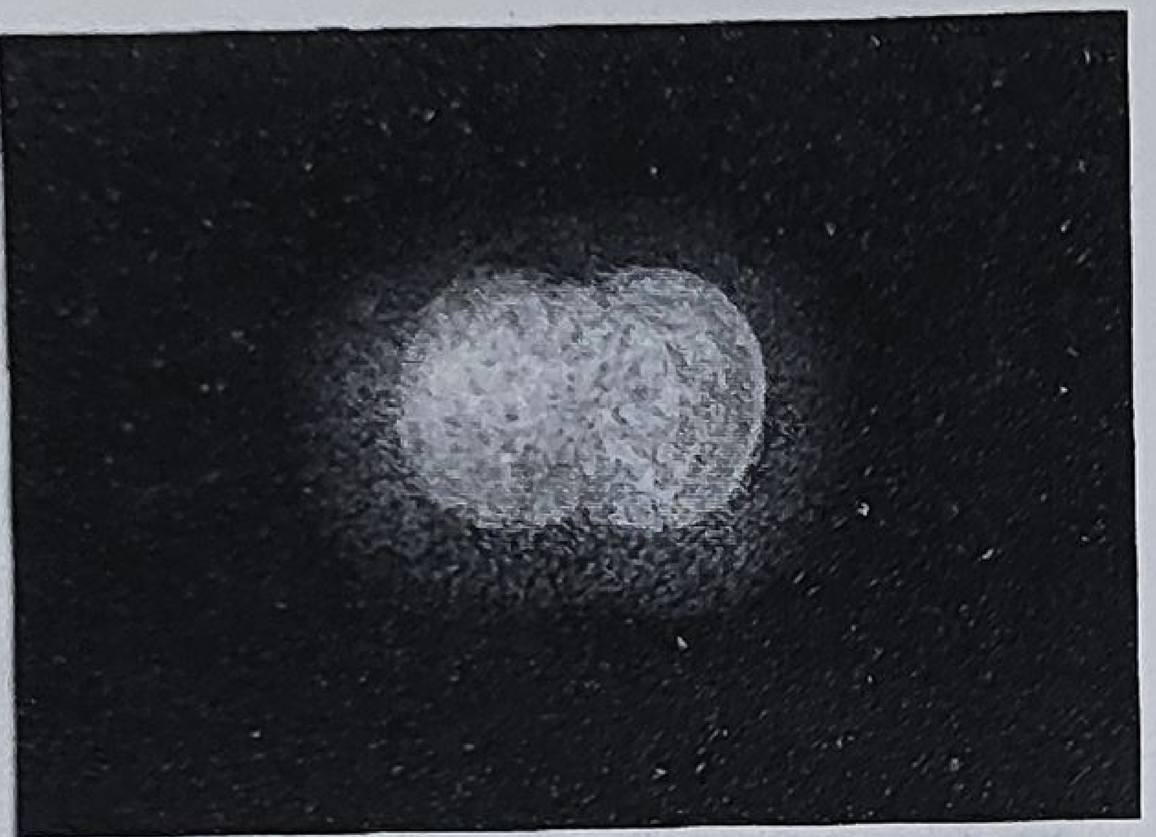
Un calcul arată că primul minim pentru figura de difracție a unei aperturi circulare cu diametrul d, presupunînd condiții Fraunhofer, este dat de

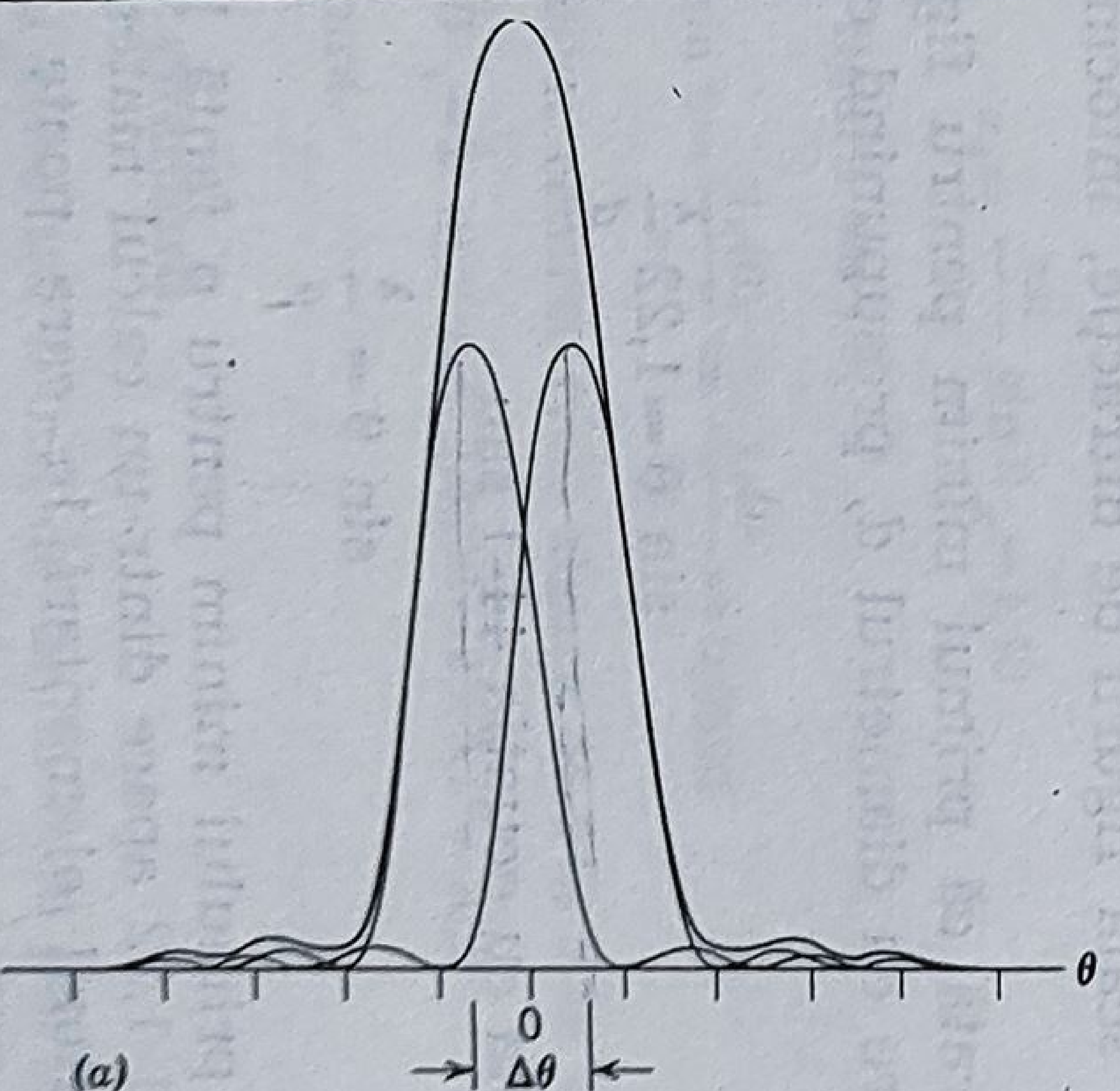
$$\sin\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} \qquad (44\text{-}10)$$

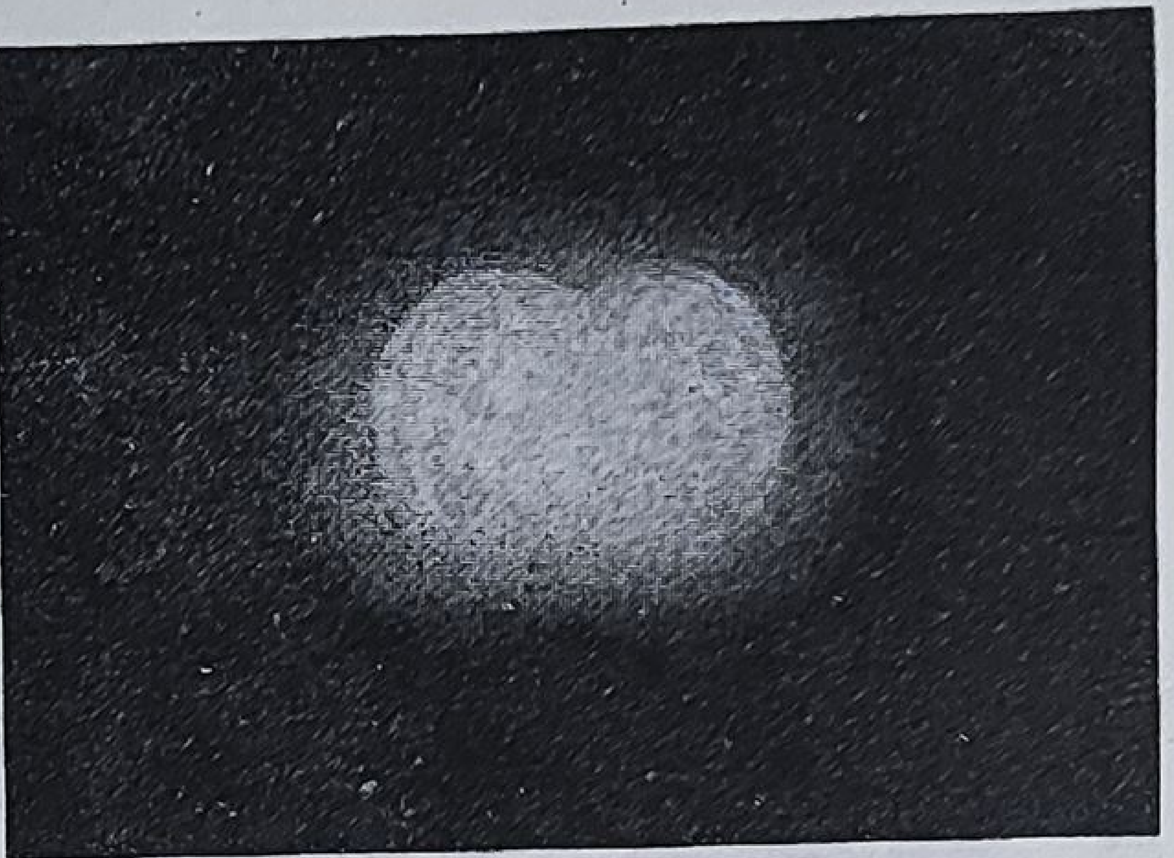
Comparați aceasta cu ecuația 44-1 sau

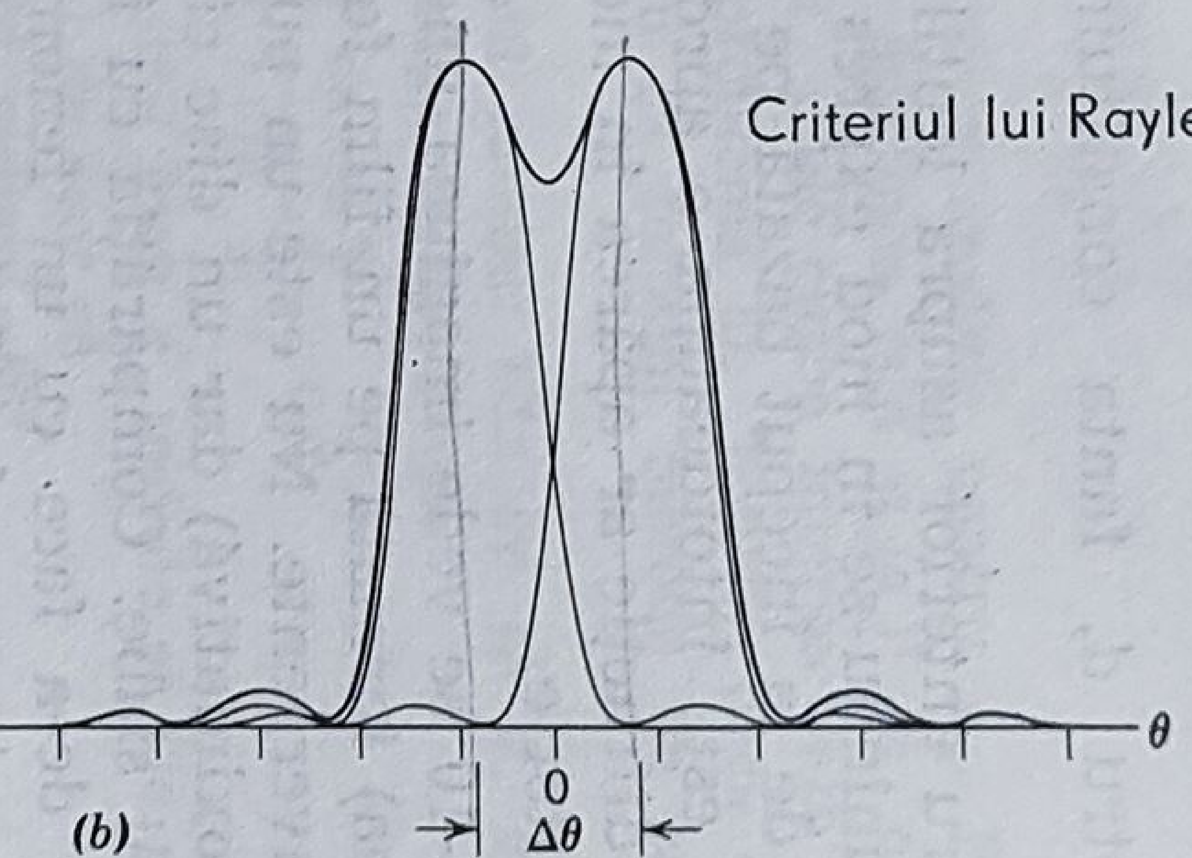
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

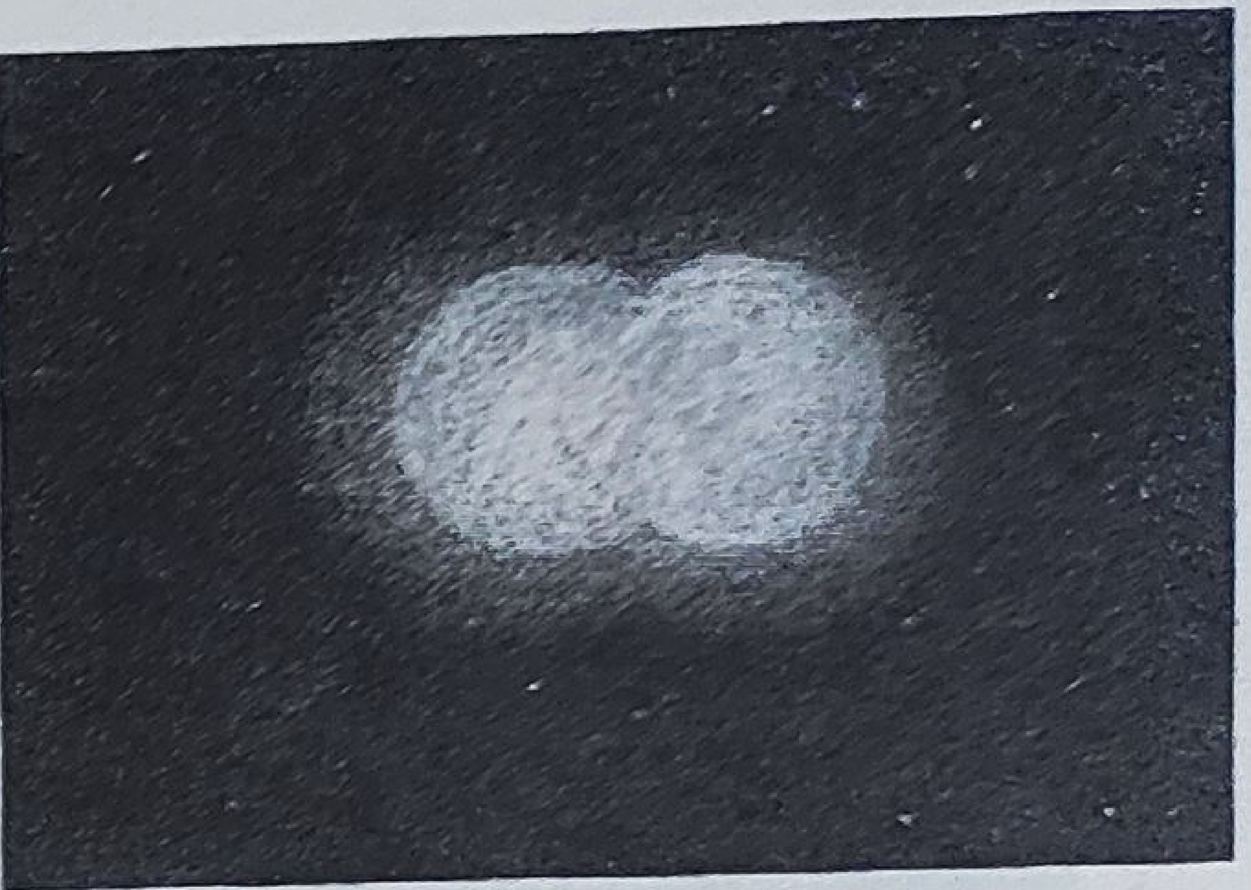
care dă poziția primului minim pentru o fantă lungă și îngustă de lărgime a. Factorul 1,22 apare dintr-un calcul matematic cînd se integrează peste toți radiatorii elementari în care poate fi împărțită fanta circulară.











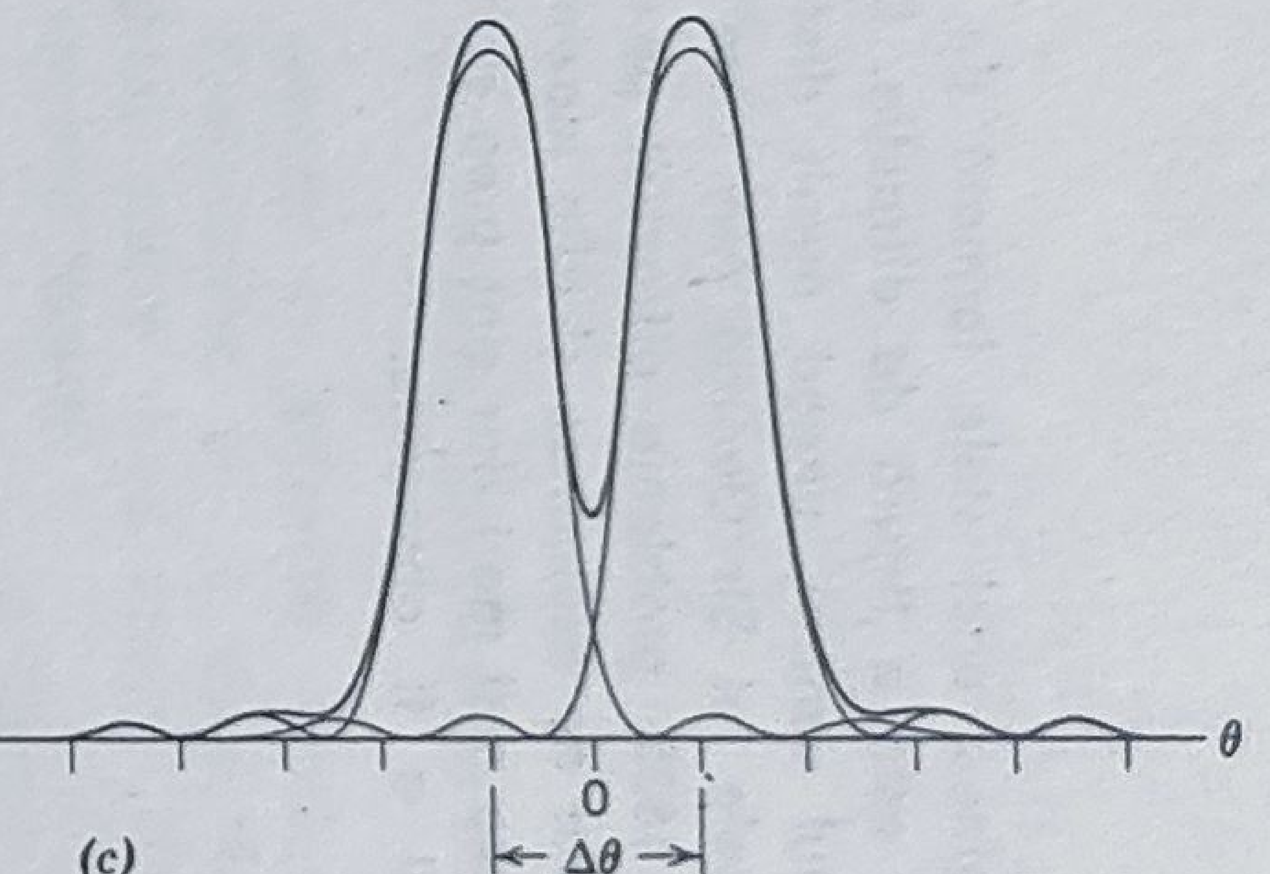


Figura 44-11. Imaginile a două obiecte punctuale îndepărtate sînt formate de o lentilă convergentă al cărei diametru (=10 cm) este de 200 000 mai mare decît lungimea de undă efectivă (=5 000 Å). Sînt reprezentate imaginile așa cum apar în planul focal al lentilei împreună cu graficele intensităților corespunzătoare. (*a*) Distanța unghiulară dintre obiecte (vezi barele verticale) este atît de mică încît imaginile nu sînt rezolvate. (*b*) Obiectele sînt mai distanțate și imaginile îndeplinesc criteriul de rezoluție Rayleigh. (*c*) Obiectele sînt și mai îndepărtate unul de altul, iar imaginile sînt bine rezolvate.

Cu lentilele reale imaginea unui obiect punctiform îndepărtat este întrucîtva mai mare decît cel din figura 44-10 şi poate să nu aibă simetrie radială. Aceasta se datoreşte diferitelor „defecte" ale lentilelor menţionate la pag.   . Totuşi, chiar dacă toate aceste defecte ar putea fi eliminate printr-o prelucrare corespunzătoare a suprafeţelor lentilelor sau prin introducerea lentilelor de corecţie, figura de difracţie din figura 44-10 ar rămîne. Ea este o proprietate inerentă a aperturii lentilei şi lungimii de undă a luminii utilizate.

Faptul că imaginile lentilelor sînt figuri de difracţie este important cînd dorim să distingem două obiecte punctuale îndepărtate a căror separare unghiulară este mică. Figura 44-11 prezintă imaginea vizuală şi figurile corespunzătoare ale intensităţii a două obiecte punctuale îndepărtate cu separare unghiulară mică şi intensităţi centrale aproximativ egale. În (*a*) obiectele nu sînt rezolvate; adică nu se pot distinge de un singur obiect punctual. În (*b*) ele sînt de-abia rezolvate iar în (*c*) sînt în întregime rezolvate.

În figura 44-11 b separarea unghiulară a celor două surse punctiforme este astfel încît maximul figurii de difracţie al unei surse cade peste primul minim al figurii de difracţie al celuilalt. Acesta este *criteriul Rayleigh.* Acest criteriu, deşi util, este arbitrar; pot fi utilizate şi alte criterii pentru a decide cînd două obiecte sînt rezolvate. Din ecuaţia 44-10, două obiecte ce sînt abia rezolvabile cu criteriul Rayleigh trebuie să aibă o separare unghiulară θ_R dată de

$$\theta_R = \arcsin \frac{1{,}22\,\lambda}{d}$$

Deoarece unghiurile în cauză sînt destul de mici, putem înlocui $\sin\theta_R$ cu θ_R sau

$$\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} \qquad (44\text{-}11)$$

Dacă separaţia unghiulară dintre obiecte este mai mare decît θ_R, atunci ele pot fi rezolvate; dacă e mai mică, ele nu pot.

Exemplul 5. O lentilă convergentă de 3,0 cm în diametru are lungimea focală f de 20 cm. (*a*). Ce separare unghiulară trebuie să aibă două obiecte punctuale ca să satisfacă criteriul lui Rayleigh? Presupuneţi $\lambda = 5\,500$ Å.

Din ecuaţia 44-11

$$\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} = \frac{(1{,}22)(5{,}5\times10^{-7}\ \text{m})}{3{,}0\times10^{-2}\ \text{m}} = 2{,}2\cdot10^{-5}\ \text{radian}$$

(*b*) Cît de depărtate sînt centrele figurii de difracţie în planul focal al lentilei? Separarea liniară este

$$x = f\,\theta = (20\ \text{cm})(2{,}2\times10^{-5}\ \text{radian}) = 44\,000\ \text{Å}.$$

Aceasta este 8,0 lungimi de undă ale luminii utilizate.

Dacă dorim să folosim o lentilă pentru a rezolva obiecte cu separare unghiulară mică, e preferabil să facem discul central al figurii de difracţie cît putem de mic. Se poate face aceasta (vezi ecuaţia 44-11) mărind diametrul lentilei sau utilizînd o lungime de undă mai mică. Un motiv pentru construirea de telescoape mari este că ele produc imagini *mai fine* astfel încît obiectele cereşti pot fi examinate în detaliu. Imagi-

nile sînt de asemenea *mai luminoase*, nu numai deoarece energia este concentrată într-un disc de difracţie mai mic dar deoarece lentilele mai mari colectează mai multă lumină. Astfel, pot fi văzute obiecte mai slabe, stele mai depărtate.

Pentru a reduce la *microscoape* efectele difracţiei se utilizează adesea lumină ultravioletă, care, din cauza lungimii de unde mai mici, permite observarea detaliilor mai fine decît acele ce ar fi observate cu un microscop cu lumină vizibilă. Vom vedea în capitolul 48 că fascicule de electroni se comportă ca unde în anumite împrejurări. În *microscopul electronic* astfel de fascicule pot avea lungimea de undă efectivă de 0,04 Å, de ordinul a 10^5 ori mai scurtă decît a luminii vizibile ($\lambda \approx \approx 5\,000$ Å). Este posibilă astfel o examinare în detaliu a obiectelor minuscule ca viruşii. Dacă un virus ar fi examinat cu un microscop optic, structura lui ar fi ascunsă fără speranţă de către difracţie.

44-6 Fantă dublă

În experienţa Young cu fantă dublă (secţiunea 43-1) presupuneam că fantele sînt orbitrar de înguste (adică, $a \ll \lambda$) ceea ce înseamnă că partea centrală a ecranului era uniform luminată de undele difractate de fiecare fantă. Atunci cînd interferează astfel de unde, ele produc franje de interferenţă de intensitate uniformă, ca în figura 43-9. Această situaţie idealizată nu poate avea loc cu fante reale deoarece condiţia $a \ll \lambda$ nu e de obicei satisfăcută. Undele de la cele două fante reale combinîndu-se în diferite puncte ale ecranului vor avea intensităţi ce *nu* sînt uniforme ci vor fi guvernate de figura de difracţie a unei singure fante. Putem relaxa ipoteza că $a \ll \lambda$ în experienţa Young lăsînd franjele relativ neschimbate în poziţie dar modificîndu-le intensităţile.

Figura de interferenţă pentru fante infinitezimal înguste este dată de ecuaţia 43-11 *b* şi *c*, sau cu mici modificări de nomenclatură.

$$I_{\theta,\ int} = I_{m,\ int} \cos^2 \beta \tag{44-12}$$

unde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \tag{44-13}$$

în care *d* este distanţa dintre liniile centrale ale fantelor.

Intensitatea undei difractate de la oricare din fante este dată de ecuaţia 44-8 *b* şi *c*, sau, cu mici modificări de notaţii

$$I_{\theta,\ \mathrm{dif}} = I_{m,\ \mathrm{dif}} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \tag{44-14}$$

unde

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \tag{44-15}$$

Găsim efectul combinat privind $I_{m,\, int}$ din ecuaţia 44-12 ca o amplitudine variabilă, dată de fapt de $I_{0\ dif}$ din ecuaţia 44-14. Această aserţiune conduce la

$$I_0 = I_m(\cos\beta)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \tag{44-16}$$

pentru figura combinată, unde am renunţat la toţi indicii ce se refereau separat la interferenţă şi la difracţie.

Să exprimăm acest rezultat în cuvinte. În orice punct de pe ecran intensitatea luminoasă de la fiecare fantă, considerate separat, e dată de figura de difracţie a acelei fante (ecuaţia (44-14). Figurile de difracţie ale celor două fante, de asemenea considerate separat, coincid deoarece razele paralele în difracţie Fraunhofer sînt focalizate în acelaşi loc (vezi figura 44-5). Deoarece cele două unde difractate sînt coerente ele vor interfera.

Ca efect al interferenţei se redistribuie energia pe ecran producînd un set de franje. În secţiunea 43-1, unde am presupus $a \ll \lambda$, energia era virtual aceeaşi în toate punctele ecranului astfel încît franjele de interferenţă aveau virtual aceeaşi intensitate. Dacă relaxăm ipoteza $a \ll \lambda$, energia *nu* va mai fi uniform distribuită pe ecran ci va fi dată de figura de difracţie a unei fante de lărgime a. În acest caz franjele de interferanţă vor avea intensităţi ce sînt determinate de intensitatea figurii de difracţie în punctul unei anumite franje. Ecuaţia 44-16 este expresia matematică a acestui argument.

Figura 44-12 este o reprezentare grafică a ecuaţiei 44-16 pentru $d=50\ \lambda$ şi pentru trei valori ale lui a/λ. Se vede clar că pentru fante înguste $(a=\lambda)$ franjele au intensitate aproape uniformă. Pe măsură ce fantele se măresc, intensităţile franjelor sînt în mod vizibil modulate cu factorul de difracţie din ecuaţia 44-16, adică, de factorul $(\sin\alpha/\alpha)^2$.

În ecuaţia 44-16 se vede că înfăşurătoarea franjelor din figura 44-12 sînt tocmai figurile de difracţie cu o singură fantă din figura 44-9. Acest lucru este evident, în mod special, în figura 44-13 care prezintă, pentru curba din figura 44-12, *b* (*a*) „factorul de interferenţă“ din ecuaţia 44-16 (adică factorul $\cos^2\beta$), (*b*) „factorul de difracţie“ $(\sin\alpha/\alpha)^2$, şi (*c*) produsul lor.

Dacă, în ecuaţia 44-16, facem $a=0$, atunci (vezi ecuaţia 44-15) $a=0$ şi $\sin\alpha/\alpha_{\alpha\to 0} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Această ecuaţie se reduce astfel, după cum şi trebuie, la ecuaţia ce dă intensitatea pentru o pereche de fante de lăţime tinzînd spre zero. Dacă punem $d=0$ în ecuaţia 44-16, cele două fante se unesc într-o singură fantă de lăţime a, după cum arată figura 44-15; $d=0$ implică $\beta=0$ (vezi ecuaţia 44-13) şi $\cos^2\beta=1$. Astfel ecuaţia 44-16 se reduce, după cum trebuie, la ecuaţia difracţiei pe o singură fantă (ecuaţia 44-14).

În figura 44-14, se văd cîteva fotografii reale de interferenţă, pe două fante. Se văd clar franjele de interferenţă uniform distanţate şi modularea lor în intensitate de către figura de difracţie pe o fantă. Dacă una din franje este acoperită, ca în figura 44-14 *b*, franjele de interferenţă dispar şi vedem numai figura de difracţie pe o singură fantă.

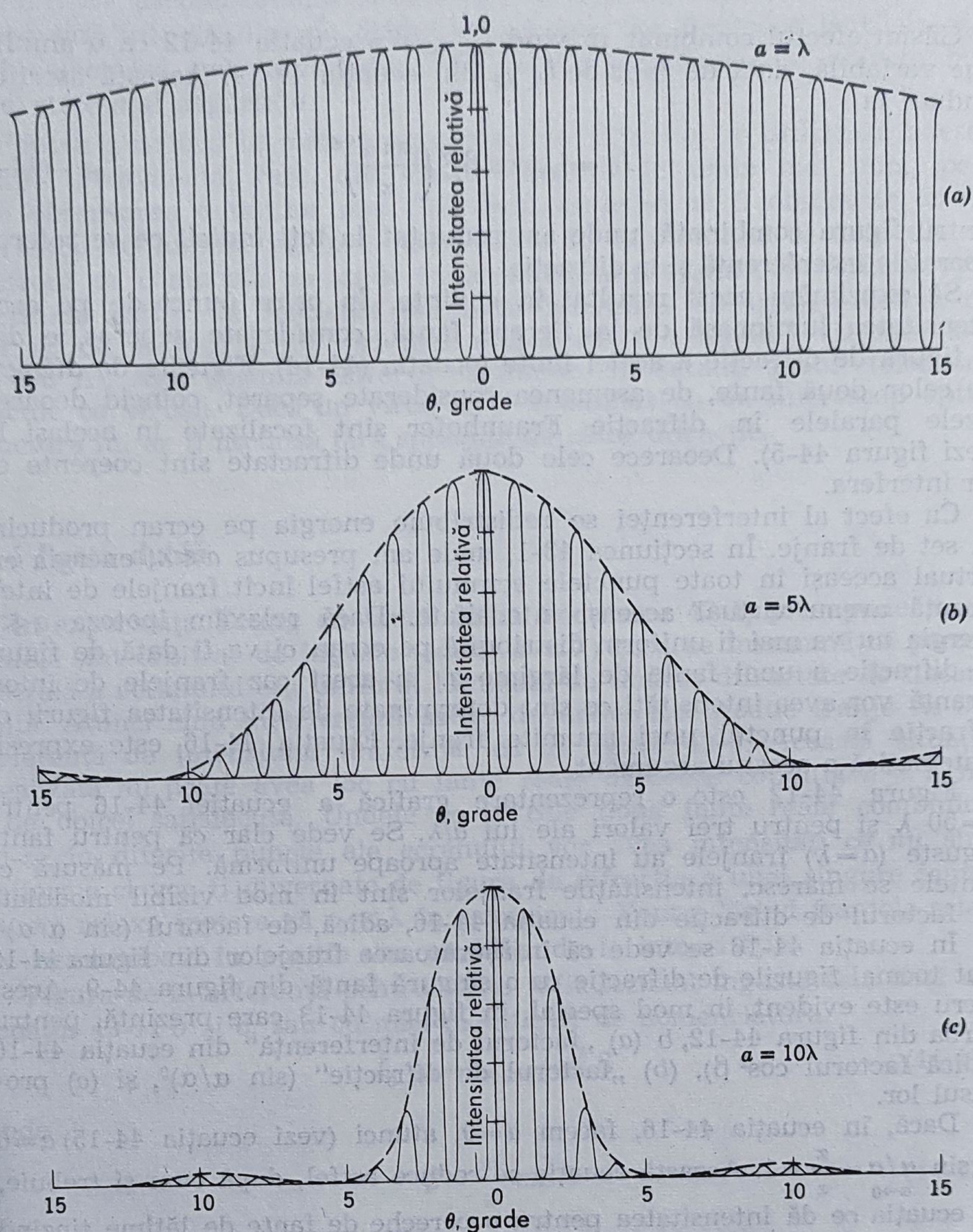
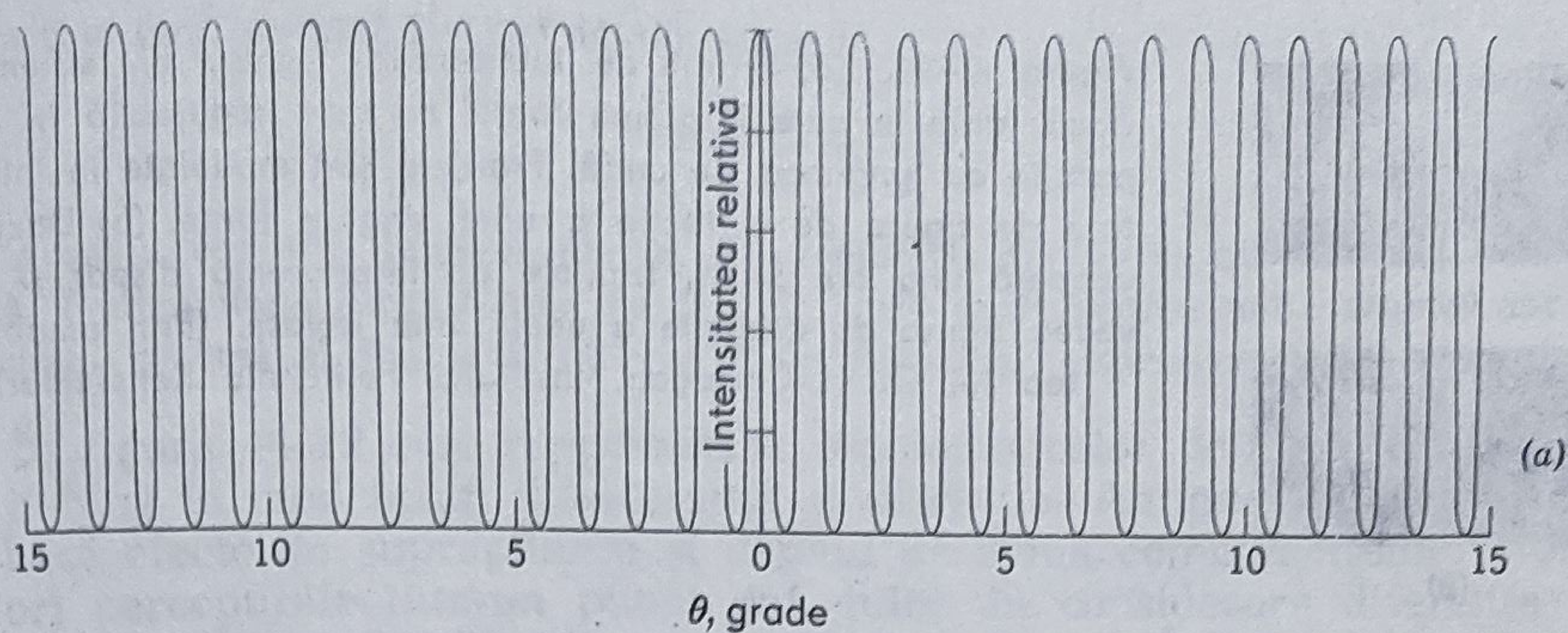
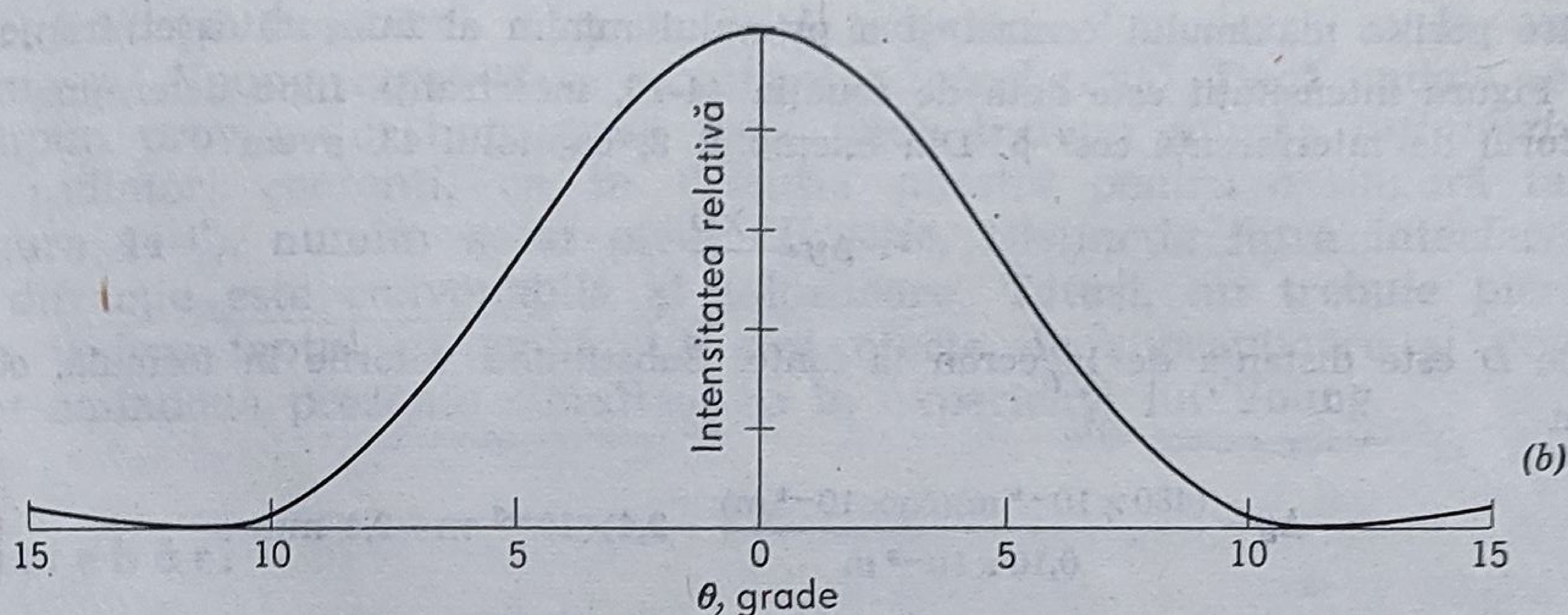


Figura 44-12. Franje de interferență pentru două fante cu $d=50\ \lambda$. Sînt prezentate trei lărgimi diferite de fante, descrise de $a/\lambda=1, 5$, și 10.

Exemplul 6. Plecînd de la curba din figura 44-12 b care este efectul (*a*) măririi lărgimii fantei, (*b*) măririi distanței dintre fante și (*c*) măririi lungimii de undă?

(*a*) Dacă mărim lărgimea fantei a, înfășurătoarea franjelor se modifică în sensul ascuțirii maximului central (compară cu figura 44-12 c. Distanța dintre franje, care depinde de d/λ, nu se modifică.





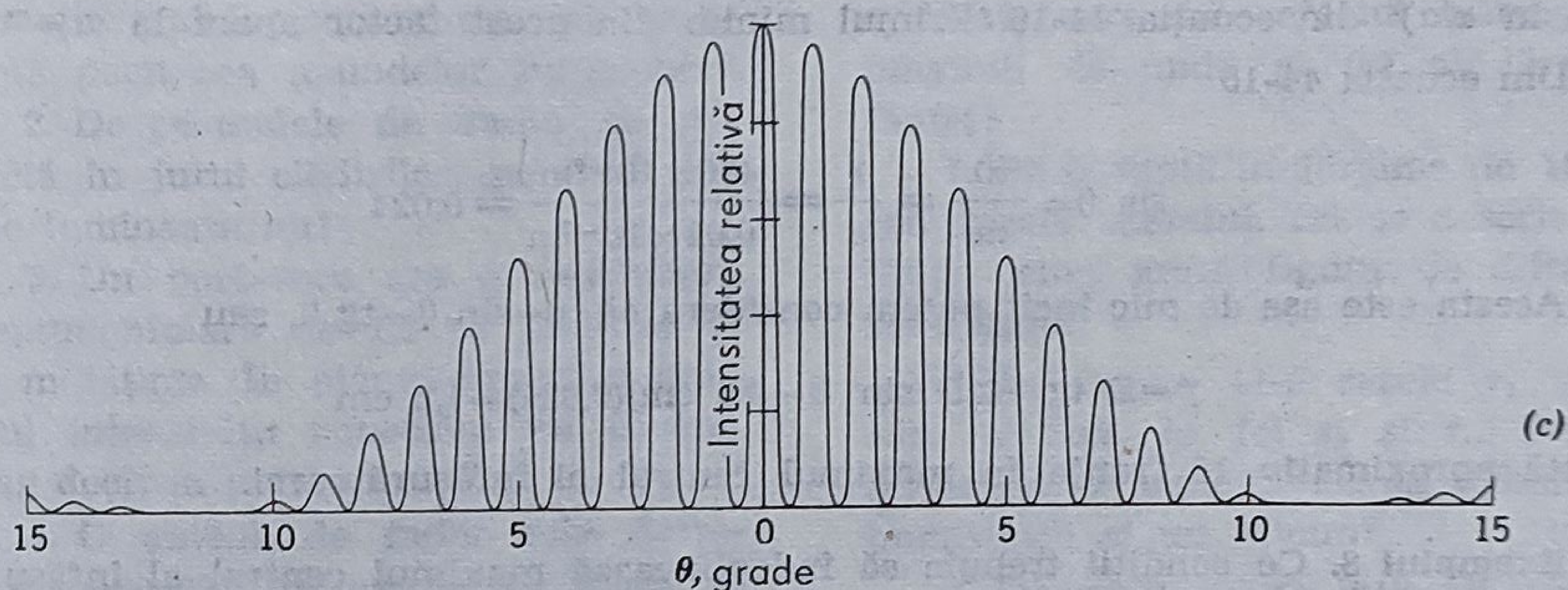
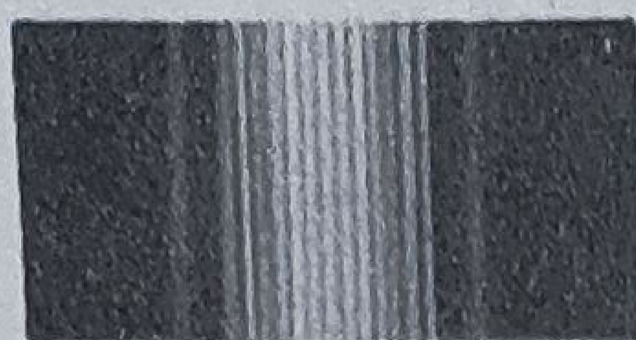


Figura 44-13. (*a*) „Factorul de interferență" și (*b*) „Factorul de difracție" din ecuația 44.16 și (*c*) produsul lor, de comparat cu figura 44-12 *b*.

(b) Dacă îl mărim pe d, franjele se apropie, înfășurătoarea lor rămînînd neschimbată.

(c) Dacă îl mărim pe λ, înfășurătoarea se lărgește și franjele se răresc. Mărirea lui λ este echivalentă cu micșorarea atît a raportului a/λ cît și d/λ. Relația generală dintre înfășurătoare și franje, care depinde numai de d/a, nu se modifică cu lungimea de undă.

Exemplul 7. Care este interfranja pe un ecran la 50 cm de o fantă dublă pe care se face difracție Fraunhofer, și este iluminată cu lumină albastră ($\lambda = 4\,800$ Å),



(a)



(b)

Figura 44-14. (*a*) Franjă de interferență pentru un sistem de două fante în care lărgimea fantei *nu* este neglijabilă în comparație cu lungimea de undă. Franjele sînt modulate în intensitate de figura de difracție a unei singure fante. (*b*) Dacă se acoperă una din fante, franjele de interferență dispar și vom vedea figura de difracție a unei fante izolate. (Prin amabilitatea lui G. H.-Carragan, Institutul Politehnic Rensselaer).

dacă $d=0{,}10$ mm, și dacă lărgimea fantei este $a=0{,}02$ mm? Care e distanța liniară dintre poziția maximului central și a primului minim al înfășurătoarei franjelor?

Figura intensității este dată de ecuația 44-16, interfranja fiind determinată de factorul de interferență $\cos^2 \beta$. Din exemplul 2, capitolul 43, avem

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}$$

unde D este distanța de la ecran la fante. Substituind valorile în formulă, obținem

$$\Delta y = \frac{(480 \times 10^{-9}\ \text{m})(50 \times 10^{-2}\ \text{m})}{0{,}10 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2{,}4 \times 10^{-3}\ \text{m} = 2{,}4\ \text{mm}$$

Distanța pînă la primul minim al înfășurătoarei este dată de factorul de difracție $(\sin \alpha/\alpha)^2$ din ecuația 44-16. Primul minim din acest factor apare la $\alpha=\pi$. Din ecuația 44-15

$$\sin \theta = \frac{\alpha\lambda}{\pi a} = \frac{\lambda}{a} = \frac{480 \times 10^{-9}\text{m}}{0{,}02 \times 10^{-3}\text{m}} = 0{,}024$$

Acesta este așa de mic încît putem considera că $\theta = \sin \theta = \text{tg}\ \theta$, sau

$$y = D\ \text{tg}\ \theta \cong D \sin \theta = (50\ \text{cm})(0{,}024) = 1{,}2\ \text{cm}$$

Există aproximativ 10 franje în maximul central al înfășurătoarei.

Exemplul 8. Ce condiții trebuie să îndeplinească maximul central al înfășurătoarei unei figuri Fraunhofer pentru a conține exact unsprezece franje?

Condiția cerută este îndeplinită dacă al șaselea minim al factorului de interferență $(\cos^2 \beta)$ din ecuația 44-16 coincide cu primul minim al factorului de difracție $(\sin \alpha/\alpha)^2$.

Al șaselea minim al factorului de interferență apare pentru

$$\beta = \frac{11}{2}\pi$$

în ecuația 44-12.

Primul minim al factorului de difracție apare pentru

$$\alpha = \pi$$

Împărţind (vezi ecuaţia 44-13 şi 44-15) obţinem

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a} = \frac{11}{2}$$

Această condiţie depinde numai de geometria fantei şi nu de lungimea de undă. Pentru unde lungi figura va fi mai largă decît pentru unde scurte, dar în maximul central al înfăşurătorii vor fi întotdeauna unsprezece franje.

În figura 44-12 este reprezentată problema celor două fante, în care se îmbină în mod intim interferenţa şi difracţia. Amîndouă efectele sînt la bază efecte de suprapunere şi depind de suma componentelor (vibraţiilor) perceptibile într-un punct dat, luînd în considerare diferenţa de fază corespunzătoare. Dacă undele care se compun provin dintr-un număr *finit* (şi de obicei mic) de mici radiatori elementari, ca în experienţa lui Young, acest efect se numeşte *interferenţă*. Dacă undele ce se compun provin din împărţirea unei unde într-un număr *infinitezimal* de radiatori coerenţi, ca în discuţia noastră pentru o singură fantă (figura 44-6), numim acest efect *difracţie*. Distincţia între interferenţă şi difracţie este convenabilă şi folositoare. Totuşi, nu trebuie pierdut din vedere faptul că amîndouă sînt efecte de suprapunere şi uneori sînt amîndouă prezente simultan, ca în experienţa lui Young.

Întrebări

1. De ce în experienţa cotidiană difracţia undelor sonore este mai evidentă decît cea a undelor luminoase?

2. De ce undele de radio se difractă în jurul clădirilor, pe cînd undele luminoase nu?

3. Un port-voce are o deschidere dreptunghiulară de 1,2 m înălţime şi 0,3 m lăţime. În planul orizontal graficul intensităţii sunetului va fi mai lung decît în planul vertical?

4. O antenă de radar este destinată măsurătorilor exacte ale înălţimii unei aeronave dar măsurători bune se obţin numai în planul orizontal al direcţiei sale. Raportul înălţime/lărgime al reflectorului radar trebuie să fie mai mic, egal sau mai mare decît unitatea?

5. O persoană ţine o fantă îngustă vertical în faţa pupilei şi priveşte spre o sursă îndepărtată de lumină de forma unui filament încălzit. Figura de difracţie va fi o figură Fraunhofer sau Fresnel?

6. Într-o difracţie Fraunhofer pe o fantă, care este efectul măririi (a) lungimii de undă şi (b) al lărgimii fantei?

7. Pe o fantă în lărgime de 10^4 Å cad razele soarelui. Să se descrie calitativ cum arată figura de difracţie rezultantă.

8. În figura 44-5 razele r_1 şi r_3 sînt în fază, la fel r_2 şi r_4. De ce nu există în punctul P_2 un maxim al intensităţii ci un minim?

9. Descrieţi ce se întîmplă cu difracţia Fraunhofer pe o singură fantă dacă întregul aparat este cufundat în apă.

10. Să se facă distincţie între θ, α şi Φ din ecuaţia 44-8 c.

11. Efectele de difracţie apar pentru imagini virtuale ca pentru cele reale? Explicaţi.

12. Efectele de difracţie apar pentru imaginile formate de (a) oglinzi plane şi (b) oglinzi sferice? Explicaţi.

13. Dacă am reface analiza proprietăților lentilelor din secțiunea 42-5 cu metodele opticii geometrice dar *fără* restricțiile razelor paraxiale și lentilelor „subțiri" vor apărea efecte de difracție? Discuție.

14. Să se facă distincție între interferență și difracție în experiența lui Young cu fantă dublă.

15. Sub ce aspecte interferența și difracția sînt similare? Sub ce aspect sînt diferite?

16. Într-o figură de interferență produsă de două fante ca cea din figura 44-14 *a* s-a arătat că franjele de interferență sînt modulate în intensitate de difracție *a* pe o singură fantă. Putem inversa această afirmație spunînd că figura de difracție a unei fante este modulată în intensitate de franjele de interferență? Discuție.

Probleme

1. Pe figura de difracție a unei fante distanța între primul minim din stînga și primul minim din dreapta este de 5,2 mm. Ecranul pe care este formată imaginea este la 80 cm în fața fantei, iar lungimea de undă este de 5 460 Å. Să se calculeze lărgimea fantei.

2. O undă plană ($\lambda = 5\,900$ Å) cade pe o fantă de lărgime $a = 0{,}40$ mm. În spatele fantei este așezată o lentilă convergentă ($f = +70$ cm) care focalizează lumina pe ecran. Care este distanța liniară pe ecran între centrul figurii și (a) primul minim, (b) al doilea minim?

3. O fantă este iluminată cu lumină cu lungimile de undă λ_a și λ_b, astfel alese încît minimul de difracție pentru λ_a să coincidă cu al doilea minim pentru λ_b. (a) Ce relație există între cele două lungimi de undă? (b) Coincid celelalte minime?

4. (a) Să se arate că valorile lui α pentru care apar maximele difracției pe o fantă pot fi obținute diferențiind ecuația 44-8 b în raport cu α și egalînd cu zero, ceea ce dă condiția

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha$$

(b) Să se găsească valorile lui α care satisfac această relație, reprezentînd curba $y = \operatorname{tg} \alpha$ și dreapta $y = \alpha$ și găsind intersecțiile acestora. (c) Să se găsească valorile (diferite de întregi) ale lui m care corespund maximelor succesive de pe figura de difracție. De notat că maximele secundare nu se află exact la jumătatea distanței dintre minime.

5. Să se rezolve grafic ecuația transcendentă din exemplul 4,

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sin \alpha_x}{\alpha_x}\right)^2$$

pentru α_x cu o precizie de trei poziții zecimale.

6. (a) Care este, în figura 44-7 *d*, E_θ care reprezintă primul maxim care nu este vertical după maximul central? (b) Să se calculeze unghiul pe care îl face cu verticala, dacă fanta este împărțită în benzi infinitezimale de lungime dx.

7. Care este semilărgimea unui fascicul difractat de o fantă de lărgime (a) 1, (b) 5, și (c) 10 lungimi de undă?

8. (a) O difragmă circulară de 0,60 metri diametru oscilează cu frecvența de 25 000 cicli/sec., ea se găsește într-o sursă de sunete pentru detecția submarină, cufundată în apă. Departe de sursă, intensitatea sunetului este distribuită după o figură Fraunhofer de difracție pentru un orificiu circular de diametru egal cu al diafragmei. Viteza sunetului în apă este de 1 450 m/sec. Să se afle unghiul dintre normala la diafragmă

și direcția primului minim. (b) Să se refacă calculul pentru o sursă cu frecvența (audibilă) de 1 000 cicli/sec.

9. Între farurile unui automobil care se apropie este o distanță de 1,2 m. Care este distanța maximă la care ochiul le poate distinge? Presupunem diametrul pupilei de 5,0 mm și $\lambda = 5\,500$ Å. Rezoluția este determinată numai de efectele de difracție, nu de structura retinei.

10. Peretele unei încăperi mari este acoperit cu un strat antifonic în care sînt făcute mici găuri la 5,00 mm distanță între centre. Presupunînd condiții ideale, la ce distanță mai poate cineva distinge aceste găuri? Diametrul pupilei este de 4,00 mm și λ de 5 500 Å.

11. (a) Care este distanța unghiulară între două stele dacă imaginile lor abia se disting în telescopul refractant Thaw de la Observatorul Allegheny din Pittsburgh? Diametrul lentilei este de 76,2 cm iar distanța sa focală este de 14 m. Presupunem $\lambda = 5\,500$ Å. (b) Să se găsească distanța dintre aceste două stele dacă fiecare se găsește la 10 ani lumină de Pămînt. (c) Să se găsească diametrul primului inel întunecat din figura de difracție pentru o stea, măsurată pe o placă fotografică așezată în planul focal.*

12. Să se găsească separarea dintre două cratere de pe lună care se pot deosebi cu telescopul de 5,08 m de pe Mount Palomar, presupunînd că această distanță este determinată prin efecte de difracție. Distanța dintre Pămînt și Lună este de 386 270 km.

13. Să se construiască diagrame calitative de vectori, ca în figura 44-7 pentru o figură de interferență produsă de două fante. Pentru simplitate, se consideră $d = 2a$ (vezi figura 44-15). Puteți interpreta în acest mod principalele caracteristici ale figurii de interferență?

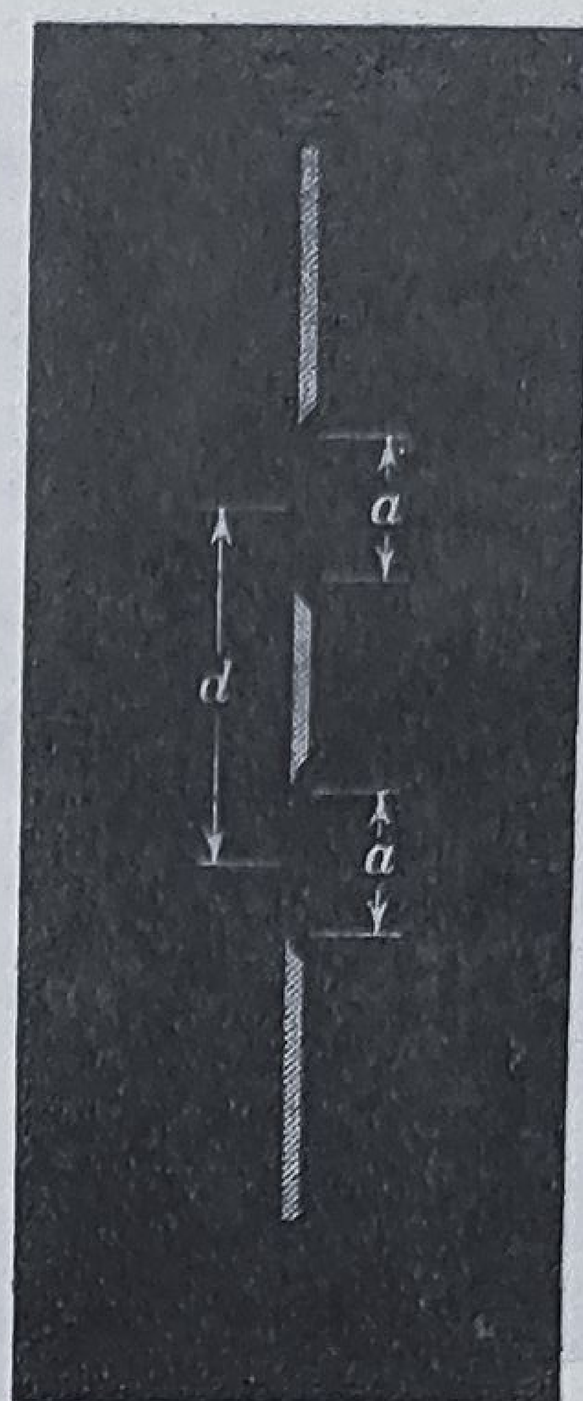


Figura 44-15.

14. Să presupunem că, așa ca în exemplul 8, înfășurătoarea maximului central conține unsprezece franje. Cîte franje se găsesc între primul și al doilea maxim al înfășurătorii?

15. Pentru $d = 2a$ în figura 44-15, cîte franje de interferență se găsesc în maximul central a înfășurătorii de difracție?

16. Dacă $d = a$ în figura 44-15, cele două fante se contopesc într-o fantă de lărgime $2a$. Să se arate că ecuația 44-16 va descrie figura de difracție a unei astfel de fante.

17. (a) Să se proiecteze un sistem de două fante în care lipsește a patra franjă, fără a lua în considerație maximul central. (b) Care alte franje (eventual) vor mai lipsi de asemenea?

---

* Se presupune că structura imaginii stelei este legată în întregime de apertura (fanta) lentilei și nu de (micile) „erori" ale lentilei.

Capitolul 45

Rețele de difracție

45-1 Introducere

Cînd am prezentat experiența lui Young (secțiunea 43-1 și 43-3) am analizat interferența a două unde coerente formate prin difracția a doi radiatori elementari (orificii sau fante). În prima noastră prelucrare am presupus că lărgimea unei fante este mult mai mică decît o lungime de undă, astfel încît lumina difractată de fiecare fantă iluminează uniform ecranul pe care se observă fenomenul. În secțiunea 44-6, am luat în considerație lărgimea fantei și am arătat că figura formată de franjele de interferență este modulată în intensitate de către un „factor de difracție" $(\sin \alpha/\alpha)^2$ (vezi ecuația 44-16).

În cele ce urmează vom face o extensie a celor discutate pentru cazul a N radiatori sau centri difractanți. Se consideră două situații.

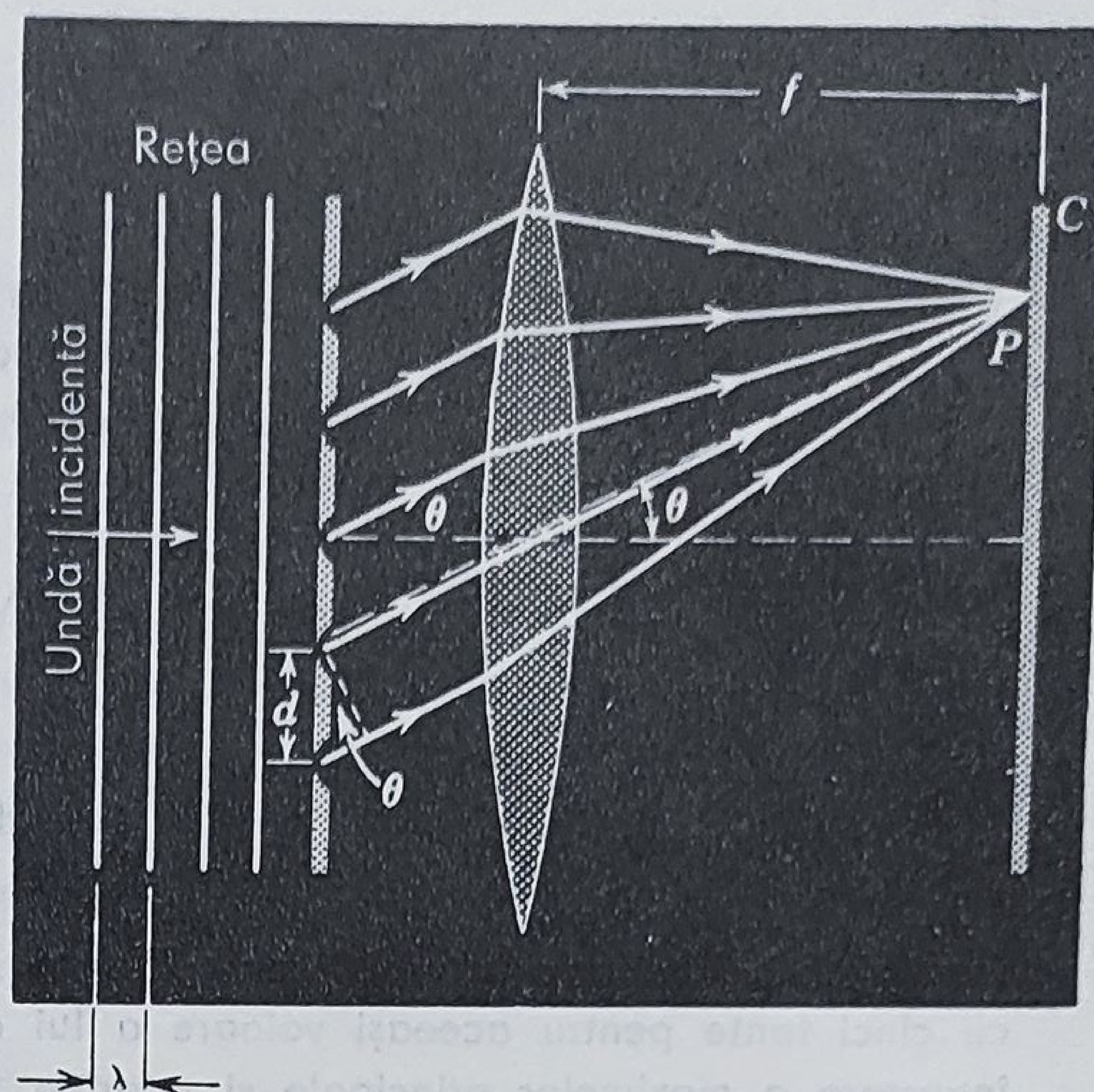
1. O suprafață de N fante paralele, numite *rețea de difracție.*
2. O structură tridimensională de radiatori dispuși periodic — atomi într-un solid cristalin ca de exemplu NaCl. În acest caz distanța medie între radiatorii elementari este atît de mică încît efectele de interferență trebuie să fie căutate pentru lungimi de undă mult mai mici decît cea a luminii vizibile. Aceasta este *difracția razelor X.*

În fiecare caz trebuie făcută o distincție atentă între proprietățile de difracție ale unui singur radiator (fante sau atomi) și interferența undelor difractate coerent de un ansamblu de radiatori.

45-2 Fante multiple

O extensie logică a experienței Young pentru un sistem de două fante este creșterea numărului de fante, N. Un aranjament ca cel din figura 45-1, care cuprinde în mod normal mult mai multe fante se numește *rețea de difracție.* Figura care rezultă în urma trecerii luminii

Figura 45-1. Rețea idealizată cu 5 fante. Lărgimea fantei a este prin convenție aleasă mai mică decît λ, cu toate că această condiție nu este îndeplinită în practică. Figura este deformată în sensul că f este mult mai mare decît d în practică.



monocromatice de lungime de undă λ prin rețea este, ca și pentru sistemul cu două fante, o serie de franje de raportul λ/d, unde d este distanța dintre centrele a două fante adiacente. *Intensitățile* relative ale acestor franje sînt determinate de difracție pe o fantă a rețelei, care depinde de raportul λ/a, unde a este lărgimea fantei.

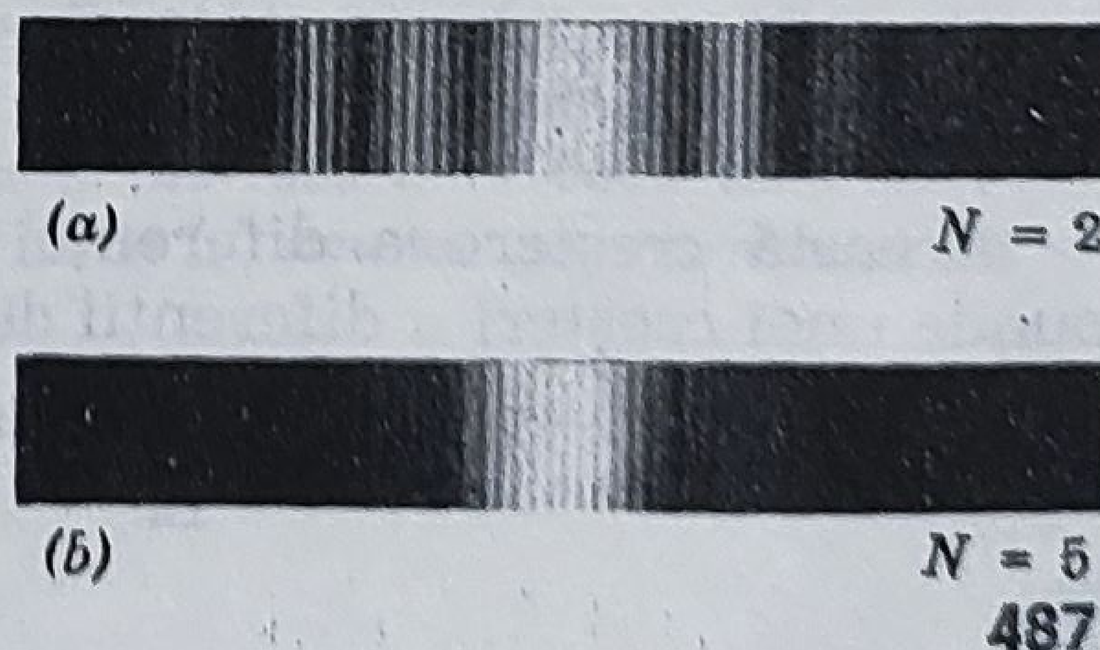
Figura 45-2, în care se compară intensitățile pentru $N=2$ și $N=5$, arată clar că franjele de „interferență" sînt modulate în intensitate de o înfășurătoare de „difracție", ca în figura 44-14. Figura 45-3 prezintă un calcul teoretic al intensității unor franje lîngă centrul graficelor din figura 45-2. Aceste două grafice arată că mărind numărul N (*a*) nu trebuie să schimbăm spațiul dintre maximele (principale) de interferență, cu condiția ca d și λ să rămînă neschimbate, (*b*) maximele (principale) se îngustează și (*c*) se introduc maxime secundare printre maximele principale. Trei astfel de maxime secundare sînt prezente (dar nu sînt ușor de remarcat) între fiecare pereche de maxime principale adiacente (figura 45-2 *b*).

În figura 45-1 un maxim principal apare pentru o diferență de drum între razele din fante adiacente ($=d \sin \theta$) dată de

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m=0, 1, 2, \ldots \quad \text{(maxime principale)} \tag{45-1}$$

unde m se numește *număr de ordine*. Această ecuație este identică cu ecuația 43-1 care dă pozițiile maximelor de intensitate pentru două

Figura 45-2. Figurile de interferență pentru „rețele" cu (*a*) $N=2$ și (*b*) $N=5$ pentru aceleași valori ale λ și d. Se observă cum intensitățile franjelor sînt modulate de o înfășurătoare de difracție ca în figura 44-14; astfel presupunerea $a \ll \lambda$ nu este realizată de aceste „rețele" reale. Pentru $N=5$ apar trei maxime secundare foarte slabe, invizibile în această fotografie, între fiecare pereche de maxime primare adiacente.



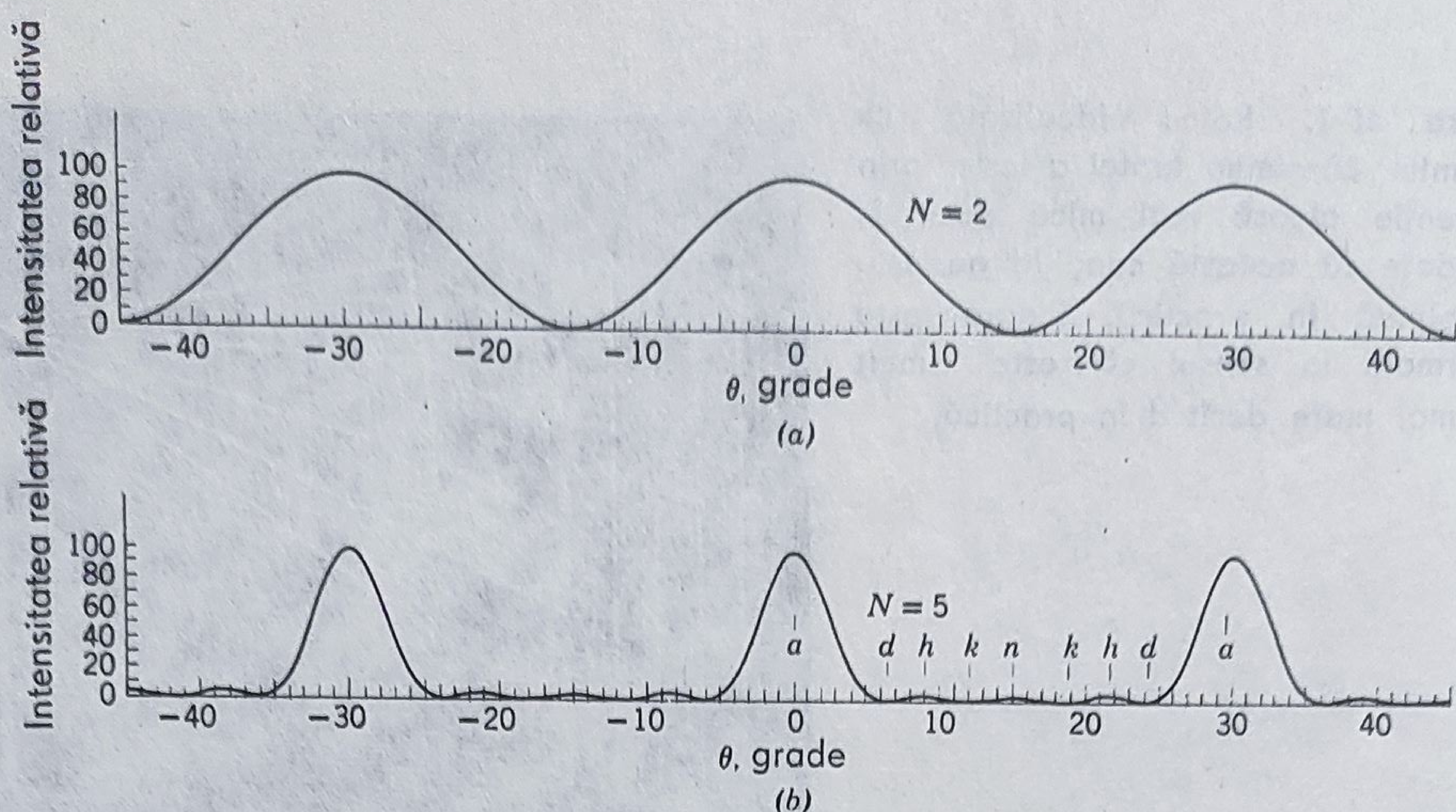


Figura 45-3. Graficele intensităţilor calculate pentru (*a*) două fante şi (*b*) o reţea cu cinci fante pentru aceeaşi valoare a lui d şi a lui λ. În figură se observă o îngustare a maximelor principale şi apariţia unor maxime secundare slabe pentru $N>2$. Literele de pe graficul corespunzător reţelei cu cinci fante se referă la figura 45-5. În figură se presupun fante cu $a \ll \lambda$ astfel încît maximele principale sînt de intensitate uniformă.

fante. *Poziţiile* maximelor (principale) sînt astfel determinate numai de raportul λ/d fiind independente de valoarea lui N. La fel ca pentru două fante, raportul a/λ determină *intensităţile* maximelor principale dar nu influenţează în mod apreciabil poziţiile lor.

Îngustarea maximelor principale cu creşterea lui N poate fi explicată grafic, utilizînd fazorii. În figura 45-4 *a* şi *b* sînt reprezentate condiţiile pentru orice maxime principale formate de o reţea cu două fante şi respectiv nouă fante. Săgeţile reprezintă amplitudinile vibraţiilor care ajung pe ecran în poziţiile maximelor principale. Pentru simplitate vom considera doar maximul central, pentru care în ecuaţia 45-1 $m=0$ şi astfel $\theta=0$.

Fie unghiul $\Delta\theta_0$ ce corespunde poziţiei de intensitate zero, de fiecare parte a maximului principal central. În figura 45-4 *c* şi *d* sînt reprezentaţi fazorii în acest punct. Diferenţa de fază între undele din fante adiacente, care este zero în maximul principal central, creşte cu cantitatea $\Delta\Phi$ astfel încît curba descrisă de fazori să fie închisă şi astfel intensitatea să se anuleze. Pentru $N=2$, $\Delta\Phi=2\pi/2$ ($=180°$); pentru $N=9$, $\Delta\Phi=2\pi/9$ ($=40°$). În cazul general

$$\Delta\Phi=\frac{2\pi}{N}$$

Această creştere a diferenţei de fază pentru unde adiacente corespunde unei creşteri a diferenţii de drum Δl dată de

$$\frac{\text{diferenţa de fază}}{2\pi}=\frac{\text{diferenţa de drum}}{\lambda}$$

sau

$$\Delta l = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\Delta\Phi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\lambda}{N}$$

Din figura 45-1, totuși, diferența de drum Δl pentru primul minim este de asemenea dată de $d \sin \Delta\theta_0$, astfel încît se poate scrie

$$d \sin \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{N}$$

sau

$$\sin \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$$

Dacă $N \ll 1$, în cazul rețelelor reale, $\sin \Delta\theta_0$ va fi în mod obișnuit destul de mic (adică liniile sînt înguste), și putem înlocui $\sin \Delta\theta_0$ cu $\Delta\theta_0$ într-o bună aproximație.

sau

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd} \quad \text{(maximul principal central)} \tag{45-2}$$

Această ecuație, arată că pentru o creștere a lui N pentru λ și d date, $\Delta\theta_0$ va descrește, ceea ce înseamnă că maximul principal central se va îngusta.

Afirmăm fără demonstrație*, pentru discuțiile următoare, că pentru maximele principale în afară de cel central, ($m \neq 0$) distanța unghiulară dintre poziția θm a

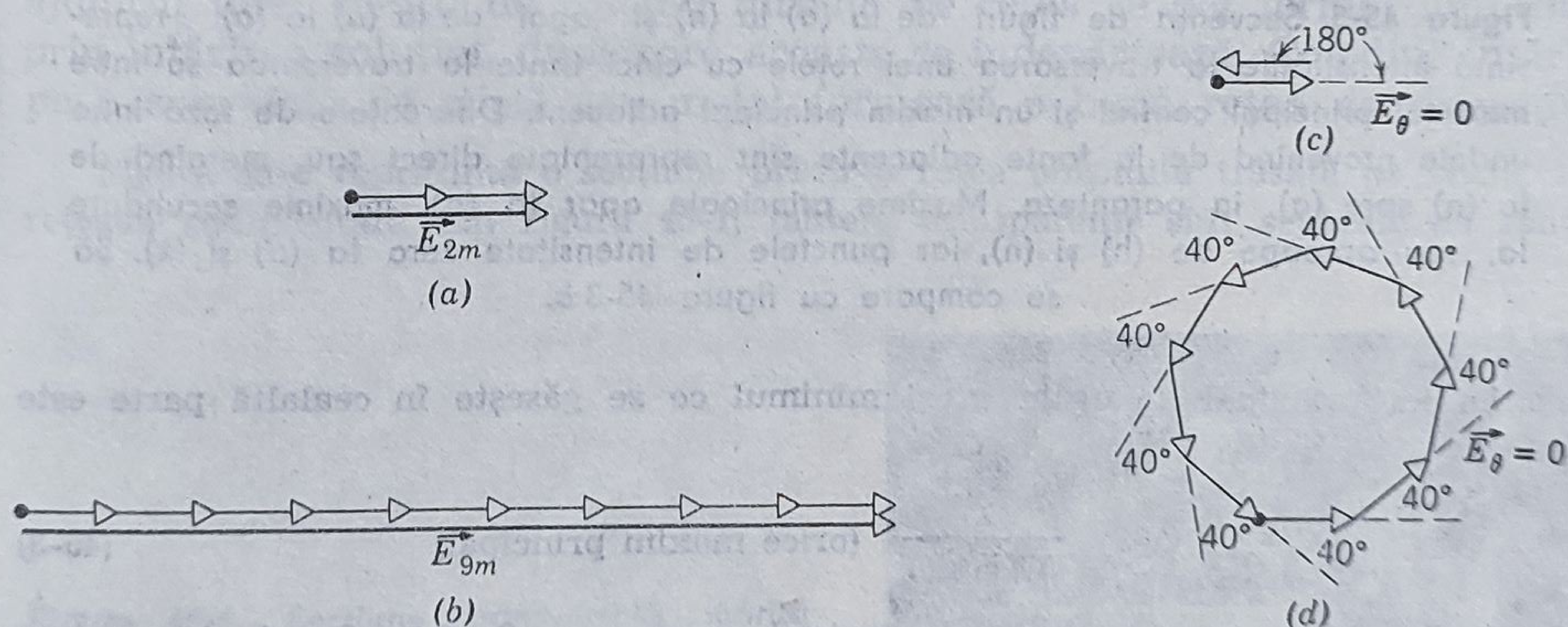


Figura 45-4. Schemele (*a*) și (*b*) reprezintă condițiile pentru maximul central la o rețea cu două fante și respectiv de nou fante. Schemele (*c*) și (*d*) reprezintă condițiile pentru minimul de intensitate zero care se găsesc de fiecare parte a maximului principal central. De la (*a*) la (*c*) diferența de fază între două fante adiacente se schimbă cu 180° ($\Delta\Phi = 2\pi/2$); de la (*b*) la (*d*) acesta se schimbă cu 40° ($\Delta\Phi = 2\pi/9$).

---

* Vezi problema 15.

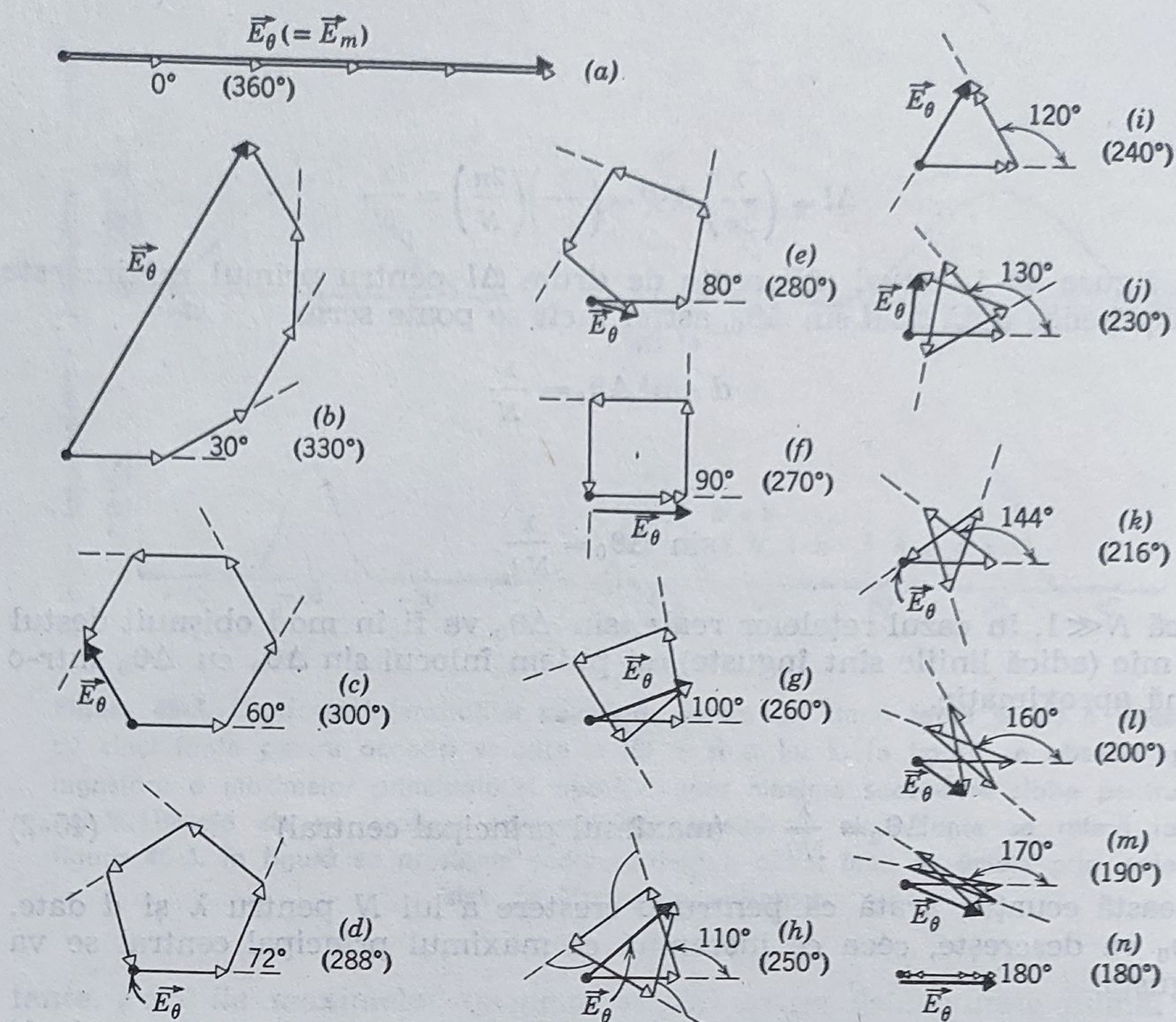


Figura 45-5. Secvența de figuri de la (a) la (n) și apoi de la (n) la (a) reprezintă intensitățile la traversarea unei rețele cu cinci fante la traversarea sa între maximul principal central și un maxim principal adiacent. Diferențele de fază între undele provenind de la fante adiacente sînt reprezentate direct sau, mergînd de la (n) spre (a), în paranteze. Maxime principale apar la (a), maxime secundare la, sau aproape de (h) și (n), iar punctele de intensitate zero la (d) și (k). Să se compare cu figura 45-3 b.

maximului principal de ordin m şi minimul ce se găseşte în cealaltă parte este dată de

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m} \quad \text{(orice maxim principal)} \tag{45-3}$$

Pentru maximul principal central avem $m=0$, $\theta_m=0$, şi $\Delta\theta_m=\Delta\theta_0$ astfel încît ecuaţia 45-3 se reduce, aşa după cum este de aşteptat la ecuaţia 45-2.

Utilizînd metoda fazorilor se poate determina de asemenea originea maximelor secundare care apar pentru $N>2$. În figura 45-2 a sînt reprezentate condiţiile pentru apariţia maximului central principal pentru o reţea cu cinci fante. Vectorii sînt în fază. Pornind din maximul central, θ din figura 45-1 creşte începînd de la zero, iar diferenţa de fază creşte

începînd de la 0 la $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$. Următoarele figuri urmăresc variația amplitudinii E_0 cu $\Delta\Phi$. Cititorul trebuie să verifice prin construcții grafice dacă în figură sînt reprezentate condițiile atît pentru $\Delta\Phi$ cît și pentru $2\pi - \Delta\Phi$. Astfel, se pornește de la $\Delta\Phi = 0$, pînă la $\Delta\Phi = 180°$, apoi se trasează aceeași secvență înapoi, urmărind diferența de fază din paranteze pînă la $\Delta\Phi = 360°$. Această secvență corespunde traversării intensităților între maximul principal central și maximul adiacent. În figura 45-5 (care trebuie comparată cu figura 45-3 *b*) se vede că pentru $N=5$ există trei maxime secundare pentru $\Delta\Phi = 110°$, 180° și respectiv 250°. O analiză similară ar trebui făcută pentru $N=3$, care ar arăta că va apărea un singur maxim secundar. În rețelele reale, care conțin în mod obișnuit 10 000 pînă la 50 000 de „fante“, maximele secundare se găsesc atît de aproape de maximele principale sau intensitatea lor este atît de redusă încît ele nu se pot distinge experimental.

45-3 Rețele de difracție

Constanta de rețea d pentru o rețea tipică care conține 12 000 „fante“ pe inch, este de 2,54 cm/12 000, sau 21 000 Å. O întrebuințare frecventă a rețelelor este la măsurarea lungimilor de undă și studiul structurii și intensității spectrelor. Sînt puține instrumentele care au contribuit într-o astfel de măsură la progresul fizicii moderne.

Rețelele se construiesc prin trasarea unor linii paralele pe o placă de metal* sau sticlă, cu ajutorul unor trasoare cu cap de diamant ce sînt comandate automat. După prepararea unei astfel de rețele-mostră, cu ajutorul unei soluții de colodiu turnate pe rețea se pot forma duplicate prin întărirea soluției, după care aceasta se îndepărtează. Colodiul întărit pe o suprafață de sticlă sau metal formează o bună rețea de difracție.

Figura 45-6 reprezintă o secțiune printr-o rețea obișnuită trasată pe sticlă. În rețeaua rudimentară din figura 45-1, fantele transparente sînt separate de fante

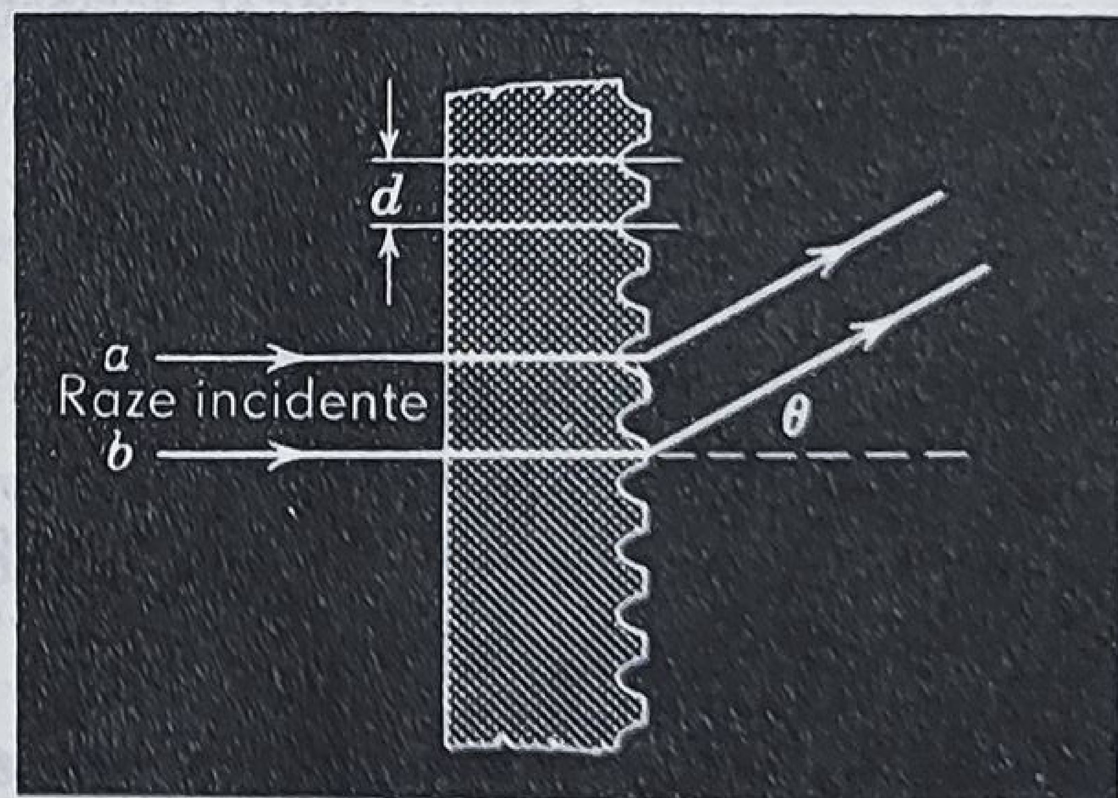


Figura 45-6. Secțiune transversală mărită printr-o rețea de difracție pe sticlă. Astfel de rețele, în care faza undei emergente se schimbă la traversarea rețelei, se numesc *rețele de fază*.

---

* Rețelele de difracție de metal se numesc „rețele prin reflexie“ deoarece efectele de interferență sînt observate prin reflexie și nu prin transmisie. Acest tip de rețele este des întîlnit în cercetări; de obicei sînt trasate pe suprafața unei oglinzi concave, ceea ce elimină necesitatea folosirii lentilelor.

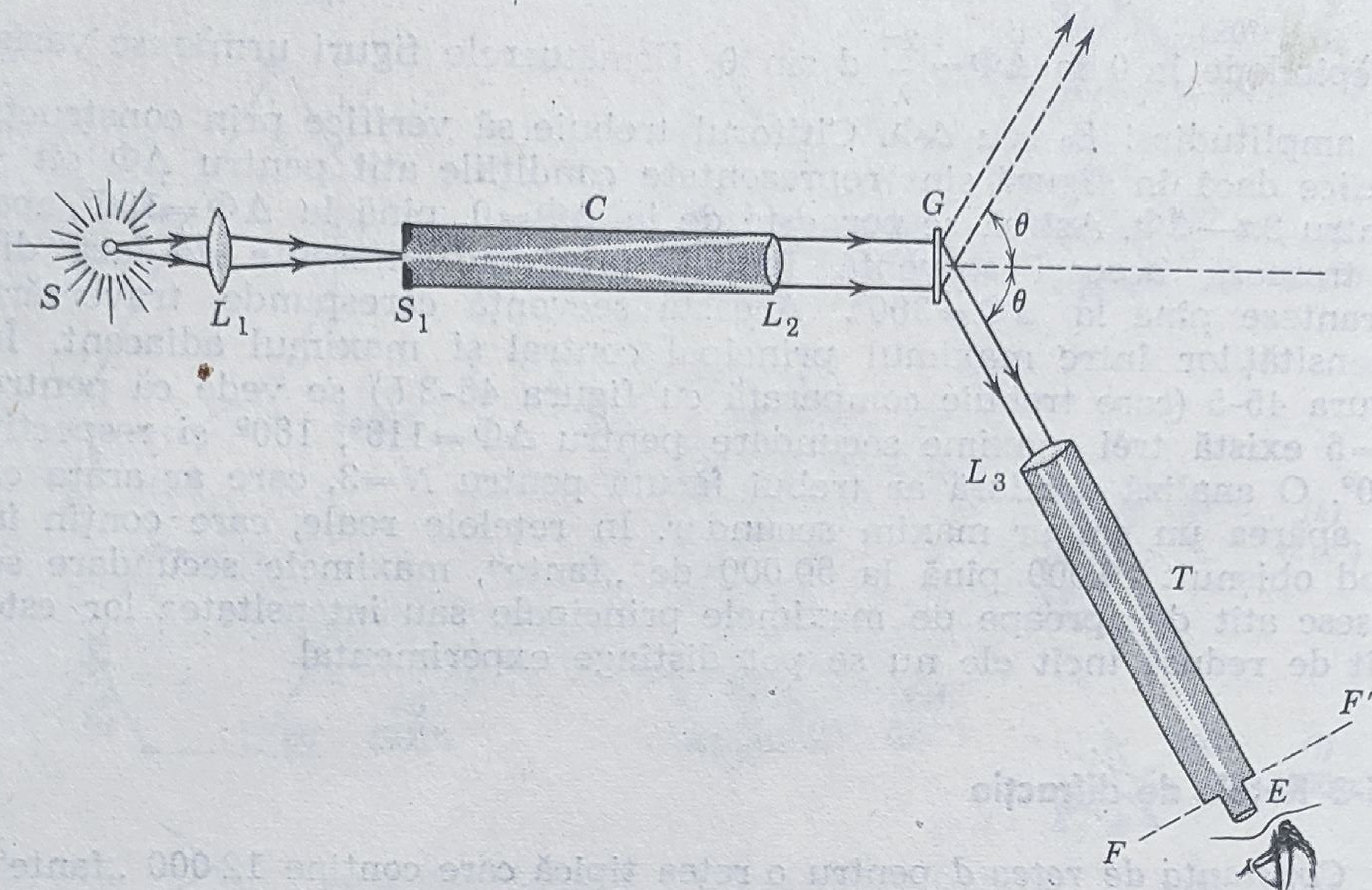


Figura 45-7. Un tip simplu de spectroscop cu rețea utilizat pentru analiza lungimilor de undă a luminii emise de sursa S.

opace, *amplitudinea*, componentei (vibrației) perceptibile varia în mod periodic la traversarea rețelei, căzînd la zero pentru fantele opace. Rețeaua din figura 45-6 este transparentă peste tot, astfel încît la traversarea rețelei se observă a variație periodică slabă a amplitudinii. Efectul trasării este acela de a schimba *grosimea optică* a rețelei în mod periodic astfel încît razele ce traversează rețeaua între liniile trasate (b în figura 45-6) conțin mai multe lungimi de undă decît cele care traversează rețeaua prin centrul acestor linii (a în figura 45-6). Aceasta va determina o schimbare periodică de *fază* la parcurgerea rețelei cu lumină perpendiculară pe liniile trasate. Pentru rețelele prin reflexie se constată de asemenea o variație periodică a fazei undei reflectate la parcurgerea rețelei, variația în amplitudine fiind neglijabilă. Maximele principale pentru aceste *rețele de fază*, presupunînd incidența normală a luminii, pot fi date de aceeași formulă mai sus stabilită pentru amplitudinea ideală a unei rețele formate din fante, și anume

$$d \sin \theta = m \lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

unde d este distanța dintre linii și m este un număr întreg numit *ordinul* unui anumit maxim principal. Practic toate rețelele folosite pentru spectrul vizibil, fie de transmisie, ca în figura 45-6, fie de reflexie, sînt rețele de fază.

Figura 45-7 reprezintă o rețea simplă de microscop, utilizată pentru vizualizarea spectrului unei surse de lumină care se presupune că emite un anumit număr de lungimi de undă, sau *linii spectrale*. Lumina ce vine de la sursa S este focalizată de către lentila L_1 pe fanta S_1 așezată în planul focal al lentilei L_2. Lumina paralelă ce merge din colimato-

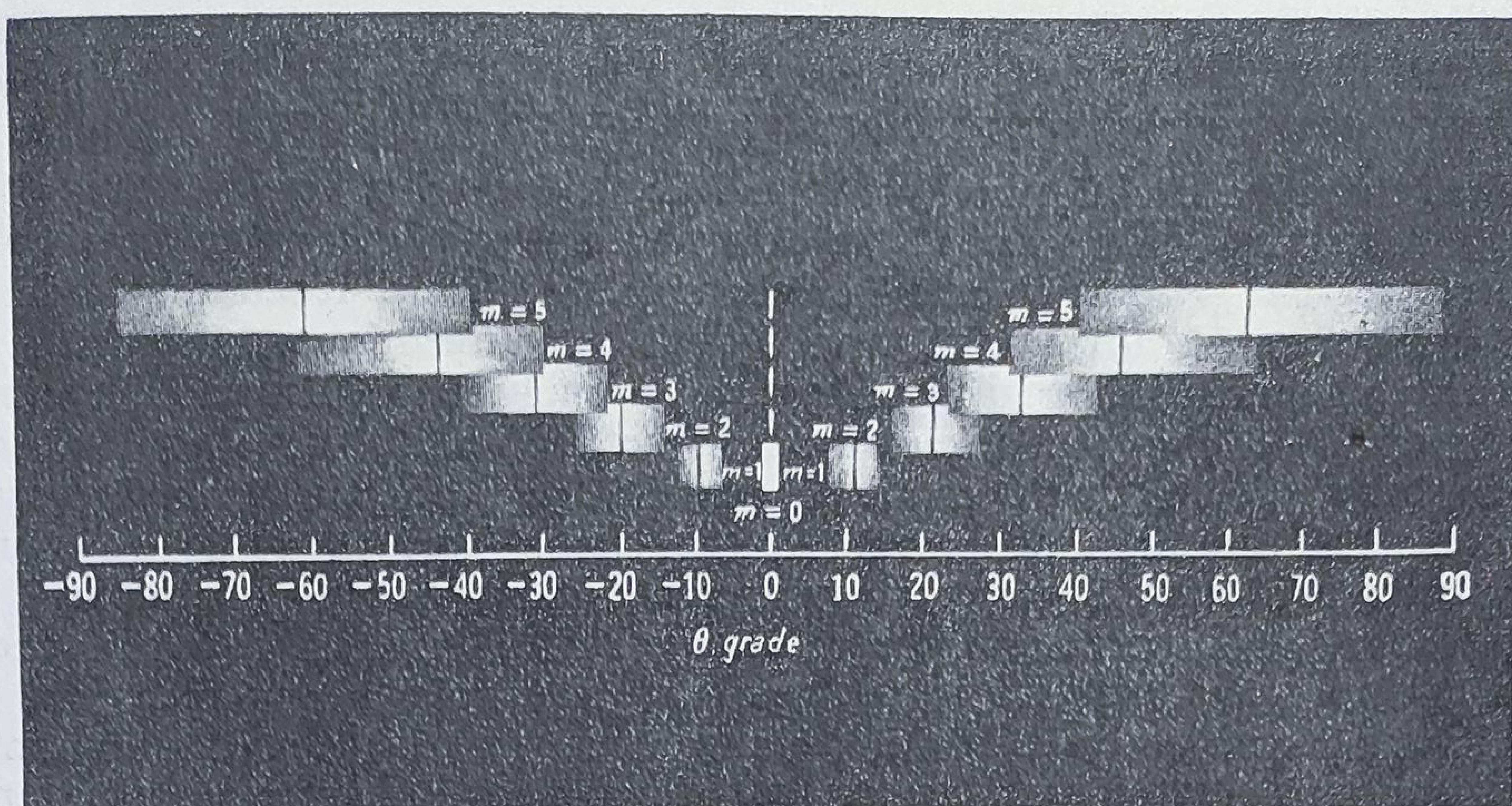


Figura 45-8. Exemplul 1. Spectrul luminii albe văzut într-un instrument cu rețea ca acela din figura 45-7. Diferitele ordine identificate de numărul de ordine *m*, sînt separate vertical, pentru claritate. În realitate, acestea nu sînt astfel deplasate. Linia centrală pentru fiecare ordin corespunde lui $\lambda = 5\,500$ Å.

rul *C* cade pe rețeaua *G*. Razele paralele asociate unui maxim de interferență dat de unghiul θ cad pe lentile L_3, fiind astfel focalizate în planul FF'. Imaginea formată în acest plan este examinată folosind un sistem de lentile *E*. În partea cealaltă a poziției centrale se formează o figură simetrică de interferență, așa cum este desenat cu linii întrerupte. Observarea întregului spectru se poate face prin rotirea telescopului *T* la diferite unghiuri. Instrumentele utilizate pentru cercetări științifice sau în industrie sînt mult mai complexe decît sistemul prezentat în figura 45-7. În mod obișnuit, sînt folosite înregistrările fotografice sau fotoelectrice, acest fel de instrumente purtînd numele de *spectrografe*. Figura 47-12 reprezintă o mică parte dintr-un spectru al fierului, obținut prin folosirea luminii produse de un arc electric dintre doi electrozi de fier, cu ajutorul unui spectrograf cu înregistrare fotografică. Fiecare linie din figură reprezintă o lungime de undă diferită a sursei.

Instrumente cu rețele de difracție sînt folosite și la măsurarea lungimii de undă, dacă constanța de rețea *d* din ecuația 45-1 poate fi măsurată cu precizie cu un microscop mobil. În astfel de instrument se formează în mod normal mai multe spectre, corespunzînd la $m = +1$, $+2$, etc. în ecuația 45-1 (vezi figura 45-8). Dacă spectrele se suprapun se pot ivi confuzii. Mai mult, aceste spectre multiple reduc intensitatea unei linii deoarece energia produsă este împărțită între aceste spectre.

Acest dezavantaj al intrumentelor cu rețea de difracție poate fi ameliorat dacă trasarea rețelei se face astfel încît o fracțiune considerabilă de lumină este trimisă pe un anumit ordin într-o anumită zonă (pentru o lungime de undă dată). Această tehnică, numită blazing, modifică proprietățile de difracție ale unei linii (prin

controlul profilelor) astfel încît lumina de lungime de undă λ difractată de o linie are un maxim pronunţat de intensitate la un anumit unghi θ ($\neq 0$).

Dacă reţeaua din figura 45-1 este înlocuită cu o prismă lumina poate fi de asemenea descompusă în elementele sale componente. Într-un *spectrograf cu prismă*, fiecare lungime de undă din fasciculul incident este refractat sub un unghi bine definit θ, determinat de indicele de refracţie al materialului prismei pentru acea lungime de undă. Curbele din figura 41-2, care dau indicele de refracţie al sticlei de cuarţ în funcţie de lungimea de undă, arată că unghiul de refracţie θ creşte odată cu scurtarea lungimii de undă. Aceste curbe variază de la substanţă la substanţă şi pot fi găsite experimental. Instrumentele cu prismă nu sînt recomandate pentru măsurări *absolute* ale lungimii de undă deoarece indicele de refracţie al materialului prismei pentru lungimea de undă considerată nu este destul de exact cunoscut. Ambele instrumente, cu prismă şi cu reţea de difracţie, sînt foarte precise pentru *compararea* lungimilor de undă, folosind un spectru de referinţă ca cel din figura 47-12, pentru care s-au făcut determinări absolute precise ale lungimilor de undă ale unui spectru de linii. Faţă de un instrument cu reţea, un instrument cu prismă are avantajul concentrării energiei într-un singur spectru, astfel încît se produc linii mai strălucitoare.

Exemplul 1. O reţea cu 8 000 linii/inch este iluminată cu lumina albă sub incidenţă normală. Să se descrie figura de difracţie. Se presupune că lungimile de undă ale luminii se găsesc între 4 000 şi 7 000 Å.

Constanta de reţea d este de 2,54 cm/8 000, sau 31 700 Å. Maximul central (de ordinul zero) corespunde valorii $m=0$ în ecuaţia 45-1. Toate lungimile de undă prezente în lumina incidentă sînt suprapuse pentru $\theta=0$, ca în figura 45-8.

Figura de difracţie de ordinul întîi corespunde lui $m=1$ în ecuaţia 45-1. Linia pentru 4 000 Å apare la un unghi dat de

$$\theta = \text{arc sin}\ \frac{m\lambda}{d} = \text{arc sin}\ \frac{(1)(4\,000\ \text{Å})}{31\,700\ \text{Å}} = \text{arc sin}\ 0{,}126 = 7{,}3^\circ$$

Unghiul pentru 7 000 Å este de 12,8°, continuînd în acelaşi mod pentru întregul spectru din figura 45-8. De notat că *spectrul de ordinul întîi* este izolat, dar spectrele de ordinele doi, trei şi patru se suprapun.

Exemplul 2. O reţea de difracţie are 10^4 linii echidistante pe 1 inch şi este iluminată sub incidenţa normală cu lumină galbenă dintr-o lampă cu vapori de sodiu. Această lumină conţine două linii foarte apropiate (binecunoscutul *dublet al sodiului*) de lungimi de undă 5 890,0 şi 5 895,9 Å. (*a*) Care este unghiul pentru care apare maximul de primul ordin al acestor lungimi de undă?

Constanta de reţea d este 10^{-4} inch, sau 25,400 Å. Maximul de ordinul întîi corespunde lui $m=1$ în ecuaţia 45-1. Astfel avem

$$\theta = \text{arc sin}\ \frac{m\lambda}{d} = \text{arc sin}\ \frac{(1)(5\,890\ \text{Å})}{25\,400\ \text{Å}} = \text{arc sin}\ 0{,}232 = 13{,}3^\circ$$

(b) Care este distanţa unghiulară dintre maximele de ordinul întîi ale acestor linii?

O cale imediată pentru aflarea acestei distanţe este repetarea calculului pentru $\lambda=5\,859{,}5$ Å şi scăderea celor două unghiuri. O dificultate, care se poate

aprecia cel mai bine efectuînd calculele este aceea că trebuie păstrat un mare număr de cifre semnificative pentru a obține o valoare semnificativă a diferenței celor două unghiuri. Pentru a calcula *direct* distanța unghiulară, să rezolvăm ecuația 45-1 în raport cu sin θ și să o diferențiem în raport cu Θ și λ:

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\cos\theta d\theta = \frac{m}{d}\, d\lambda$$

Dacă lungimile de undă sînt foarte apropiate, ca în acest caz, $d\lambda$ se poate înlocui cu $\Delta\lambda$, diferența reală între lungimile de undă; $d\theta$ devine astfel $\Delta\theta$ cantitatea pe care o căutăm. Atunci

$$\Delta\theta = -\frac{m\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{(1)(5{,}9\ \text{Å})}{(25\,400\ \text{Å})(\cos 13{,}3°)} = 2{,}4\times10^{-4}\ \text{rad} = 0{,}014°$$

De notat că, deși lungimile de undă sînt date cu 5 cifre semnificative, calculul nostru, făcut în acest fel, dă numai două sau trei, cu o reducere în consecință a preciziei.

Cantitatea $d\theta/d\lambda$, numită *dispersia* D a rețelei, este o măsură a distanței unghiulare dintre două unde incidente monocromatice cu lungimi de undă apropiate. Din acest exemplu se vede că

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}\ \frac{m}{d\cos\theta} \qquad (45\text{-}4)$$

45-4 Puterea de rezoluție a unei rețele

Pentru a putea distinge două unde de lumină cu lungimi de undă apropiate, maximele principale ale acestor unde formate de o rețea trebuie să fie cît mai înguste. Exprimat astfel, rețeaua trebuie să aibă o *putere de rezoluție R* mare, definită de

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad (45\text{-}5)$$

Aici λ este lungimea de undă medie a liniilor spectrale foarte apropiate, iar $\Delta\lambda$ este diferența lungimilor de undă. Cu cît $\Delta\lambda$ este mai mică, cu atît liniile sînt mai apropiate și totuși se pot rezolva; deci puterea de rezoluție R a rețelei este mai mare. La construirea unei rețele, o putere de rezoluție mare este unul din obiectivele principale.

Puterea de rezoluție a unei rețele este în mod obișnuit determinată cu ajutorul acelorași considerații (criteriul Rayleigh) din secțiunea 44-5 folosite pentru determinarea puterii de rezoluție a unei lentile. Dacă două maxime principale sînt foarte apropiate, distanța unghiulară $\Delta\theta$ dintre ele are o astfel de valoare încît maximul unei linii coincide cu minimul celeilalte, vezi figura 44-11. Dacă se aplică acest criteriu, se poate arăta că

$$R = Nm \qquad (45\text{-}6)$$

unde N este numărul total de linii din rețea, iar m este ordinul. Așa cum este de așteptat, puterea de rezoluție este zero pentru maximul principal central ($m=0$), toate lungimile de undă ce corespund acestui ordin nu sînt deflectate.

Să obținem ecuația 45-6. Distanța unghiulară dintre două maxime principale ale căror lungimi de undă diferă cu $\Delta\lambda$ se obține din ecuația 45-4, pe care o rescriem astfel

$$\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\theta} \qquad (45\text{-}4)$$

Criteriul lui Raygleigh (secțiunea 44-5) cere ca această distanță să fie egală cu distanța unghiulară dintre un maxim principal și minimul adiacent. Aceasta se obține din ecuația 45-3 renunțînd la indicele m în cos θ_m, astfel

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \qquad (45\text{-}3)$$

Egalînd ecuația 45-4 și 45-3 avem

$$R(=\lambda/\Delta\lambda)=Nm$$

care este relația dorită.

Exemplul 3. Cîte linii trebuie să aibă în exemplul 2 o rețea pentru a rezolva dubletul sodiului pentru ordinul al treilea.

Puterea de rezoluție este conform ecuației 45-5

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=\frac{5\,890\text{ Å}}{(5\,895{,}9-5\,890{,}0)\text{ Å}}=1\,000$$

Conform ecuației 45-6 numărul cerut de linii este

$$N=\frac{R}{m}=\frac{1\,000}{3}=330$$

Pentru o rețea, acesta este un număr modest de linii.

Puterea de rezoluție a unei rețele nu trebuie confundată cu dispersia sa. Tabelul 45-1 conține caracteristicile a trei rețele, fiecare fiind iluminată cu lumină de $\lambda=5\,890$ Å, considerînd lumina difractată pentru primul ordin ($m=1$ în ecuația 45-1).

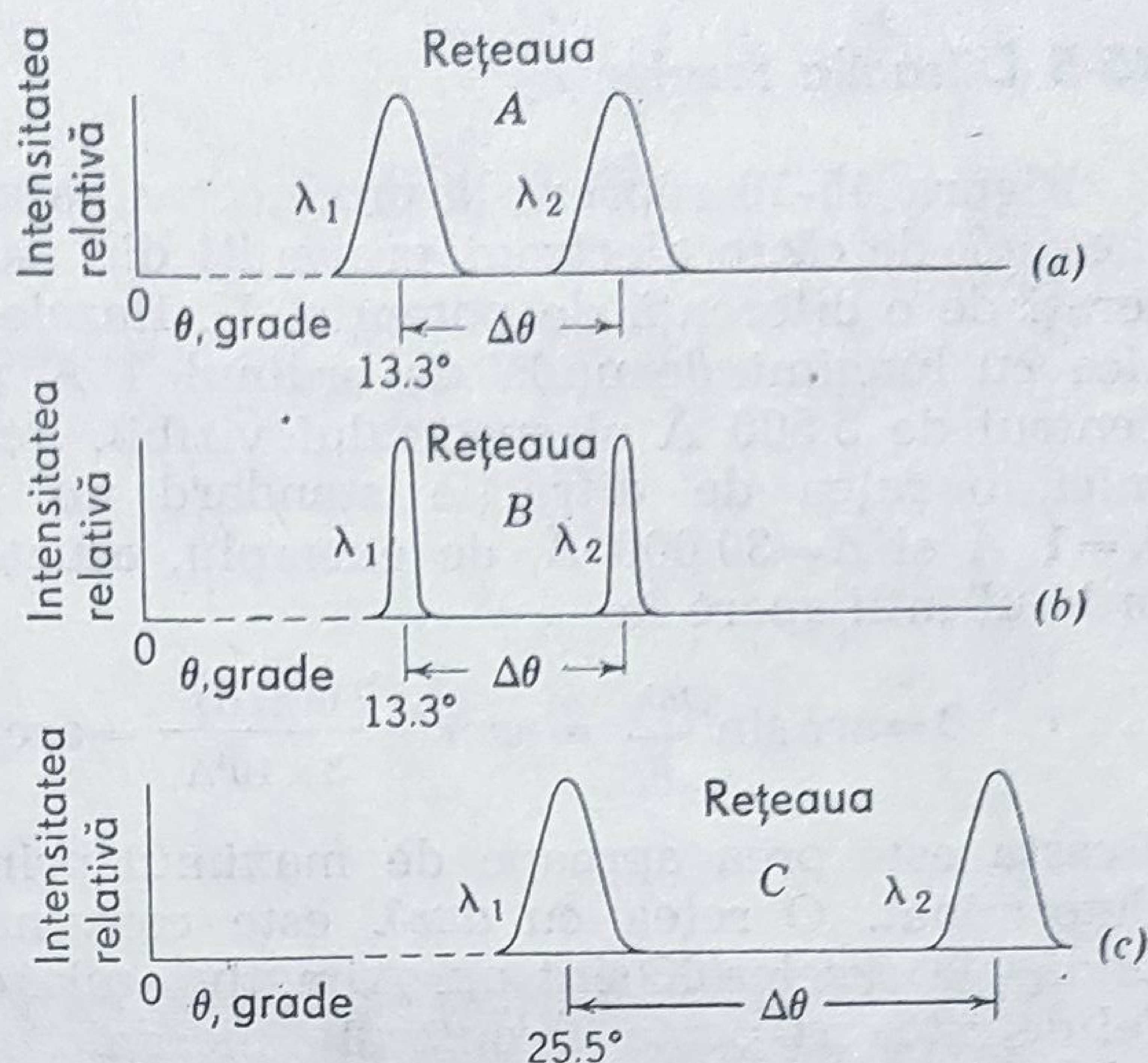
Tabela 45.1

UNELE CARACTERISTICI A TREI REȚELE DE DIFRACȚIE

($\lambda=5\,890$ Å, $m=1$)

Rețeaua	N	d, Å	θ	R	D, 10^{-3} grade/Å
A	10 000	25 400	13,3°	10 000	2,32
B	20 000	25 400	13,3°	20 000	2,32
C	10 000	13 700	25,5°	10 000	4,64

Figura 45-9. Graficele intensității pentru lumina de lungimi de undă λ_1 și λ_2 aproape de 5 890 Å, care cade pe rețelele din tabela 45-1. Rețeaua *B* are cea mai mare putere de rezoluție în C cea mai mare dispersie.



Cititorul trebuie să verifice dacă valorile pentru *D* și *R* din tabelă pot fi calculate într-adevăr din ecuația 45-4 și respectiv 45-6.

Din condițiile menționate în tabela 45-1 rețelele *A* și *B* au aceeași *dispersie*, iar *A* și *C* aceeași *putere de rezoluție*. În figura 45-9 sînt reprezentate graficele intensităților produse de aceste rețele pentru două unde incidente de lungimi de undă λ_1 și λ_2, aflate în vecinătatea lungimii de undă $\lambda=5\,890$ Å. Rețeaua *B*, care are o mare putere de rezoluție, are maximele de intensitate foarte înguste și este capabilă să distingă linii care au lungimile de undă foarte apropiate, ca cele din figura 45-9. Rețeaua *C*, care are dispersia foarte bună, produce o distanță unghiulară de două ori mai mare între razele λ_1 și λ_2 decît cea produsă de rețeaua *B*.

Exemplul 4. Rețeaua din exemplul 1 are 8 000 linii iluminate de lumină ce provine dintr-o descărcare în mercur. (*a*) Care este dispersia, pentru ordinul al treilea, în vecinătatea liniei verde intens ($\lambda=5\,460$ Å)? De notat că dacă $d=$ $=31\,700$ Å, din ecuația 45-1 avem,

$$\theta=\arcsin\frac{m\lambda}{d}=\arcsin\frac{(3)(5\,460\text{ Å})}{31\,700\text{ Å}}=\arcsin 0{,}517=31{,}1°$$

Din ecuația 45-4 avem

$$D=\frac{m}{d\cos\theta}=\frac{3}{(31\,700)(\cos 31{,}1°)}=1{,}1\cdot10^{-4}\text{ rad/Å}=6{,}3\cdot10^{-3}\text{ grade/Å}$$

(*b*) Care este puterea de rezoluție a acestei rețele pentru ordinul al cincilea? Ecuația 45-6 dă

$$R=Nm=(8\,000)(5)=40\,000$$

Astfel lîngă $\lambda=5\,460$ Å se poate distinge o diferență de lungime de undă $\Delta\lambda$ dată de ecuația 45-5, sau

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{R}=\frac{5\,460\text{ Å}}{40\,000}=0{,}14\text{ Å}$$

45-5 Difracţia razelor X

Figura 45-10 reprezintă producerea razelor X prin ciocnirea ţintei de metal T de către electroni proveniţi dintr-un filament încălzit F şi acceleraţi de o diferenţă de potenţial V. Razele X sînt radiaţii electromagnetice cu lungimi de undă de ordinul 1 Å. Comparaţi această valoare cu centrul de 5 500 Å al spectrului vizibil. Pentru lungimi de undă atît de mici, o reţea de difracţie standard nu mai poate fi utilizată. Pentru $\lambda=1$ Å şi $d=30\,000$ Å, de exemplu, ecuaţia 45-1 arată că maximul de ordinul întîi apare la

$$\theta=\arcsin\frac{m\lambda}{d}=\arcsin\frac{(1)(1\text{Å})}{3\times10^4\text{Å}}=\arcsin\ 0,33\times10^{-4}=0,002^\circ$$

Acesta este prea aproape de maximul principal pentru a fi practic de determinat. O reţea cu $d\cong\lambda$ este convenabilă, dar cum lungimile de undă ale razelor X sînt aproximativ egale cu diametrele atomice, o astfel de reţea nu poate fi construită mecanic.

În 1912, fizicianul german Max von Laue a avut ideea originală de a folosi un solid cristalin, care este format din plane regulate de atomi, drept „reţea de difracţie" pentru raze X. În figura 45-11 se vede că dacă un fascicul colimat de raze X, cu lungimile de undă uniform distribuite, cade pe un cristal ca de exemplu clorura de sodiu, apar fascicule intense ce corespunde interferenţei constructive produse de centrii difractanţi din care este format cristalul, după anumite direcţii bine definite. Dacă aceste fascicule cad pe o hîrtie fotografică, ele formează un ansamblu de „pete Laue". Figura 45-12 care este un exemplu de astfel de pete, arată că ipoteza lui Laue este într-adevăr corectă. Din poziţia şi intensitatea petelor* Laue se pot deduce poziţiile atomilor în cristal în acelaşi mod în care am putea deduce structura unei reţele optice (profilul fantelor) printr-un studiu al poziţiilor şi intensităţilor liniilor din figura de interferenţă.

În figura 45-13 se arată structura cristalului de clorură de sodiu (format din atomi de sodiu şi de clor). Această reţea, care are simetrie *cubică,* este una dintre cele mai întîlnite aranjamente ale atomilor în solide. Modelul reprezintă *celula unitate* a clorurii de sodiu. Celula uni-

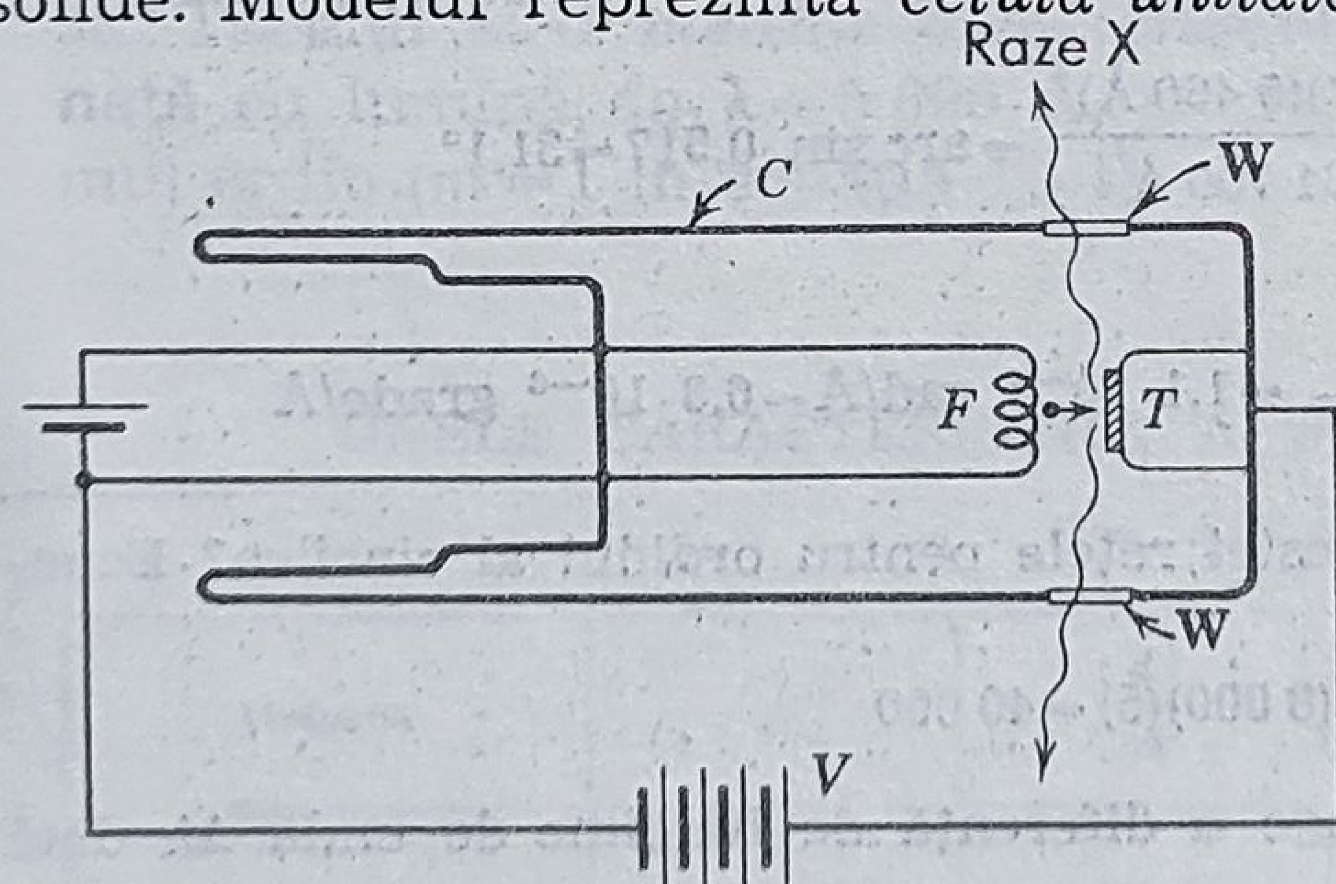
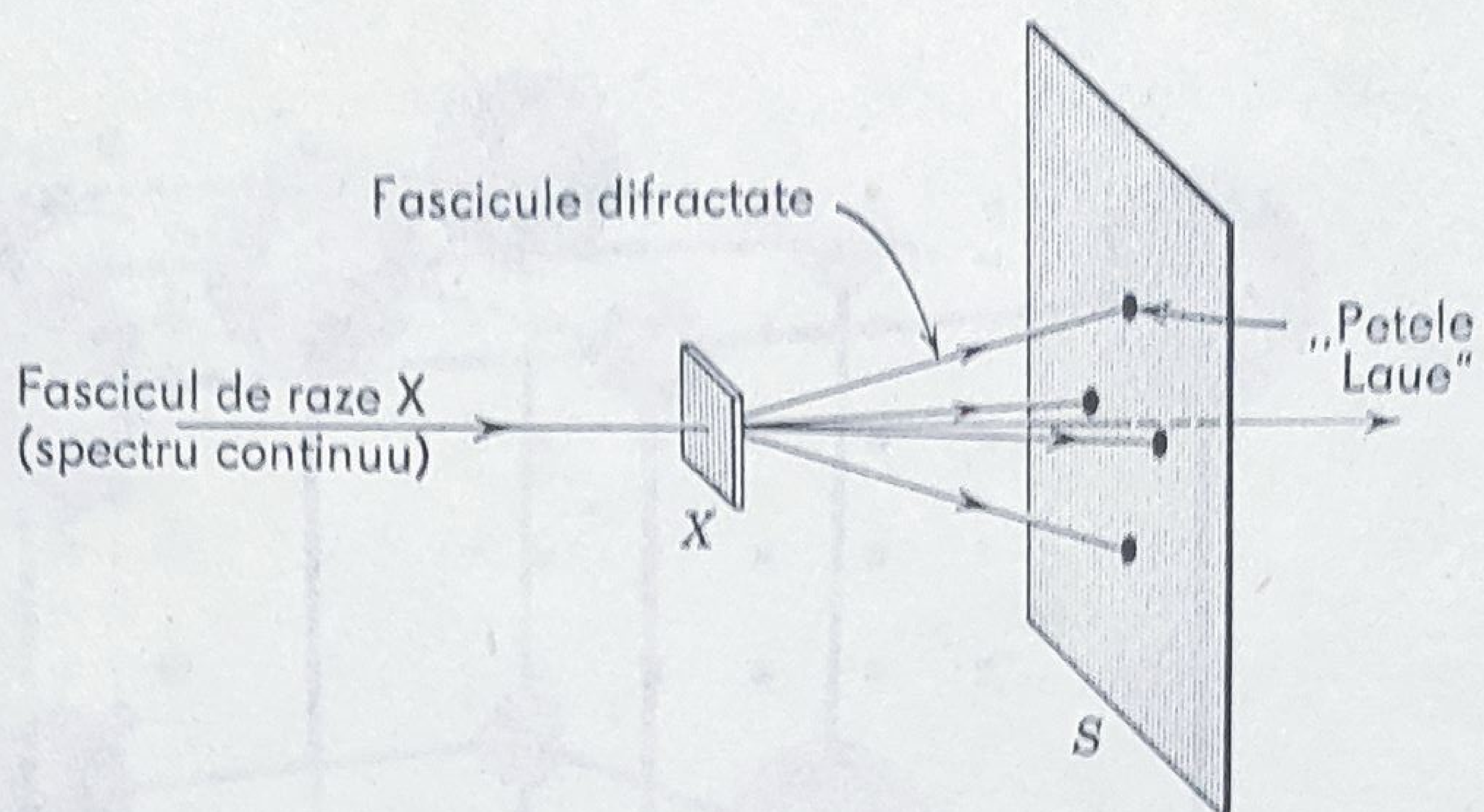


Figura 45-10. Razele X sînt generate la lovirea ţintei metalice T de către electronii ce provin din filamentul încălzit F şi acceleraţi la diferenţa de potenţial V. W este o „fereastră" — transparentă pentru razele X — în containerul vidat cu metal C.

* În prezent, tehnica Laue a fost îmbogăţită şi de alte dispozitive experimentale; totuşi principiul a rămas neschimbat.

Figura 45-11. Un fascicul monocromatic de raze X cade pe un cristal X, care poate fi NaCl. În anumite direcţii apar fascicule puternic difractate care formează aşa-numita figură Laue pe un film fotografic S.



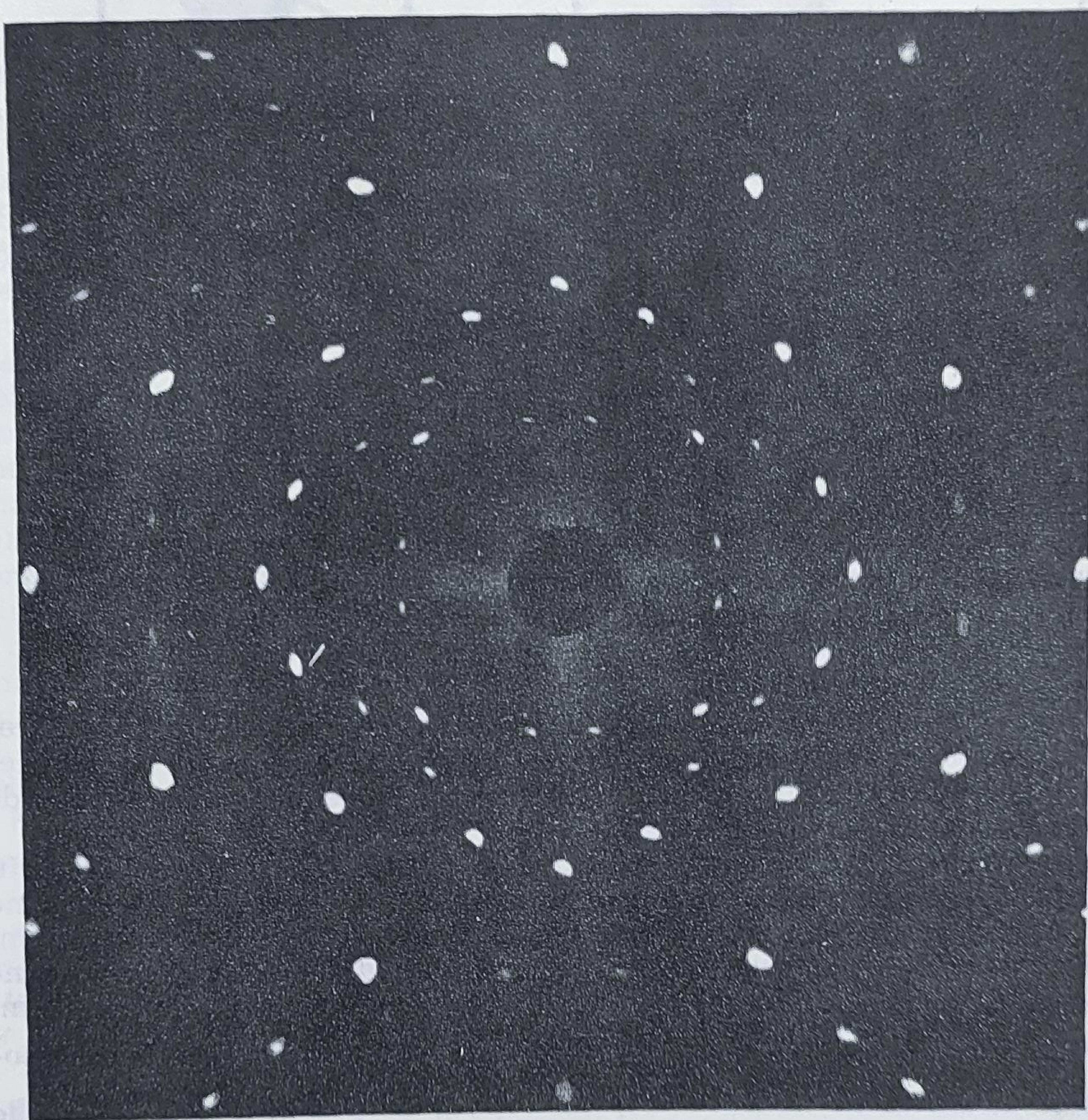


Figura 45-12. Figura de difracţie Laue pentru clorura de sodiu. A fost folosit un cristal de sare de bucătărie obişnuită. (Prin amabilitatea lui W. Arrington şi J. L. Katz, Laboratorul de raze X, Institutul Politehnic Rensselaer).

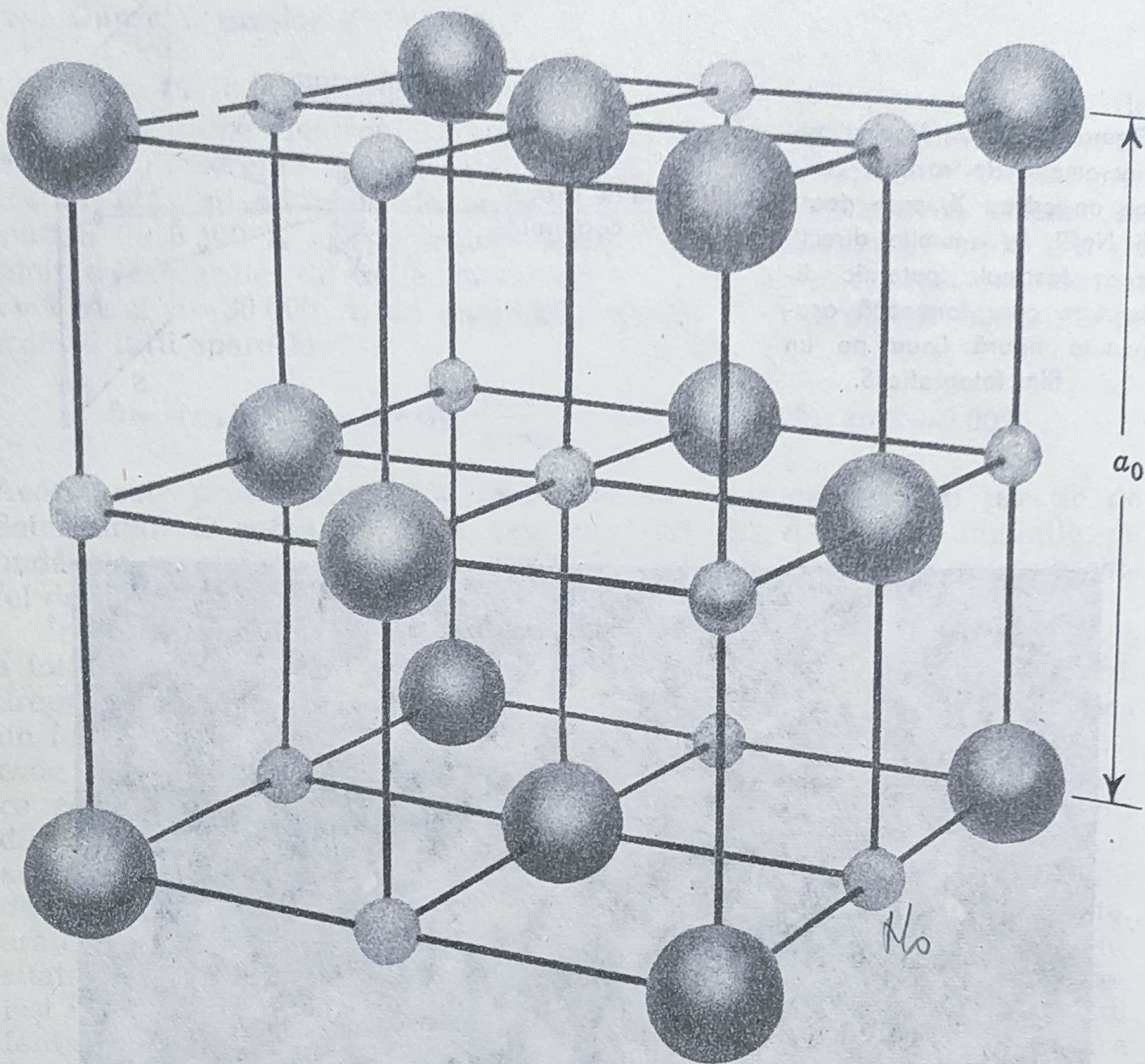


Figura 45-13. Un model ce reprezintă cum sînt îmbinați ionii Na^+ și Cl^- pentru a forma celula unitate de NaCl. Sferele mici reprezintă ionii de sodiu, cele mari clorul. Latura a_0 a celulei unitate (cubice) este de 5,62737 Å.

tate este cel mai mic element al arhitecturii unui cristal. Cititorul trebuie să verifice că nu există un ansamblu mai mic cu această proprietate. Pentru clorura de sodiu latura cubului celulei unitate este de 5,62737 Å.

În fiecare celulă a clorurii de sodiu se găsesc patru atomi de sodiu și patru atomi de clor. Ionul central de sodiu, din figura 45-13 aparține în întregime celulei prezentate. Fiecare dintre ceilalți doisprezece atomi de sodiu aparțin și celorlalte celule învecinate, astfel încît fiecare contribuie cu o pătrime la compoziția acestor celule. Numărul total de atomi de sodiu este $1+\frac{1}{4}(12)=4$. Cu ajutorul unui raționament similar, cititorul poate arăta că în figura 43-13, din totalul de patrusprezece atomi de clor, numai patru sînt asociați celulei reprezentate.

Celula unitate este unitatea periodică fundamentală de difracție: ea corespunde unei fante (și liniei opace adiacente) din rețeaua de difracție reprezentată în figura 45-1. În figura 45-14 *a* este reprezentat un

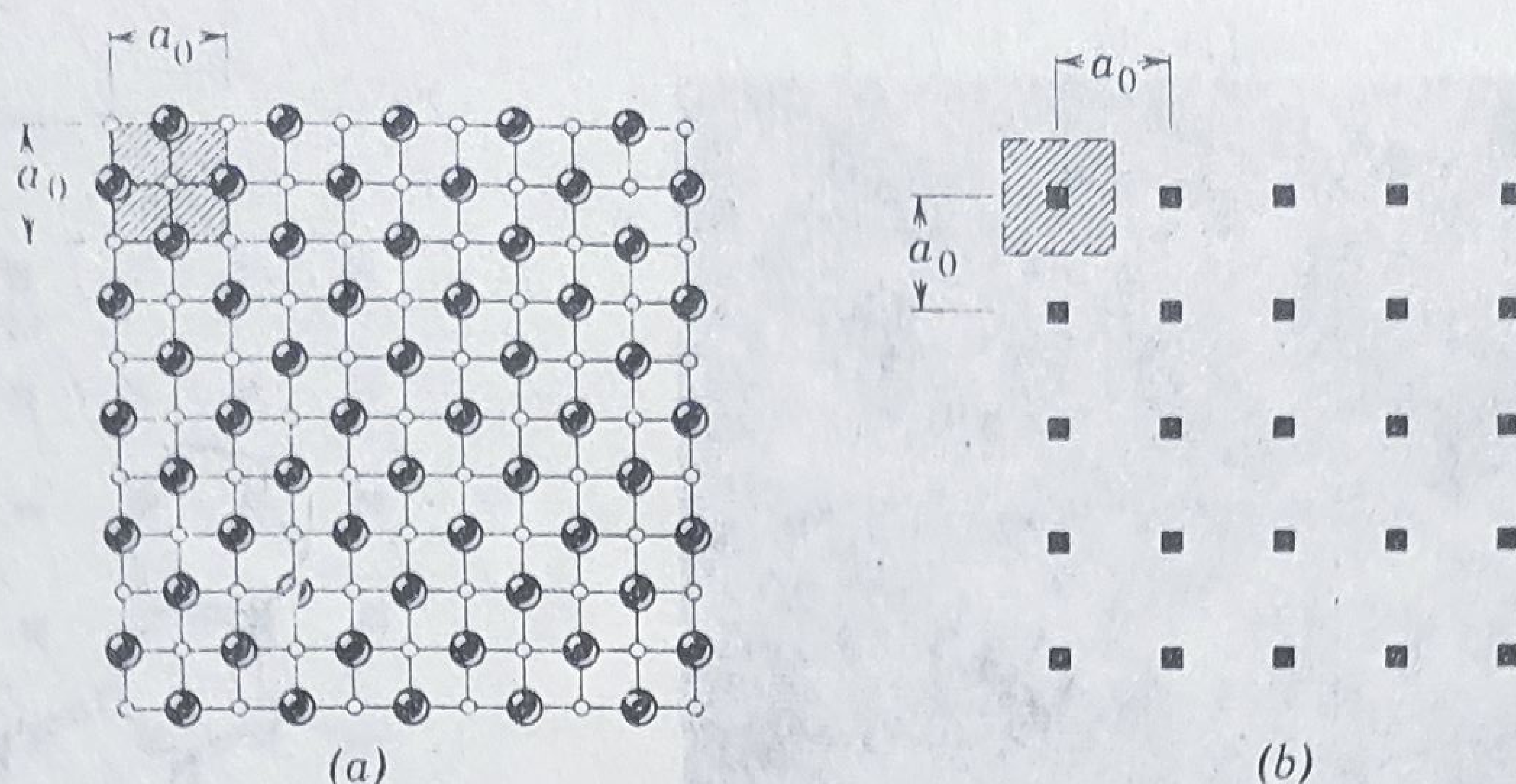


Figura 45-14. (*a*) Secţiune printr-un cristal de clorură de sodiu prezentînd ioni de sodiu şi clor. (*b*) Celulele unitate corespunzătoare, fiecare celulă fiind reprezentată de un mic pătrat negru.

plan particular în cristalul de clorură de sodiu. Dacă reprezentăm secţiunea unei celule unitate printr-un cub, rezultă figura 45-14 *b*. Cititorul trebuie să-şi imagineze fiecare dintre aceste figuri extinse în trei dimensiuni.

Să considerăm acum fiecare cub din figura 45-14 *b* ca un centru elementar de difracţie ce corespunde unei fante dintr-o reţea de difracţie. *Direcţiile* (nu şi intensităţile) tuturor fasciculelor de raze X difractate la cristalul de clorură de sodiu (pentru o lungime de undă dată şi o anumită orientare a fasciculului incident) sînt determinate de geometria reţelei centrilor de difracţie. În acelaşi mod *direcţiile* (nu şi intensităţile) tuturor fasciculelor difractate de o reţea optică (pentru o anumită lungime de undă şi o anumită orientare a fasciculului incident) erau determinate de geometria reţelei, adică de constanta reţelei, *d*. Reprezentarea celulei unitate printr-un punct, ca în figura 45-14 *b* este echivalentă cu reprezentarea fantelor dintr-o reţea de difracţie prin linii, aşa cum s-a făcut în discuţia experienţei lui Young din secţiunea 43-1.

Intensităţile liniilor produse de o reţea optică de difracţie sînt determinate de caracteristicile individuale de difracţie ale fiecărei fante (figura 44-14). În cazul ideal prezentat în figura 45-1 aceste caracteristici depind de lărgimea fantei a. În reţelele optice reale aceste caracteristici depind de forma detaliată a profilului liniilor trasate pe reţea.

În exact acelaşi mod *intensităţile* fasciculelor emergente dintr-un cristal depind de caracteristicile de difracţie ale celulei unitate*. Razele X sînt în mod fundamental difractate de către electroni, difracţia pe nuclee fiind neglijabilă în multe cazuri. Astfel, caracteristicile de difracţie ale celulei unitate depind de modul de distribuţie al electronilor în interiorul celulei. Din studiul *direcţiilor* fasciculelor de raze X difractate se poate găsi simetria de bază a unui cristal. Din studiul *intensită-*

* Pentru anumite direcţii posibile ale fasciculului emergent, din considerente de interferenţă, nu va fi găsit nici un fascicul deoarece conform caracteristicilor de difracţie ale celulei unitate energia nu este difractată în acea direcţie. În mod similar, în reţelele optice există anumite linii care, din considerente de interferenţă, pot să nu apară dacă poziţia lor prevăzută coincide cu un zero pe figura de difracţie a unei fante (vezi figura 44-12).

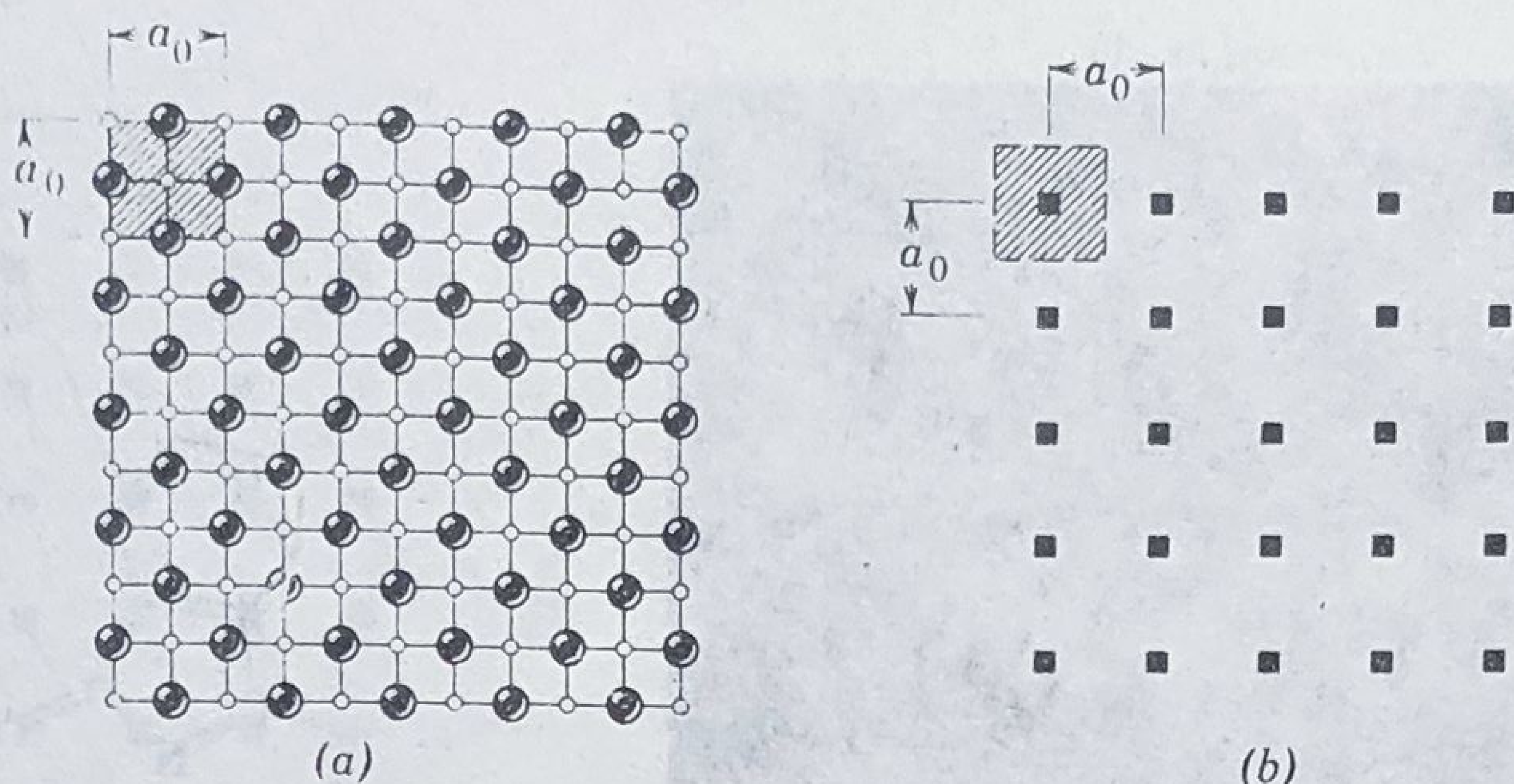


Figura 45-14. (*a*) Secţiune printr-un cristal de clorură de sodiu prezentînd ioni de sodiu şi clor. (*b*) Celulele unitate corespunzătoare, fiecare celulă fiind reprezentată de un mic pătrat negru.

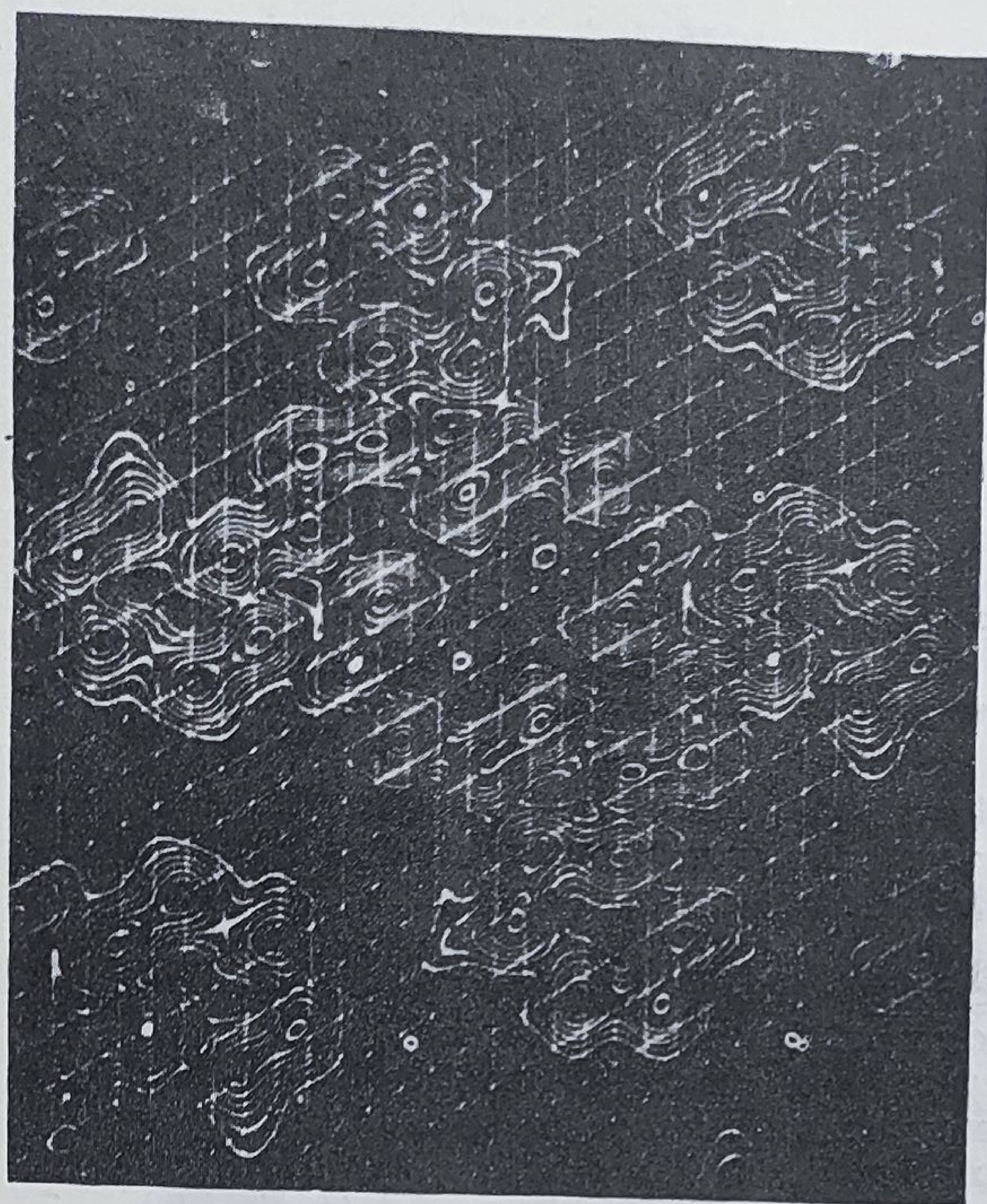
plan particular în cristalul de clorură de sodiu. Dacă reprezentăm secţiunea unei celule unitate printr-un cub, rezultă figura 45-14 *b*. Cititorul trebuie să-şi imagineze fiecare dintre aceste figuri extinse în trei dimensiuni.

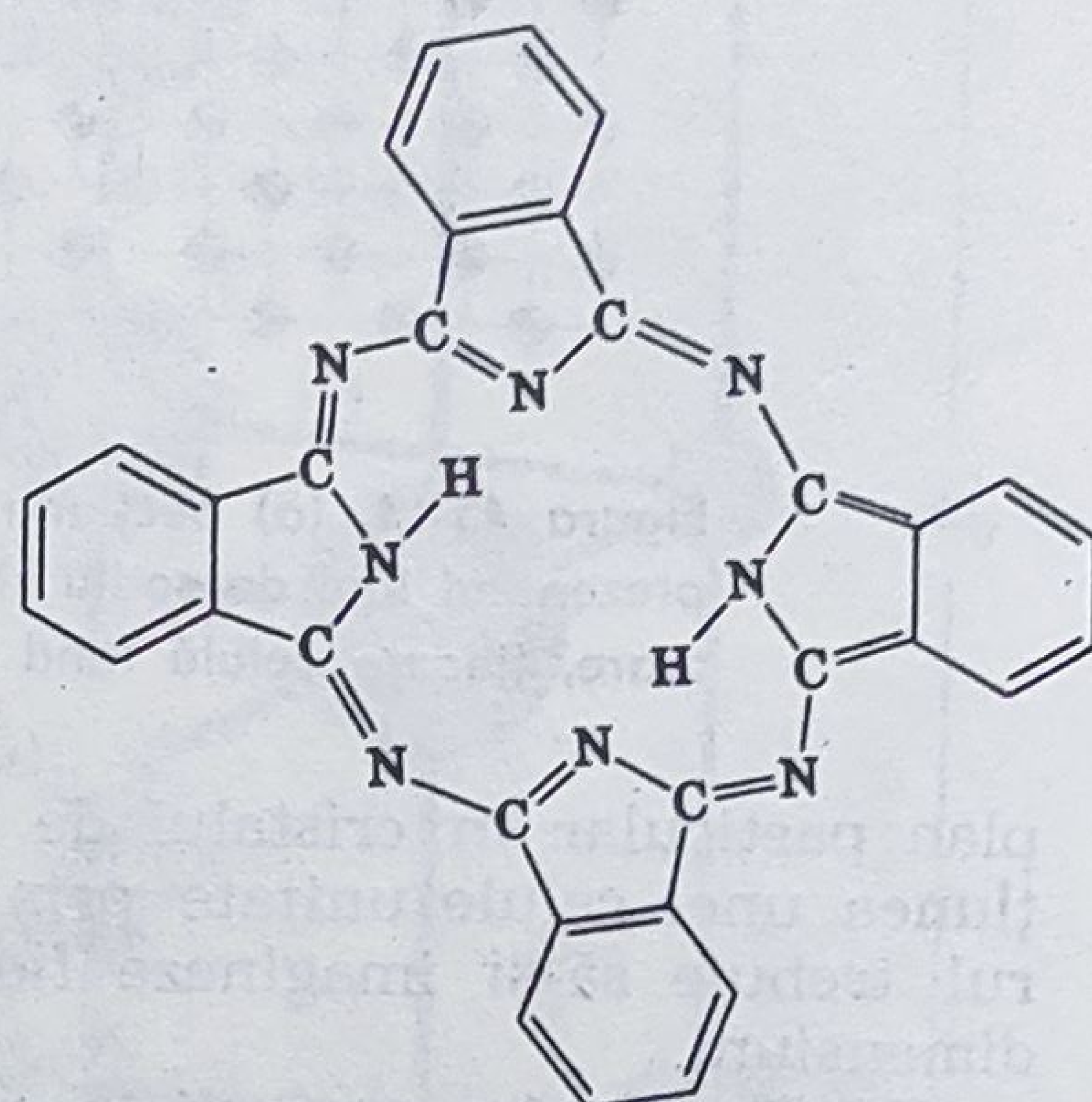
Să considerăm acum fiecare cub din figura 45-14 *b* ca un centru elementar de difracţie ce corespunde unei fante dintr-o reţea de difracţie. *Direcţiile* (nu şi intensităţile) tuturor fasciculelor de raze X difractate la cristalul de clorură de sodiu (pentru o lungime de undă dată şi o anumită orientare a fasciculului incident) sînt determinate de geometria reţelei centrilor de difracţie. În acelaşi mod *direcţiile* (nu şi intensităţile) tuturor fasciculelor difractate de o reţea optică (pentru o anumită lungime de undă şi o anumită orientare a fasciculului incident) erau determinate de geometria reţelei, adică de constanta reţelei, *d*. Reprezentarea celulei unitate printr-un punct, ca în figura 45-14 *b* este echivalentă cu reprezentarea fantelor dintr-o reţea de difracţie prin linii, aşa cum s-a făcut în discuţia experienţei lui Young din secţiunea 43-1.

Intensităţile liniilor produse de o reţea optică de difracţie sînt determinate de caracteristicile individuale de difracţie ale fiecărei fante (figura 44-14). În cazul ideal prezentat în figura 45-1 aceste caracteristici depind de lărgimea fantei a. În reţelele optice reale aceste caracteristici depind de forma detaliată a profilului liniilor trasate pe reţea.

În exact acelaşi mod *intensităţile* fasciculelor emergente dintr-un cristal depind de caracteristicile de difracţie ale celulei unitate*. Razele X sînt în mod fundamental difractate de către electroni, difracţia pe nuclee fiind neglijabilă în multe cazuri. Astfel, caracteristicile de difracţie ale celulei unitate depind de modul de distribuţie al electronilor în interiorul celulei. Din studiul *direcţiilor* fasciculelor de raze X difractate se poate găsi simetria de bază a unui cristal. Din studiul *intensită-*

* Pentru anumite direcţii posibile ale fasciculului emergent, din considerente de interferenţă, nu va fi găsit nici un fascicul deoarece conform caracteristicilor de difracţie ale celulei unitate energia nu este difractată în acea direcţie. În mod similar, în reţelele optice există anumite linii care, din considerente de interferenţă, pot să nu apară dacă poziţia lor prevăzută coincide cu un zero pe figura de difracţie a unei fante (vezi figura 44-12).





(*b*)

(*a*)

Figura 45-15. (*a*) Fotografia unui ecran de osciloscop care reprezintă conturul densității de electroni pentru ftalocianină ($C_{32}H_{18}N_8$). Astfel de curbe, construite electronic conform datelor de difracție de către un calculator analogic, sînt o descriere sugestivă a structurii moleculare. (Prin amabilitatea lui Ray Pepinsky). (*b*) Reprezentare structurală a moleculei de ftalocianină. Cititorul trebuie să facă o comparație detaliată cu (*a*), localizînd diferiți atomi identificați în (b). De observat că atomii de hidrogen, care conțin doar un singur electron, nu sînt evidenți în (*a*).

ților se poate afla care este modul de distribuție al electronilor în celula unitate. În figura 45-15 este reprezentată densitatea medie a electronilor într-un plan oarecare al cristalului de ftalocianină. Această figură sugerează puterea metodei difracției razelor X în studiul structurii solidului.

45-6. Legea lui Bragg

Legea Bragg dă condițiile de existență ale fasciculelor X difractate de un cristal. În deducția sa vom ignora structura celulei unitate, care este legată doar de intensitățile acestor fascicule. Liniile întrerupte din figura 45-16 *a* reprezintă intersecția planului figurii cu un set arbitrar de plane care trec prin centrii elementari de difracție. Distanța dintre două plane este *d*. Se pot defini multe alte familii de plane, cu *distanțe interplanare* diferite.

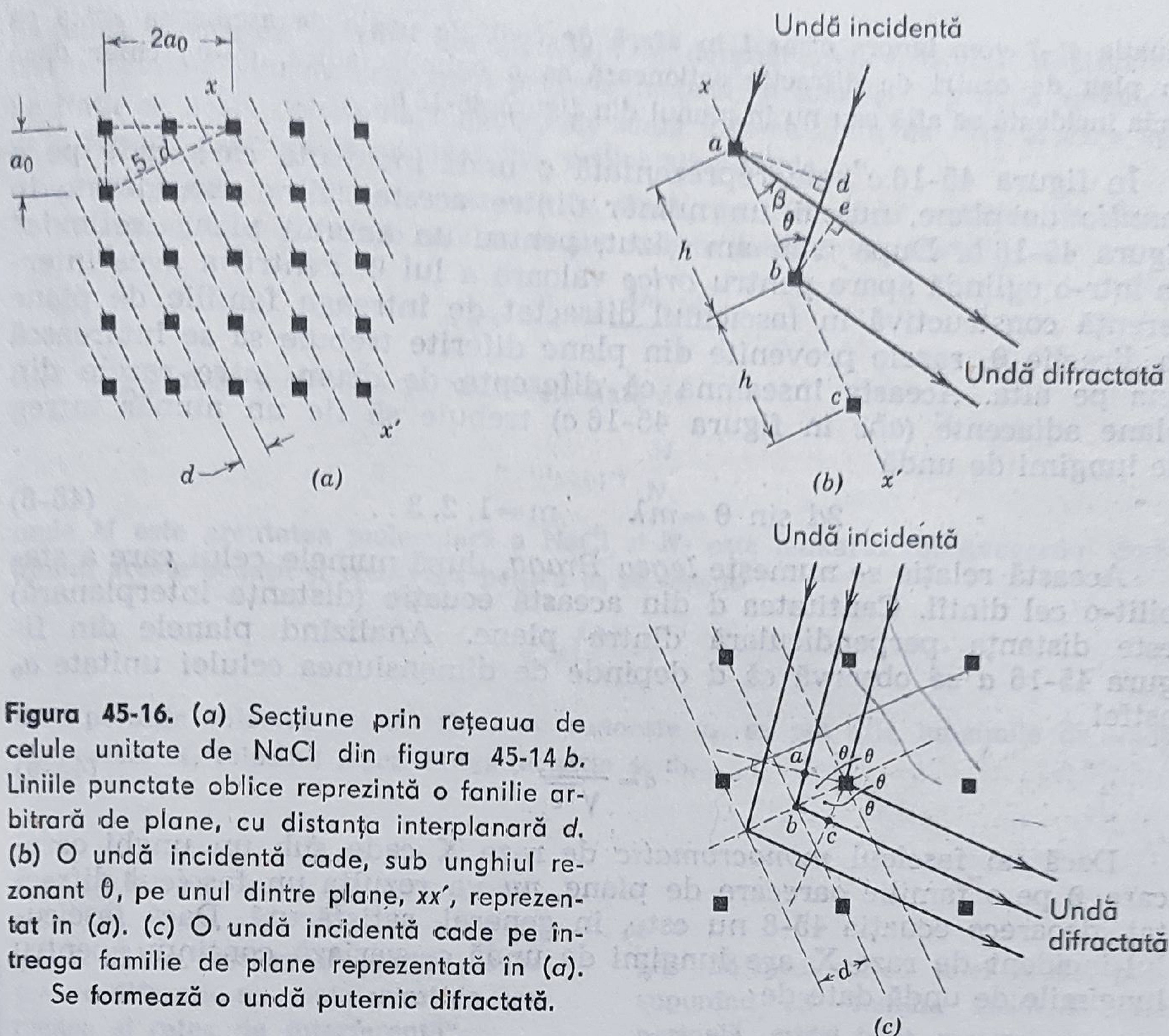


Figura 45-16. (*a*) Secțiune prin rețeaua de celule unitate de NaCl din figura 45-14 *b*. Liniile punctate oblice reprezintă o fanilie arbitrară de plane, cu distanța interplanară *d*. (*b*) O undă incidentă cade, sub unghiul rezonant θ, pe unul dintre plane, *xx′*, reprezentat în (*a*). (*c*) O undă incidentă cade pe întreaga familie de plane reprezentată în (*a*). Se formează o undă puternic difractată.

În figura 45-16 b este reprezentată o undă plană care se găsește în planul figurii și care cade pe familia de plane definită în figura 45-16 *a*, razele incidente făcînd unghiul θ cu acest plan. Să considerăm o familie de raze difractate în planul figurii 45-16 *b*, care fac unghiul β cu planul centrilor de difracție elementari. Razele difractate se vor compune pentru a da intensitate maximă dacă diferența de drum dintre razele incidente învecinate este egală cu un număr întreg de lungimi de undă, sau

$$ae - bd = h(\cos\beta - \cos\theta) = l\lambda \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \qquad (45\text{-}7)$$

Pentru $l = 0$ se obține

$$\beta = \theta$$

și planul atomilor acționează ca o oglindă pentru unda incidentă, indiferent de valoarea lui θ.

Pentru alte valori ale lui l, β nu este egal cu θ, dar fasciculul difractat poate fi considerat ca fiind „reflectat“ de o altă familie de plane, diferită de cea reprezentată în figura 45-16 *a*, cu o altă distanță interplanară *d*. Dacă dorim să descriem fiecare fascicul difractat ca fiind „reflectat“ de o familie oarecare de plane, și dacă lucrăm numai cu familia particulară de plane din figura 45-16 *a*, atunci în

ecuația 45-7 vom ignora orice l în afară de $l=0$. Se poate de asemenea arăta că un plan de centri de difracție acționează ca o oglindă (adică, $\beta=\theta$) chiar dacă unda incidentă se află sau nu în planul din figura 45-16 *b*.

În figura 45-16 *c* este reprezentată o undă incidentă care cade pe o *familie* de plane, numai un număr dintre acestea fiind considerate în figura 45-16 *b*. După cum am văzut, pentru un anumit plan, „reflexia" ca într-o oglindă apare pentru *orice* valoare a lui θ. Pentru a avea interferență constructivă în fasciculul difractat de întreaga familie de plane în direcție θ, razele provenite din plane diferite trebuie să se întărească una pe alta. Aceasta înseamnă că diferența de drum între razele din plane adiacente (*abc* în figura 45-16 *c*) trebuie să fie un număr întreg de lungimi de undă

$$2d \sin \theta = m\lambda \qquad m=1, 2, 3 \ldots \tag{45-8}$$

Această relație se numește *legea Bragg*, după numele celui care a stabilit-o cel dintîi. Cantitatea d din această ecuație (distanța interplanară) este distanța perpendiculară dintre plane. Analizînd planele din figura 45-16 *a* se observă că d depinde de dimensiunea celulei unitate a_0 astfel

$$d=\frac{a_0}{\sqrt{5}} \tag{45-9}$$

Dacă un fascicul *monocromatic* de raze X cade sub un unghi oarecare θ pe o familie oarecare de plane, *nu* va rezulta un fascicul difractat, deoarece ecuația 45-8 nu este, în general, satisfăcută. Dacă fasciculul incident de raze X are lungimi de undă ce variază continuu, pentru lungimile de undă date de

$$\lambda=\frac{qd \sin \theta}{m} \qquad m=1, 2, 3, \ldots$$

vor apare fascicule difractate.

Exemplul 5. La ce unghi trebuie să cadă un fascicul de raze X cu $\lambda=1{,}10$ Å pe o familie de plane reprezentată în figura 45-16 c pentru a exista un fascicul difractat? Presupunem un cristal de clorură de sodiu.

Distanța interplanară d este dată de ecuația 45.9

$$d=\frac{a_0}{\sqrt{5}}=\frac{5{,}63 \text{ Å}}{2{,}24}=2{,}52 \text{ Å}$$

Din ecuația 45-8 se obține

$$\sin \theta=\frac{m\lambda}{2d}=\frac{(m)(1{,}10 \text{ Å})}{(2)(2{,}52 \text{ Å})}=0{,}218 \text{ m}$$

Fasciculele difractate pot exista la $\theta=12{,}6°$ $(m=1)$ $\theta=25{,}9°$ $(m=2)$, $\theta=40{,}9°$ $(m=3)$ și $\theta=60{,}7°$ $(m=4)$. Fascicule de ordine mai mari nu pot exista deoarece $\sin \theta > 1$. Fasciculele de ordin impar ($m=1$, 3) au intensitatea zero deoarece celula unitate a cristalelor cubice, cum este și NaCl au astfel de proprietăți de difracție încît intensitatea luminii împrăștiate în aceste ordine este zero (vezi problema 26).

Difracția razelor X este un instrument prețios pentru studiul structurii cristalelor. Pentru a realiza cantitativ o astfel de analiză trebuie cunoscută lungimea

de undă a razelor X. Una din metode este determinarea mai întîi a structurii NaCl* printr-o altă metodă. Apoi printr-o metodă ce folosește difracția razelor X pe NaCl se poate determina lungimea de undă a fasciculului de raze X care apoi va fi folosită pentru determinarea structurilor altor solide.

Dacă ρ este densitatea măsurată a NaCl, pentru celula unitate din figura 45-13**, reamintim că fiecare celulă unitate conține patru „molecule".

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m_{\text{NaCl}}}{d_0^3}$$

Aici m_{NaCl}, masa moleculei de NaCl este dată de

$$m_{\text{NaCl}} = \frac{M}{N_0}$$

unde M este greutatea moleculară a NaCl și N_0 este numărul lui Avogardo. Combinînd aceste ecuații și rezolvînd pentru a_0 se obține

$$d_0 = \left(\frac{4M}{N_0\rho}\right)^{1/3}$$

care permite calculul lui a_0. Dacă se cunoaște a_0, se pot afla lungimile de undă ale razelor X, folosind legea Bragg (ecuația 45-8).

Întrebări

1. Să se discute afirmația: „O rețea de difracție se poate numi de asemenea și rețea de interferență".

2. Pentru spectroscopul simplu din figura 45-7 să se arate (a) că θ crește cu λ pentru o rețea și (b) că θ descrește cu λ pentru o prismă.

3. Se dă fotografia unui spectru pe care sînt marcate distanțele unghiulare și lungimile de undă ale liniilor spectrale. (a) Cum argumentați că spectrul a fost format fie de o prismă fie de un instrument cu rețea de difracție și (b) ce informații puteți obține despre prisma sau rețeaua respectivă studiind spectrul?

4. Presupunem că limitele spectrului vizibil sînt 4 300 și 6 800 Å. Este posibilă proiectarea unei rețele, presupunînd că lumina incidentă este normală, astfel încît spectrul de ordinul întîi să se *suprapună aproape* peste spectrul de ordinul al doilea?

5. (a) De ce o rețea de difracție are linii apropiate? (b) De ce are un număr mare de linii?

6. Relația $R=Nm$ sugerează că puterea de rezoluție a unei rețele date poate fi făcută cît de mare se dorește prin alegerea unui ordin mare de difracție. Discuție.

7. Să se arate că pentru o lungime de undă și un unghi de difracție date puterea de rezoluție depinde numai de mărimea rețelei W ($=Nd$).

---

* În practică, din anumite considerente, calcita ($CaCO_3$) se dovedește a fi un cristal standard mai folositor.

** Această relație nu poate fi scrisă dacă nu s-ar cunoaște că structura NaCl este cubică. Aceasta poate fi determinată totuși, prin inspectarea petelor din figura 45-12, lungimea de undă a razelor X nu trebuie să fie cunoscută.

8. Conform ecuaţiei 45-3 maximele principale devin mai largi (adică $\Delta\theta_m$ creşte) o dată cu creşterea ordinului m (adică cu cît θ_m devine mai mare). Conform ecuaţiei 45-6 puterea de rezoluţie creşte o dată cu creşterea lui m. Explicaţi acest aparent paradox.

9. Este figura 45-12 mai propriu interpretată ca o figură de difracţie sau de interferenţă?

10. Pentru o familie dată de plane cristaline, poate lungimea de undă a razelor X incidentă fi (a) prea mare sau (b) prea mică pentru a se forma un fascicul difractat?

11. Dacă pe un cristal orientat întîmplător cade un fascicul paralel de raze X cu lungimea de undă λ nu se obţine în general nici un fascicul difractat. Astfel de fascicule apar dacă (a) fasciculul incident conţine lungimi de undă continuu distribuite şi nu o singură lungime de undă sau (b) proba nu este un cristal mic, ci o pulbere. Explicaţi.

12. De ce nu se poate folosi un simplu cub de latură $a_0/2$ drept celulă unitate pentru clorura de sodiu? (figura 45-13).

13. Cum s-ar putea *măsura* (a) dispersia D şi (b) puterea de rezoluţie R pentru o prismă şi pentru un spectrograf cu reţea.

Probleme

1. Dîndu-se o reţea cu 4 000 linii/cm, cîte ordine se vor produce pentru întregul spectru vizibil (4 000—7 000 Å)?

2. Să se deducă următoarea expresie pentru intensitatea unei „reţele" cu trei fante:

$$I_\theta = \frac{1}{9} Im(1+4\cos\Phi+4\cos^2\Phi),$$

unde

$$\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Se presupune că $a \ll d$ şi se va lua ca model formula pentru două fante (ecuaţia 43-9).

3. (a) Folosind rezultatul din problema 2, să se arate că semi-lărgimea franjelor într-o figură de difracţie pentru trei fante, presupunînd θ destul de mic astfel încît $\sin\theta \approx \theta$ este

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{3{,}2\, d}$$

(b) Să se compare cu expresia obţinută prin figura formată de două fante. Problema 10, capitolul 43. (c) Pe baza acestor rezultate se poate trage concluzia că pentru o distanţă dată între fante maximele de interferenţă devin mai înguste cu cît creşte numărul de fante?

4. Folosind rezultatul din problema 2, să se arate că pentru o „reţea" de trei fante se formează un singur maxim secundar. Să se găsească poziţia sa relativă precum şi intensitatea sa.

5. O reţea proiectată pentru utilizarea în regiunea infraroşie a spectrului electromagnetic este „blazed" pentru $\lambda = 80\,000$ Å. Dacă pe această reţea cade lumină vizibilă (4 000 Å $< \lambda <$ 7 000 Å), ce aparenţă vizuală vor avea fasciculele difractate?

6. Maximul central de intensitate format de o reţea, împreună cu maximele secundare, pot fi privite ca o figură de interferenţă a unei „fante" de lărgime egală cu dimensiunea reţelei. Tratînd reţeaua ca pe o singură fantă, presupunînd $m=0$ şi folosind metodele din secţiunea 44-4, să se arate că se poate obţine ecuaţia 45-2.

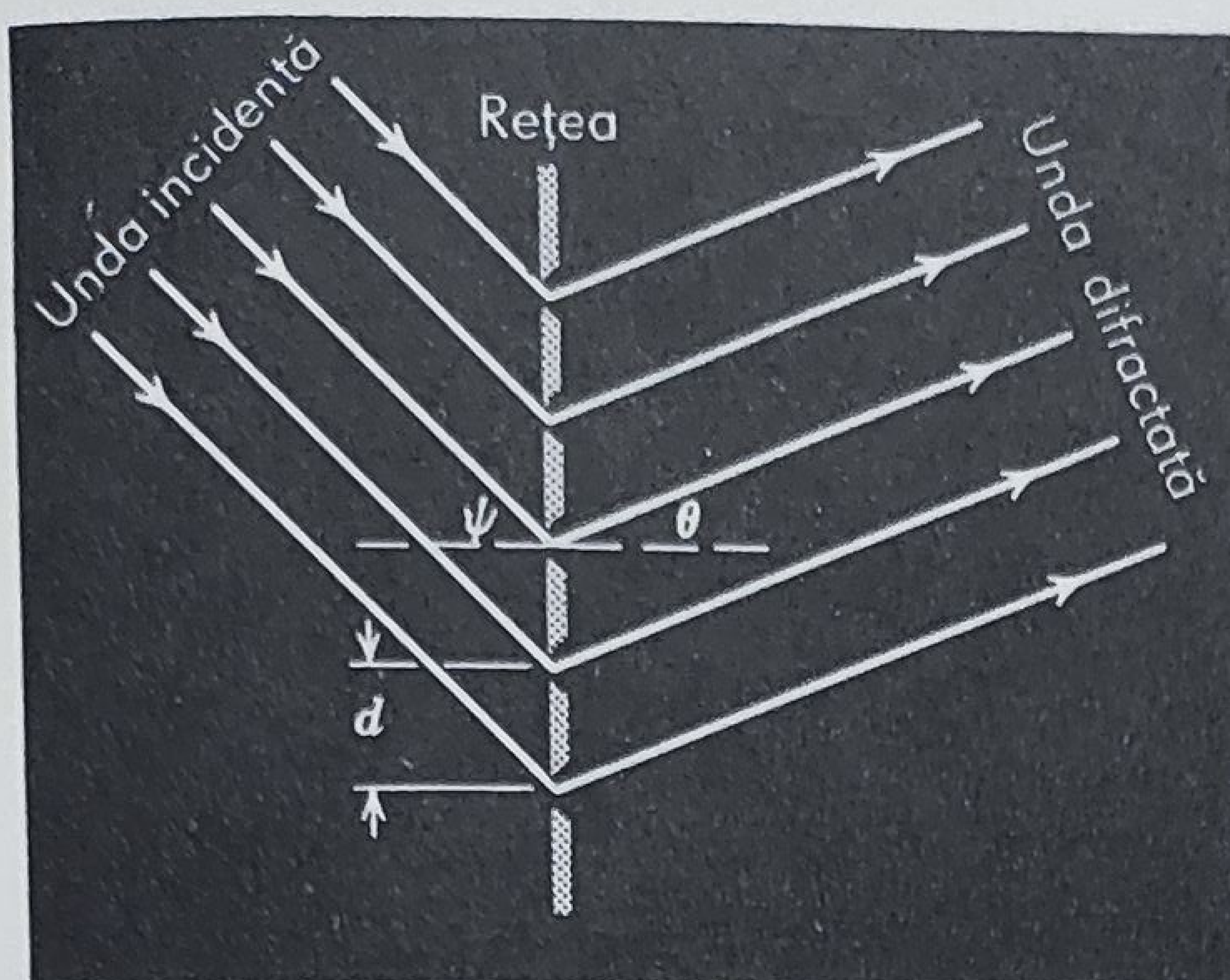


Figura 45-17.

7. O rețea are 3 000 linii/cm. Pentru ce lungimi de undă din spectrul vizibil se poate observa o difracție de ordinul cinci?

8. O rețea de difracție are 2 000 linii/ cm. La $\theta=30°$ se observă un fascicul difractat puternic. (a) Care sînt lungimile de undă posibile ale luminii incidente? (b) Cum le puteți identifica într-un caz real?

9. O rețea de difracție de 2,0 cm are 6 000 linii. La ce unghiuri vor apărea fascicule de intensitate maximă dacă radiația incidentă are lungimea de undă de 5 890 Å?

10. Să presupunem că limitele spectrului continuu sînt 4 300 și 6 800 Å. Să se proiecteze o rețea care să producă un spectru de ordinul întîi în interiorul unui unghi de 20°.

11. O rețea are 3 000 linii/cm și este iluminată cu lumină albă sub incidență normală. Se formează un spectru la 30 cm depărtare de rețea. Dacă în ecran se face un orificiu pătrat cu latura de 1,0 cm avînd latura dinspre maximul central la 5,0 cm de acesta, ce ordin de mărime au lungimile de undă care trec prin orificiu?

12. Pe o rețea cade lumină sub un unghi ψ (figura 45-17). Să se arate că pentru un maxim de difracție există condiția

$$d(\sin\psi+\sin\theta)=m\lambda$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

În acest capitol a fost tratat doar cazul $\psi=0$ (vezi ecuația 45-1).

13. Să se arate că într-o rețea cu benzi alternativ transparente și opace de lărgime *egală* sînt absente toate ordinele pare (în afară de $m=0$).

14. O rețea de transmisie cu $d=1{,}50\times10^{-10}$ cm este iluminată, sub diferite unghiuri de incidență, cu lumină de lungime de undă de 6 000 Å. Să se facă graficul deviației unghiulare al fasciculului difractat față de fasciculul incident, în funcție de unghiul de incidență (între 0 și 90°).

15. Să se deducă ecuația 45-3, adică expresia pentru $\Delta\theta_m$, distanța unghiulară între maximul principal de ordinul m și celelalte minime adiacente.

16. O rețea cu trei fante are constanta de rețea d. Dacă fanta centrală ar fi acoperită, semilărgimea maximelor de intensitate s-ar mări sau s-ar micșora? Vezi problema 3 și de asemenea, problema 10, capitolul 43.

17. O rețea are 15 000 linii/cm. (a) Care este dispersia sa, D pentru lumină de sodiu ($\lambda=5\,890$ Å) pentru primele trei ordine? (b) Care este puterea sa de rezoluție pentru aceste ordine?

18. Într-o rețea oarecare dubletul sodiului (vezi exemplul 2) este văzut în ordinul al treilea la 80° față de normală și este foarte puțin rezolvat.

Să se găsească (a) constanta de rețea și (b) lărgimea totală a liniilor rețelei.

19. O sursă care conține un amestec de hidrogen și deuteriu emite un dublet roșu pentru $\lambda = 6\,563$ Å, separat de 1,8 Å. Să se găsească numărul minim de linii al unei rețele care să rezolve aceste linii în primul ordin.

20. Să se arate că dispersia unei rețele se poate scrie astfel

$$D = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\lambda}$$

21. O rețea are 6 000 linii/cm și lărgimea de 6,0 cm. (a) Care este cel mai mic interval de lungimi de undă care poate fi rezolvat în ordinul al treilea pentru $\lambda = 5\,000$ Å? (b) Pentru această lungime de undă și pentru această rețea rezoluția poate fi îmbunătățită? Cum?

2. Pe o rețea cade sub incidență normală lumină cu două lungimi de undă, 5 000 și 6 000 Å. Se cere (1) ca primul și al doilea maxim principal pentru fiecare lungime de undă să apară la $\theta \leqslant 30°$, (2) dispersia să fie cît mai bună, și (3) să lipsească al treilea ordin pentru 6 000 Å. (a) Care este distanța între două fante adiacente? (b) Care este cea mai mică lărgime individuală a fantelor? (c) Să se numească *toate* ordinele care apar de fapt pe ecran pentru 6 000 Å cu valorile aflate în (a) și (b).

23. Lumina cu lungimea de undă de 6 000 Å cade normal pe o rețea de difracție. Două maxime principale adiacente apar respectiv la $\sin\theta = 0{,}2$ și $\sin\theta = 0{,}3$. Al patrulea ordin lipsește. (a) Care este separarea dintre fantele adiacente? (b) Care este cea mai mică lărgime posibilă a uneia dintre fante? (c) Găsiți care sînt *toate* ordinele ce apar efectiv pe ecran cu valorile alese în (a) și (b).

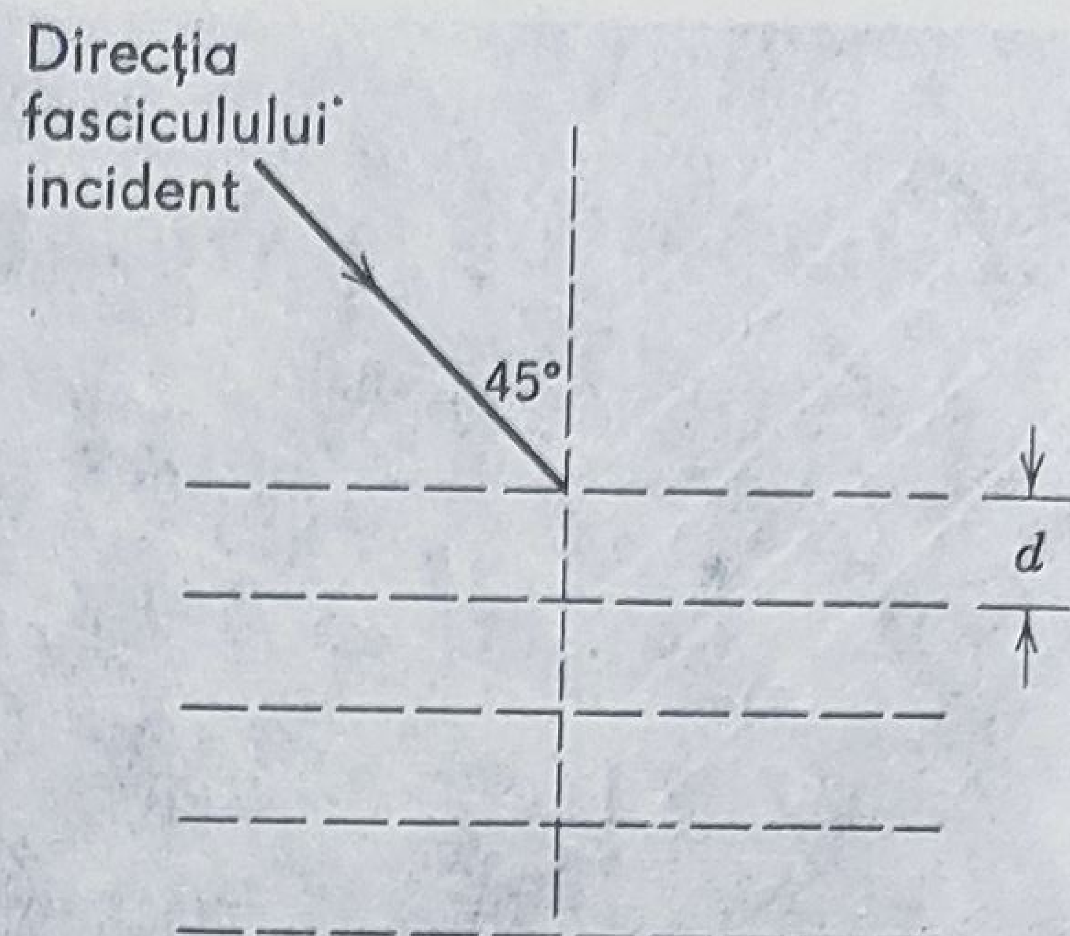


Figura 45-18.

24. O rețea optică cu $d = 15\,000$ Å se folosește pentru analiza razelor X moi cu lungimea de undă $\lambda = 5{,}0$ Å. Unghiul de incidență θ este $90° - \gamma$, unde γ este un unghi *mic*. Maximul de ordin 1 se găsește la unghiul $\theta = 90° - 2\beta$. Ce valoare are β.

25. Raze X monocromatice ($\lambda = 1{,}25$ Å) cad pe un cristal de clorură de sodiu, făcînd un unghi de 45° cu linia de referință din figura 45-18. Planele arătate sînt cele din figura 45-16 *a*, pentru care $d = 2{,}52$ Å. Cu ce unghiuri trebuie rotit cristalul pentru a da un fascicul difractat asociat cu aceste plane? Presupuneți că se rotește cristalul în jurul unei axe ce este perpendiculară pe planul paginii. Ignorați posibilitatea (vezi problema 20) ca anumite fascicule să fie de intensitate nulă.

26. *Ordine ce lipsesc în difracția de raze X.* În exemplul 5 fasciculul cu $m = 1$, permis prin considerații de interferență are intensitatea zero datorită proprietăților de difracție ale celulei unitate pentru această geometrie a fasciculului și a cristalului. Arătați acest lucru. (Indicație: arătați că „reflexia" pe un plan atomic din partea de sus a stratului de celule ele-

mentare este anulată de „reflexia“ pe planul ce trece prin mijlocul stratului. Toate fasciculele de ordin impar se dovedesc a avea intensitate zero).

27. Presupuneţi că fascicolul incident de raze X din figura 45-18 nu este monocromatic ci conţine lungimi de undă în banda 0,95 la 1,30 Å. Vor apărea fascicule difractate asociate cu planele din figură? Luaţi $a_0 = 2{,}75$ Å.

28. Comparînd lungimile de undă a două linii de raze X monocromatice, e de notat că linia A dă un maxim de reflexie de ordinul întîi la un unghi de 30° cu una din feţele netede ale cristalului. Linia *B*, cu lungimea de undă cunoscută de 0,97 ångstromi, dă un maxim de reflexie de ordinul trei la 60° cu aceeaşi faţă a cristalului. Găsiţi lungimea de undă a liniei *A*.

Capitolul 46

Polarizarea luminii

46-1 Polarizare

Lumina, ca orice radiație electromagnetică, este, în conformitate cu teoria electromagnetică, *o undă transversală,* direcțiile de oscilație ale vectorilor electric și magnetic fiind perpendiculare pe direcția propagării și nu paralele ca într-o undă longitudinală. Undele transversale din figurile 46-1 și 39-11 au în plus caracteristica de a fi *plan polarizate.* Acesta înseamnă că oscilațiile vectorului $\vec{E}$ sînt paralele între ele în orice punct al undei. În orice astfel de punct vectorul oscilant $\vec{E}$ și direcția de propagare formează un plan, numit *plan de oscilație;* într-o undă polarizată plan toate aceste plane sînt paralele.

Natura transversală a undelor luminoase nu poate fi dedusă din experiențele de difracție sau interferență descrise mai înainte deoarece și undele longitudinale, ca de exemplu undele sonore, prezintă de asemenea aceleași efecte. O bază experimentală pentru dovedirea naturii

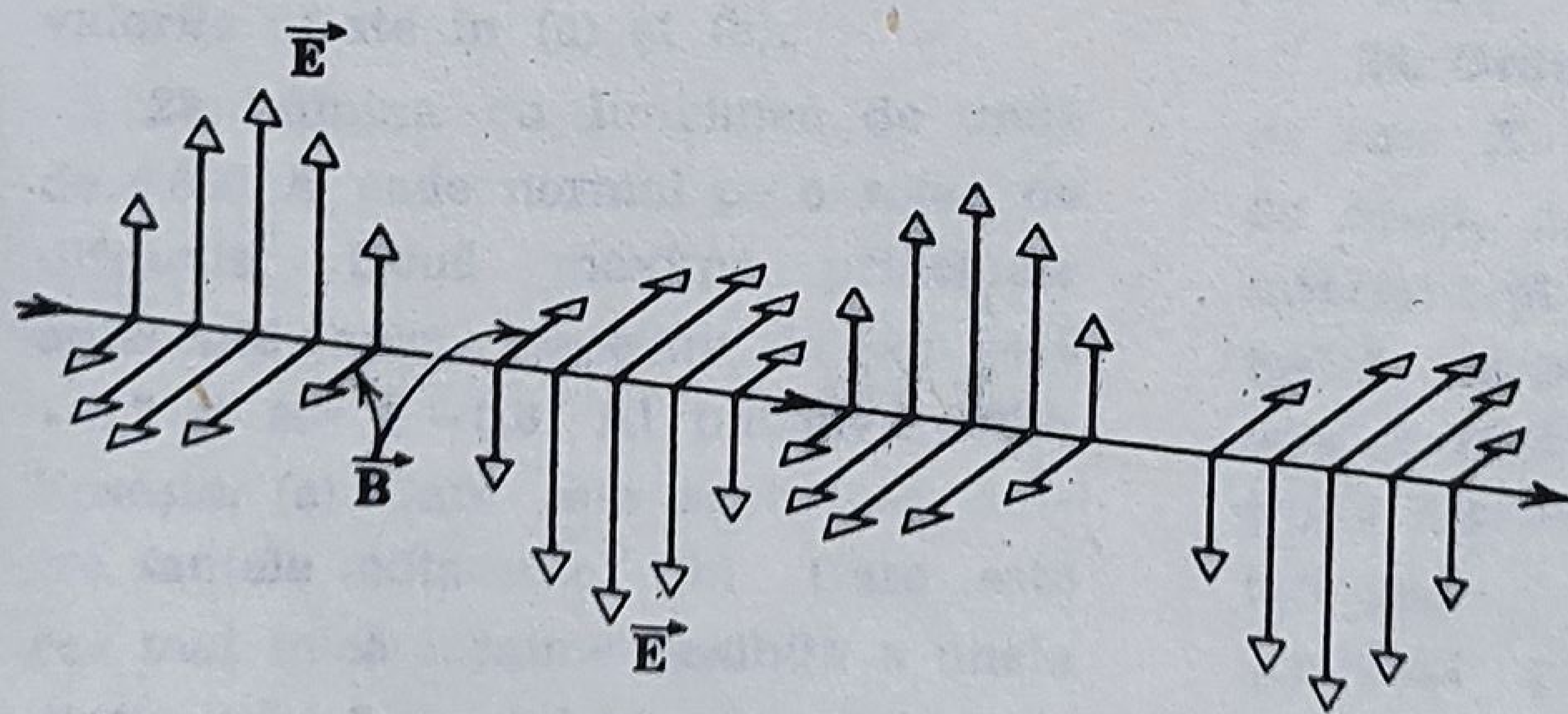


Figura 46-1. Un „Instantaneu" al unei unde plan polarizate prezentînd vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pentru o rază particulară. Unda se deplasează la dreapta cu viteza c. Planul care conține vectorul oscilant $\vec{E}$ și direcția propagării este *planul de oscilație.*

transversale a undelor luminoase a fost adusă în 1817 de către Thomas Young. Doi dintre contemporanii săi, Dominique-François Arago (1786—1853) și Augustin Jean Fresnel (1788—1827) au reușit, lăsînd un fascicul să cadă pe un cristal de calcită, să producă două fascicule. În mod surprinzător, aceste fascicole nu au produs franje de interferență cu toate că erau coerente; s-a produs doar o iluminare uniformă. Young a dedus din aceasta că lumina trebuie să fie o undă transversală și că planele de oscilație în cele două fascicule trebuie să fie perpendiculare unul pe altul. Vibrațiile care sînt perpendiculare una pe alta nu pot produce efecte de interferență; cititorul este rugat să dovedească aceasta în problema 9. Cuvintele lui Young către Arago au fost acestea:

> Am reflectat la posibilitatea de a da o explicație imperfectă a acelei caracteristici a luminii care este polarizarea fără să mă îndepărtez de teoria ondulatorie. În această teorie există un principiu potrivit căruia toate vibrațiile se propagă prin medii omogene în suprafețe sferice ca vibrațiile sunetului, ce sînt constituite din simple mișcări înainte și înapoi ale particulelor în direcția razei concomitent cu comprimări și rarefieri (adică, unde longitudinale), Astfel, în această teorie există posibilitatea explicării unei vibrații transversale, ce se propagă de asemenea în direcția razei, cu aceeași viteză, mișcările particulelor urmărind o anumită direcție constantă față de rază; aceasta este o *polarizare*.

De notat că Young prezintă posibilitatea unei oscilații transversale drept o idee nouă, lumina fiind în general — dar incorect — presupusă a fi o oscilație longitudinală.

Într-o undă transversală plan polarizată este necesară specificarea a două direcții, cea a vibrației (fie, $\vec{E}$) și cea a propagării. Într-o undă longitudinală aceste direcții sînt identice. În undele transversale plan polarizate, dar nu și în undele longitudinale, ne putem astfel aștepta la o lipsă de simetrie față de direcția de propagare. Undele electromagnetice din domeniul radio și microunde prezintă o astfel de lipsă de simetrie. O astfel de undă, generată de oscilația unei sarcini în dipolul format de antena din figura 46-2, are (la distanțe mari față de dipol și perpendicular pe acesta) vectorul cîmp electric paralel cu axa acestuia. Cînd această undă plan polarizată cade pe un alt dipol conectat la un detector de microunde, componente alternativă din undă va face ca electronii să oscileze în antene receptoare, producînd un semnal în detector. Dacă întoarcem antena receptoare la 90° față de direcția de propagare, indicația detectorului va fi zero. Într-o astfel de orientare vectorul cîmp electric nu poate mișca sarcina în lungul axei dipolului deoarece este perpendicular pe aceasta. Putem reproduce experiența din figura 46-2 întorcînd antena unui televizor (considerată ca dipol electric) la 90° față de o axă orientată spre stația de transmisie.

Sursele obișnuite de lumină vizibilă diferă de sursele de unde radio și microunde prin aceea că oscilatorii elementari, adică atomii și moleculele, acționează independent. Lumina ce se propagă într-o anumită

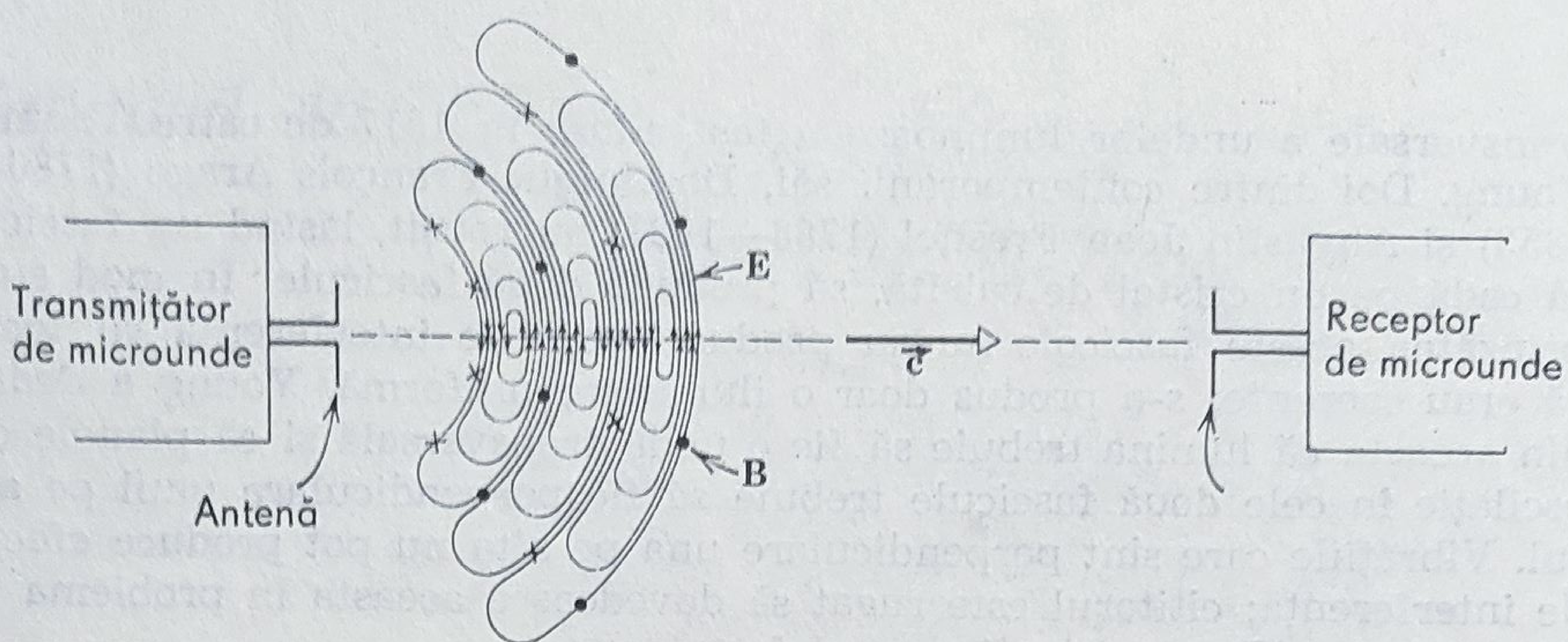


Figura 46-2. În unda transmisă, vectorii E sînt paraleli cu axa antenei receptoare astfel încît unda va fi detectată. Dacă antena este rotită cu 90° în jurul direcţiei de propagare, nu se va detecta nici un semnal.

direcţie consistă din termeni de undă ale căror planuri de oscilaţie sînt orientate întîmplător faţă de direcţia de propagare, ca în figura 46-3 *b*. Astfel de lumină, cu toate că este transversală, este *nepolarizată*. Orientarea întîmplătoare a planelor de oscilaţie produce simetrie faţă de direcţia propagării, ceea ce, într-un studiu superficial, ascunde adevărata natură transversală a undelor. Pentru a studia această natură transversală, trebuie să se găsească o cale pentru a face distincţie între diferitele plane de oscilaţie.

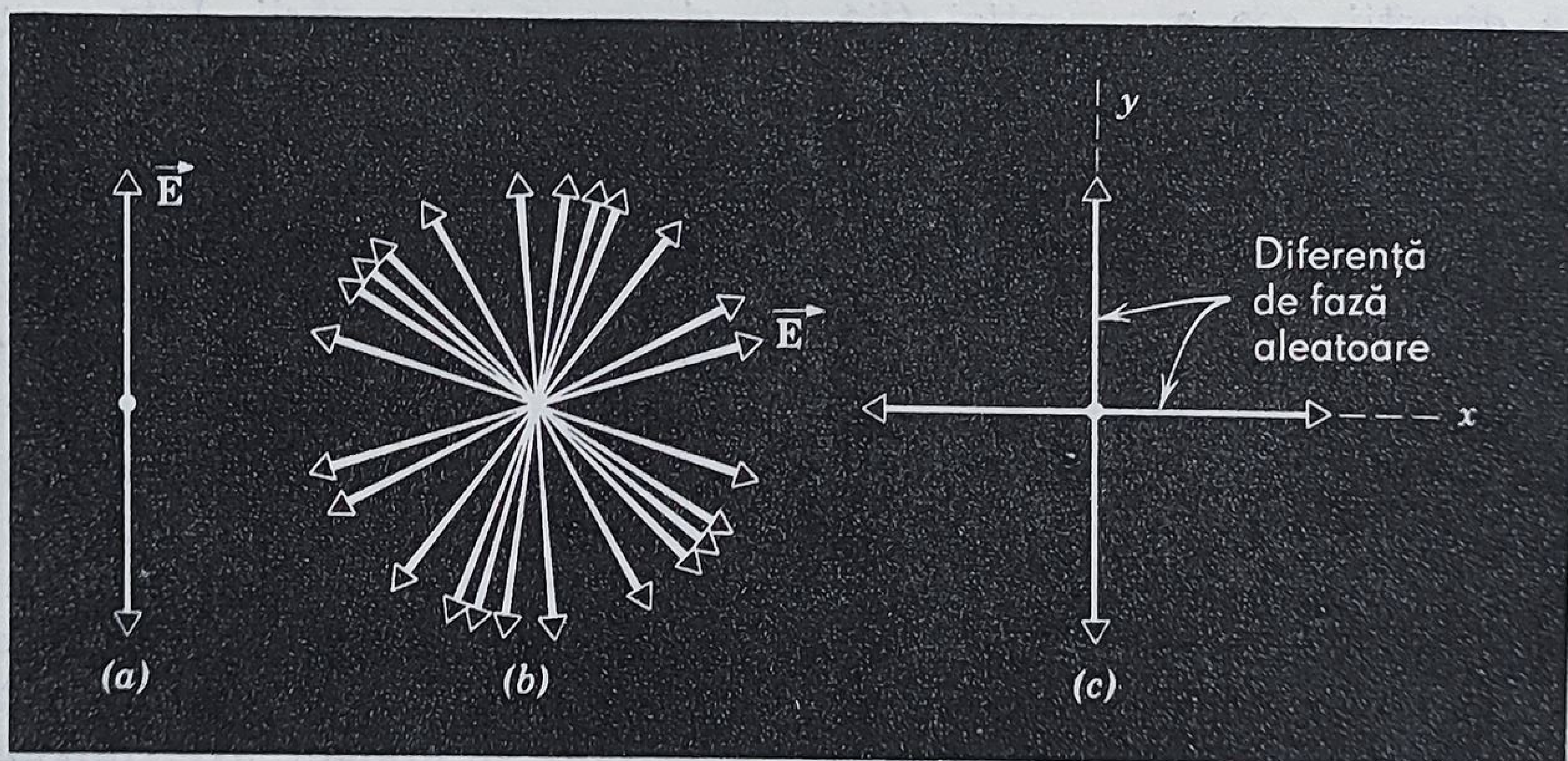


Figura 46-3. (*a*) Undă transversală plan polarizată ce se deplasează către cititor, arătînd doar vectorul electric. (*b*) Undă transversală nepolarizată văzută ca o suprapunere întîmălătoare a mai multor trenuri de undă plan polarizate. (c) Altă descriere, complet echivalentă, a unei unde transversale nepolarizate; aici unda nepolarizată este văzută ca două unde plan polarizate *diferenţe de fază aleatoare*. toare. Orientarea axelor x şi y faţă de direcţia propagării este complet arbitrară.

46-2 Pelicule polarizante

În figura 46.4 este reprezentată lumină nepolarizată ce cade pe un material polarizant denumit comercial *polaroid**. În pelicula prezentată există o anumită direcţie de polarizare, arătată de liniile paralele. *Pelicula transmite numai acele componente ale trenurilor de unde ai căror vectori electrici oscilează paralel cu această direcţie şi le absoarbe pe acelea care oscilează perpendicular pe această direcţie.* Lumina emergentă este plan polarizată. Această direcţie de polarizare este stabilită în timpul procesului de fabricaţie prin introducerea unor lanţuri moleculare într-o peliculă flexibilă de material plastic astfel încît lanţurile sînt aliniate paralele între ele. Se pot produce pelicule polarizante de 0,60 m lăţime şi 30 m lungime.

În figura 46-5 pelicula polarizantă sau *polarizorul* se găseşte în planul paginii iar direcţia de propagare este perpendiculară pe pagină. Vectorul $\vec{E}$ reprezintă planul de vibraţie al unui tren de undă oarecare ce cade pe peliculă. Componentele $\vec{E}_x$ (de mărime $E \sin \theta$) şi $\vec{E}_y$ (de mărime $E \cos \theta$), pot înlocui pe $\vec{E}$, una în direcţia polarizării şi una perpendiculară pe aceasta. Numai prima va fi transmisă; cealaltă este absorbită în peliculă.

Să considerăm o a doua peliculă polarizantă P_2 (în mod obişnuit numită *analizor*) aşezată ca în figura 46-6. Dacă P_2 este rotit în jurul direcţiei de propagare, există două poziţii, la 180° una de cealaltă, pentru care intensitatea luminii transmise este aproape zero; acestea sînt poziţiile pentru care direcţiile de polarizare ale peliculelor P_1 şi P_2 sînt perpendiculare.

Dacă amplitudinea luminii plan polarizate ce cade pe P_2 este E_m, amplitudinea luminii emergente este $E_m \cos \theta$, unde θ este unghiul direc-

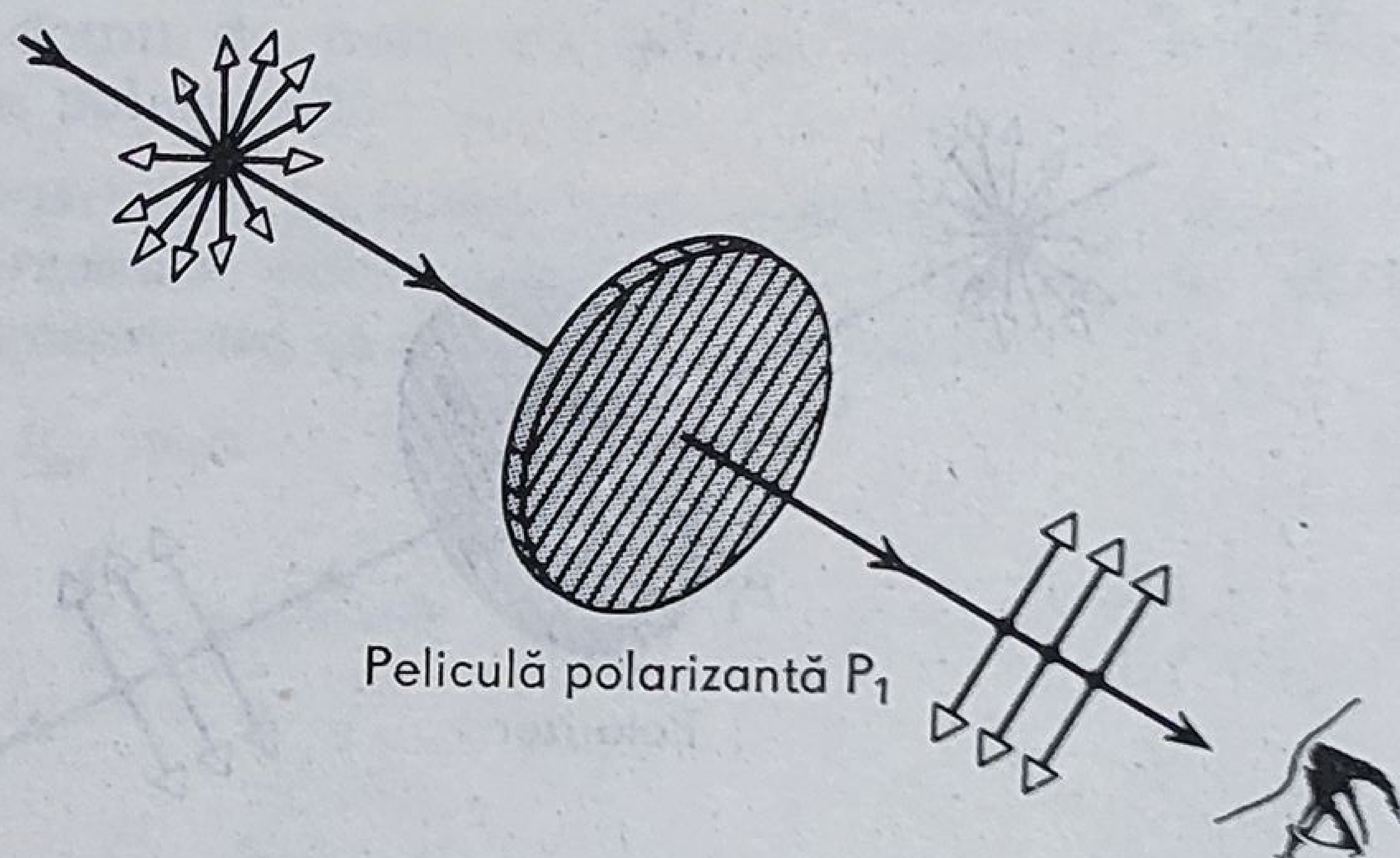


Figura 46-4. O peliculă polarizantă transformă lumina nepolarizată în lumină plan polarizată — Liniile paralele, care nu sînt de fapt vizibile pe peliculă, sugerează direcţia caracteristică de polarizare a peliculei.

* Există şi alte căi pentru producerea luminii polarizate fără utilizarea acestui bine-cunoscut produs comercial. Vom menţiona mai tîrziu unele dintre ele. (N.A.).

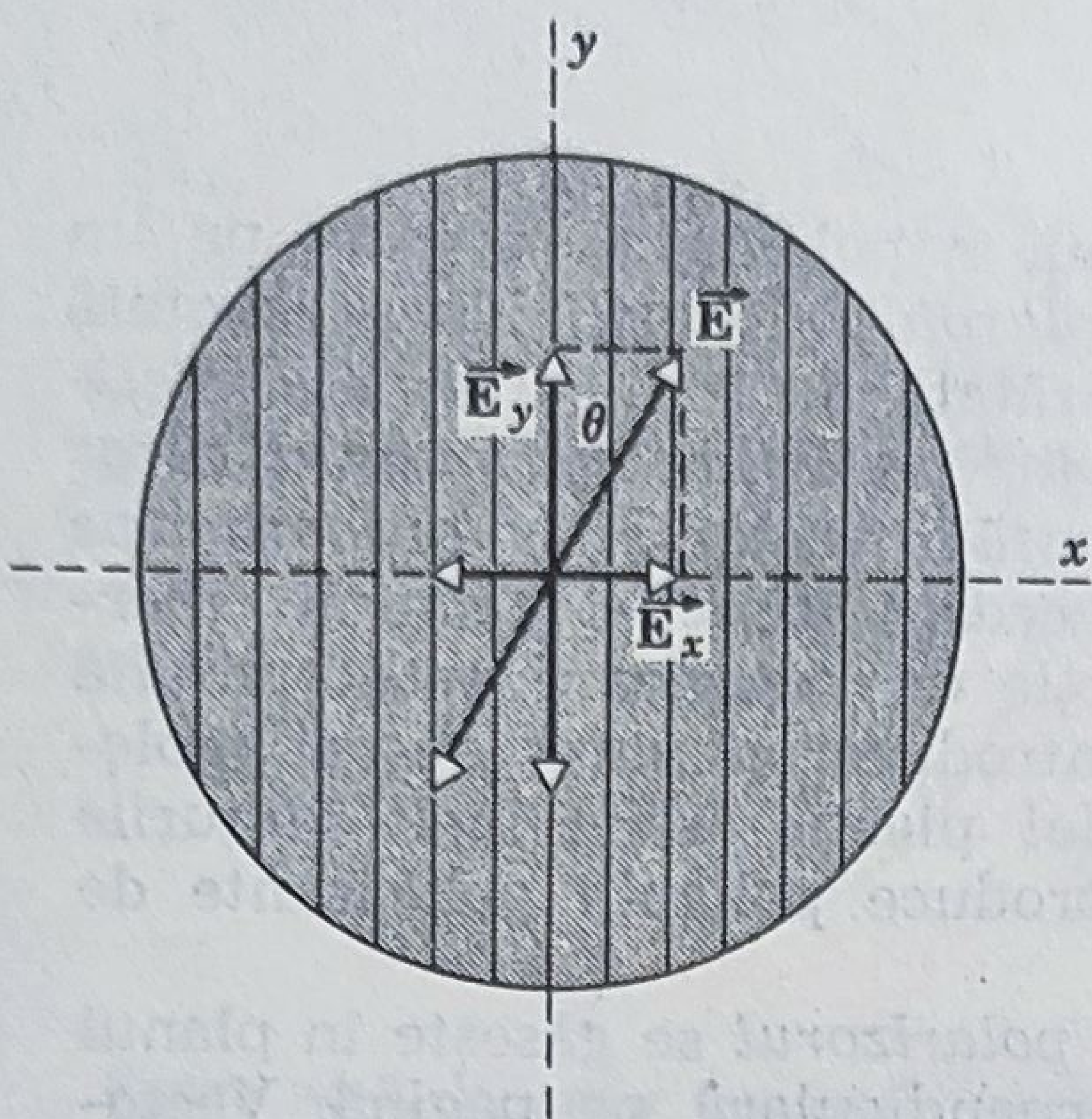


Figura 46-5. Un tren de unde E este echivalent cu două trenuri componente E_y şi E_x. Prin polarizare este transmis doar primul.

ţiilor de polarizare ale peliculelor P_1 şi P_2. Reamintim că intensitatea unui fascicul luminos este proporţională cu pătratul amplitudinii, astfel că intensitatea transmisă I variază cu θ conform cu

$$I = I_m \cos^2 \theta \tag{46-1}$$

unde I_m este valoarea maximă a intensităţii transmise. Aceasta apare cînd direcţiile de polarizare ale peliculelor P_1 şi P_2 sînt paralele, cînd $\theta=0$ sau 180°. În figura 46-7 *a*, unde două pelicule polarizante ce se acoperă sînt aşezate paralel ($\theta=0$ sau 180° în ecuaţia 46-1), se vede că lumina transmisă prin regiunea suprapunerii are intensitatea maximă. În figura 46-7 *b* una dintre pelicule a fost rotită cu 90° astfel încît în ecuaţia 46-1 θ are valoarea de 90 sau 270°; lumina transmisă prin regiunea suprapunerii are acum un minim.

Ecuaţia 46-1, numită legea lui Malus, a fost descoperită experimental de Etienne Louis Malus (1775—1812) în 1809, folosind alte tehnici

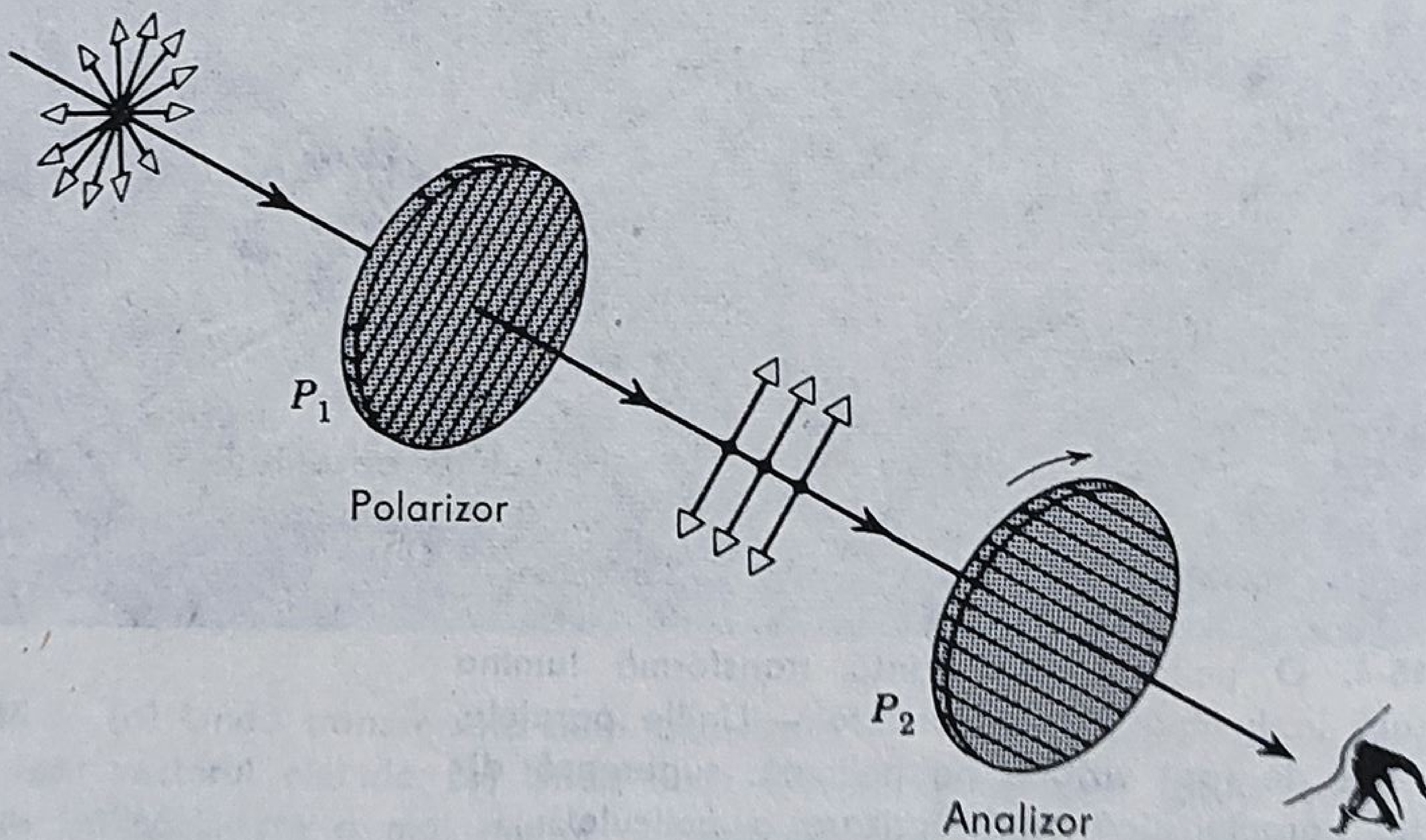


Figura 46-6. Lumina nepolarizată nu este transmisă prin pelicule polarizante încrucişate.

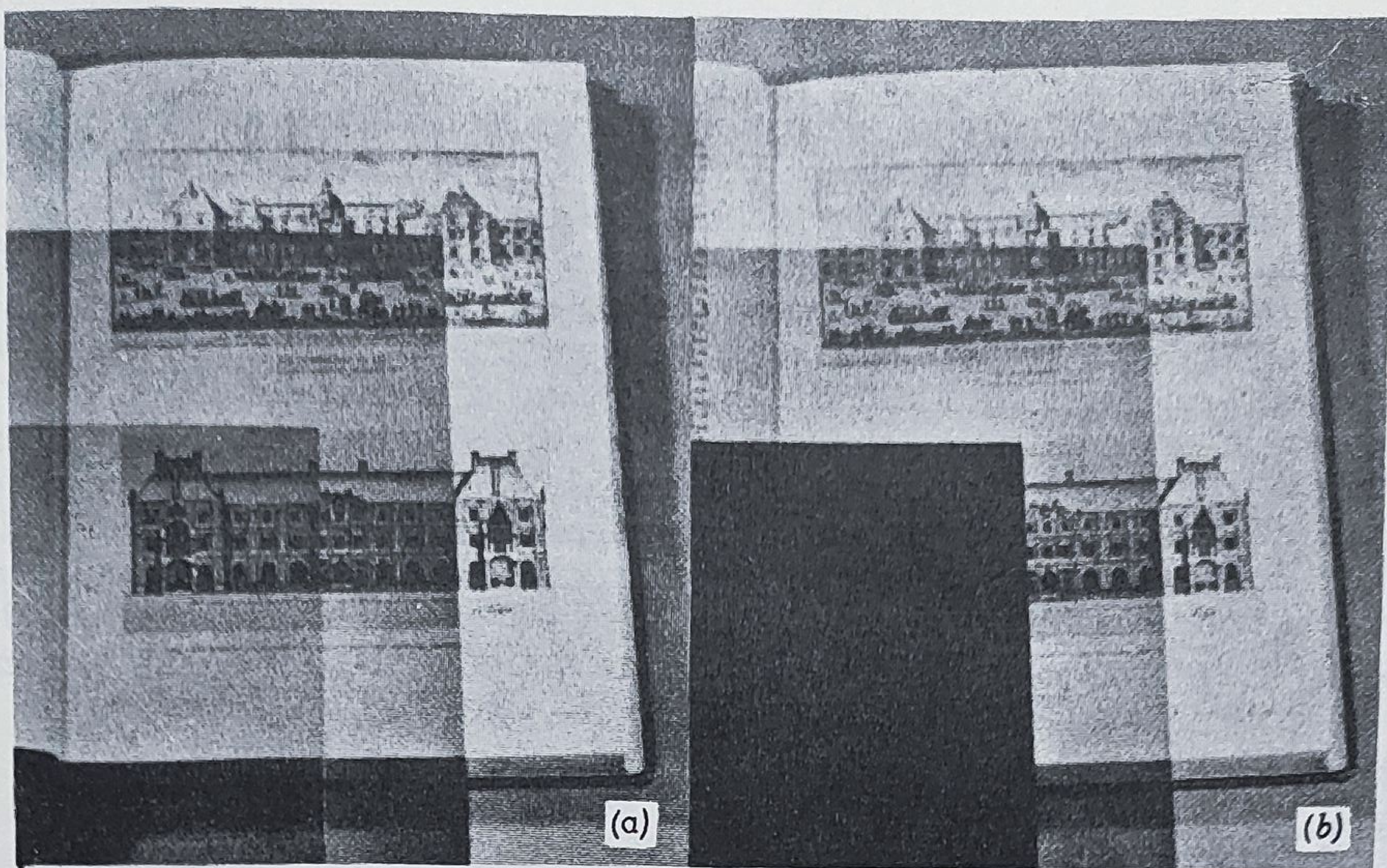


Figura 46-7. Două pelicule pătrate de Polaroid sînt suprapuse peste o carte. În (*a*) axele de polarizare ale celor două pelicule sînt paralele și lumina trece prin ambele. În (*b*) o peliculă a fost rotită cu 90° iar lumina trece. Cartea este deschisă la o ilustrație a muzeului Luxemburg din Paris. Acest fenomen de polarizare a fost descoperit de Malus privind la lumina soarelui reflectată pe ferestrele palatului printr-un cristal de calcită.

de polarizare decît cele descrise mai înainte (vezi Secțiunea 46-3). Ecuația 46-1 descrie lipsa de simetrie față de direcția propagării specifică undelor transversale plan polarizate. Undele longitudinale nu pot prezenta astfel de efecte. Este demn de notat că ochiul uman, în anumite condiții, poate detecta lumina polarizată*.

Exemplul 1. Două pelicule polarizante au direcțiile de polarizare paralele, astfel încît intensitatea I_m a luminii transmise este maximă. Cu ce unghi trebuie rotită una dintre pelicule astfel încît intensitatea să se reducă la jumătate?

Din ecuația 46-1, dacă $I=\frac{1}{2}I_m$, avem

$$\frac{1}{2}I_m=I_m\cos^2\theta$$

sau

$$\theta=\arccos^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm 45°,\ \pm 135°.$$

Același efect se obține indiferent care peliculă este rotită sau în care direcție.

---

* Așa-numitele *periuțe ale lui Haidinger;* cititorul interesat poate consulta Concepts of Classicol Optics, John Strong, W. H. Freeman & Co., 1958. (n.a.).

Istoric, studiile de polarizare au fost făcute pentru investigarea naturii luminii. Astăzi, procedura este inversată pentru a deduce ceva despre natura unui obiect pornind de la starea de polarizare a luminii emise sau împrăştiate de acel obiect. S-a putut deduce, din studii de polarizare a luminii reflectate de acestea, că granulele de praf cosmic din galaxia noastră au fost orientate de cîmpul magnetic galactic slab ($\sim 2 \times 10^{-4}$ Gauss) cu lungimea paralelă cu cîmpul. Studii de polarizare au arătat că inelul lui Saturn este format din cristale de gheaţă. De asemenea, se pot determina mărimea şi forma viruşilor din polarizarea luminii ultraviolete împrăştiate de aceştia. Se pot cîştiga multe informaţii despre structura atomilor şi nucleelor studiind polarizarea radiaţiilor emise în tot spectrul electromagnetic. Astfel avem o folositoare tehnică pentru structuri ce variază între dimensiuni galactice ($\sim 10^{+20}$ metri) şi nucleare ($\sim 10^{-14}$ metri). Lumina polarizată are de asemenea numeroase aplicaţii în industrie şi inginerie.

46-3. Polarizarea prin reflexie

Malus a descoperit în 1809 că lumina poate fi complet sau parţial polarizată prin reflexie. Oricine a privit suprafaţa unei ape care reflectă lumina soarelui printr-o pereche de ochelari de soare făcuţi din material polarizant, a observat probabil acest efect. E suficient să mişcăm capul dintr-o parte în alta, rotind astfel lentilele polarizante pentru a observa că intensitatea luminii solare reflectate trece printr-un minim.

În figura 46-8 se vede un fascicul nepolarizat ce cade pe o suprafaţă de sticlă. Vectorul $\vec{E}$ pentru fiecare tren de undă din fascicul poate fi rezolvat în două componente, una perpendiculară pe planul de incidenţă — care este chiar planul figurii 46-8 — şi una în planul de incidenţă. Prima componentă, reprezentată prin puncte, se numeşte *componenta* σ, de la germanul *senkrecht*, însemnînd perpendicular. Cea de a doua componentă reprezentată, prin săgeţi, se numeşte *componenta* π (de la *para-*

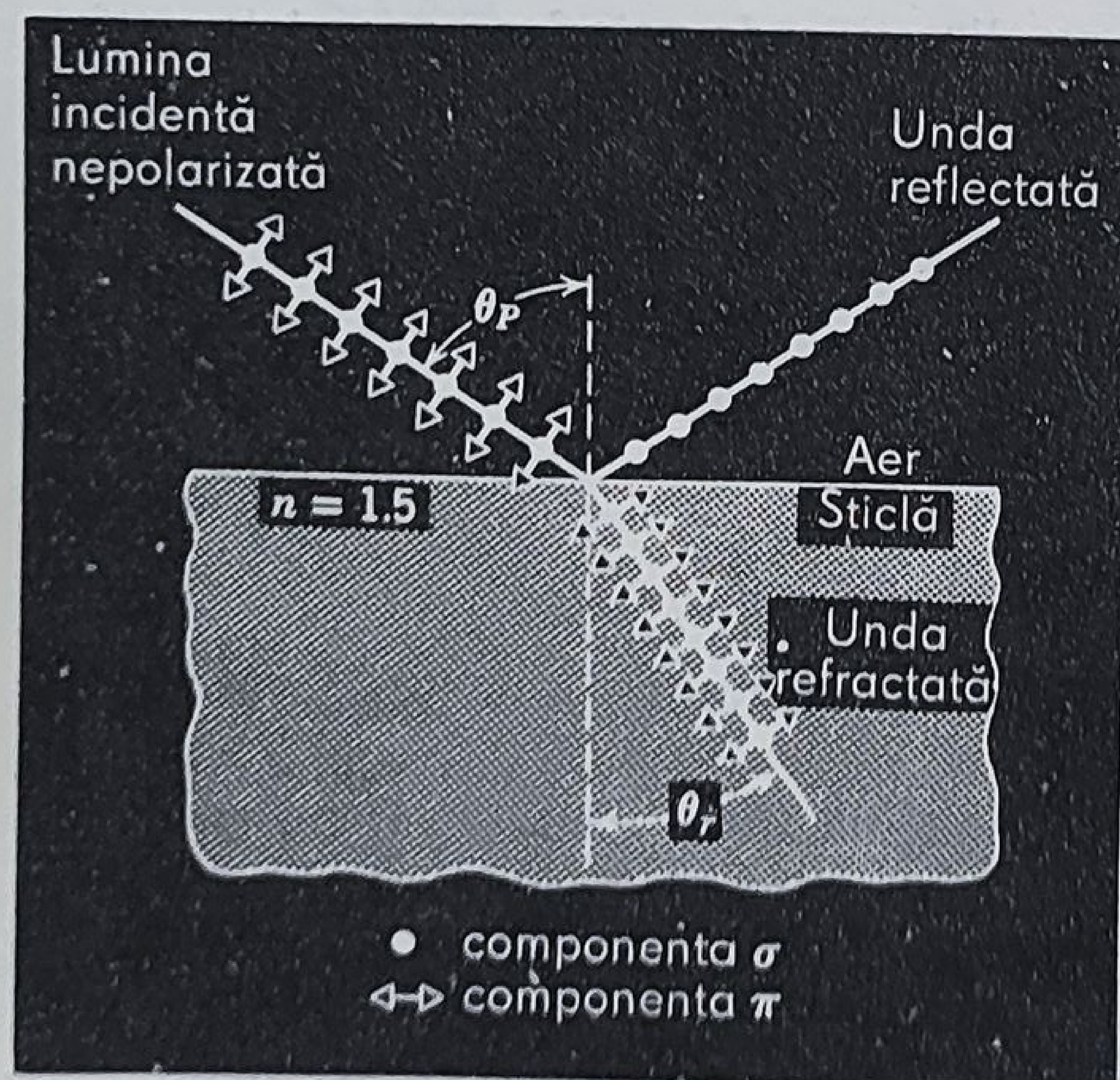


Figura 46-8. Pentru un unghi particular incidenţă θ_p, lumina reflectată este complet polarizată, aşa cum se arată. Lumina transmisă este polarizată parţial.

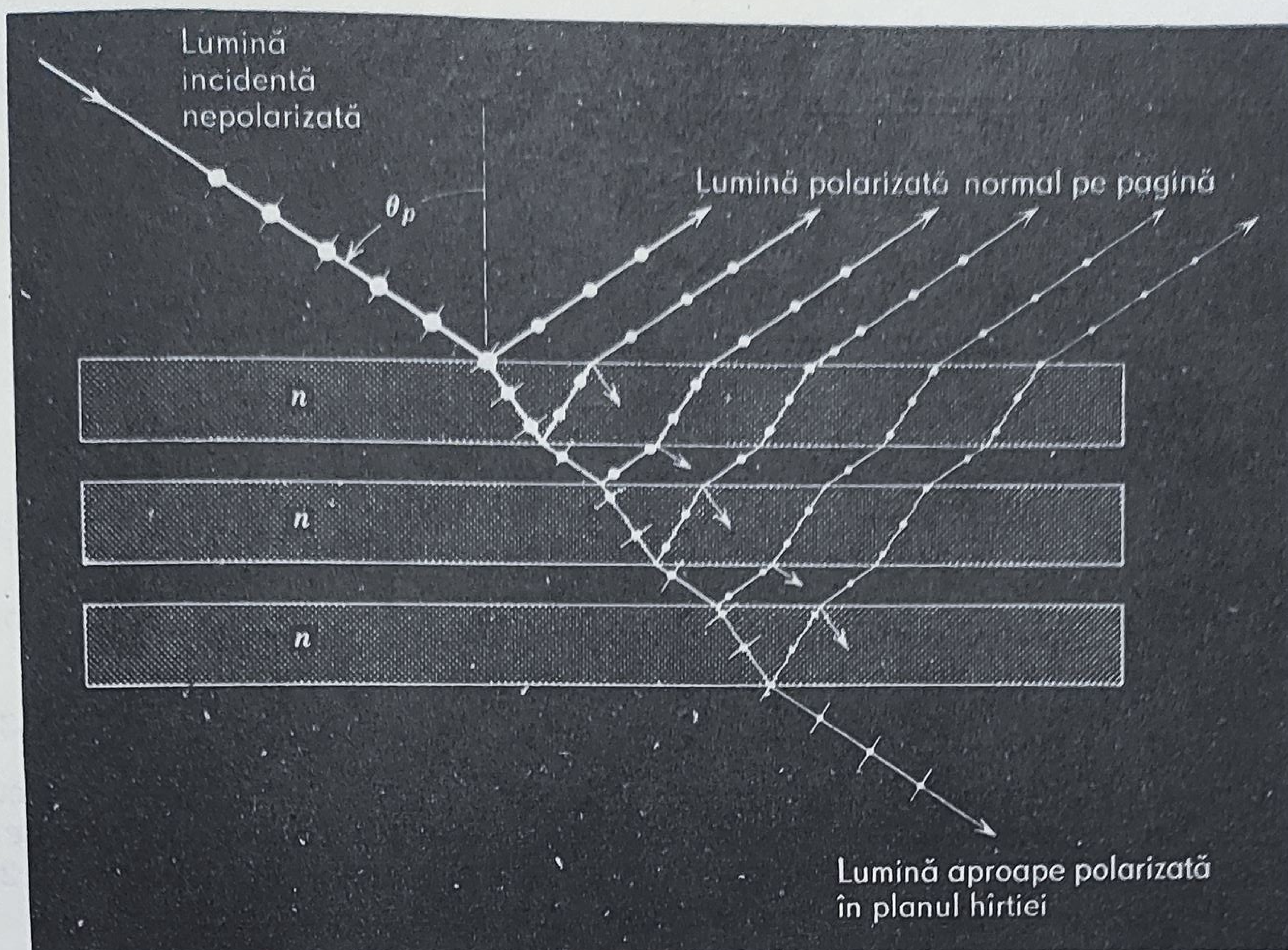


Figura 46-9. Polarizarea luminii de către un grup de plăci de sticlă. Lumina incidentă nepolarizată este incidentă sub unghiul Brewster θ_p. (Polarizarea în planul paginii este arătată prin liniuțe iar polarizarea normală pe pagină prin puncte). Toată lumina reflectată din raza originală este polarizată normal pe pagină. După trecerea prin mai multe interfețe reflectante, lumina din raza originală nu mai conține nici o componentă apreciabilă polarizată normal pe planul paginii.

lel). În general, pentru lumina incidentă complet nepolarizată, aceste două componente au amplitudini egale.

Experimental se găsește că, pentru sticlă sau alte materiale dielectrice, există un unghi de incidență particular, numit *unghi de polarizare* θ_p, pentru care coeficientul de reflexie al, componentei π este zero. Aceasta înseamnă că radiația reflectată de sticlă, deși de intensitate mică, este plan-polarizată, cu planul ei de vibrație, la unghi drept față de planul de incidență. Acest fenomen de polarizare a radiației reflectate poate fi verificat ușor analizîndu-l cu o peliculă polarizantă.

Componenta π este în întregime refractată la unghiul de polarizare; componenta σ este numai parțial refractată. Astfel, fasciculul transmis care este de intensitate mare este numai parțial polarizat. Utilizînd un ansamblu de plăci de sticlă în locul unei simple plăci, apar reflexii de pe suprafețele succesive și intensitatea fasciculului reflectat emergent (componenta σ) poate fi crescută (vezi figura 46-9). În același fel, componentele σ sînt scoase în mod progresiv din fasciculul transmis, făcîndu-l în mai mare măsură polarizat π.

Se află experimental că la unghiul de polarizare fasciculele reflectat și refractat sînt perpendiculare, sau (figura 46-8),

$$\theta_p + \theta_r = 90°$$

Din legea Snell

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_r$$

Combinînd aceste ecuații ajungem la

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin (90° - \theta_p) = n_2 \cos \theta_p$$

sau

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \qquad (46\text{-}2)$$

unde raza incidentă este în mediul unu și cea refractată în mediul doi. Aceasta se mai poate scrie ca

$$\operatorname{tg} \theta_p = n \qquad (46\text{-}3)$$

unde $n = (n_2/n_1)$ este indicele de refracție al mediului doi în raport cu mediul unu. Ecuația 46-3 este cunoscută sub numele *Legea Brewster* după Sir David Brewster (1781—1868) care a dedus-o empiric în 1812. Se poate demonstra riguros această lege din ecuația Maxwell.

Exemplul 2. Vrem să utilizăm o placă de sticlă ($n=1,50$) ca polarizor. Care este unghiul de polarizare? Care este unghiul de refracție?

Din ecuația 46-3

$$\theta_p = \operatorname{arc\,tg} 1,50 = 56,30°$$

Unghiul de refracție din legea Anell este

$$(1) \sin \theta_p = n \sin \theta_r$$

sau

$$\operatorname{Sin} \theta_v = \frac{\sin 56,3°}{1,50} = 0,555 \quad \theta_r = 33,7°$$

46-4 Dubla refracție

În capitolele anterioare am presupus că viteza luminii, și astfel indicele de refracție, este independentă de direcția de propagare din mediu și de starea de polarizare a luminii. Lichide, solide amorfe, ca sticla, și solide cristaline cu simetrie cubică au în mod normal această comportare și se numesc *optic isotrope*. Multe alte solide cristaline sînt optic *anisotrope* (adică neisotrope)*.

---

* Multe soluții amorfe transparente ca sticlele și plasticele devin optic anisotrope cînd sînt comprimate mecanic. Acest lucru se folosește în studiile de proiectare inginerească prin aceea că deformările produse în angrenaje, structuri de pod etc. pot fi studiate cantitativ, făcînd modele din plastic, tensionîndu-le corespunzător și examinînd anisotropie optică, care rezultă prin utilizarea tehnicilor de polarizare. Cititorul interesat poate consulta „Fotoelasticitatea" un capitol de H. T. Jessop în vol. 6 al *Encyclopedia of Phisics*, editată de H. Eluyge (1958), Springer Verlag,

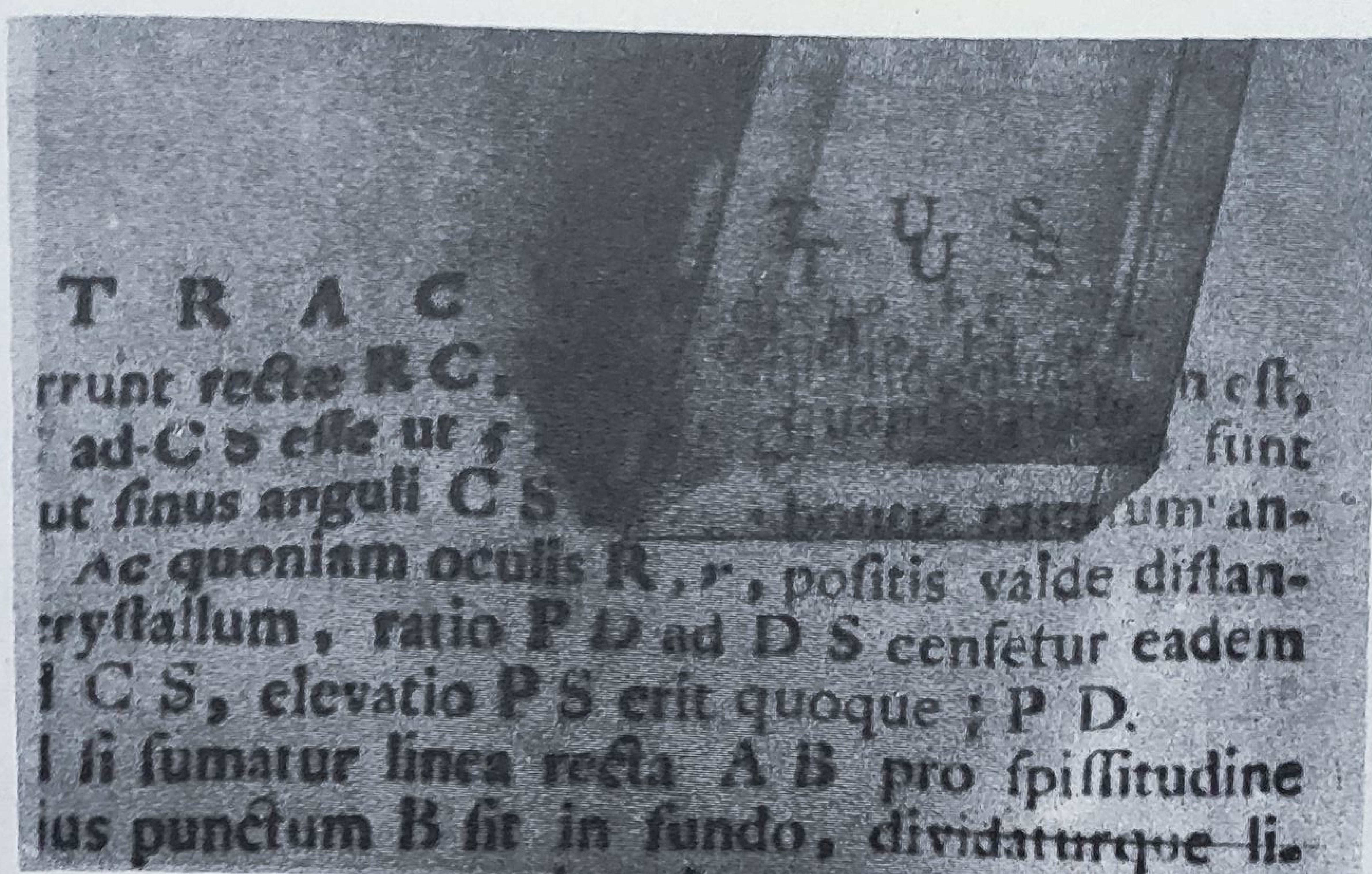


Figura 46-10. Două imagini polarizate la 90° una față de cealaltă, formate de un cristal de calcită. Cartea pe care se află cristalul este Opera Reliqua de Huygens, în care este discutat fenomenul de birefrigență.

Solidele pot fi anisotrope față de multe proprietăți. Mica clivează ușor numai într-un singur plan; un cub de grafit cristalin nu are aceeași rezistență electrică între toate perechile de fețe opuse; un cub de nichel cristalin se magnetizează mai ușor în anumite direcții decît în altele etc. Dacă un solid este de fapt un amestec de mici cristalite în număr foarte mare, poate apărea ca isotrop din cauza orientărilor întîmplătoare ale cristalitelor. Praful de mică, de exemplu, compactat pînă la o masă solidă nu prezintă proprietățile de clivare ale cristalitelor ce o compun.

Figura 46-10, în care un cristal lustruit de calcită ($CaCO_3$) este așezat peste niște litere tipărite, ne arată anisotropia optică a acestui material; *imaginea apare ca dublă*. În figura 46-11 se vede un fascicul de lumină nepolarizată căzînd perpendicular pe una din fețele unui cristal de calcită. Fasciculul se despică în două la suprafața cristalului. „Dubla-curbare" a unui fascicul transmis prin calcită, ca în figura 46-10 și figura 46-1 se numește *dubla refracție*.

Dacă cele două fascicule emergente din figura 46-11 sînt analizate cu un polarizor se găsește că ele sînt plan polarizate cu planele de vibrație la unghiuri drepte unele față de celelalte, un fapt descoperit de Huygens în 1678. Huygens a utilizat un al doilea cristal de calcită pentru a investiga stările de polarizare a fasciculelor denumite în figură *o* și *e*.

Dacă se fac experiențe la diferite unghiuri de incidență, unul din fasciculele din figura 46-11 (reprezentat de *raza ordinară* sau raza *o*) va asculta de legea Snell a refracției pe suprafața cristalului, exact ca o rază ce trece dintr-un mediu isotrop în altul. Cel de-al doilea fascicul (reprezentat de *raza extraordinară*, sau raza *e*) nu va asculta de legea Snell. În figura 46-11 de exemplu, unghiul de incidență pentru lumina

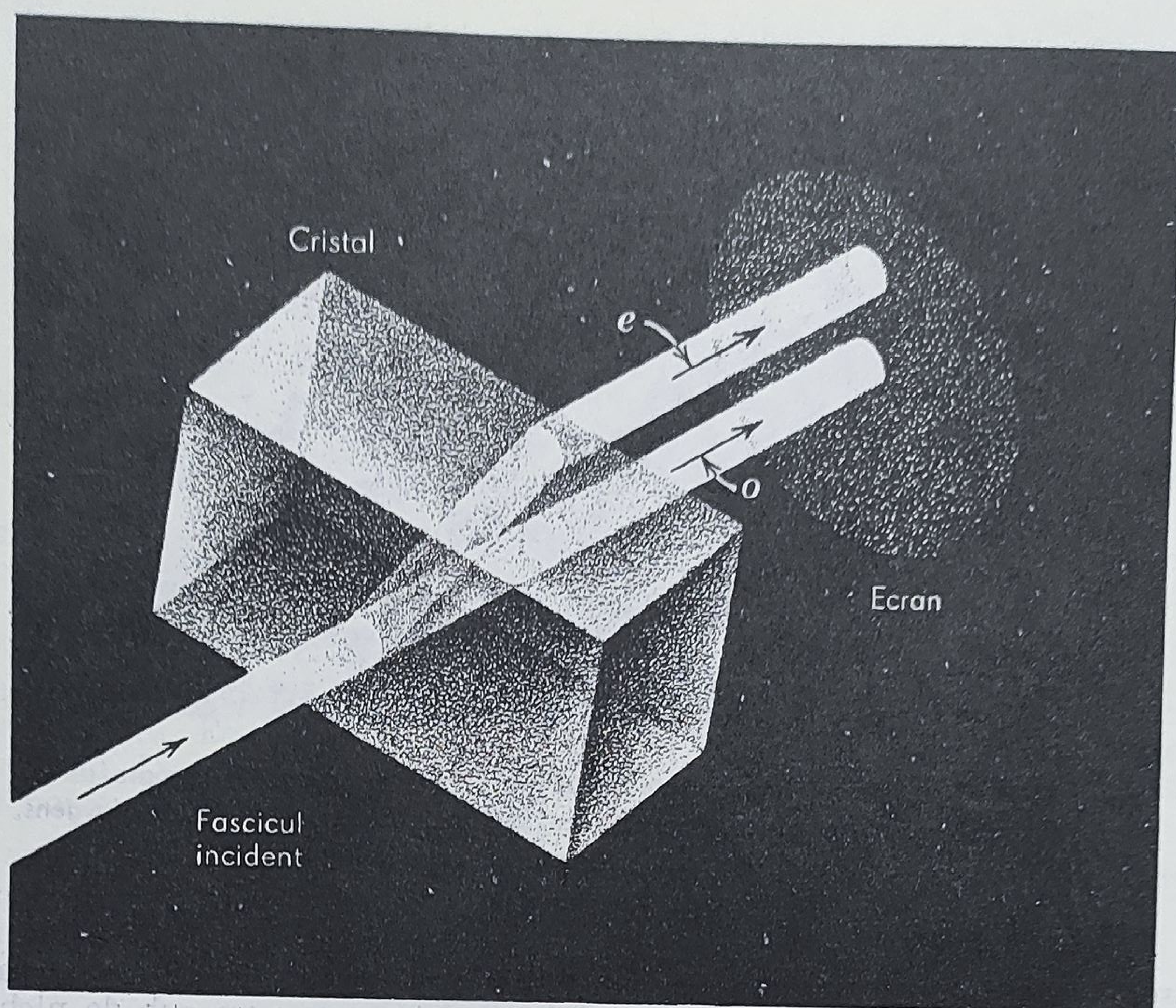


Figura 46-11. Un fascicul de lumină nepolarizată care cade pe un cristal de calcită este împărțit în două fascicule polarizate perpendiculare unul pe altul.

incidentă este zero, dar unghiul de refracție al razei *e*, contrar predicției legii Snell, nu este. În general, raza *e* nici măcar nu se află în planul de incidență.

Diferența dintre undele reprezentate de razele *o* și *e* în raport cu legea Snell poate fi explicată în acești termeni:

1. Unda *o* se deplasează în cristal cu aceeași viteză v_o în toate direcțiile. Cu alte cuvinte, cristalul are, pentru această undă, un singur indice de refracție n_o, întocmai ca un solid isotrop.

2. Unda *e* se deplasează în cristal cu o viteză ce variază cu viteza de la v_0 la o valoare mai mare (pentru calcită) v_e. Cu alte cuvinte, indicele de refracție, definit ca c/v, variază cu direcția de la n_0 la o valoare mai mică (pentru calcită) n_e.

Cantitățile n_0 și n_e se numesc *indicii principali de refracție* ai cristalului. Problema 7 ne sugerează cum să-i măsurăm. Tabela 46-1 ne arată acești indici pentru 6 cristale cu dublă refracție. Pentru trei dintre ele unda *e* este mai înceată, pentru alte trei dintre ele una e mai rapidă. Cîteva cristale cu dublă refracție (mică, topaz etc.) sînt mai complexe optic decît calcita și necesită *trei* indici principali de refracție pentru o descriere completă a proprietăților lor optice. Cristalele cu structură de

bază cubică (vezi figura 45-13) sînt optic isotrope, avînd nevoie numai de *un* indice de refracție.

Tabela 46-1

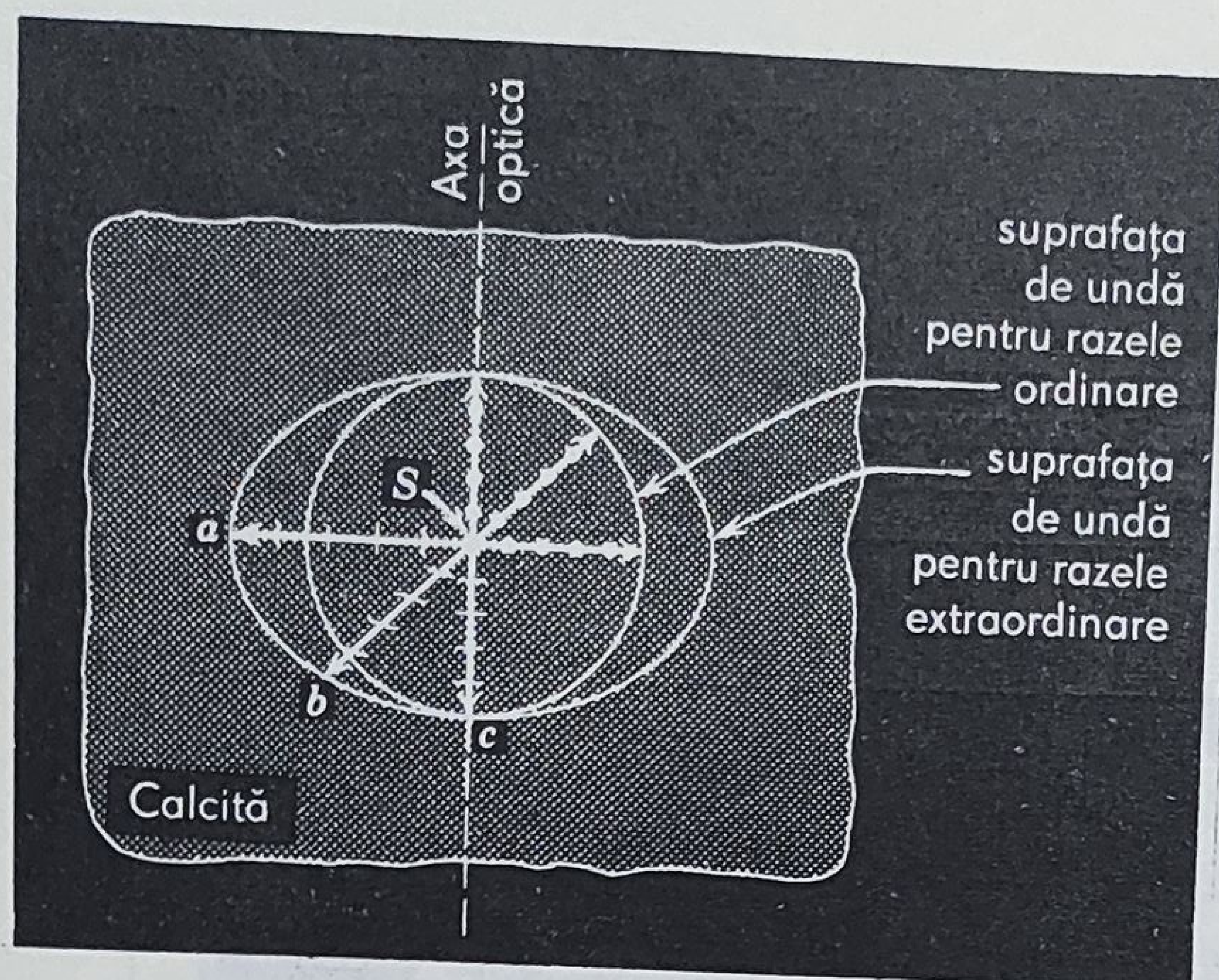
INDICII PRINCIPALI DE REFRACȚIE AI CÎTORVA CRISTALE CU DUBLĂ REFRACȚIE
(Pentru lumina de sodiu, $\lambda = 5\,890$ Å)

Cristalul	Formula	n_0	n_e	$n_e - n_0$
Ghiață	H_2O	1,309	1,313	+0,004
Cuarț	SiO_2	1,544	1,553	+0,009
Wurțită	ZnS	2,356	2,378	+0,022
Calcită	$CaCO_3$	1,658	1,486	—0,172
Dolomită	$CaO \cdot MgO \cdot 2CO_2$	1,681	1,500	—0,181
Siderită	$FeO \cdot CO_2$	1,875	1,635	—0,240

Comportamentul vitezelor a două unde ce trec prin calcită este rezumat de figura 46-12, unde observăm două suprafețe ieșind dintr-o sursă punctuală imaginară de lumină S înglobată în cristal. Suprafața undei o este o sferă, după cum ne-am aștepta dacă mediul ar fi isotrop. Suprafața undei e este un elipsoid de revoluție în jurul unei direcții caracteristice din cristal numită axa optică. Cele două suprafețe de undă reprezintă lumina cu două stări diferite de polarizare. Dacă considerăm pentru prezent numai raze care se află în planul figurii 46-12, atunci (a) planul de polarizare pentru razele o este perpendicular pe fiecare, după cum se sugerează cu punctele, și (b) acela pentru raze e coincide cu planul figurii, după cum e sugerat prin linioare. Vom descrie mai în amănunțime la sfîrșitul acestui capitol stările de polarizare.

În figura 46-13, ce ne prezintă un cristal tipic de calcită ce poate fi obținut prin clivare dintr-un cristal natural, se vede localizarea axei optice. Muchiile cristalelor de calcită pot avea orice lungime dar unghiurile la care se intersectează muchiile au întotdeauna una sau alta din valorile 78°13′ sau 102°21′. Axa optică poate fi găsită trasînd o linie la unul din cele două colțuri unde se întîlnesc unghiurile obtuze (colțurile „boante"), și care face unghiuri egale cu muchiile cristalului. *Orice altă linie din cristal paralelă cu aceasta este de asemenea o axă optică.*

Putem utiliza principiul lui Huygens pentru studierea propagării undelor luminoase în cristale cu dublă refracție. În figura 46-14 a vedem cazul special în care lumina nepolarizată cade la incidență normală pe un bloc de calcită tăiat din cristal în așa fel încît axa optică să fie normală la suprafață. Să considerăm un front de undă, care la timpul $t=0$, coincide cu suprafața cristalului. După Huygens putem lăsa orice punct de pe suprafață să servească ca centru de radiație pentru un dublu set de unde Huygens, ca cele din figura 46-12. Planul tangent la aceste unde reprezintă noua poziție a acestui front de undă la momentul de timp ulterior t. Fasciculul incident din figura 46-14 a se propagă prin cristal fără deviație, cu viteza v_0. Fasciculul emergent din bloc va avea aceeași polarizare ca și cel incident. Blocul de calcită, numai în acest caz spe-



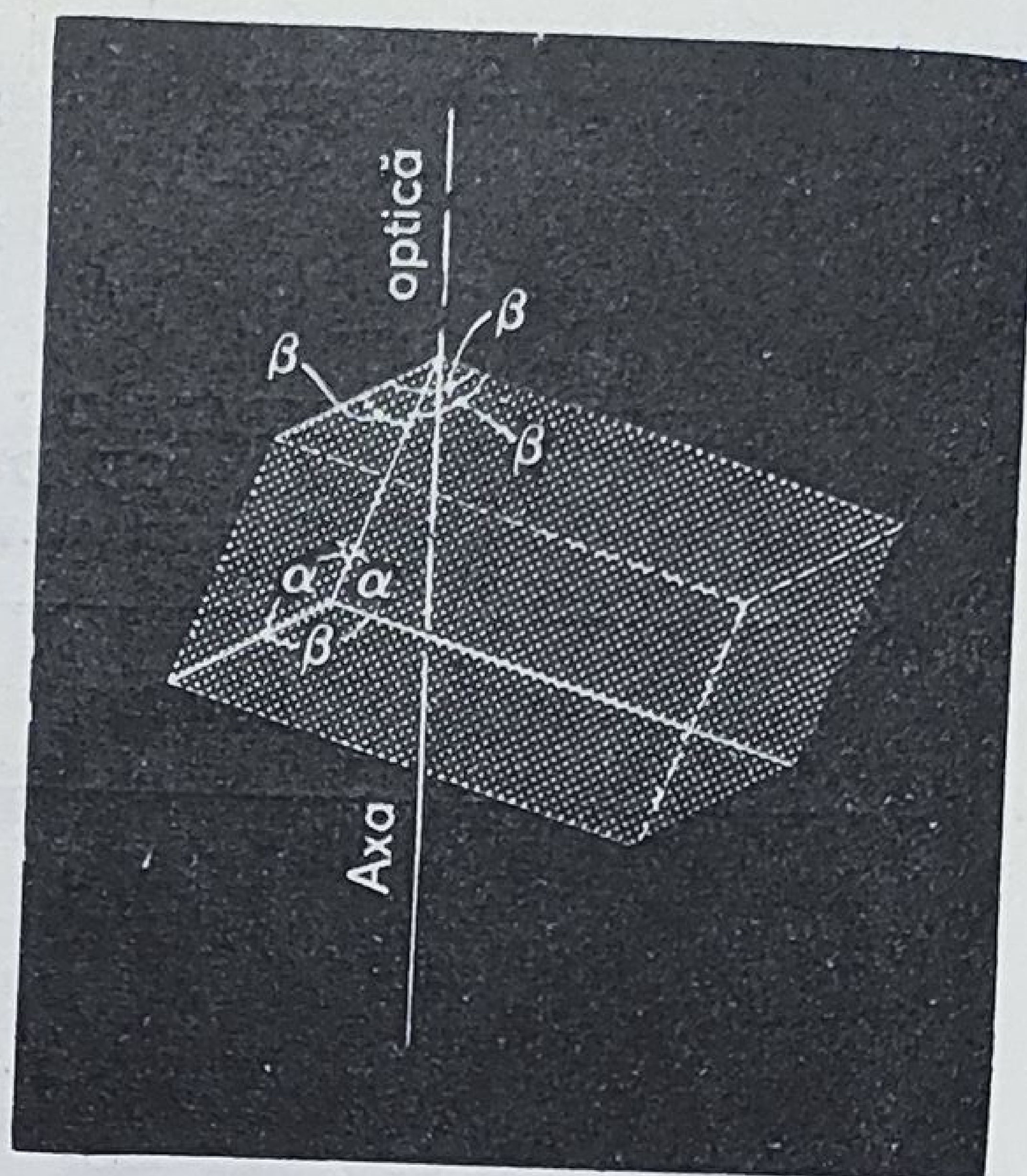


Figura 46-12. Suprafeţe de unde Huygens generate de o sursă punctuală aflată în calcită. Stările de polarizare pentru trei raze o şi trei raze e sînt reprezentate prin puncte şi respectiv linii. De notat că în general (raza *Sb*) barele care reprezintă direcţia de polarizare nu sînt perpendiculare pe razele e.

Figura 46-13. Cristal de calcită; α este 78°13′; β este 102°12′.

cial, se comportă ca un material isotrop, şi nu poate fi făcută nici o distincţie între undele *o* şi *e*.

În figura 46-14 *b* avem două reprezentări ale altui caz special şi anume, lumină incidentă nepolarizată ce cade la unghi drept pe un bloc ce este tăiat astfel încît axa optică este paralelă cu suprafaţa lui. În acest caz, fasciculul incident este de asemenea propagat fără deviere. Cu toate acestea, putem acum identifica unde *o* sau *e* ce trec prin cristal, cu viteze diferite, v_0 şi v_e respectiv. Aceste unde sînt polarizate perpendicular unele pe celelalte.

Unele cristale cu dublă refracţie au o proprietate interesantă, numită *dichroism*, în care una din componentele de polarizare este puternic absorbită în cristal, cealaltă fiind transmisă cu pierderi mici. Dichroismul, ilustrat în figura 46-15 constituie principiul de bază ce acţionează în cadrul polaroidului comercial. Multe cristale mici interesante într-o foaie de plastic cu axele optice paralele au o acţiune polarizantă echivalentă cu aceea a unui singur bloc de cristal.

În figura 46-14 *c* observăm lumina nepolarizată căzînd la incidenţă normală pe un bloc de calcită tăiat astfel încît axa lui optică face un unghi arbitrar cu suprafaţa cristalului. Sînt produse două fascicule separate spaţial, ca în figura 46-11. Ele trec prin cristal cu viteze diferite, aceea pentru unda *o* fiind v_o şi cea pentru unda *e* fiind intermediară între v_o şi v_e. De notat că raza *xa* reprezintă drumul *optic* cel mai scurt pentru transferul energiei luminoase din punctul *x* la frontul undei *e*.

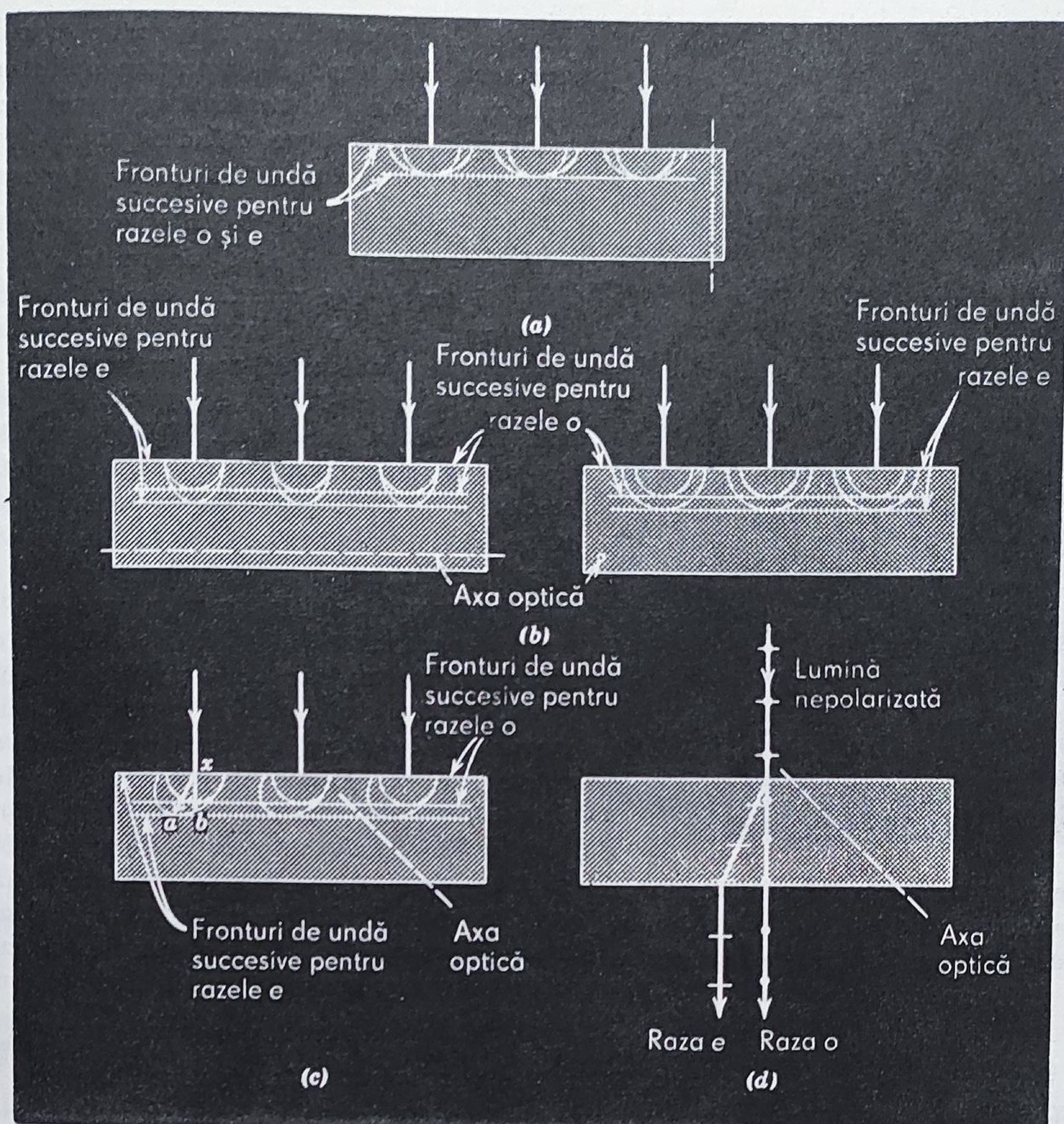


Figura 46-14. Pe cîteva probe de cristale de calcită cade lumină nepolarizată. Undele Huygens pot fi considerate secţiuni ale figurii de revoluţie în jurul axei optice reprezentate în figura 46-15. (*a*) Nu apare refracţie dublă sau diferenţă de viteză. (*b*) Nu există dublă refracţie dar apare o diferenţă de viteză. (*c*) Apare atît dubla refracţie cît şi diferenţa de viteză. (*d*) Asemănător cu (*c*) dar cu reprezentarea stărilor de polarizare şi a razelor emergente

Energia transferată de-a lungul oricărei alte raze, în particular de-a lungul lui xb, ar avea un timp de tranzit mai mare, o consecinţă a faptului că viteza undelor e variază cu direcţia*. Figura 46-14 d reprezintă acelaşi caz ca figura 46-14 c. În ea vedem razele care ies din bloc, ca în figura 46-11, şi ne arată clar că fasciculele sînt polarizate la unghiuri drepte unul faţă de celălalt, adică sînt *polarizate încrucişat*.

---

* Cititorul care nu a trecut înainte prin secţiunea 41-6 despre principiul lui Fernat ar putea îndrăzni să o facă acum. (n.a.).

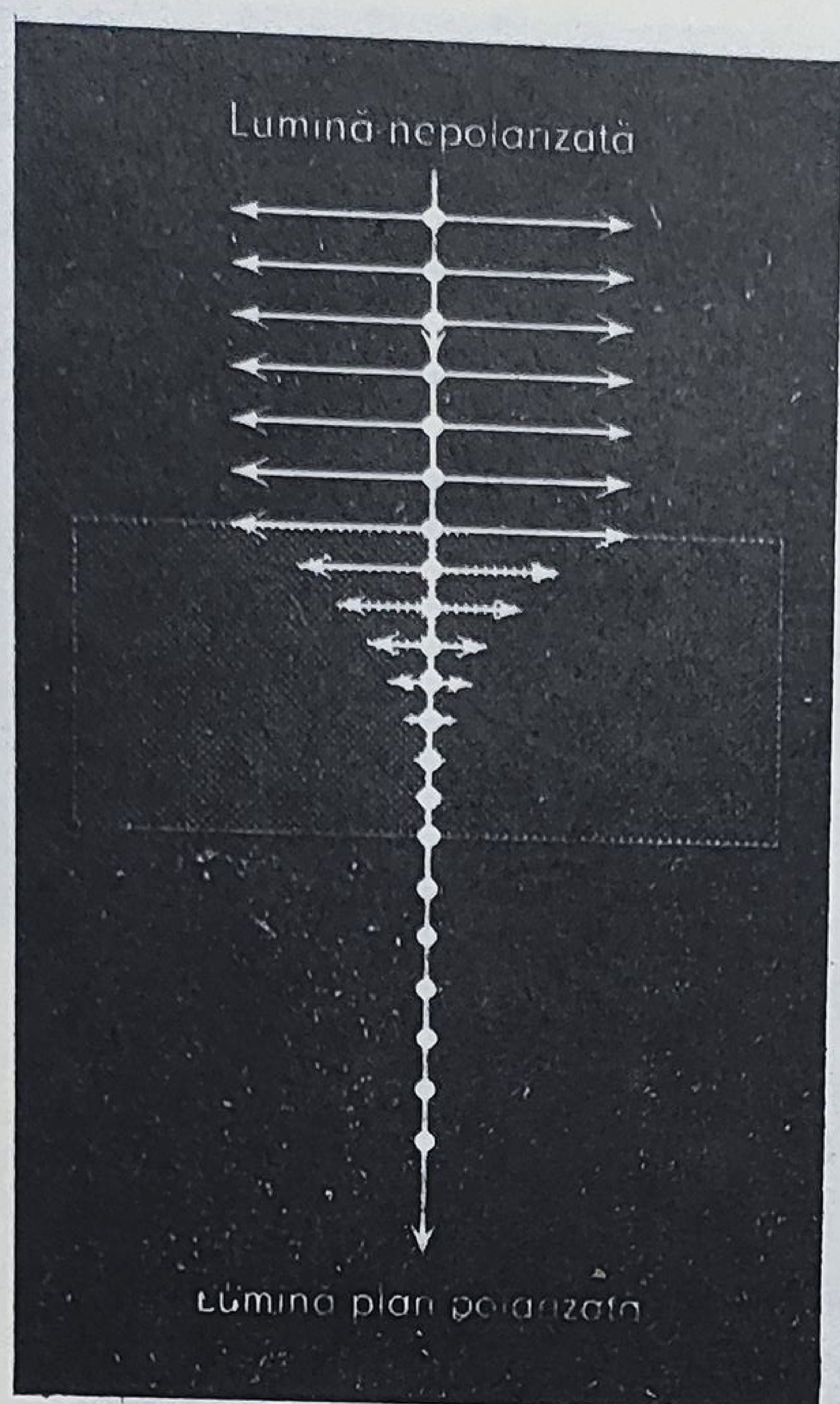


Figura 46-15. Reprezentarea absorbţiei unei componente de polarizare într-un cristal dichroic de tipul folosit pentru peliculele Polaroid.

Căutăm acum să înţelegem, în termenii structurii atomice a cristalelor anisotrope, cum pot exista unde luminoase polarizate încrucişate cu viteze diferite. Lumina se propagă prin cristal sub acţiunea vectorului oscilant, $\vec{E}$ al undei asupra electronilor din cristal. Aceşti electroni, asupra cărora se exercită forţe electrostatice dacă sînt scoşi din poziţiile de echilibru, sînt puşi în oscilaţii forţate în jurul acestor poziţii şi se mişcă de-a lungul vibraţiilor perceptibile care constituie unda luminoasă. Tăria forţei elastice de revenire poate fi măsurată printr-o constantă de forţă k, ca şi pentru oscilatorul armonic simplu discutat în capitolul 15 (vezi ecuaţia 15-4).

În materiale optic isotrope constanta de forţă k este aceeaşi în toate direcţiile de deplasare a electronilor de la poziţiile de echilibru. În cristale cu dublă refracţie, totuşi, k variază cu direcţia. Pentru deplasări ale electronilor ce se fac în plane la unghiuri drepte faţă de axa optică, k are valoarea constantă k_0, indiferent de orientarea deplasării în acest plan. Pentru deplasări paralele cu axa optică, k are o valoare k_e mai mare (pentru calcită)*. De notat cu atenţie că viteza unei unde în cristal este determinată de direcţia în care vibrează vectorii $\vec{E}$ şi *nu* de direcţia de propagare. Vibraţiile vectorului $\vec{E}$ transversal introduc în acţiune forţa elastică şi astfel determină viteza. De notat, de asemenea, că cu cît e mai mare forţa elastică, adică cu cît e mai mare k, cu atît mai rapidă este unda. Pentru unde ce parcurg o coardă întinsă, de exemplu, forţa elastică pentru deplasările transversale este determinată de tensiunea F din coardă. Ecuaţia 19-12 ne arată că o creştere a lui F înseamnă o creştere a vitezei undei v.

În figura 46-16 un „lanţ de cauciuc" tensionat cu o greutate şi susţinut la capătul de sus ne dă un analog mecanic unidimensional pentru dubla refracţie. Se aplică în mod special undelor o şi e care se propagă la unghiuri drepte cu axa optică, ca în figura 46-14 *b*. Dacă blocul de susţinere oscilează, ca în figura 46-16 *a*, de-a lungul lanţului va trece o undă transversală cu o anumită viteză. Dacă blocul oscilează ca în figura 46-16 *b*, se propagă o altă undă transversală.

---

* Pentru cristalele cu dublă refracţie cu $n_e > n_0$ (vezi tabela 46-1) pentru deplasări paralele cu axa optică k este *mai mic* decît pentru acelea la unghi drept. De asemenea pentru cristale cu trei indici principali de refracţie, vor exista trei constante principale de forţă. Astfel de cristale au două axe optice şi se numesc *biaxe*. Cristalele din tabela 46-1 au numai o singură axă optică şi se numesc *uniaxe*.

Forța elastică pentru unda a doua este mai mare decît pentru prima, lanțul fiind mult mai rigid în planul figurii 46-16, *b* decît în planul figurii 46-16, *a*. Astfel a doua undă trece de-a lungul lanțului cu o viteză mai mare.

În limbaj optic am spune că viteza unei unde transversale într-un lanț depinde de orientarea planului de vibrație al undei. Dacă oscilăm capătul lanțului la întîmplare elongația oscilației vibrația într-un punct de-a lungul lanțului va fi descrisă de suma a două unde polarizate la unghi drept și propagîndu-se cu viteze diferite. Aceasta corespunde exact situației optice din figura 46-14, *b*.

Pentru unde ce se propagă paralel cu axa optică, ca în figura 46-14, *a* sau pentru unde în materiale optic izotrope, analogul mecanic corespunzător este un singur lanț tensionat. Aici există o singură viteză de propagare indiferent cum oscilează capătul de sus. Forțele elastice sînt aceleași pentru toate orientările planelor de polarizare a undelor ce se propagă de-a lungul unui astfel de lanț.

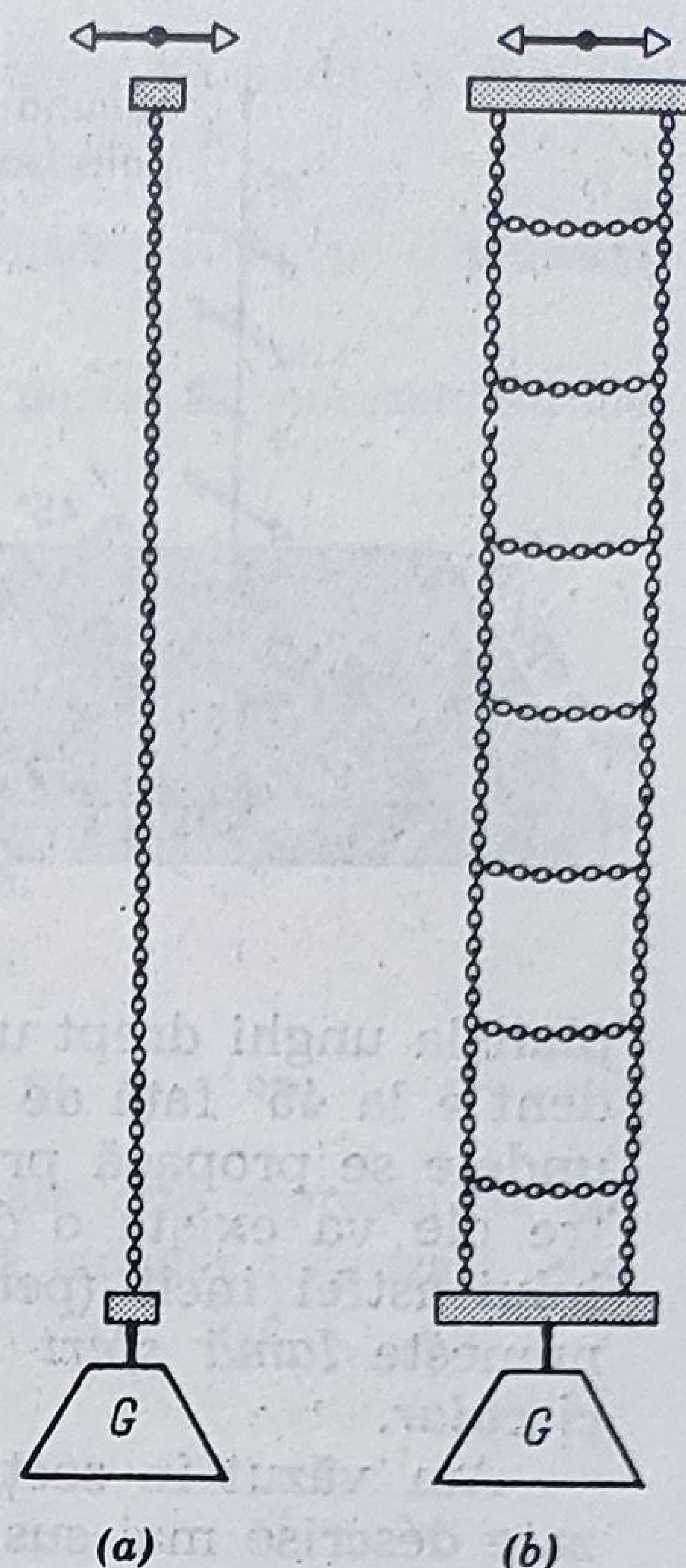


Figura 46-16. Două vederi asupra unui model mecanic unidimensional pentru refracția dublă.

Aceste considerații ne permit să înțelegem mai clar stările de polarizare a luminii reprezentate de dubla suprafață de undă din figura 46-12. Pentru suprafața (sferică) a undei *o* vibrațiile vectorului $\vec{E}$ trebuie să fie pretutindeni la unghiuri drepte cu axa optică. Dacă acest lucru e adevărat, atunci va exista aceeași constantă de forță k_o, și undele *o* se vor propaga cu aceeași viteză în toate direcțiile. Mai precis, dacă tragem o linie pe figura 46-12 din *S* la suprafața undei *o*, considerată tridimensional (ca o sferă) vibrațiile vectorului $\vec{E}$ vor fi întotdeauna la unghiuri drepte cu planul definit de această rază și axa optică. În acest fel, aceste vibrații vor fi întotdeauna perpendiculare pe axa optică.

Pentru suprafața undei *e* (elipsoidală), vibrațiile vectorului $\vec{E}$ au, în general, o componentă paralelă cu axa optică. Pentru astfel de raze ca *Se* în figura 46.12 sau pentru razele *e* din figura 46.14, *b*, vibrațiile sînt complet paralele cu această axă. Astfel acționează o constantă de forță relativ puternică (în calcită) *Re* și viteza undei v_e va fi relativ mare. Pentru raza *e*, astfel ca în *Sb* în figura 46-12 componenta paralelă a vibrațiilor vectorului $\vec{E}$ este mai mică decît 100%, astfel încît viteza corespunzătoare a undei va fi mai mică decît v_e. Pentru raza *Sc* din figura 46-12 componenta paralelă este zero, și distincția dintre razele o și e dis-dispare.

46-5 Polarizație circulară

Să lăsăm lumina plan polarizată de pulsație ω (=2πν) să cadă la incidență normală pe un bloc de calcită tăiat cu axa optică paralelă cu fața blocului, ca în figura 46-17. Cele două unde ce vor ieși vor fi polarizate

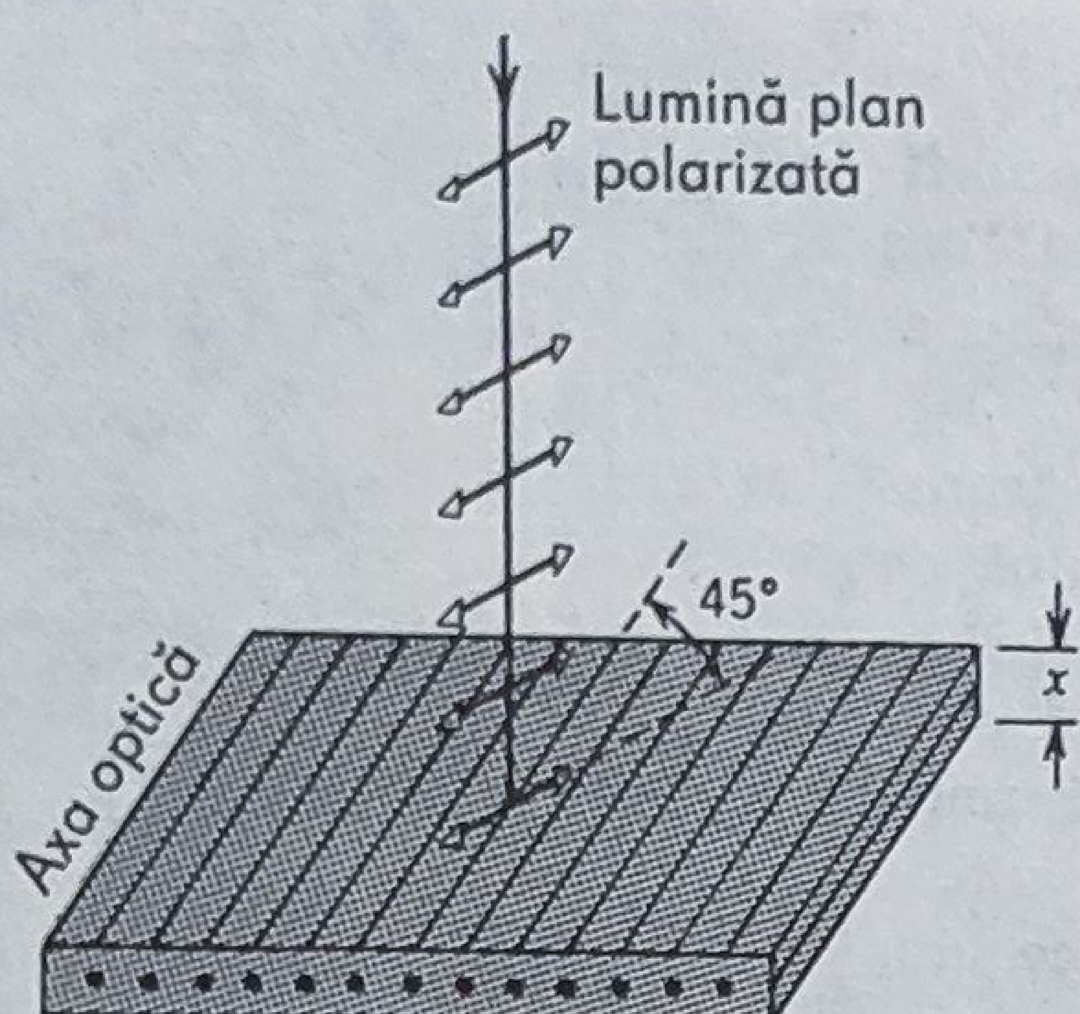


Figura 46-17. Pe o probă dublu refractantă de grosime x tăiată astfel încît axul optic este paralel cu suprafața, cade lumină plan polarizată. Planul de vibrație al luminii incidente este orientat astfel încît să facă un unghi de 45° cu axa optică.

plan la unghi drept una față de cealaltă, și dacă planul de vibrație incident e la 45° față de axa optică, vor avea și amplitudini egale. Deoarece undele se propagă prin cristal cu viteze diferite, cînd ies din cristal între ele va exista o diferență de fază Φ. Dacă alegem grosimea cristalului astfel încît (pentru o frecvență a luminii dată) $\Phi=90°$, blocul se numește *lamă sfert de undă.* Lumina care iese se numește *polarizată circular.*

Am văzut în secția 15-7 că cele două unde emergente plan polarizate descrise mai sus (vibrînd perpendicular una pe cealaltă cu diferență de față de 90°) pot fi reprezentate ca proiecțiile pe două axe perpendiculare ale unui vector ce se rotește cu pulsația ω în jurul direcției de propagare. Aceste două descrieri a luminii polarizate circular sînt complet echivalente. Figura 46-18 clarifică relația dintre cele două descrieri.

Exemplul 3. O lamă sfert de undă de cuarț trebuie utilizată cu lumina de sodiu ($\lambda=5\,890$ Å). Ce grosime trebuie să aibă?

Două unde se propagă prin bloc cu viteze corespunzînd celor doi indici principali de refracție dată de tabela 46-1 ($n_e=1{,}553$ și $n_o=1{,}544$). Dacă lungimea cristalului este x, numărul de lungimi de undă al primei unde conținute în cristal este

$$N_e=\frac{x}{\lambda_e}=\frac{xn_e}{\lambda}$$

unde λ_e este lungimea de undă a undei e în cristal iar λ este lungimea de undă în aer. Pentru cea de a doua undă numărul de lungimi de undă este

$$N_0=\frac{x}{\lambda_0}=\frac{xn_0}{\lambda}$$

unde λ_o este lungimea de undă a unei o în cristal. Diferența N_e-N_o trebuie să fie 1/4, sau

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{\lambda}\,(n_e=n_0)$$

Această ecuație dă

$$x=\frac{\lambda}{4(n_e-n_0)}=\frac{5\,890\ \text{Å}}{(4)(1{,}553-1{,}544)}=0{,}016\ \text{mm}$$

Această placă e destul de subțire, cele mai multe lame sfert de undă se fac din mică, despicînd foaia pînă la grosimea corectă prin încercări.

Exemplul 4. Un fascicul de lumină circular polarizată cade pe o peliculă polarizantă. Descrieți fasciculul emergent.

Lumina polarizată circular, așa cum intră în foaie, poate fi reprezentată de

$$E_x = E_m \sin \omega t$$

și

$$E_y = E_m \cos \omega t$$

unde x și y reprezintă axe rectangulare oarecari. Aceste ecuații reprezintă în mod corect faptul că lumina circular polarizată este echivalentă cu două unde plan polarizate cu amplitudine egală și 90° diferență de fază.

Amplitudinea rezultantă în unda circular polarizată este

$$E_{cp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_m^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = E_m$$

rezultat ce era de așteptat din moment ce unda polarizată este reprezentată de un vector rotitor. Intensitatea rezultantă în unda incidentă circular polarizată este proporțională cu $E_m{}^2$, sau

$$I_{cp} \propto E_m{}^2 \tag{46-4}$$

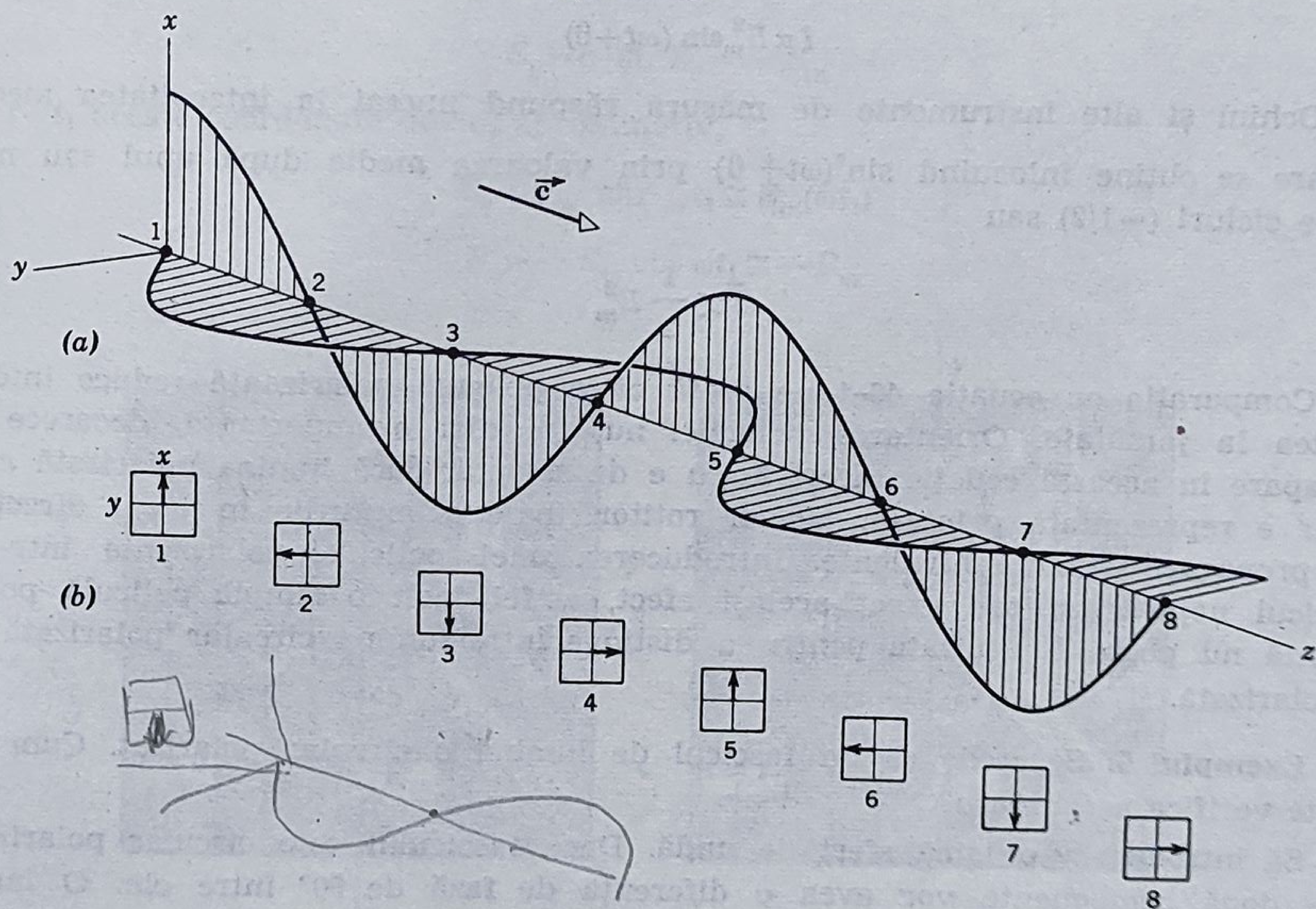


Figura 46-18. (*a*) Două unde plan polarizate de amplitudine egală și perpendiculare una pe alta se deplasează pe direcția z. Între ele există o diferența de fază de 90°, acolo unde una are un maxim, cealaltă este zero. (*b*) Amplitudinea rezultantă a undei ce se apropie văzută de observatori care se găsesc în pozițiile marcate pe axa z. De notat că fiecare observator va vedea vectorul rezultant rotindu-se în timp sensul acelor ceasornicului.

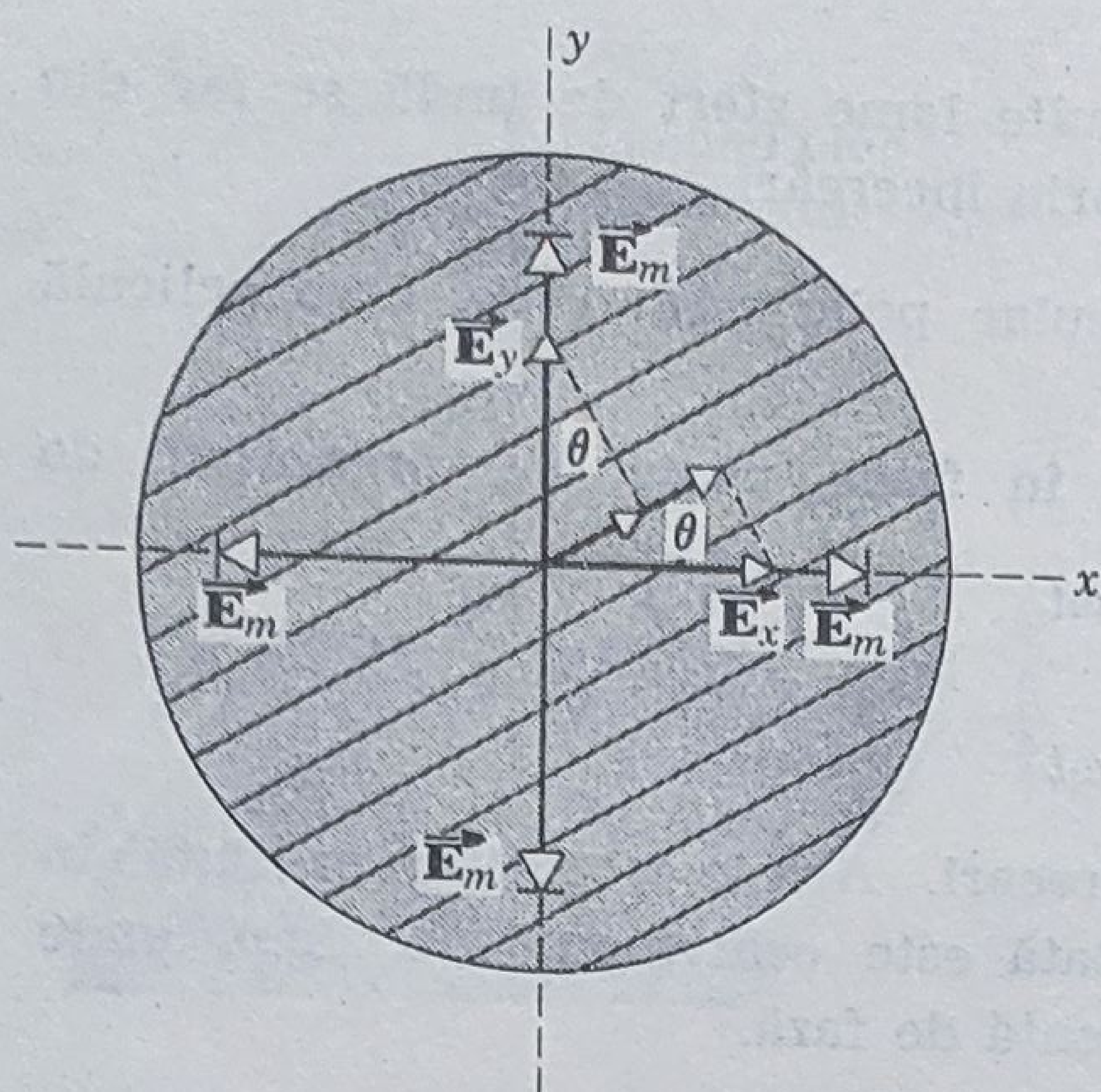


Figura. 46-19. Pe o peliculă polarizantă cade lumină polarizată circular. $\overline{E}_x$ şi $\overline{E}_y$ sînt valorile instantanee ale celor două componente, valoarea lor maximă fiind $\overline{E}_m$.

Fie direcţia de polarizare a peliculei la un unghi θ cu axa x, ca în figura 46-19. Valoarea instantanee a unei plan polarizate transmisă de peliculă este

$$E = E_y \sin\theta + E_x \cos\theta =$$
$$= E_m \cos\omega t \sin\theta + E_m \sin\omega t \cos\theta = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

Intensitatea undei transmise de peliculă este proporţională cu E^2, sau

$$I \propto E_m^2 \sin(\omega t + \theta)$$

Ochiul şi alte instrumente de măsură răspund numai la intensitatea medie $\overline{I}$, care se obţine înlocuind $\sin^2(\omega t + \theta)$ prin valoarea medie după unul sau mai multe cicluri $(=1/2)$ sau

$$\overline{I} \propto \frac{1}{2} E_m^2$$

Comparaţia cu ecuaţia 46-4 ne arată că o peliculă polarizantă reduce intensitatea la jumătate. Orientarea peliculei nu are nici o importanţă, deoarece θ nu apare în această ecuaţie; acest lucru e de aşteptat dacă lumina polarizată circular e reprezentată printr-un vector rotitor, toate azimuturile în jurul direcţiei de propagare fiind echivalente. Introducerea unei pelicule polarizante într-un fascicul *nepolarizat* are exact acelaşi efect, astfel încît o simplă peliculă polarizantă nu poate fi utilizată pentru a distinge între lumina circular polarizată şi nepolarizată.

Exemplul 5. Se crede că un fascicul de lumină e circular polarizat. Cum se poate verifica acest lucru?

Să introducem o lamă sfert de undă. Dacă fasciculul este circular polarizat, cele două componente vor avea o diferenţă de fază de 90° între ele. O lamă sfert de undă va introduce o nouă diferenţă de fază de ±90° astfel încît lumina emergentă va avea o diferenţă de fază fie de 180° fie zero. În ambele cazuri, lumina va fi acum *plan polarizată* şi poate fi făcută să sufere extincţie completă prin rotirea unui polarizor în drumul ei.

Trebuie orientată lama sfert de undă în vreun fel particular pentru acest test?

Exemplul 6. O undă de lumină, plan polarizată, de amplitudine E_o cade pe o lamă sfert de undă de calcită cu planul de vibraţie la 45° faţă de axa optică a lamei, care se ia drept axa y, vezi figura 46-20. Lumina emergentă va fi circular polarizată. În ce direcţie va apărea că se roteşte vectorul electric rotitor? Direcţia de propagare iese din pagină.

Componenta undei ale cărei vibraţii sînt paralele cu axa optică (unda e) poate fi reprezentată la momentul ieşirii din lamă astfel

$$E_y=(E_o \cos 45°)\sin \omega t=\frac{1}{\sqrt{2}}E_o \sin \omega t=E_m \sin \omega t$$

Componenta ale cărei vibraţii sînt perpendiculare pe axa optică (unda o) pot fi reprezentate astfel

$$E_x=(E_o \sin 45°)\sin(\omega t-90°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}E_o \cos \omega t=-E_m \cos \omega t$$

deplasarea de 90° reprezentînd acţiunea lamei sfert de undă. De notat că E_x îşi atinge valoarea maximă la un sfert de ciclu *mai tîrziu* decît E_y, deoarece în calcită, unda E_x (unda o) se propagă mai *încet* decît unda E_y (unda e).

Pentru a decide direcţia de rotaţie, să localizăm vîrful vectorului electric rotitor la două momente de timp, (a) $t=0$ şi (b) un scurt timp t_1 mai tîrziu astfel ales încît ωt_1 să fie un unghi mic. La $t=0$ coordonatele vîrfului vectorului rotativ (vezi figura 46-20 a) sînt

$$E_y=0 \text{ şi } E_x=-E_m$$

La $t=t_1$ aceste coordonate devin, aproximativ,

$$E_y=E_m \sin \omega t_1 \cong E_m(\omega t_1)$$

$$E_x=-E_m \cos \omega t_1 \cong -E_m$$

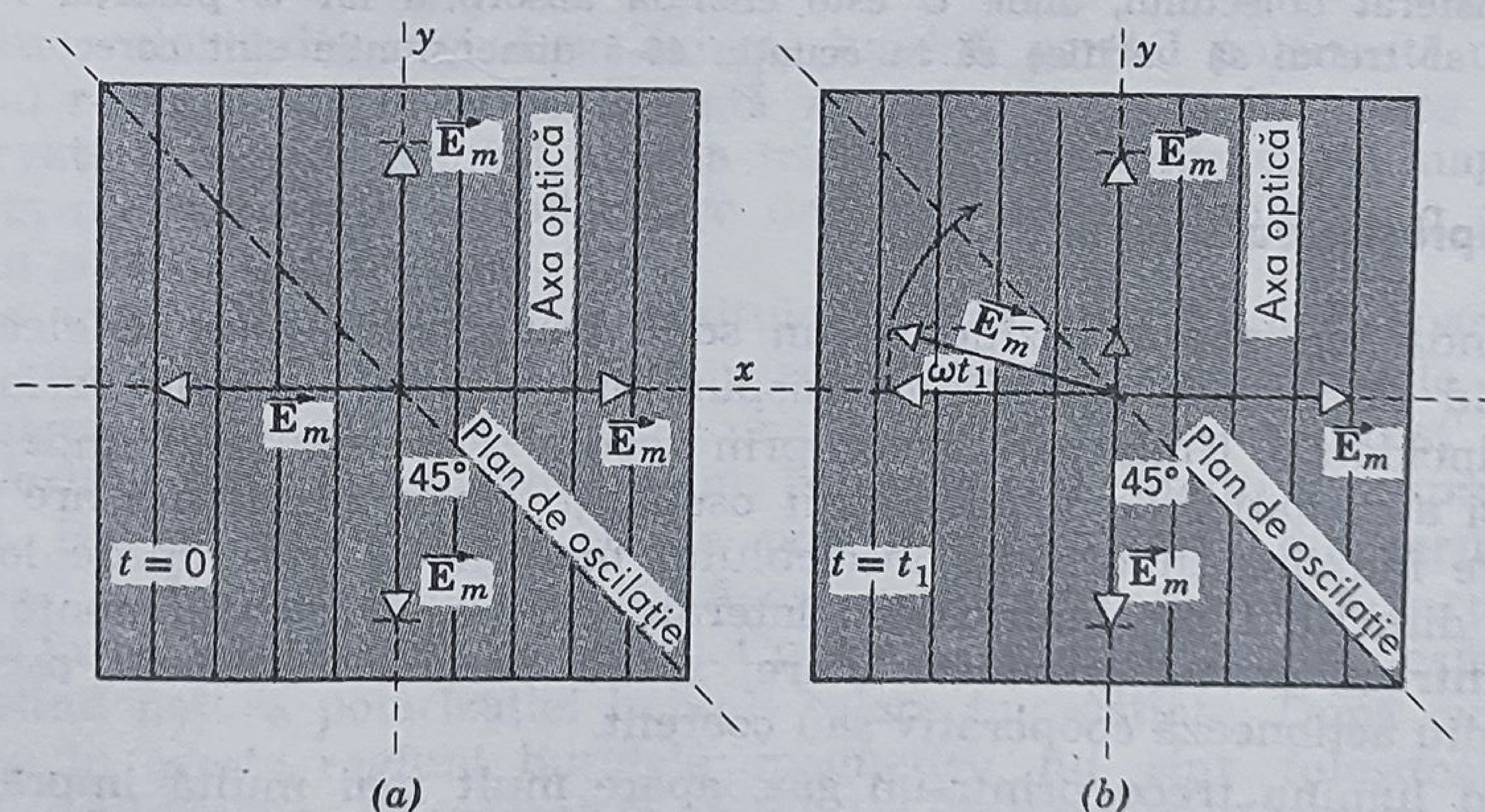


Figura 46-20. Lumina plan polarizată cade din spatele unei plăci pătrate orientate astfel încît lumina care iese din pagină să fie circular polarizată. În acest caz, un observator ce priveşte din faţă sursa luminoasă vede vectorul electric E_m rotindu-se în sensul acelor ceasornicului.

În figura 46-20 b vedem că vectorul care reprezintă lumina circular polarizată emergentă este rotit în sens orar; prin convenție o astfel de lumină este *circular polarizată drept*, observatorul fiind considerat întodeauna cu fața spre sursa de lumină. Dacă planul de vibrție al luminii incidente din figura 46-20 este rotit cu $\pm 90°$, lumina emergentă va fi *circular polarizată sting*.

46-6 Momentul cinetic al luminii

Faptul că undele luminoase pot ceda *impuls* unui ecran absorbant sau unei oglinzi este în concordanță cu electromagnetismul clasic, cu fizica cuantică și cu experiența. Polarizația circulară sugerează că lumina astfel polarizată ar putea avea, de asemenea, un *moment cinetic*. Într-adevăr, așa este; încă o dată predicția este în acord cu electromagnetismul clasic și cu fizica cuantică. Dovada experimentală a fost dată în 1936 de Beth care a arătat că atunci cînd se produce lumină polarizată circular într-un bloc cu dublă refracție, blocul suferă un cuplu ca reacție.

Momentul cinetic al luminii joacă un rol vital în înțelegerea emisiei luminii de către atomi și a radiațiilor γ de către nuclee. Dacă lumina cînd părăsește atomul are moment cinetic, momentul cinetic al atomului părăsit trebuie să se schimbe exact cu cantitatea luată de lumină; astfel momentul cinetic al sistemului izolat *atom plus lumină* se va conserva.

Atît teoria clasică cît și cea cuantică prezic că dacă un fascicul de lumină circular polarizată este complet absorbită de obiectul pe care cade un moment cinetic dat de

$$L = \frac{U}{\omega} \tag{46-5}$$

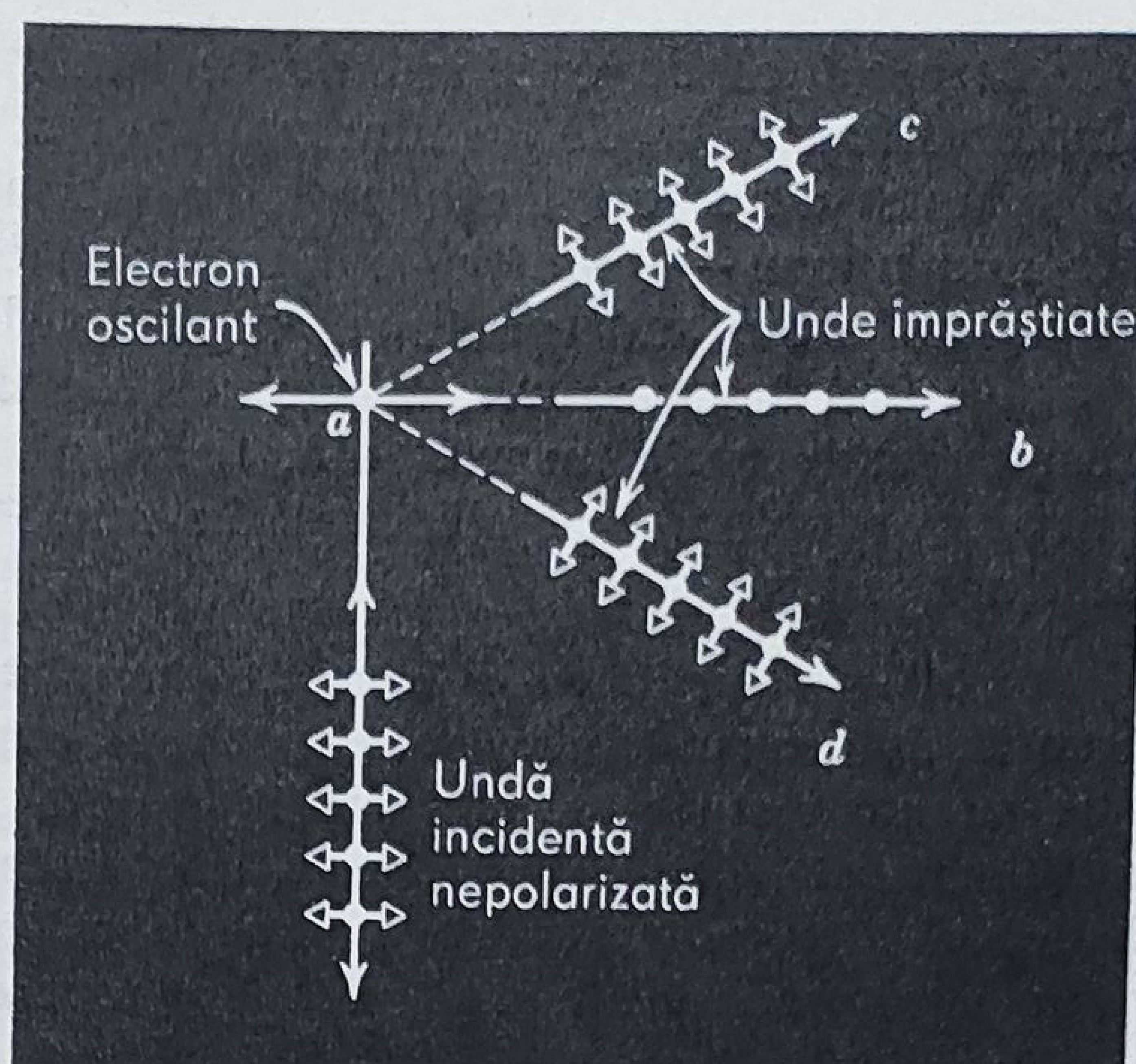
este transferat obiectului, unde U este energia absorbită iar ω pulsația luminii. Cititorul ar trebui să verifice că în ecuația 46-5 dimensiunile sînt corecte.

46-7 Împrăștierea luminii

O undă luminoasă, căzînd pe un solid transparent face ca electronii din solid să oscileze periodic ca răspuns la vectorul electric variabil al undei incidente. Unda care trece prin mediu este rezultatul undei incidente și a radiației de la electronii oscilanți. Unda rezultantă are o intensitate maximă în direcția fasciculului incident căzînd repede la zero în alte direcții. Lipsa împrăștierii laterale, care ar fi esențialmente completă într-un cristal „perfect" mare, apare deoarece sarcinile oscilante din mediu acționează cooperativ sau coerent.

Cînd lumina trece printr-un gaz, apare mult mai multă împrăștiere laterală. În acest caz, electronii oscilanți fiind separați de distanțe relativ largi și nefiind legați împreună într-o structură rigidă, acționează mai degrabă independent decît cooperativ. Astfel, anularea rigidă a mărimilor oscilante (perturbația) care nu sînt pe direcția înainte e mai improbabilă, există mai multă împrăștiere laterală.

Figura 46-12. Lumina este polarizată fie parțial (c sau d) fie complet (b) prin împrăștierea pe o moleculă de gaz în a.



Lumina împrăștiată lateral de un gaz poate fi în întregime sau parțial polarizată chiar dacă lumina incidentă e nepolarizată. În figura 46-21 se vede un fascicul nepolarizat deplasîndu-se în sensul paginii și lovind un atom al gazului în a. Electronii din a vor oscila ca răspuns la componentele electrice ale undei incidente, mișcarea lor fiind echivalentă cu a doi poli oscilanți a căror axe sînt reprezentate de săgeata și punctul din a. Un dipol oscilant nu radiază de-a lungul propriei lui axe. Astfel un observator din b nu ar primi nici o lumină de la dipolul reprezentat în a de o săgeată. Radiația care ajunge la el ar veni în întregime de la dipolul reprezentat în a printr-un punct; astfel această radiație ar fi plan polarizată, planul de vibrație trecînd prin linia ab și fiind normal la pagină.

Observatorii din c și d ar detecta lumină parțial polarizată deoarece dipolul reprezentat în a de săgeată ar radia ceva și în aceste direcții. Observatorii care ar urmări lumina transmisă sau împrăștiată înapoi n-ar detecta nici un efect de polarizare deoarece ambii dipoli din a ar radia egal în aceste două direcții.

Un exemplu familiar îl constituie împrăștierea luminii soarelui de către atmosfera pămîntului. Dacă n-ar exista atmosfera, soarele ar apărea negru mai puțin atunci cînd privim direct în soare. Acest lucru a fost verificat prin măsurători făcute în rachete și sateliți deasupra atmosferei. Putem verifica ușor cu un polarizor că lumina din cerul senin este cel puțin parțial polarizată. Acest lucru este utilizat în expedițiile polare în așa-numita *busolă solară*. Cu acest dispozitiv se stabilește direcția notînd natura polarizației luminii solare împrăștiate. După cum bine se știe în aceste regiuni busolele magnetice nu sînt folositoare. S-a aflat* că albinele se orientează în zborul lor dintre stup și sursele de polen cu ajutorul polarizației cerului; ochii albinelor înglobează dispozitive sensibile la polarizare.

---

* Vezi *Scientific American*, iulie 1955 și *Bees: Their Vision, Chemical Sense, and Language*, K. von Frisch, Cornell University Press, 1950.

Rămîne încă de explicat de ce lumina împrăştiată de cer este predominant albastră şi de ce lumina primită direct de la soare — în particular la apus cînd lungimea pe care trebuie să o traverseze prin atmosferă este mai mare — este roşie. Secţiunea eficace pentru împrăştierea luminii pe un atom sau moleculă depinde de lungimea de undă, lumina albastră fiind împrăştiată mai puternic decît cea roşie. Deoarece lumina albastră este mult împrăştiată, lumina transmisă va avea culoarea luminii solare normale cu albastrul în mare parte scos; va fi astfel mai roşcată în aparenţă.

Faptul că secţiunea eficace de împrăştiere pentru lumina albastră e mai mare decît pentru lumina roşie poate fi explicat în mod rezonabil. Un electron într-un atom sau moleculă este legat prin puternice forţe elastice. Are o frecvenţă naturală bine definită, ca o masă mică suspendată în spaţiu cu un sistem de arcuri. Frecvenţa proprie a electronilor în atomi şi molecule este de obicei în regiunea corespunzînd luminii violete şi ultraviolete.

Dacă lăsăm lumina să cadă pe electroni astfel legaţi, ea produce oscilaţii forţate cu frecvenţa fasciculului de lumină incident. În sisteme mecanice rezonante este posibil să le „conducem" mai efectiv dacă le imprimăm o forţă exterioară a cărei frecvenţă este cît mai apropiată de cea a frecvenţei proprii de rezonanţă.

În cazul luminii, albastrul este mai aproape de frecvenţa de rezonanţă a electronilor legaţi, decît este roşul. Ne aşteptăm, astfel, ca lumina albastră să facă electronul să oscileze mai puternic şi astfel să fie mai puternic împrăştiată.

46-8 Dubla împrăştiere

Cînd s-au descoperit razele X în 1898 au existat multe speculaţii dacă ele sînt unde sau particule. În 1906 s-a stabilit că ele sînt unde transversale de către Charles Glover Barkla (1877—1944) cu ajutorul unei experienţe de polarizare.

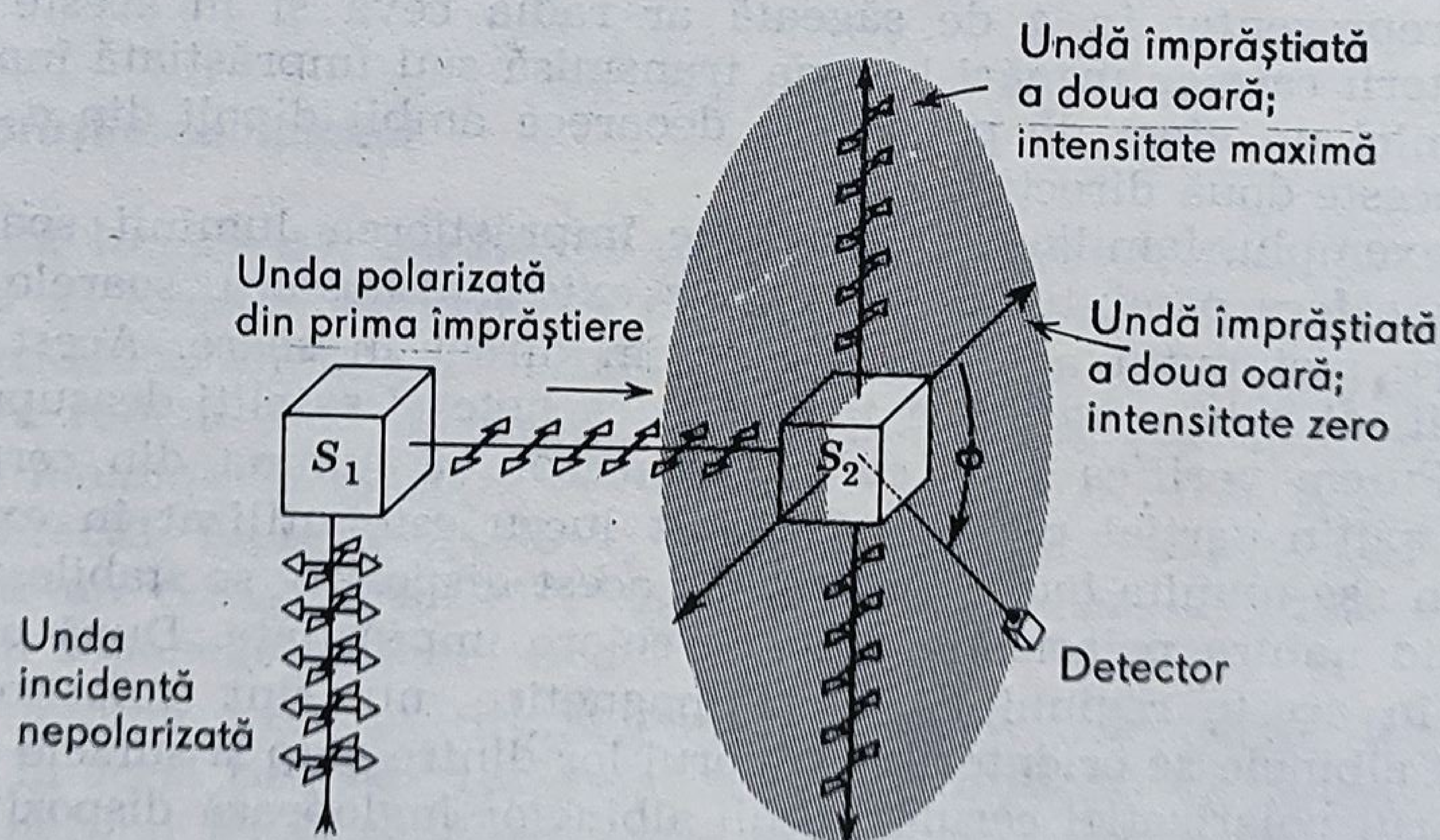


Figura 46-22. O experienţă cu dublă împrăştiere făcută de Barkla pentru a arăta că razele X sînt unde transversale.

Cînd razele X nepolarizate lovesc un bloc împrăştietor S_1 ca în figura 46-22, ele fac electronii să intre în oscilaţie. Consideraţiile secţiunii precedente cer ca razele X împrăştiate spre al doilea bloc să fie plan polarizate după cum se arată în figură. Să lăsăm al doilea bloc să împrăştie aceste unde şi să examinăm radiaţia împrăştiată de el rotind un detector D în planul perpendicular pe linia ce uneşte blocurile. Electronii vor oscila paralel unii cu alţii, şi poziţiile de intensitate maximă şi zero sînt arătate. Reprezentarea grafică a indicaţiilor detectorului în funcţie de unghiul Φ susţine ipoteza că razele X sînt unde transversale. Dacă razele X ar fi constituite dintr-un flux de particule sau din unde longitudinale, aceste efecte n-ar mai putea fi aşa uşor de înţelese. Astfel, importanta experienţă a lui Barkle a stabilit că razele X fac parte din spectrul electromagnetic.

În studiile sale ulterioare cititorul va afla că fascicule de particule ca electroni, protoni, pioni pot fi privite ca unde. Tehnicile de împrăştiere (incluzînd dubla împrăştiere) sînt utilizate frecvent pentru a investiga caracteristicile de polarizare ale acestor fascicule.

Intrebări

1. Dece ochelarii de soare făcuţi din materiale polarizante au un avantaj net faţă de aceia ce depind numai de efecte de absorbţie?

2. Lumina nepolarizată cade pe două pelicule polarizante astfel încît nu se transmite deloc lumină. Dacă între ele se introduce o a treia particulă, se poate transmite lumină?

3. Poate apărea polarizare prin reflexie dacă lumina cade pe o interfaţă din partea indicelui de refracţie mai mare (sticlă-aer, de exemplu)?

4. Axa optică a unui cristal cu dublă refracţie este o simplă linie sau o direcţie în spaţiu? Are un sens, ca săgeata? Ce puteţi spune despre direcţia caracteristică a unei foi polarizante?

5. Imaginaţi un mod de aflare a direcţiei de polarizare a unei particule de Polaroid.

6. Dacă gheaţa este dublu-refractatoare (vezi tabela 46-1) de ce nu se văd două imagini ale obiectelor văzute printr-un cub de gheaţă?

7. V-aţi aştepta, din tabela 46-1, ca o lamă sfert de undă de calcită să fie mai groasă decît una de cuarţ?

8. Se propagă întotdeauna unda *e* într-un cristal cu dublă refracţie cu viteză dată de c/n_e?

9. Descrieţi calitativ ce se întîmplă în figura 46-14 *a* şi *b* dacă fasciculul incident cade pe cristal cu un unghi de incidenţă ce nu este nul. Presupuneţi în fiecare caz că fasciculul incident rămîne în planul figurii.

10. Găsiţi un mod de a identifica direcţia axei optice într-o lamă sfert de undă.

11. Dacă lumina plan polarizată cade pe o lamă sfert de undă cu planul de vibraţie făcînd un unghi de (*a*) 0° sau (*b*) 90° cu axa lamei, descrieţi lumina transmisă. (*c*) Dacă acest unghi este ales arbitrar, lumina transmisă se numeşte *eliptic polarizată;* descrieţi o astfel de lumină.

12. Care va fi efectul unei *lame jumătate de undă* (adică de două ori mai groasă ca o lamă sfert de undă) asupra (*a*) lumină plan polarizată (presupuneţi planul de vibraţie de 45° faţă de axa optică a lamei), (*b*) lumină circular polarizată şi (*c*) lumină nepolarizată?

13. Vi se dă un obiect ce poate fi (*a*) un disc de sticlă gros (*b*) o foaie

polarizantă, (c) o lamă sfert de undă sau (d) o lamă jumătate de undă. (Vedeți întrebarea 12). Cum îl puteți identifica?

14. Se poate reprezenta un fascicul de lumină plan polarizată ca suma a două fascicule de lumină circular polarizate în sensuri opuse? Ce efect are schimbarea fazei uneia din componentele circulare asupra fasciculului rezultant?

15. Cum se poate transforma un fascicul de lumină circular polarizat drept într-un fascicul circular polarizat stîng?

16. Poate fi (a) un fascicul radar și (b) o undă sonoră în aer circular polarizată?

17. Se spune despre un fascicul de lumină că este nepolarizat, plan polarizat sau circular polarizat. Cum puteți găsi experimental care este o afirmație corectă?

18. Un fascicul paralel de lumină este absorbit de un obiect aflat în drum. În ce circumstanțe va fi cedat obiectului (a) impulsul, (b) momentul cinetic?

19. Cînd este privit cerul senin printr-o peliculă polarizantă, se găsește că intensitatea variază la jumătate prin rotirea foii. Acest lucru nu se întîmplă cînd privim prin foaie un nor. Puteți găsi o explicație?

Probleme

1. Lumina nepolarizată cade pe două foi polarizante puse una peste cealaltă. Care trebuie să fie unghiul dintre direcțiile caracteristice ale foilor dacă intensitatea luminii transmise este (a) o treime din intensitatea maximă a fasciculului transmis sau (b) o treime din intensitatea fasciculului incident? Presupuneți că pelicula polarizantă este ideală, adică, reduce intensitatea luminii nepolarizate cu exact 50%.

2. Un fascicul nepolarizat de lumină cade pe un grup de patru foi polarizante care sînt astfel aliniate încît direcția caracteristică a fiecărei foi este rotită cu 30° în sens orar în raport cu pelicula precedentă. Ce fracțiune din lumina incidentă este transmisă?

3. Descrieți starea de polarizare reprezentată de acest set de ecuații:

(a) $E_x = E \sin (kz - \omega t)$

$E_y = E \cos (kz - \omega t)$

(b) $E_x = E \cos (kz - \omega t)$

$E_y = E \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $E_x = E \sin (kz - \omega t)$

$E_y = -E \sin (kz - \omega t)$

4. (a) La ce unghi de incidență este complet polarizată lumina reflectată de apă? (b) Depinde acest unghi de lungimea de undă a luminii?

5. Calculați domeniul unghiurilor de polarizare pentru lumina albă ce cade pe sticla de cuarț. Presupuneți că limitele lungimilor de undă sînt 4 000 și 7 000 Å și utilizați curba de dispersie din figura 41-2.

6. Un fascicul îngust de lumină nepolarizată cade pe un cristal de calcită tăiat cu axa optică ca în figura 46-23. (a) Pentru $t = 1{,}0$ cm și $\theta_i = 45°$, calculați distanța perpendiculară dintre două raze emergente x și y. (b) Care este raza o și care raza e? (c) Care sînt stările de polarizare a razelor emergente? (d) Descrieți ce se întîmplă dacă un analizor este plasat în fasciculul incident și rotit? (Indicație: În interiorul cristalului vibrațiile

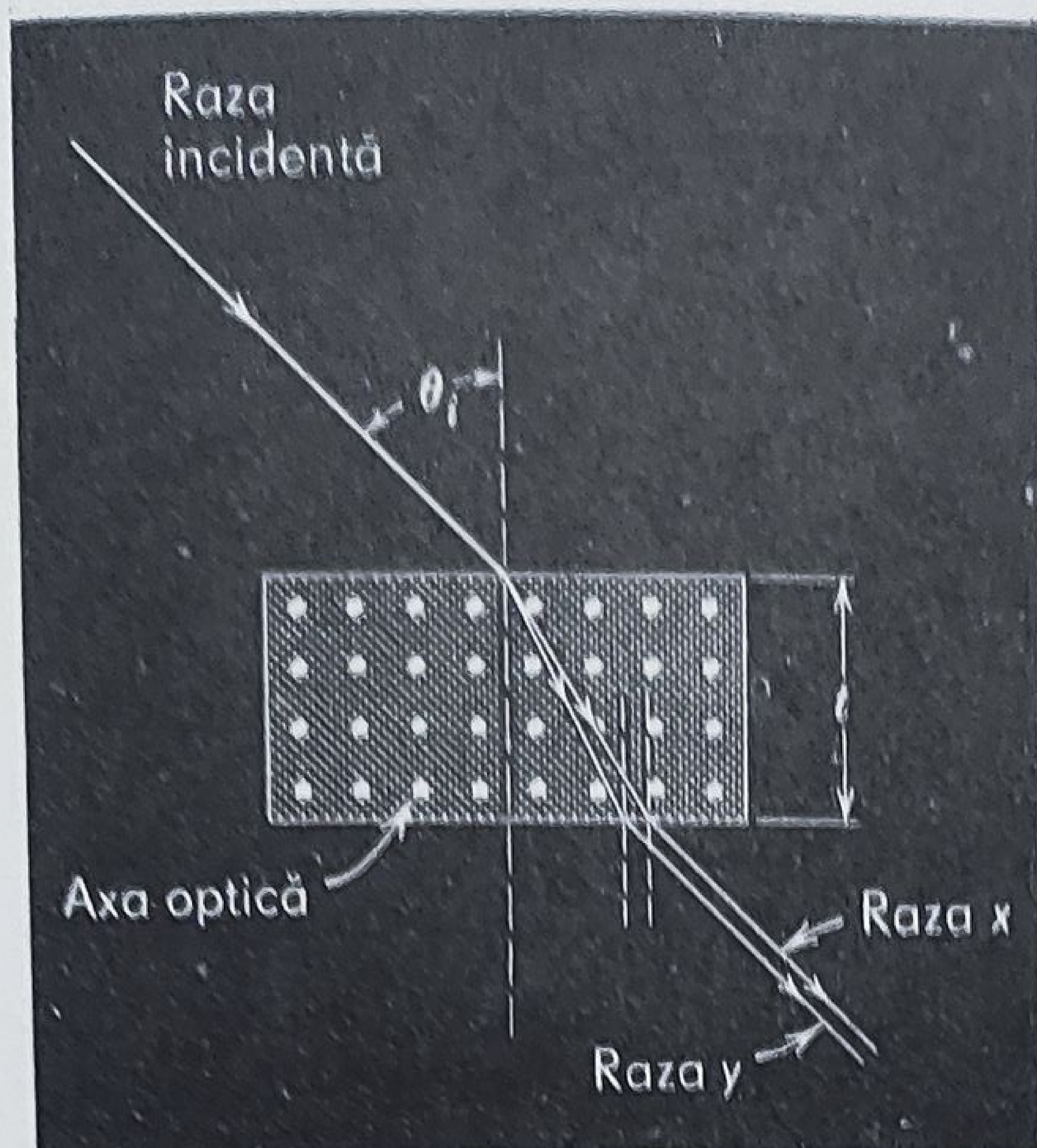


Figura 46-23.

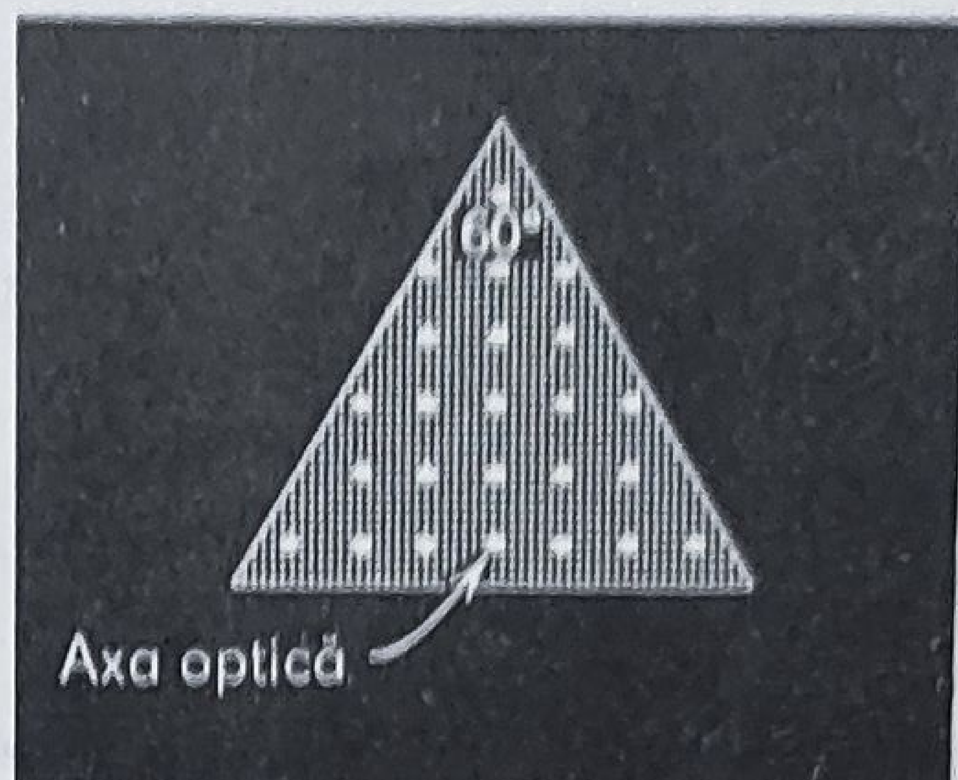


Figura 46-24.

vectorului $\vec{E}$ pentru o rază sînt întotdeauna perpendiculare pe axa optică și pentru cealaltă rază sînt întotdeauna paralele. Cele două raze sînt descrise de indicii n_o și n_e; *în acest plan* fiecare rază ascultă de legea Snell).

7. Se taie o prismă din calcită în așa fel încît axa optică să fie paralelă cu muchea prismei ca în figura 46-24. Descrieți cum ar putea fi utilizată o astfel de prismă pentru a măsura cei doi indici de refracție pentru calcită. (Indicație: vedeți indicația din problema 6; vedeți de asemenea exemplul 3, capitolul 41).

8. Cît de groasă trebuie să fie o foaie de mica pentru a forma o lamă sfert de undă pentru lumina galbenă ($\lambda = 5\,890$ Å)? Mica clivează astfel încît indicii de refracție, pentru transmisia la unghiuri drepte față de planul de clivaj sînt 1,6049 și 1,6117.

9. Arătați că două unde luminoase plan polarizate de amplitudine egală, planele lor de vibrație fiind perpendiculare unul pe celălalt, nu pot produce efecte de interferență. (Indicație: Arătați că intensitatea undei luminoase rezultante mediată, pe unul sau mai multe cicluri de oscilație, este aceeași indiferent ce diferență de fază există între cele două unde).

10. Arătați că într-un fascicul paralel de lumină circular polarizată, momentul cinetic pe unitatea de volum L_v este dat de

$$L_v = \frac{P}{\omega c}$$

unde P este puterea pe unitatea de suprafață (să spunem watt/cm²) a fasciculului. Plecați de la ecuația 46-5.

11. Presupuneți că un fascicul de lumină circular polarizată a cărei intensitate este 100 watt este absorbit de un obiect. Care este rata de transfer a momentului cinetic către obiect? Dacă obiectul este un disc plat de 5,0 mm diametru și masă de $1{,}0 \times 10^{-2}$ g după cît timp (presupunînd că este liber să se rotească în jurul axei sale) ar atinge viteza unghiulară de 1,0 s^{-1}? Presupuneți că lungimea de undă a luminii este de 5 000 Å.

Capitolul 47

Lumina şi fizica cuantică

47-1 Surse de lumină

Am studiat pînă acum propagarea, reflexia, refracţia, difracţia, polarizarea, împrăştierea şi interferenţa luminii. Ne vom ocupa în continuare de *producerea* luminii şi de modul în care aceste studii au condus în 1900 la naşterea fizicii cuantice moderne.

Cele mai uzuale surse de lumină sînt corpurile solide încălzite şi descărcările electrice prin gaze. Exemple tipice de astfel de surse sînt filamentul de tungsten al lămpii cu incandescenţă şi lampa cu neon. Analizînd cu ajutorul unui spectrometru lumina emisă de la o sursă, putem afla intensitatea radiată la diverse lungimi de undă. În figura 47-1 se poate vedea rezultatul unei astfel de măsurători, tipic pentru solide încălzite, în care s-a încălzit la 2 000 K o panglică de tungsten.

În ordonată (figura 47-1) a fost pusă *densitatea spectrală a emitanţei energetice**, M_λ , (sau pe scurt *emitanţa spectrală)* definită astfel ca fluxul energetic emis de unitatea de aria a radiatorului, în intervalul de lungimi de undă λ, $\lambda+d\lambda$ să fie $M_\lambda\, d\lambda$. Unitatea S.I. pentru emitanţa spectrală este watt pe metru pătrat pe metru ($W/m^2 \cdot m$), respectiv în unităţi mai convenabile $W/m^2 \cdot \mu m$ ($1\ W/m^2 \cdot \mu m = 10^6\ W/m^2 \cdot m$) sau $W/cm^2 \cdot \mu m$ ($1\ W/cm^2 \cdot \mu m = 10^{10}\ W/m^2 \cdot m$). La măsurarea lui M_λ se ia în consideraţie toată radiaţia emisă în 2π steradiani, de radiator.

Uneori dorim să discutăm despre energia radiată în tot domeniul de lungimi de undă. În acest caz vom vorbi de *emitanţa energetică*, M_e, definită ca flux de energie emis uniform de pe o suprafaţă cu aria uni-

* În acest paragraf şi în următoarele, mărimile şi unităţile fotometrice au fost luate şi notate în conformitate cu sistemul S.I. aplicat în ţara noastră şi prezentat în „Sistemul internaţional de unităţi de măsură" de I. Iscrulescu, Gh. Ispăşoiu şi V. Petrescu, Bucureşti, Editura tehnică, 1970, p. 61—79. (N.T.).

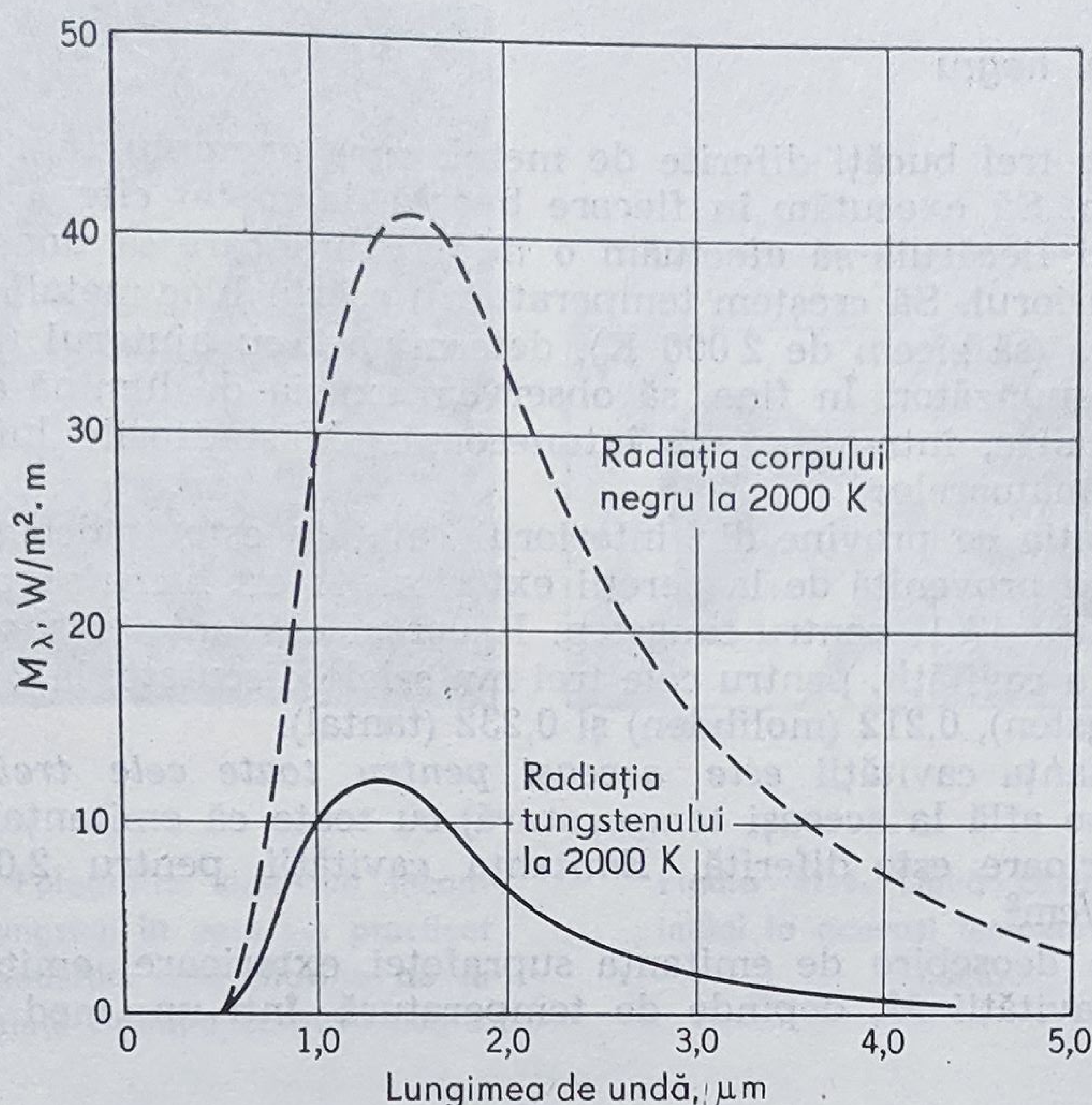


Figura 47-1. Densitatea spectrală a emitanței energetice a tungstenului la 2 000 K. Linia întreruptă se referă la radiația corpului negru aflat la aceeași temperatură. 1μ =10^{-6} m=10^4 Å.

tate, unitatea de măsură corespunzătoare fiind W/m². Ea poate fi obținută integrînd radiația emisă pe tot intervalul de lungimi de undă:

$$M_e = \int_0^\infty M_\lambda \, d\lambda \tag{47-1}$$

Emitanța M_e poate fi interpretată ca aria de sub curba M_λ funcție de λ. În cazul figurii 47-1, această arie și deci M_e, este de $23{,}5 \times 10^4$ W/cm². Se poate observa asemănarea formală ce există între această curbă și cea a distribuției Maxweliene a vitezelor, din paragraful 24-2.

Pentru orice material există o familie de curbe de emitanță spectrală ca cea din figura 47-1, cîte o curbă pentru fiecare temperatură. Dacă se compară asemenea familii de curbe, nu rezultă regularități clare. Înțelegerea și descrierea lor pe baza unei teorii prezintă dificultăți serioase. Din fericire, este posibil să lucrăm cu un *corp solid ideal, încălzit*, numit *corp negru*. Proprietățile de emisie a luminii se dovedesc a fi independente de materialul din care este construit corpul negru și depind într-un mod simplu de temperatură. Anterior am procedat la fel, cînd am studiat proprietățile unui gaz ideal și nu a infinităților de tipuri de gaze reale. Corpul negru este un *corp ideal* din punct de vedere al proprietăților lui de emisie a luminii. Vom descrie în paragrafele următoare modul în care studiul teoretic al radiației corpului negru, l-a condus în 1900 pe fizicianul german Max Planck (1858—1947), la fundamentarea fizicii cuantice moderne.

47-2 Corpul negru

Să luăm trei bucăţi diferite de metal, spre exemplu tungsten, tantal şi molibden. Să executăm în fiecare bucată de metal cîte o cavitate iar prin pereţii fiecăruia să efectuăm o mică gaură care să unească cavitatea cu exteriorul. Să creştem temperatura fiecărui bloc metalic la aceeaşi temperatură (să zicem de 2 000 K), determinată cu ajutorul unui termometru corespunzător. În fine, să observăm emisia de lumină a celor trei bucăţi metalice, într-o cameră întunecoasă. Măsurătorile lui M_e şi M_λ ne arată următoarele:

1. Radiaţia ce provine din interiorul cavităţii este totdeauna mai intensă ca cea provenită de la pereţii exteriori. Acest lucru se poate vedea clar în figura 47-1, pentru tungsten. Raportul emitanţelor suprafeţei exterioare şi a cavităţii, pentru cele trei materiale discutate, la 2 000 K este 0,259 (tungsten), 0,212 (molibden) şi 0,232 (tantal).

2. Emitanţa cavităţii *este aceeaşi pentru toate cele trei materiale* (dacă ele se află la aceeaşi temperatură) cu toate că emitanţele suprafeţelor exterioare este diferită. Emitanţa cavităţii pentru 2 000°K este de 90,0 W/cm²

3. Spre deosebire de emitanţa suprafeţei exterioare, emitanţa energetică a cavităţii M_e depinde de temperatură într-un mod simplu şi anume:

$$M_{ec}=\sigma T^4 \tag{47-2}$$

unde σ este o constantă universală (constanta Stefan-Boltzman) a cărei valoare măsurată experimental este $5{,}67\times10^{-8}$ W/(m²) (K⁴). Emitanţa suprafeţei exterioare variază cu temperatura într-un mod mult mai complicat şi diferă de la un material la altul. Ea se scrie uneori sub forma

$$M_e=\varepsilon M_{ec}=\varepsilon\sigma T^4 \tag{47-3}$$

unde ε este *emisivitatea*, mărime care depinde de material şi de temperatură.

4. M_λ pentru radiaţia emisă de cavitate depinde doar de temperatură şi este complet independentă de materialul, forma şi dimensiunile cavităţii.

Radiaţia emisă de către cavitate este tocmai radiaţia corpului solid ideal, a corpului negru, al cărui prototip este cavitatea.

În figura 47-3 se poate vedea o cavitate reală construită dintr-un cilindru gol cu pereţi subţiri de tungsten încălzit cu ajutorul curentului electric ce trece prin el. În peretele cilindrului este făcut un orificiu mic şi el este aşezat în interiorul unui balon de sticlă vidat.

Multe din afirmaţiile făcute mai înainte pot fi deduse din figura 47-4, care pre-

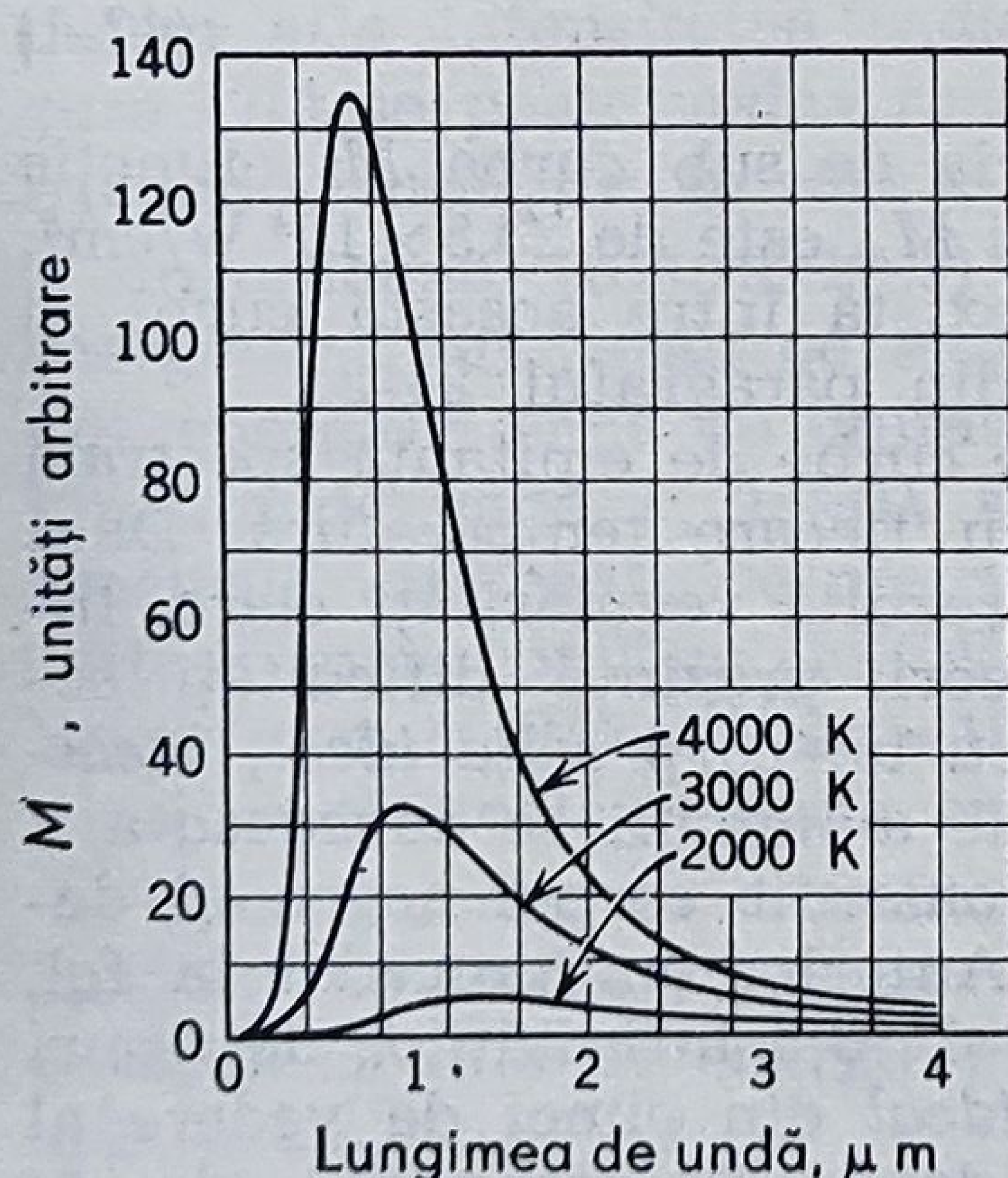


Figura 47-2. Emitanţa spectrală a corpului negru la trei temperaturi diferite.

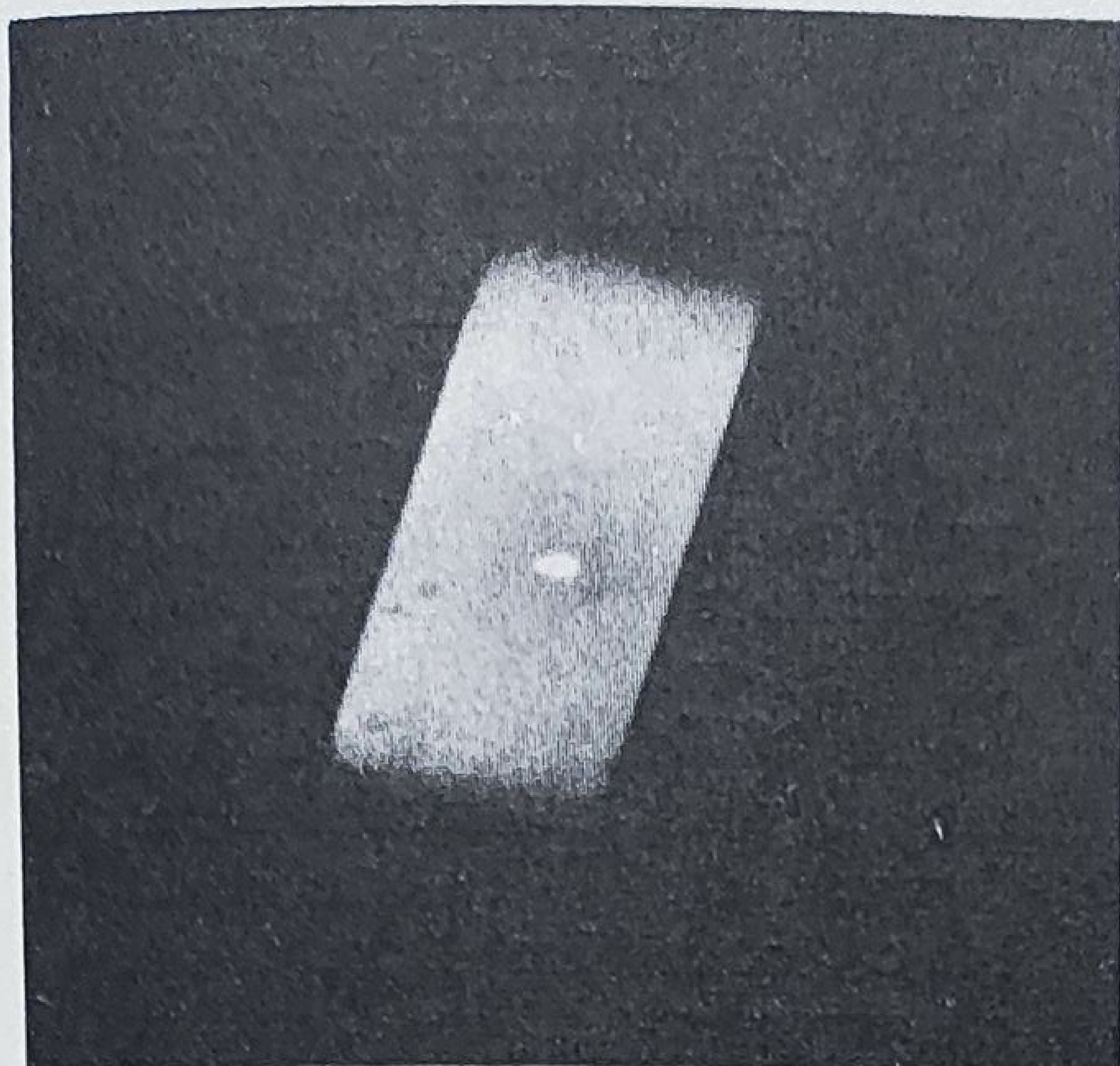


Figura 47-3. Fotografia unui tub incandescent de tungsten în care s-a practicat un orificiu. Radiația care provine de la orificiu reprezintă radiația corpului negru.

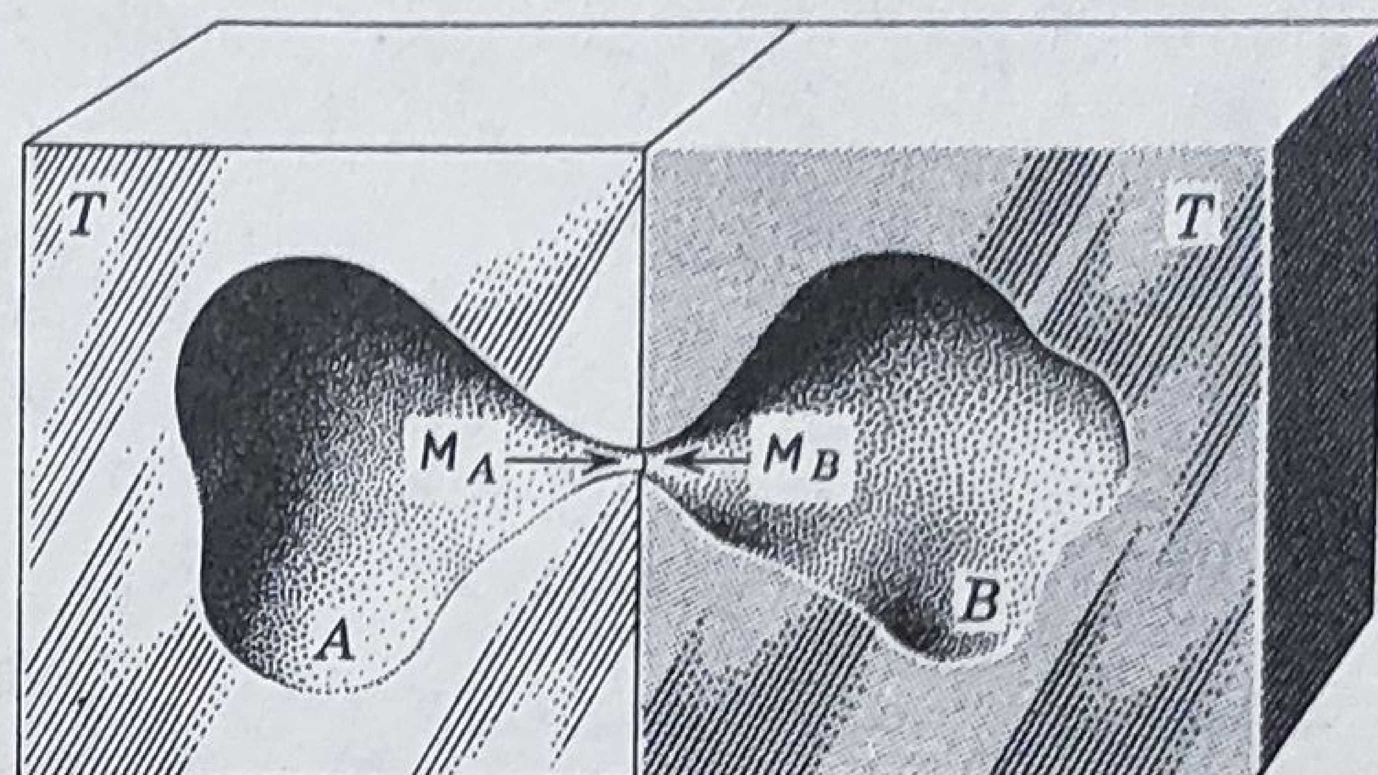


Figura 47-4. Două cavități radiante, inițial la aceeași temperatură, puse în contact.

zintă două corpuri negre (cavități) construite din materiale diferite, de forme oarecari,cu aceeași temperatură T a pereților. Radiația descrisă prin M_A trece din cavitatea A în cavitatea B iar radiația descrisă prin M_B trece în sens invers. Dacă cantitățile de energie transportate de cele două radiații în unitate de timp nu sînt egale, unul dintre blocuri treptat se va încălzi iar celălalt treptat se va răci, proces ce ar contrazice legea a doua a termodinamicii (de ce?). Astfel că trebuie să avem

$$M_A = M_B = M_C \tag{47-4}$$

unde M_C descrie radiația *ambelor* cavități.

Nu numai radiația totală ci și distribuția spectrală a ei trebuie să fie aceeași pentru ambele cavități din figura 47-4. Acest lucru poate fi arătat punînd un filtru între cele două deschideri ale cavităților, astfel ales încît să permită să treacă o bandă îngustă de frecvențe. Folosind același raționament, putem arăta că trebuie ca

$$M_{\lambda\ A} = M_{\lambda\ B} = M_{\lambda\ C} \tag{47-5}$$

unde $M_{\lambda C}$ este emisivitatea spectrală caracteristică ambelor cavități.

47-3 Formula lui Planck pentru radiația corpului negru

Explicarea teoretică a radiației corpului negru a fost una din problemele importante nerezolvate de fizică pînă la începutul secolului nostru. O serie de fizicieni capabili au dat teorii bazate pe fizica clasică, care, cu toate eforturile au avut un succes limitat. În figura 47-5 este prezentată spre exemplu teoria lui Wien; concordanța cu datele experimen-

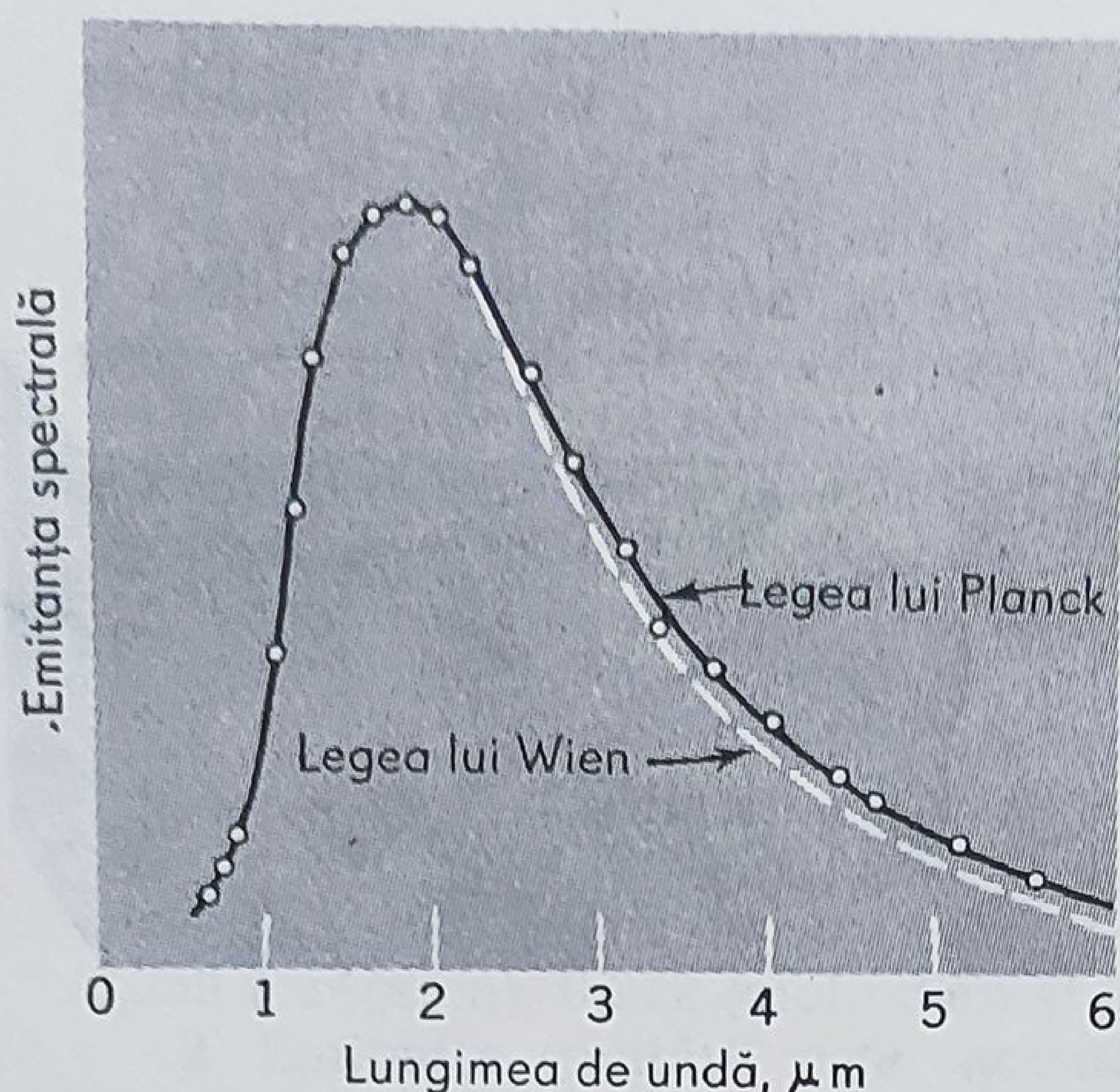


Figura 47-3. Cercurile reprezintă datele experimentale ale lui Coblentz relativ la emitanța spectrală a corpului negru. Sînt deasemenea reprezentate curbele corespunzătoare formulelor teoretice ale lui Wien și Planck, din care se vede că relația lui Planck concordă bine cu experiența.

tale este destul de bună, dar totuși, este neexactă. Formula lui Wien este

$$M_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T}}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante ce trebuie determinate din datele experimentale, pentru o concordanță cît mai bună.

În 1900 Max Planck a arătat că dacă se modifică puțin formula lui Wien, ea conduce la o concordanță foarte bună cu experiența.

Formula pe care Panck a comunicat-o Societății de Fizică din Berlin în 19 octombrie 1900, a fost

$$M_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c^2/\lambda T} - 1} \qquad (47\text{-}6)$$

Această formulă, de altfel importantă și interesantă, era în acel moment doar o relație empirică și deci nu reprezenta o teorie.

Planck a căutat să găsească o astfel de teorie și în care să ia în considerație procesele atomice ce au loc la pereții cavității. El a presupus că atomii care constituie pereții cavității se comportă ca niște oscilatori electromagnetici foarte mici, fiecare avînd o frecvență caracteristică de oscilație. Oscilatorii emit energie electromagnetică în cavitate și o absorb pe cea venită dinspre cavitate. Astfel ar fi posibil să se deducă caracteristicile radiației din cavitate din cele ale oscilatorilor cu care radiația este în echilibru.

Planck a fost obligat să facă două presupuneri revoluționare în legătură cu oscilatorii atomici. Aceasta ar fi următoarele:

1. Un oscilator nu poate avea *orice* energie ci doar cele date de*

$$E = nh\nu \qquad (47\text{-}7)$$

unde ν este frecvența oscilatorului, h este o constantă (numită azi, *constanta lui Planck*) și n este un număr (numit azi, *număr cuantic*) ce poate lua numai valori întregi. Ecuația 47-7 afirmă că energia oscilatorului este *cuantificată*.

---

* Formula corectă pentru energia unui oscilator, dedusă corect mai tîrziu, este

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu.$$

Cu toate acestea, această modificare nu schimbă cu nimic concluziile lui Planck.

2. Oscilatorul nu emite radiaţie continuu ci doar în „salturi" sau *cuante*. Aceste cuante de energie se emit atunci cînd oscilatorul trece de la o stare cuantificată de energie la alta. Astfel dacă n variază cu o unitate, ecuaţia 47-7 ne arată că energia radiată va fi

$$\Delta E = \Delta n h\nu = h\nu \tag{47-8}$$

Atît timp cît un oscilator rămîne în una din stările ei cuantice (sau *stare staţionară* cum i se mai spune) nu emite şi nu absoarbe energie.

Aceste ipoteze erau într-adevăr revoluţionare şi într-adevăr chiar Planck le-a considerat mulţi ani ca speculaţii matematice. El spunea: „Încercările mele zadarnice de a interpreta clasic cuanta elementară de acţiune (adică, mărimea h) au continuat ani îndelungaţi care mi-au cerut un mare efort".

Să aplicăm ipoteza lui Planck unui sistem oscilant macroscopic cum ar fi sistemul masă-arc sau un circuit LC. S-ar părea că oscilaţiile în astfel de sisteme pot să aibă loc pentru *orice* valoare a energiei totale şi nu numai pentru anumite valori discrete ale ei. S-ar părea de asemenea că atenuarea oscilaţiilor unui astfel de sistem (prin frecare la sistemul masă-arc sau prin rezistenţă şi radiaţie în circuitele LC) se face prin descreşterea continuă a energiei mecanice sau electromagnetice şi nu prin „salturi". Cu toate acestea nu există în experienţa de toate zilele nici un fapt în care folosirea ipotezei lui Planck să conducă la violarea „bunului simţ", deoarece constanta lui Planck se dovedeşte a avea o valoare foarte mică şi anume

$$h = 6{,}625 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Exemplul ce urmează va clarifica situaţia.

Exemplul 1. Un sistem masă-arc este format din masa $m=1{,}0$ kg şi un arc cu constanta elastică $k=20$ N/m şi oscilează cu o amplitudine de 1,0 cm. (a) Care este numărul cuantic n corespunzător oscilaţiei, dacă considerăm că mişcarea este cuantificată conform ecuaţiei 47-7? (b) Care va fi variaţia relativă a energiei sistemului la o variaţie cu o unitate a lui n?

(a) Din ecuaţia 15—8 frecvenţa este

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20\ \mathrm{N/m}}{1{,}0\ \mathrm{kg}}} = 0{,}71\ \mathrm{Hz}$$

Din ecuaţia 8-8 energia mecanică este

$$E = \frac{1}{2}kx^2_{max}\frac{1}{2}(20\ \mathrm{N/m})(10^{-2}\ \mathrm{m})^2 = 1{,}0\times10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

Din ecuaţia 47-7 numărul cuantic este

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{1{,}0\times10^{-3}\ \mathrm{J}}{(6{,}6\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})(0{,}71\ \mathrm{Hz})} = 2{,}1\times10^{30}.$$

(b) Dacă n variază cu o unitate, variaţia relativă a energiei se obţine împărţind ecuaţia 47-8 cu ecuaţia 47-7:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu}{nh\nu} = \frac{1}{n} = \sim 10^{-30}$$

Astfel pentru oscilatori macroscopici numărul cuantic este enorm de mare iar aspectul cuantic al energiei oscilațiilor este inobservabil. În mod similar nu băgăm de seamă în experiențele la scară macroscopică natura discretă a masei și cuantificarea sarcinii, adică existența atomilor și a electronilor.

Pe baza celor două ipoteze ale sale, Planck a fost capabil să deducă teoretic legea radiației corpului negru (ecuația 47-6), obținînd pentru aceasta premiul Nobel în 1918. Expresiile teoretice ale constantelor arbitrare c_1 și c_2 sînt

$$c_1 = 2\pi c^2 h \quad \text{și} \quad c_2 = \frac{hc}{k}$$

unde k este constanta lui Boltzmann (vezi paragraful 23-5), iar c este viteza luminii. Planck și-a expus teoria la 14 decembrie 1900 la Societatea de Fizică din Berlin. Fizica cuantică s-a născut deci în această zi. Ideile lui Planck s-au impus din nou în 1905, cînd Einstein a folosit conceptul de cuantificare a energiei într-un alt domeniu al fizicii și anume la efectul fotoelectric.

Înainte de a discuta acest efect este important de observat că cu toate că Planck a cuantificat energia oscilatorilor din pereții cavității el *continua să trateze radiația din cavitate* cu o undă electromagnetică. Pentru prima dată, analiza lui Einstein a efectului fotoelectric a scos în evidență insuficienta descrierii ondulatorii a luminii în anumite condiții.

47-4 Efectul fotoelectric

În figura 47-6 este dat dispozitivul experimental folosit la studiul efectului fotoelectric. Lumina monocromatică ce cade pe placa de metal A, va elibera *fotoelectroni* ce pot fi detectați sub forma unui curent dacă sînt atrași de electrodul metalic B cu ajutorul unei diferențe de potențial V aplicată între A și B. Acest *curent fotoelectric* este măsurat cu galvanometrul G.

În figura 47-7 (curba a) este reprezentat curentul fotoelectric obținut într-o instalație de tipul celei din figura 47-6, în funcție de diferența de potențial V. Pentru valori suficient de mari ale lui V, curentul fotoelectric atinge o valoare limită corespunzătoare cazului în care *toți* fotoelectronii emiși de placa A sînt colectați de B.

Dacă se schimbă sensul lui V, curentul fotoelectric nu scade la zero imediat, aceasta indicînd că electronii sînt emiși din A cu o viteză finită. Unii vor ajunge la B în ciuda faptului că acum cîmpul electric se opune mișcării lor. Totuși, dacă această diferență de potențial de sens invers este destul de mare, se atinge o valoare V_0 (*potențialul de frînare*) pentru care curentul fotoelectric scade la zero. Această diferență de potențial V_0, înmulțită cu sarcina electronului este egală cu energia cinetică $E_{c\,max}$ a *celor mai rapizi* fotoelectroni emiși. Cu alte cuvinte

$$E_{c\,max} = eV_0 \qquad (47\text{-}9)$$

$E_{c\,max}$ este independent de intensitatea luminii după cum se vede din curba b din figura 47-7, pentru care intensitatea luminii a fost redusă la jumătate.

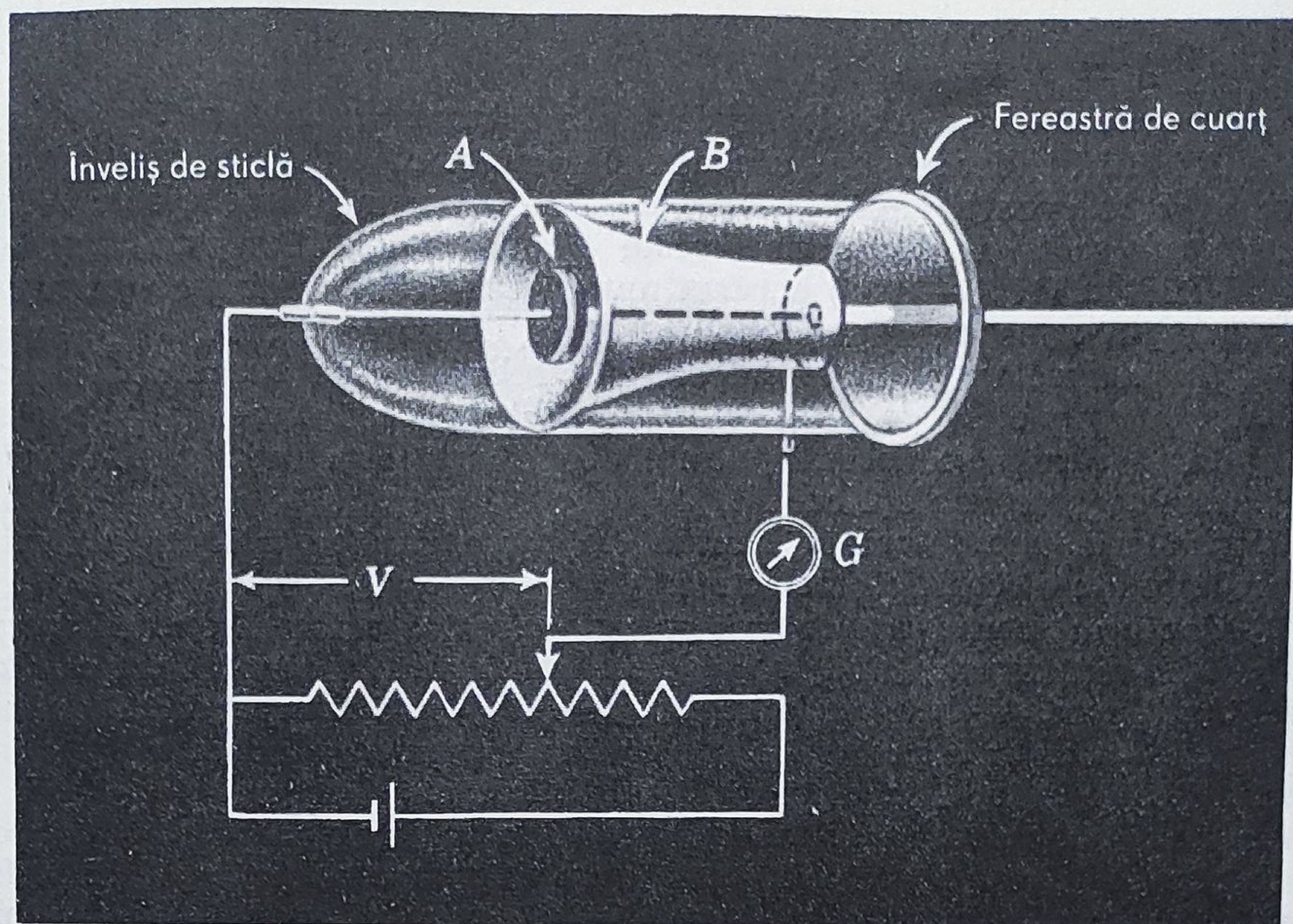


Figura 47-6. Dispozitivul experimental folosit la studiul efectului fotoelectric. V poate fi variat continuu, iar cu ajutorul unui dispozitiv ce nu a mai fost arătat, i se poate schimba sensul.

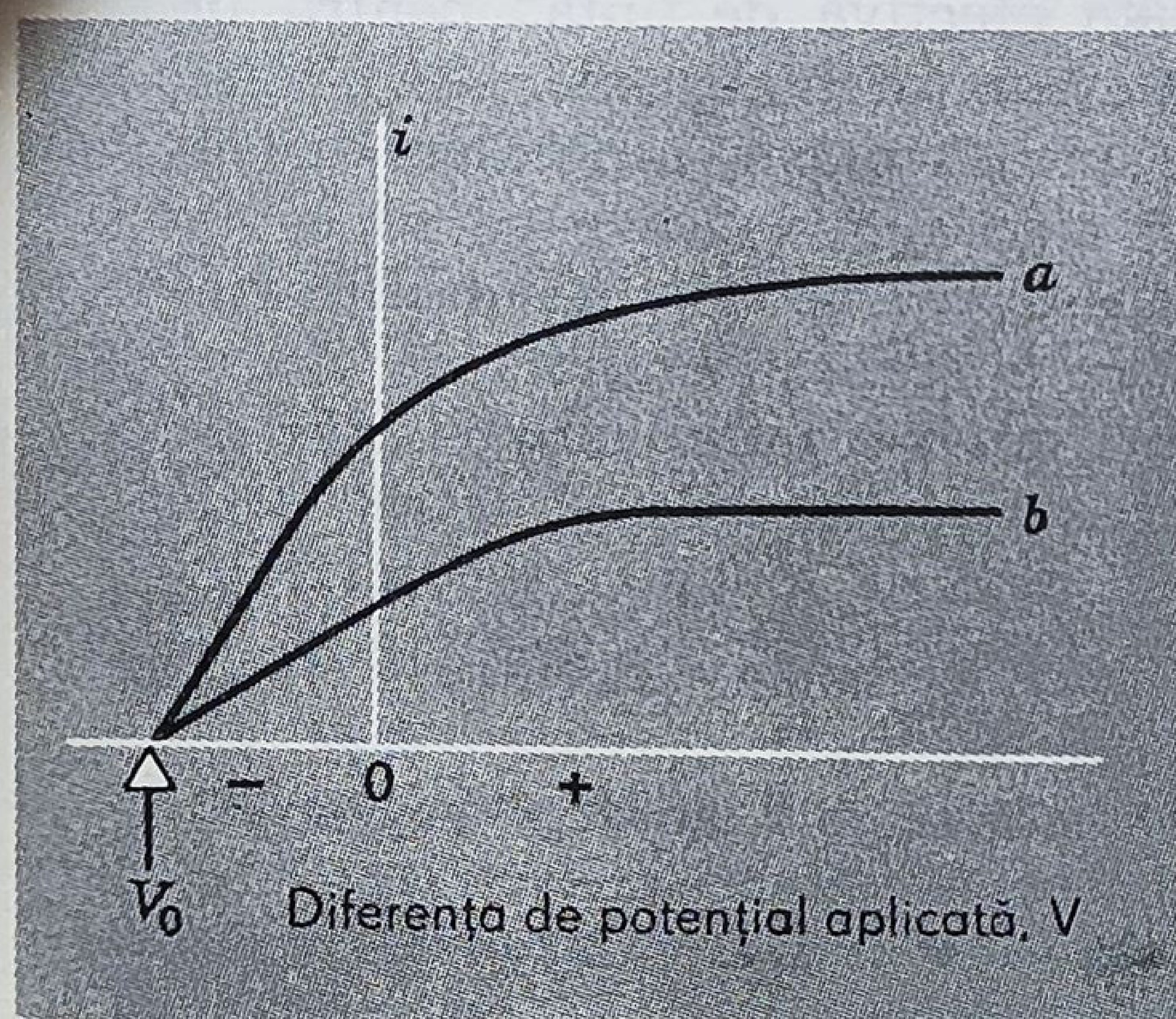


Figura 47-7. Unele rezultate experimentale obţinute cu dispozitivul din figura 47-6. Diferenţa de potenţial aplicată V se consideră pozitivă dacă electrodul metalic B din fig. 47-6 este pozitiv faţă de suprafaţa A din care sînt emişi electronii. Pentru curba b, intensitatea luminii incidente a fost redusă la jumătate faţă de cea pentru curba a.

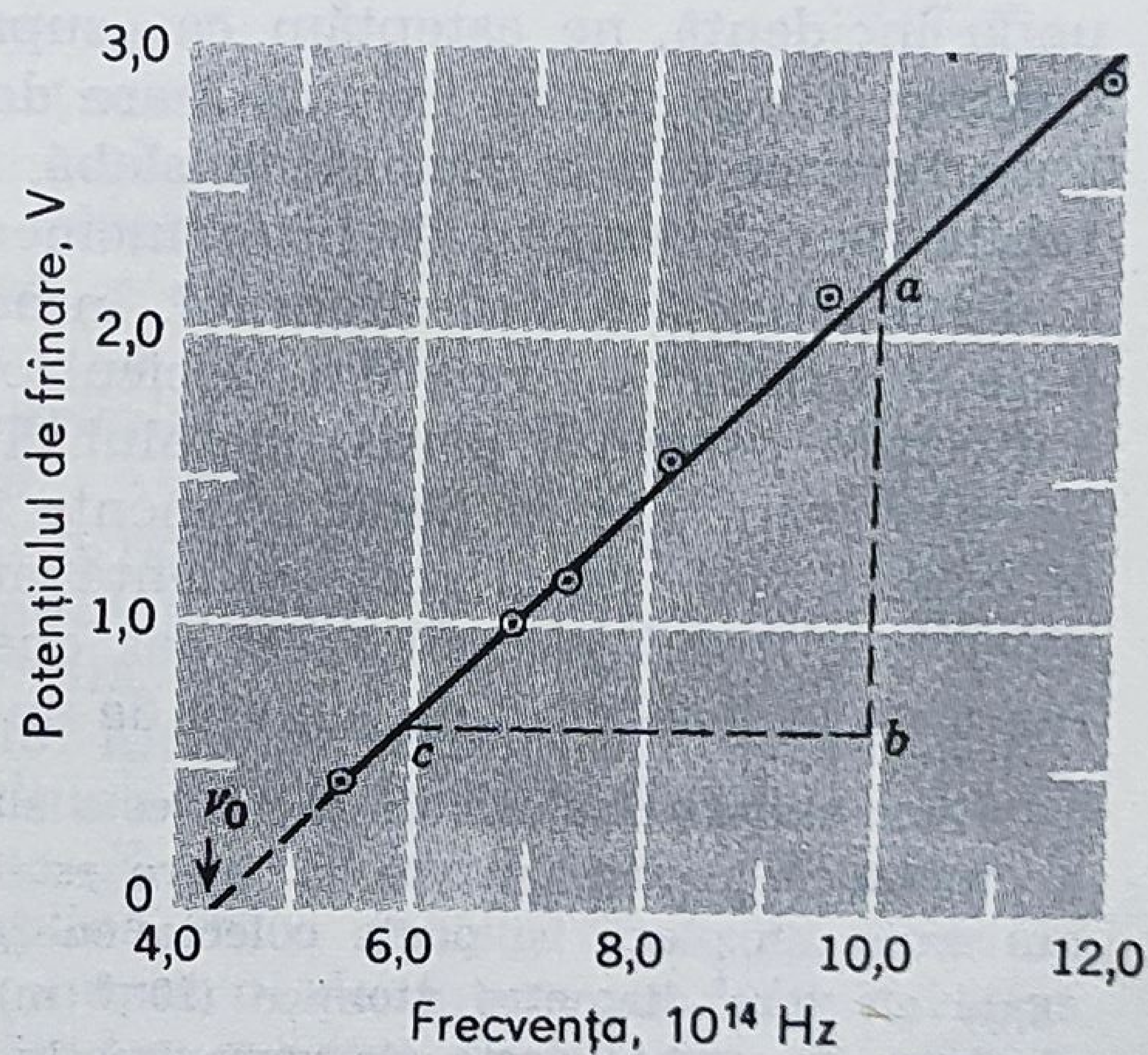


Figura 47-8. O reprezentare a potenţialului de frînare măsurat de Millikan în funcţie de frecvenţă, pentru sodiu. Frecvenţa de prag ν_0 este $4{,}39 \cdot 10^{14}$ Hz.

În figura 47-8 este dat potențialul de frînare V_0 în funcție de frecvența luminii incidente pentru sodiu. Observați că există o anumită valoare ν_0 a frecvenței, numită frecvență de prag, sub care efectul fotoelectric nu se mai produce. Aceste rezultate au fost obținute de R. A. Millikan (1868—1953) a cărui muncă susținută asupra efectului fotoelectric i-a adus premiul Nobel în 1923. Deoarece efectul fotoelectric este în principal un efect de suprafață, trebuie ca pe suprafață să nu existe strate de oxid, de grăsime etc. Millikan a construit un dispozitiv cu ajutorul căruia se pot tăia strate de pe suprafața metalului, în vid, obținînd astfel a suprafață curată.

Dar, teoria ondulatorie a luminii nu poate explica trei caracteristici importante ale efectului fotoelectric:

1. Conform teoriei ondulatorii energia cinetică a fotoelectronului trebuie să crească atunci cînd intensitatea fasciculului de lumină crește. Totuși, din figura 47-7 se vede că $E_{c\,max}=(eV_0)$ *este independentă de intensitatea luminii;* aceasta a fost verificată pentru un domeniu de intensități ce se întinde pe șapte ordine de mărime.

2. Teoria ondulatorie spune că efectul fotoelectric trebuie să se producă pentru *orice* frecvență a luminii, cu singura condiție ca să fie suficient de intensă. Totuși, din figura 47-8 se vede că, pentru fiecare suprafață, există o *frecvență caracteristică de prag* ν_0. Pentru frecvențe mai mici decît aceasta, efectul fotoelectric dispare indiferent de cît de intensă este iluminarea.

3. Dacă energia fotoelectronului este luată de placa de metal de la unda incidentă, ne așteptăm ca „suprafața efectivă de țintă" pentru un electron din metal să fie mai mare decît cîteva diametre atomice. Astfel, dacă lumina este suficient de slabă, trebuie să existe o decalare măsurabilă (vezi exemplul 2) între momentul cînd lumina cade pe suprafață și cel al emisiei fotoelectronului. În acest interval de timp electronul trebuie să extragă energie din fascicul pînă ce energia acumulată de el este suficientă pentru a părăsi metalul. Totuși, *nu s-a putut măsura nici un decalaj* între aceste două momente. Această neconcordanță între teorie și experiență este și mai evidentă atunci cînd se studiază efectul fotoelectric al unui gaz; în acest caz energia fotoelectronului trebuie să fie luată de la fasciculul de lumină de un singur atom.

Exemplul 2. O placă de metal este situată la 5 m de o sursă de lumină monocromatică a cărei putere la ieșire este de 10^{-3} W. Considerăm că fotoelectronul emis din placă își poate colecta energia de pe o suprafață circulară cu raza egală cu zece diametre atomice (10^{-9} m). Energia necesară. pentru a scoate un electron din metal este de aproximativ 5,0 eV. *Presupunînd că lumina este o undă,* care este intervalul de timp necesar pentru ca o astfel de țintă să ia această energie din sursa de lumină?

Suprafața țintei este $\pi(10^{-9}\ \mathrm{m})^2$ sau $3\cdot 10^{-18}\ \mathrm{m}^2$; suprafața unei sfere cu raza de 5 m centrată pe sursa de lumină este $4\pi(5\ \mathrm{m})^2 \approx 300\ \mathrm{m}^2$. Astfel, dacă sursa de lumină radiază uniform în toate direcțiile, energia P ce cade în unitatea de timp pe țintă este dată de

$$P=(10^{-3}\mathrm{W})\left(\frac{3\cdot 10^{-18}\ \mathrm{m}^2}{300\ \mathrm{m}^2}\right)=10^{-23}\ \mathrm{J/s}$$

Presupunînd că toată această putere este absorbită, putem calcula timpul necesar din

$$t=\left(\frac{5\ \text{eV}}{10^{-23}\ \text{J/s}}\right)\left(\frac{1.6\cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}\right)\approx 20\ \text{h}$$

Şi totuşi, *nu s-a putut măsura o întîrziere oricît de mică oricare au fost condiţiile experimentale.*

47-5 Teoria fotonică a lui Einstein

Einstein a reuşit să explice efectul fotoelectric folosind o ipoteză remarcabilă şi anume: a presupus că într-un fascicul de lumină energia este transportată prin spaţiu în „porţii" finite numite *fotoni.* Energia unui foton (vezi ecuaţia 47-8) este dată de

$$E=h\nu \tag{47-10}$$

Reamintim că Planck considera că lumina, deşi emisă de sursa sa în mod discontinuu, se propagă prin spaţiu sub formă de undă electromagnetică. Ipoteza lui Einstein consideră că lumina propagîndu-se prin spaţiu se comportă mai degrabă ca o particulă decît ca o undă. Millikan, a cărui experienţe au verificat ideile lui Einstein în cele mai mici detalii, califica ipoteza lui Einstein ca „îndrăzneaţă, ca să nu spun nesăbuită".

Aplicînd noţiunea de foton efectului fotoelectric, Einstein a scris

$$h\nu=E_0+E_{c\,\max} \tag{47-11}$$

unde $h\nu$ este energia fotonului. Ecuaţia 47-11 ne spune că un foton transportă energia $h\nu$ prin suprafaţa metalului. O parte din această energie (E_0) este folosită pentru a scoate electronul prin suprafaţa metalului. Energia rămasă ($h\nu—E_0$) este dată electronului sub formă de energie cinetică; dacă electronul la ieşirea sa din metal nu pierde energie prin ciocniri interne, toată energia primită o va avea sub formă de energie cinetică după ieşirea din metal. Astfel, $E_{c\,\max}$ reprezintă energia cinetică *maximă* pe care fotoelectronul o poate avea în exteriorul suprafeţei; în majoritatea cazurilor din cauza pierderilor interne prin ciocniri energia sa va fi mai mică decît aceasta.

Să vedem cum ipoteza fotonică a lui Einstein rezolvă cele trei obiecţii ridicate împotriva interpretării ondulatorii a efectului fotoelectric. În ceea ce priveşte obiecţia numărul unu ($E_{c\,\max}$ nu depinde de intensitatea luminii) există o concordanţă deplină între teoria fotonică şi experienţă. Dublînd intensitatea luminii, numărul de fotoni se dublează şi astfel curentul fotoelectric se dublează; dar energia ($=h\nu$) fotonilor individuali sau natura procesului fotoelectric individual descris în ecuaţia 47-11 nu se modifică.

Obiecţia 2 (existenţa unei frecvenţe de prag) rezultă din ecuaţia 47-11. Dacă $E_{c\,\max}$ este egal cu zero, avem

$$h\nu_0=E_0$$

care ne spune că fotonul are exact atîta energie cît să extragă fotoelectronul dar nimic în plus, care să apară sub forma de energie cinetică. Această mărime E_0 se numeşte lucrul mecanic de extracţie a substanţei respective. Dacă ν este mai mic decît ν_0, fotonii individuali,

indiferent de numărul lor (adică, indiferent cît de intensă este iluminarea) nu vor avea energie suficientă să extragă fotoelectroni.

Obiecţia 3 (absenţa unui decalaj în timp) rezultă din teoria fotonică deoarece energia necesară este furnizată într-o porţie finită. Ea *nu* este distribuită uniform pe o suprafaţă mare, aşa cum prevedea teoria ondulatorie.

Deşi ipoteza fotonică concordă bine cu datele experimentale din fotoelectricitate, s-ar părea că este în contradicţie directă cu teoria ondulatorie a luminii care după cum am văzut în capitolele precedente a fost verificată experimental în multe cazuri. Concepţia noastră modernă asupra naturii luminii consideră că *ea are un caracter dual, în unele fenomene comportîndu-se ca o undă iar în altele ca o particulă sau foton.* În capitolul 48 vom discuta pe larg dualismul undă-particulă. Pînă atunci să ne continuăm investigaţiile asupra bazelor experimentale ale concepţiei fotonice.

Să rescriem ecuaţia fotoelectrică a lui Einstein (ecuaţia 47-11) înlocuind pe $E_{c\,max}$ cu eV_0 (vezi ecuaţia 47-9). După rearanjare se obţine

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{E_0}{e} \tag{47-12}$$

Astfel, teoria lui Einstein prevede o dependenţă lineară între V_0 şi ν, în concordanţă perfectă cu experienţa; vezi figura 47-8. Panta curbei experimentale din această figură trebuie să fie h/e sau

$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{2{,}20\ \text{V} - 0{,}65\ \text{V}}{(10 \cdot 10^{14} - 6 \cdot 10^{14})\ \text{Hz}} = 3{,}9 \cdot 10^{-15}\ \text{V} \cdot \text{s}$$

Putem găsi pe h înmulţind acest raport cu sarcina electronului e,

$$h = (3{,}9 \times 10^{-15}\ \text{V}\cdot\text{s})\ (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 6{,}2 \times 10^{-34}\ \text{J.s.}$$

Făcînd o analiză amănunţită a acestor date şi a altora, printre care cele obţinute folosind suprafeţe de litiu, Millikan a obţinut valoarea $h = 6{,}57 \cdot 10^{-34}$ J·s, cu o precizie de aproximativ 0,5%. Această concordanţă cu valoarea lui h dedusă din formula radiaţiei a lui Planck este o confirmare remarcabilă a conceptului de foton a lui Einstein.

Exemplul 3. Deduceţi lucrul mecanic de extracţie pentru sodiu folosindu-vă de figura 47-8.

Intersecţia liniei drepte din figura 47-8 cu axa orizontală este frecvenţa de prag ν_0. Înlocuind aceste valori obţinem

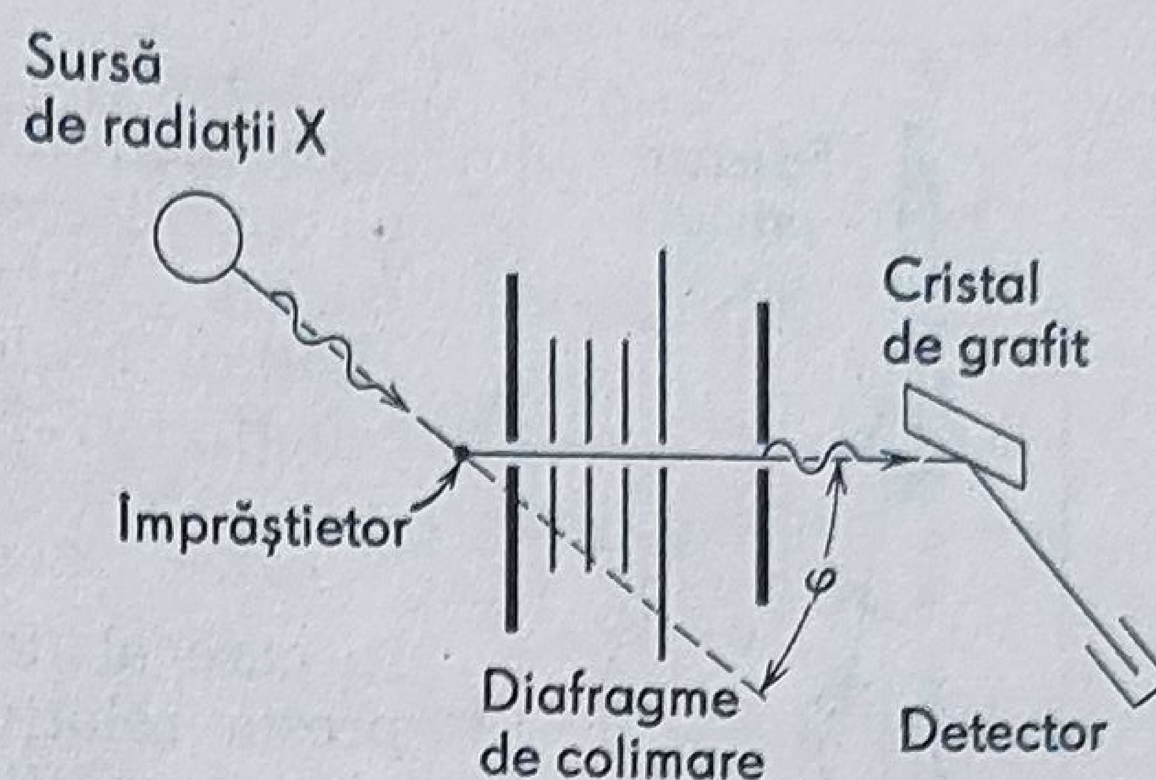
$$E_0 = h\nu_0 = (6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{Js})(4{,}39 \times 10^{14}\ \text{Hz}) = 2{,}92 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}82\ \text{eV}$$

47-6 Efectul Compton

Confirmarea definitivă a conceptului de foton ca o porţie finită de energie a fost dată în 1923 de A. H. Compton (1892—1962) care a primit în 1927 premiul Nobel pentru această lucrare*. Compton a trimis

* Pentru o privire istorică asupra cercetărilor lui Compton vezi „Împrăştierea radiaţiilor X ca particule", A. H. Compton, p. 817, Am. J. Phys., December, 1961.

Figura 47-9. Schema dispozitivului experimental folosit de Compton. Radiațiile X monocromatice de lungime de undă λ cad pe o bucată de grafit. Se măsoară distribuția intensității radiațiilor X împrăștiate de bucata de grafit în funcție de lungimea de undă, pentru diferite unghiuri φ de împrăștiere. Lungimea de undă a fasciculului împrăștiat se măsoară observînd difracția lor Bragg pe un cristal; vezi ecuația 45-8. Intensitatea fasciculului se măsoară cu un detector, spre exemplu, o cameră de ionizare.



un fascicul de radiații X de lungime de undă bine definită pe o bucată de grafit ca în figura 47-9 și a măsurat, pentru diferite unghiuri de împrăștiere, intensitatea radiațiilor X împrăștiate în funcție de lungimea lor de undă. În figura 47-10 sînt date rezultatele sale experimentale. Vedem că deși fasciculul incident este format din radiații de o singură lungime de undă λ, radiațiile X împrăștiate prezintă maxime de intensitate pentru *două* lungimi de undă: una fiind identică cu lungimea de undă incidentă, cealaltă λ' fiind mai mare cu valoarea $\Delta\lambda$. Această diferență $\Delta\lambda$, numită *deplasare* Compton, variază cu unghiul de împrăștiere.

Apariția unei unde împrăștiate cu o lungime de undă λ' nu poate fi înțeleasă dacă radiațiile X incidente sînt considerate ca fiind o undă electromagnetică ca cea din figura 39-11. În această imagine unda incidentă de frecvență ν face ca electronii din bucata de grafit să oscileze cu aceeași frecvență. Acești electroni ce oscilează, ca și sarcinile dintr-o antenă mică de radio-emisie, vor radia unde electromagnetice ce vor avea aceeași frecvență ν. Astfel, din punctul de vedere al teoriei ondulatorii unda împrăștiată va trebui să aibe aceeași frecvență ν și aceeași lungime de undă cu unda incidentă.

Compton* a putut explica rezultatele sale experimentale postulînd că fasciculul incident de radiații X trebuie privit nu ca o undă ci ca un ansamblu de fotoni de energie $E\ (=h\nu)$ care trecînd prin bucata de grafit împrăștietoare suferă ciocniri cu electronii liberi din aceasta, ciocniri de tipul acelora dintre mingiile de biliard. Fotonii „ciocniți" ce ies din grafit constituie, în această imagine, radiația împrăștiată. Deoarece fotonul incident cedează o parte din energia sa electronului cu care se ciocnește, fotonul împrăștiat trebuie să aibe o energie mai mică E'; trebuie deci să aibe o frecvență mai mică $\nu'\ (=E'/h)$ care presupune o lungime de undă mai mare $\lambda'\ (=c/\nu')$. Această imagine explică, cel puțin calitativ, deplasarea lungimii de undă $\Delta\lambda$. Observați cît de diferită este această imagine corpusculară a împrăștierii radiațiilor X de cea ondulatorie. Să analizăm acum din punct de vedere cantitativ ciocnirea foton-electron liber.

În figura 47-11 este arătată o ciocnire între un foton și un electron, electronul fiind presupus inițial în repaus și complet liber, adică nelegat

* P. W. Debye a dat aceeași interpretare, simultan și independent.

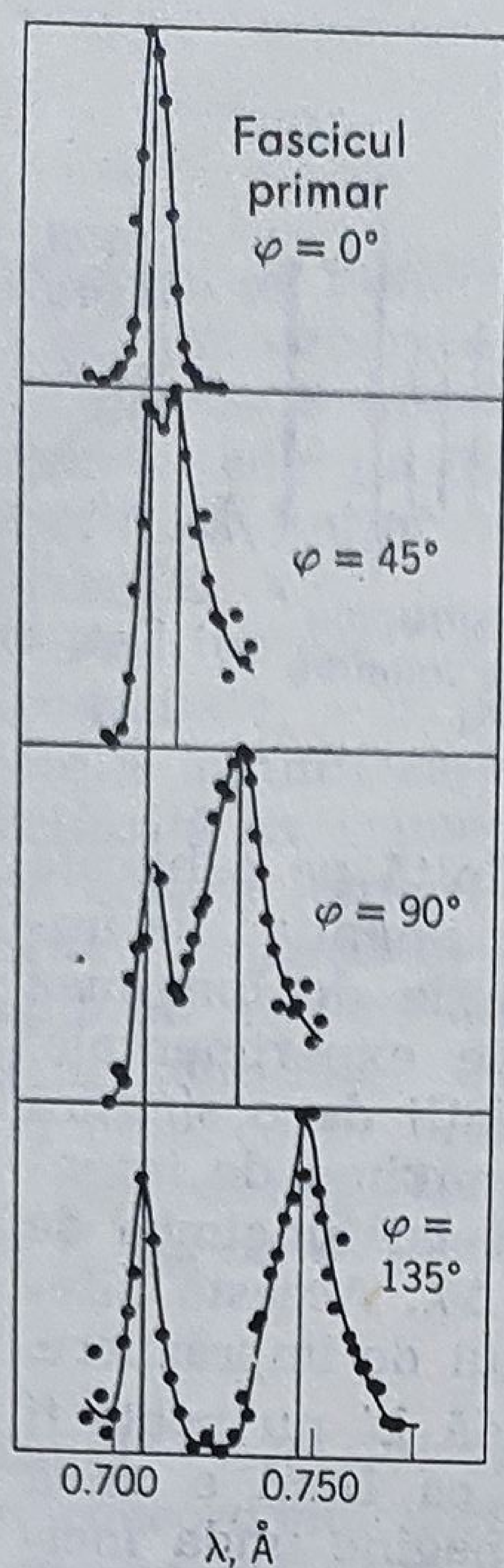


Figura 47-10. Rezultatele experimentale ale lui Compton. Linia verticală din stînga corespunde lungimii de undă λ iar cea din dreapta λ'. Sînt date rezultatele pentru patru unghiuri de împrăștiere diferite φ. Observați că deplasarea Compton $\Delta\lambda$ pentru $\varphi=90°$ este $h/m_0c=0,242$ Å.

de un atom al materialului împrăștietor. Să aplicăm legea conservării energiei acestei ciocniri. Deoarece electronii ciocniți pot avea o viteză v comparabilă cu cea a luminii, trebuie să folosim pentru energia cinetică a electronului expresia sa relativistă. Din ecuațiile 47-10 și 8-21 putem scrie

$$h\nu = h\nu' + (m - m_0)c^2$$

în care al doilea termen din dreapta reprezintă expresia relativistă a energiei cinetice a electronului ciocnit, m fiind masa relativistă iar m_0 masa de repaus a electronului. Înlocuind pe ν cu c/λ (și ν' cu c/λ') și folosind ecuația 8-20 pentru a elimina masa relativistă m, se obține

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right). \qquad (47\text{-}13)$$

Să aplicăm acum legea conservării impulsului (sub formă vectorială) ciocnirii din figura 47-11. În primul rînd avem nevoie de o expresie pentru impulsul fotonului. În paragraful 40-2 am văzut că dacă un obiect absoarbe complet energia U dintr-un fascicul paralel de lumină ce cade pe el, fasciculul de lumină va transfera simultan, în teoria ondulatorie a luminii, obiectului un impuls dat de U/c. În imaginea corpusculară a luminii considerăm că acest impuls este transportat de fotonii individuali, fiecare foton transportînd un impuls a cărui mărime este $p=h\nu/c$ unde $h\nu$ este energia fotonului. Astfel, dacă înlocuim c/ν cu λ, putem scrie

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad (47\text{-}14)$$

La această concluzie și anume că impulsul unui foton este dat de h/λ, se poate ajunge și folosind teoria relativității.

Pentru electron, expresia relativistă a impulsului este dată de ecuația 9-13, sau

$$\vec{p}_e = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Putem deci scrie pentru conservarea componentei x a impulsului

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\varphi + \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cos\theta \qquad (47\text{-}15)$$

iar pentru componenta y

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\varphi - \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\sin\theta \qquad (47\text{-}16)$$

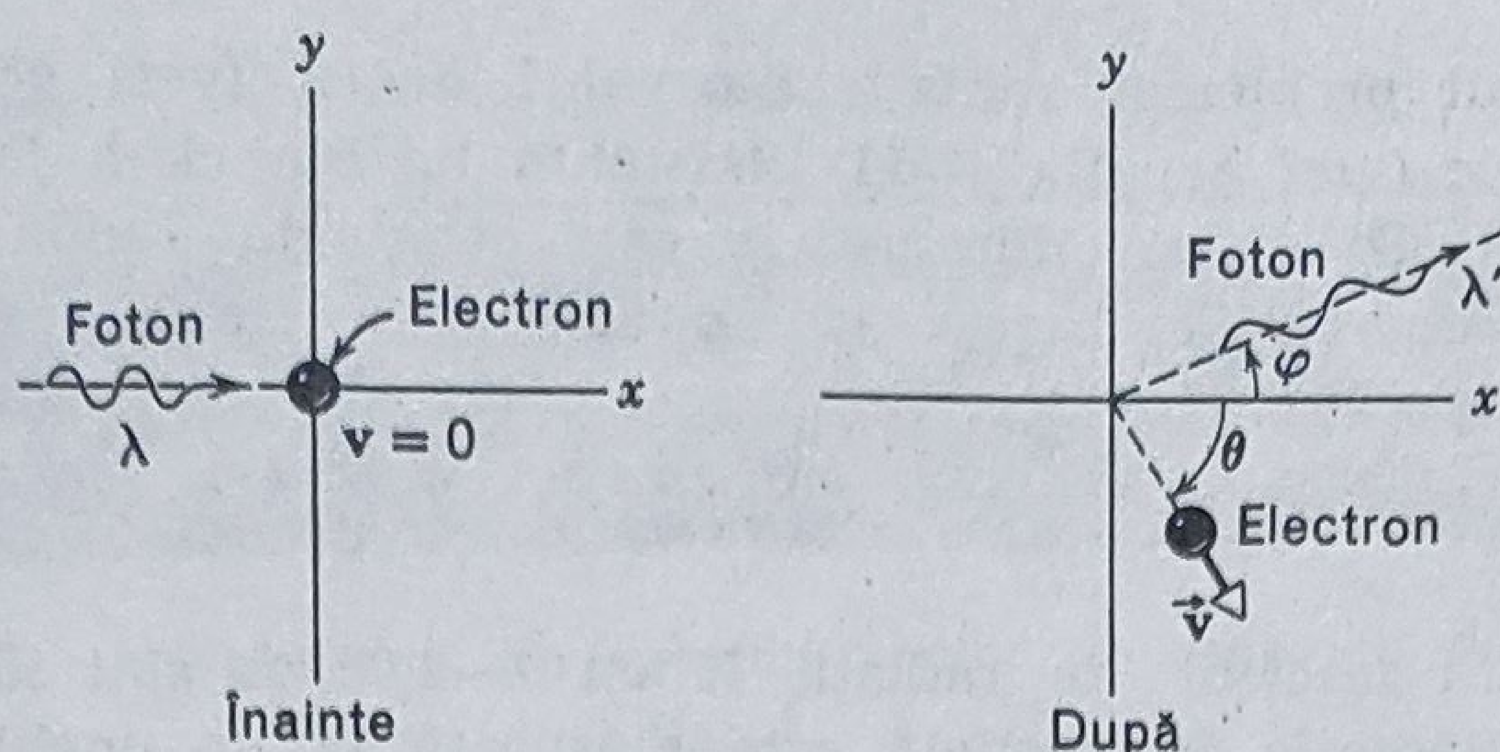


Figura 47-11. Un foton de lungime de undă λ cade pe un electron în repaus. În urma ciocnirii fotonul este împrăștiat cu unghiul φ și are o lungime de undă mai mare λ' iar electronul se deplasează cu viteza v în direcția θ.

Scopul nostru este să găsim $\Delta\lambda(=\lambda'-\lambda)$, deplasarea lungimii de undă a fotonilor împrăștiați, astfel ca să o putem compara cu rezultatele experimentale din figura 47-10. Experiența lui Compton nu cuprinde observații și asupra electronilor ciocniți în bucata de grafit împrăștietoare. Din cele cinci variabile de ciocnire (λ, λ', v, φ și θ) ce apar în cele trei ecuații (47-13, 47-15 și 47-16) putem elimina două. Vom elimina pe v și θ care se referă numai la electron, reducînd astfel cele trei ecuații la o singură relație între variabile.

După calculele algebrice necesare (vezi problema 15) se obține acest rezultat simplu:

$$\Delta\lambda(=\lambda'-\lambda)=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi) \tag{47-17}$$

Astfel, deplasarea Compton depinde numai de unghiul de împrăștiere φ și nu de lungimea de undă inițială λ. Ecuația 47-17 dă în limita erorilor experimentale valoarea deplasării Compton observată experimental în figura 47-10. Din ecuație se vede că $\Delta\lambda$ variază de la zero (pentru $\varphi=0$ corespunzînd unei ciocniri „razante" în figura 47-11, în care electronul este deviat foarte puțin) la $2h/m_0c$ (pentru $\varphi=180°$, corespunzînd unei ciocniri „frontale", în care fotonul incident își schimbă sensul de deplasare).

Rămîne să explicăm prezența maximului din figura 47-10 pentru care lungimea de undă *nu* se modifică la ciocnire. Acest maxim poate fi considerat că rezultă în urma unei ciocniri între un foton și un electron legat de un miez ionic din bucata de grafit împrăștietoare. La ciocnirea cu fotoni electronii legați se comportă ca și electronii liberi (situație analizată în figura 47-11) cu deosebirea că masa lor efectivă este mult mai mare. Aceasta deoarece miezul ionic se comportă la ciocnire ca un întreg. Masa efectivă M a unui centru împrăștietor de carbon este aproximativ egală cu masa nucleului de carbon. Deoarece acest nucleu conține 6 protoni și 6 neutroni, M va fi aproximativ egal cu $M=12\times 1\,840\; m_0=22\,000\; m_0$. Dacă în ecuația 47-17 înlocuim pe m_0 cu M, se vede că deplasarea Compton pentru cazul ciocnirilor cu electroni puternic legați este prea mică pentru a putea fi măsurată.

Ca şi în cazul problemei radiaţiei corpului negru (vezi ecuaţia 47-7) şi a efectului fotoelecric (vezi ecuaţia 47-11) constanta lui Planck h joacă un rol esenţial şi în efectul Compton. Mărimea h este constanta fundamentală a fizicii cuantice. Într-un univers în care $h=0$ nu ar exista fizică cuantică iar fizica clasică ar fi valabilă şi în domeniul sub-atomic. În particular, aşa după cum arată ecuaţia 47-17, într-un astfel de univers nu ar exista efect Compton (adică $\Delta\lambda=0$).

Exemplul 4. Un fascicul de radiaţii X cu $\lambda=1{,}00$ Å sînt împrăştiate de un bloc de carbon. Radiaţia împrăştiată este măsurată la un unghi de 90° faţă de fasciculul incident. (a) Care este deplasarea Compton $\Delta\lambda$? (b) Care este energia cinetică dată electronului ciocnit?

(a) Punînd $\varphi=90°$ în ecuaţia 47-17, obţinem pentru deplasarea Compton

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)=\frac{6{,}63\cdot10^{-3}\ \mathrm{Js}}{(9{,}11\cdot10^{-31}\ \mathrm{kg})(3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{m/s})}(1-\cos 90°)=$$

$$=2{,}43\cdot10^{-12}\ \mathrm{m}=0{,}0243\ \text{Å}$$

(c) Dacă notăm cu E_c energia cinetică a electronului, putem scrie ecuaţia 47-13 sub forma

$$\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{\lambda'}+E_c$$

deoarece $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda$, obţinem

$$\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{\lambda+\lambda\Delta}+E_c$$

care se reduce la

$$E_c=\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)}=\frac{(6{,}63\times10^{-34}\ \mathrm{Js})(3{,}00\times10^{8}\ \mathrm{m/s})(2{,}43\times10^{-12}\ \mathrm{m})}{(1{,}00\times10^{-10}\ \mathrm{m})(1{,}00+0{,}024)\times10^{-10}\ \mathrm{m})}=$$

$$=4{,}73\times10^{-17}\ \mathrm{J}=295\ \mathrm{eV}$$

Studentul poate arăta că energia E a fotonului iniţial este în acest caz $(=h\nu=hc/\lambda)$ egală cu 12 400 eV astfel că fotonul a pierdut la această ciocnire aproximativ 2,3% din energia sa. Se poate arăta că un foton a cărui energie este de zece ori mai mare (=124 000 eV) pierde 23% din energia sa la o ciocnire similară. Aceasta rezultă din faptul că $\Delta\lambda$ nu depinde lungimea de undă iniţială. Deci, radiaţiile X mai energice, ce au lungimi de undă mai mici, vor prezenta o creştere procentuală mai mare a lungimii lor de undă şi deci o pierdere procentuală de energie mai mare.

47-7 Spectrele de linii

Am arătat cum Planck a reuşit să explice natura radiaţiei obiectelor solide încălzite pentru care corpul negru este luat ca referinţă. Astfel de radiaţii posedă *spectre continui* spre deosebire de *spectrele de linii* de felul celor din figura 47-12 în care este arătată radiaţia emisă de ionii şi atomii de fier dintr-un arc electric produs între electrozi de fier. Vom vedea că ideile de cuantificare ale lui Planck, aplicate cores-

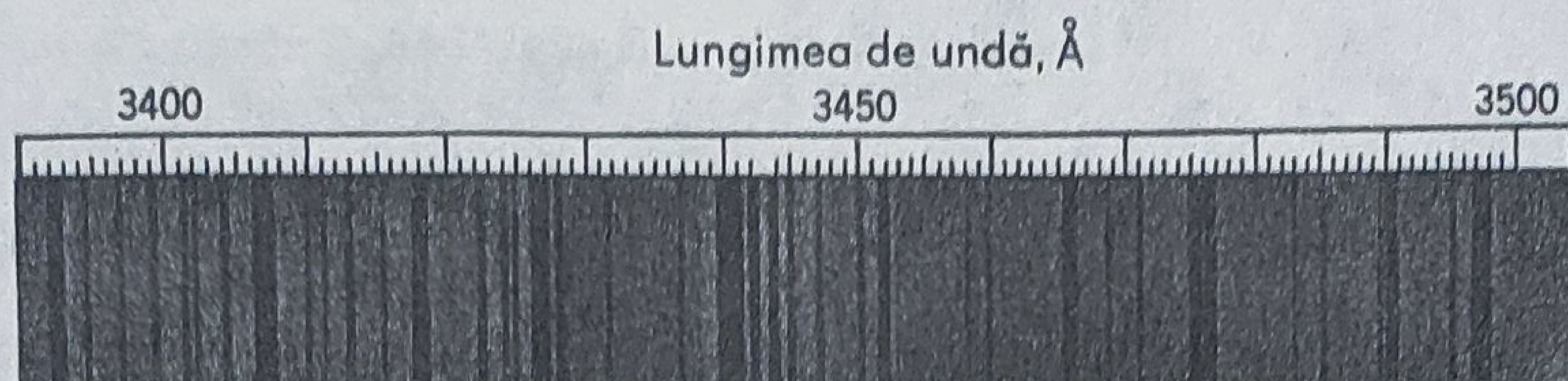


Figura 47-12. O mică porțiune din spectrul fierului, în regiunea de la 3 400 la 3 500 Å.

punzător, ne vor permite să înțelegem și spectrele de linii. Pentru studiul spectrelor de linii vom alege ca exemplu spectrul hidrogenului atomic; fiind cel mai simplu atom, are și cel mai simplu spectru.

Spectrele de linii există în tot domeniul spectrului electromagnetic. În figura 47-13 este arătat spectrul radiațiilor γ ($\lambda \simeq 10^{-12}$ m) emise de un nucleu radioactiv și anume, un izotop al mercurului. În figura 47-14 este dat spectrul radiațiilor X ($\lambda \simeq 10^{-10}$ m) emise de o țintă de molibden pe care cade un fascicul de electroni de 35 keV. Liniile nete de emisie sînt suprapuse pe un fond continuu.

În figura 47-15 este dat spectrul corespunzător unei molecule de HCl. Spectrul este situat în infraroșu, în jur de $\lambda \simeq 10^{-6}$ m. Acesta este un spectru de *absorbție* spre deosebire de cel din figura 47-12 care este un spectru de emisie. S-a observat experimental că atomii și moleculele izolate absorb și emit radiații de lungimi de undă bine definite.

În figura 47-16 este dată o porțiune din spectrul de absorbție al amoniacului (NH_3) situat în domeniul de microunde ($\lambda \simeq 10^{-2}$ m). Și, în sfîrșit, în figura 47-17 este dat un spectru de absorbție din domeniul de radio-frecvență ($\lambda \approx 43$ m) al moleculelor de hidrogen situate într-un cîmp magnetic.

47-8 Atomul de hidrogen

În figura 47-18 este dat spectrul hidrogenului. Interpretarea teoretică a spectrului hidrogenului, bazată pe concepția cuantică, a fost dată pentru prima dată de Niels Bohr în 1913.

Am putea încerca să legăm frecvența unei linii spectrale emise de frecvența unui electron ce se rotește pe o orbită în interiorul atomului. Electromagnetismul clasic arată că o sarcină în mișcare accelerată va radia energie. În acest fel sînt emise undele electromagnetice dintr-o antenă radio în care electronilor li se imprimă o mișcare oscilatorie. Pentru electronii în mișcare, a radia înseamnă a pierde energie, pierdere care într-o antenă este compensată de energia furnizată de oscilator. Dar pentru un atom izolat energia nu mai este furnizată

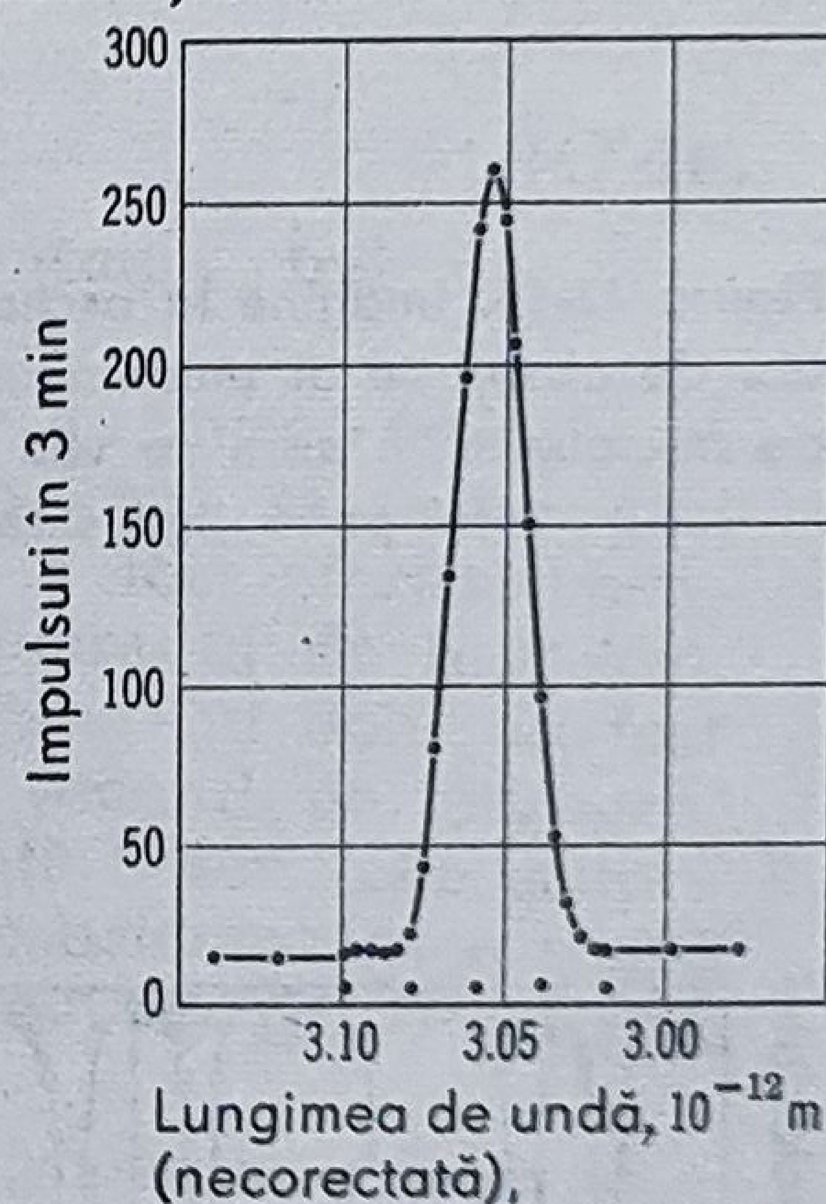


Figura 47-13. Radiația gamma emisă de nucleul de ^{198}Hg reprezentată în funcție de lungimea de undă (din măsurătorile lui Du-Mond și ale colaboratorilor săi).

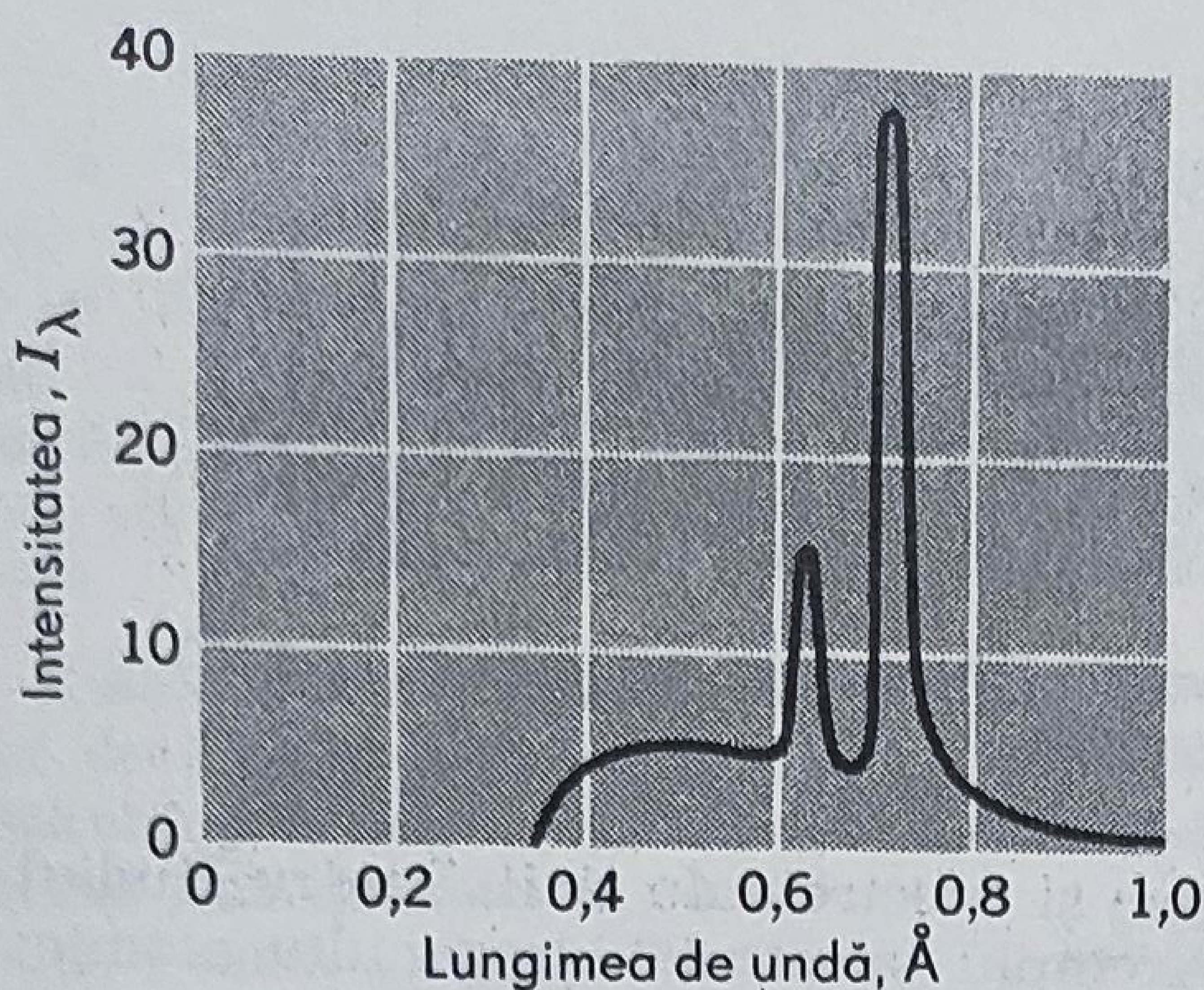


Figura 47-14. Radiațiile X emise de o țintă de molibden pe care cade un fascicul de electroni de 35 KeV. Observați cele două linii nete suprapuse peste fondul continuu. Lungimea de undă a liniei mai intense este de $7{,}1\cdot10^{-11}$ m sau 0,71 Å. (Din rezultatele lui Ulrey.)

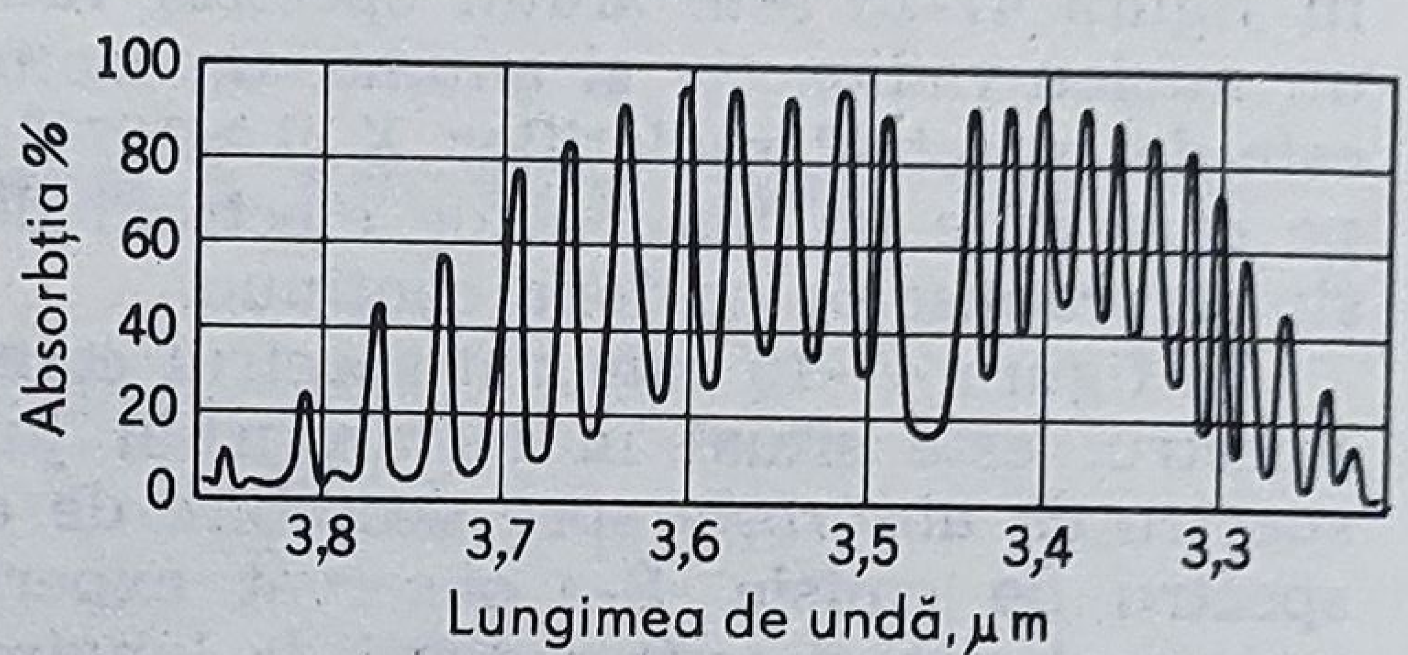
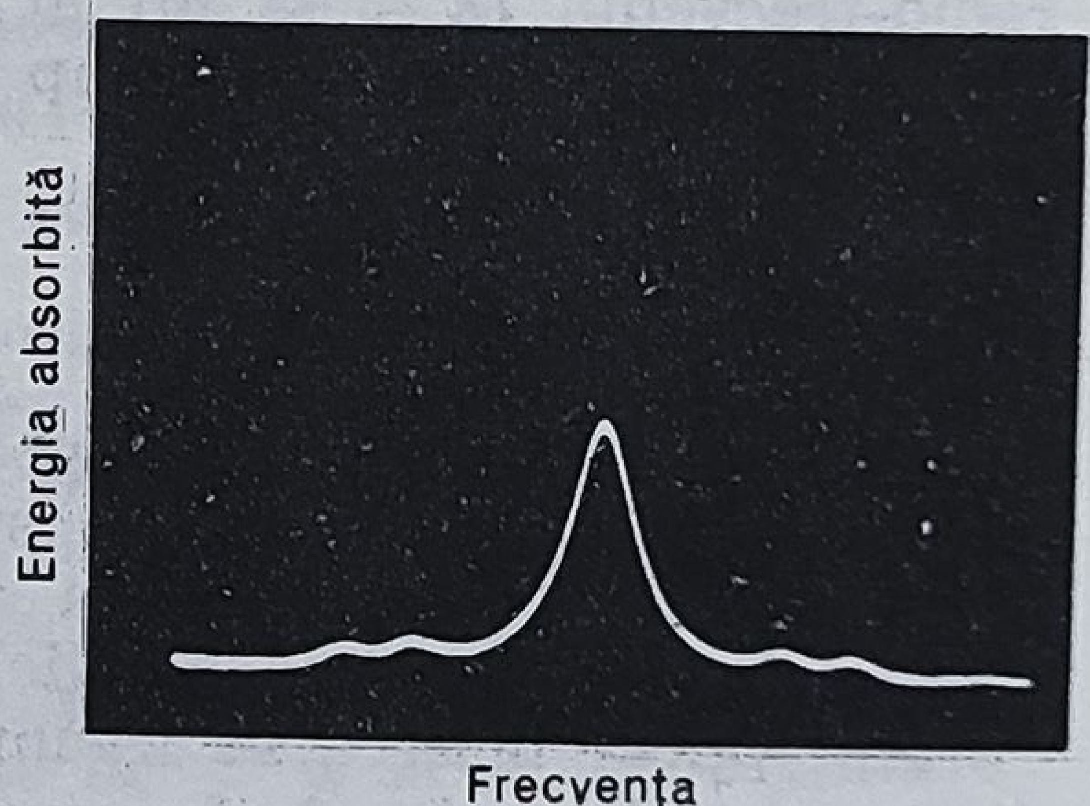


Figura 47-15. Spectrul de absorbție al moleculei de HCl în jur de $\lambda=3{,}5\cdot10^{-6}$ m=3,5 μm. (Din măsurătorile lui E. S. Imes.)

Figura 47-16. Imagine la osciloscop din spectrul de absorbție al amoniacului în domeniul de microunde în care se văd o linie intensă și patru linii slabe.



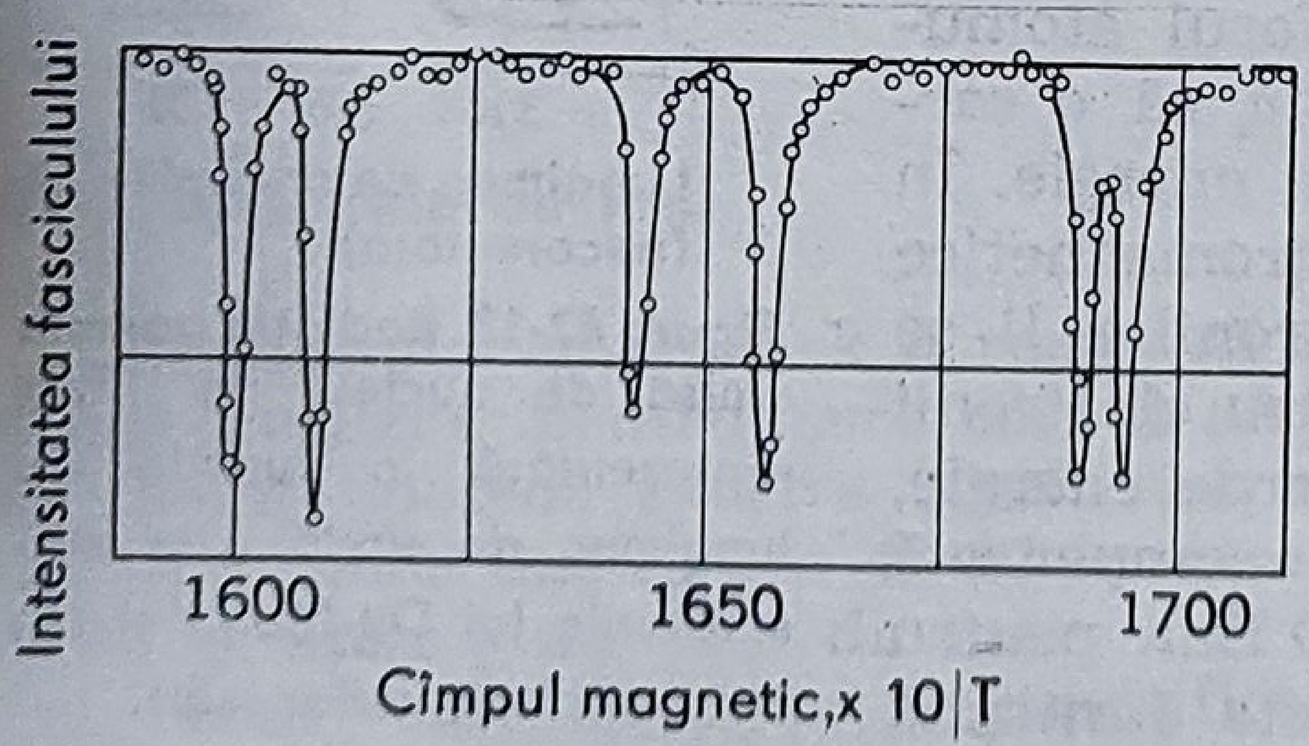


Figura 47-17. O porțiune din spectrul de absorbție al protonilor din hidrogenul molecular la $\lambda\approx43$ m. În această metodă frecvența este menținută constantă iar proba se găsește într-un cîmp magnetic care este variat pentru a explora spectrul. (Din măsurătorile lui Kellogg, Rabi și Zacharias.)

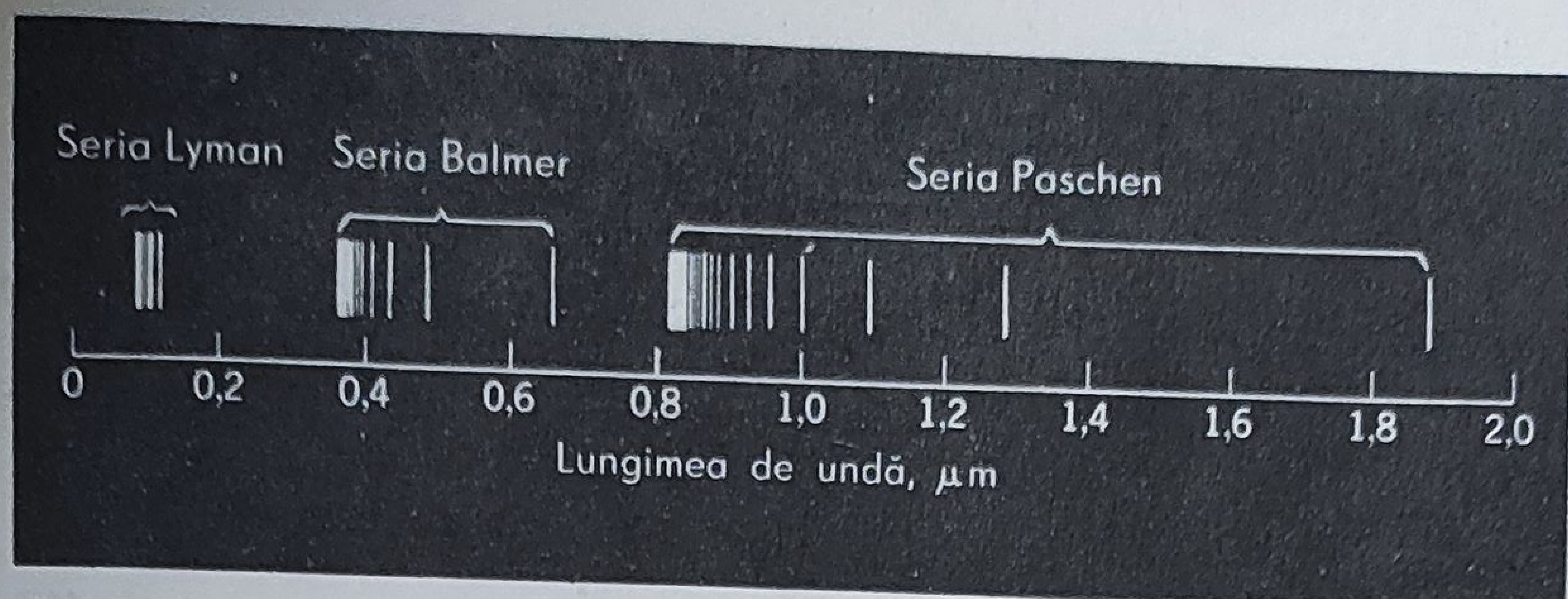


Figura 47-18. Spectrul hidrogenului. Este format din mai multe serii spectrale, din care sînt arătate trei. Spectrul de linii din fiecare serie posedă o anumită regularitate, tinzînd spre așa numita *limită a seriei*, situată spre extremitatea dinspre undele scurte a seriei.

de o sursă externă. Ne așteptăm astfel, ca frecvența electronului și deci a radiației emise să se modifice continuu pe măsură ce se emite energie în exterior. Această concluzie a teoriei clasice este infirmată de existența liniilor spectrale bine definite. Astfel, fizica clasică nu poate explica spectrul atomului de hidrogen sau a oricărui alt atom.

Bohr a depășit acest impas presupunînd că, analog oscilatorilor lui Planck, atomul de hidrogen nu poate exista decît în anumite *stări staționare* în care el nu radiază. Atomul radiază *numai* atunci cînd efectuează o tranziție dintr-o stare de energie E_k într-o stare de energie mai joasă E_j. Și sub formă de ecuație

$$h\nu = E_k - E_j \tag{47-18}$$

în care $h\nu$ este cuanta de energie luată de foton atunci cînd este emis din atom la o tranziție.

Pentru a obține din ecuația 47-18 frecvențele permise, trebuie să cunoaștem energiile diferitelor stări staționare în care se poate găsi atomul de hidrogen. Calculul frecvențelor permise a fost efectuat pentru prima dată de Bohr pe baza unui model al atomului de hidrogen, imaginat de el. Rezultatele obținute pe baza modelului lui Bohr au fost în foarte bună concordanță cu experiența pentru atomul de hidrogen. Astfel, modelul atomic al lui Bohr a avut o influență hotărîtoare asupra dezvoltării ulterioare a fizicii cuantice; acum este considerat ca o etapă preliminară importantă în dezvoltarea unei teorii mai complete a fizicii cuantice.

Să presupunem că electronul din atomul de hidrogen se mișcă pe o orbită circulară de rază r centrată pe nucleu. Presupunem că nucleul, care este format dintr-un proton, are masa atît de mare încît centrul de masă al sistemului este în centrul protonului. Să calculăm energia E a unui astfel de atom.

Folosind pentru mișcarea electronului legea a doua a lui Newton avem (folosind și legea lui Coulomb)

$$F = ma$$

sau

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r}:$$

Aceasta ne permite să calculăm energia cinetică a electronului care este

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}: \qquad (47\text{-}19)$$

Energia potenţial U a sistemului proton-electron este dată de

$$U = V(-e) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (47\text{-}20)$$

unde $V\,(=e/4\pi\varepsilon_0 r)$ este potenţialul protonului la distanţa r la care se găseşte electronul.

Energia totală E a sistemului este

$$E = E_c + U = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \qquad (47\text{-}21)$$

Deoarece raza orbitei s-ar părea că poate lua orice valoare, rezultă că şi E poate lua orice valoare. Problema cuantificării lui E se reduce deci la aceea a cuantificării lui r.

Toate mărimile caracteristice ale orbitei sînt bine determinate dacă raza este dată. Ecuaţiile 47-19, 47-20 şi 47-21 arată aceasta pentru energiile E_c, U şi E. Din ecuaţia 47-19 se poate arăta că *viteza lineară* v a electronului este dată şi ea în funcţie de r de relaţia

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}} \qquad (47\text{-}22)$$

Frecvenţa de rotaţie ν_0 rezultă imediat din

$$\nu_0 = \frac{v}{2\pi r} = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}} \qquad (47\text{-}23)$$

Impulsul p rezultă din ecuaţia 47-22

$$p = mv = \sqrt{\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} \qquad (47\text{-}24)$$

Momentul cinetic L este dat de

$$L = pr = \sqrt{\frac{me^2 r}{4\pi\varepsilon_0}} \qquad (47\text{-}25)$$

Deci, dacă se cunoaşte r, se cunosc şi următorii parametri ai orbitei: E_c, U, E, v, ν_0, p şi L. Dacă una dintre aceste mărimi este cuantificată, rezultă că şi celelalte toate trebuie să fie.

Ajuns aici, Bohr, nu avea nici o regulă după care să se ghideze, şi de aceea a trebuit să recurgă la o ipoteză îndrăzneaţă (după unele raţionamente indirecte pe care nu le vom reproduce) şi anume: cuantificarea parametrilor orbitei reiese cel mai clar dacă se aplică momentului

cinetic. Și astfel, L este cel care nu poate lua decît anumite valori discrete

$$L = n\frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{47-26}$$

Constanta lui Planck joacă din nou un rol fundamental; numărul întreg n se numește *număr cuantic*.

Combinînd ecuațiile 47-25 și 47-26 se obține

$$r = n^2\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{47-27}$$

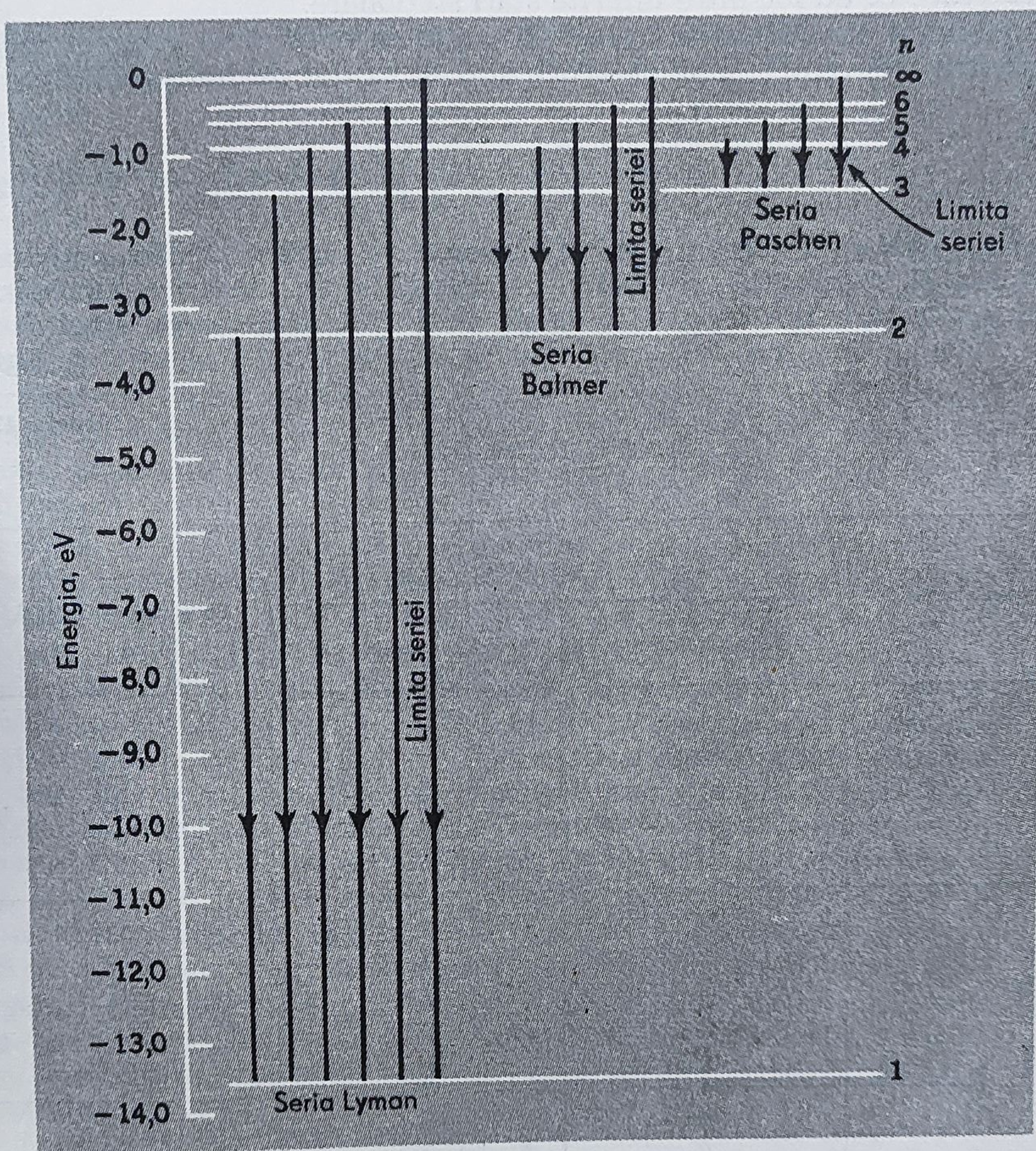


Figura 47-19. Diagrama nivelelor de energie ale hidrogenului. Sînt indicate: numărul cuantic n corespunzător fiecărui nivel și unele din tranzițiile ce apar în spectru. Între nivelele notate cu $n=6$ și $n=\infty$ este cuprins un număr infinit de nivele. Comparați cu atenție această figură cu figura 47-18.

care arată cum este cuantificat r. Introducînd ecuaţia 47-27 în ecuaţia 47-21 se obţine

$$E = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} \qquad n \quad 1, 2, 3, \ldots, \tag{47-28}$$

care dă direct valorile energiei stărilor staţionare permise.

În figura 47-19 sînt arătate energiile stărilor staţionare şi numerele lor cuantice corespunzătoare. Din ecuaţia 47-27 se vede că raza orbitei creşte cu n^2. Nivelul superior din figura 47-19, notat cu $n=\infty$ corespunde stării în care electronul este complet îndepărtat din atom (adică $E=0$ şi $r=\infty$). În figura 47-19 sînt indicate de asemenea unele tranziţii cuantice ce au loc între diferite stări staţionare.

Combinînd ecuaţiile 47-18 şi 47-28 obţinem o formulă complet teoretică pentru frecvenţele liniilor spectrului atomului de hidrogen. Aceasta este

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2}\right) \tag{27-29}$$

în care j şi k sînt numere întregi cu care s-au notat stările staţionare inferioară şi superioară, respectiv. Lungimile de undă corespunzătoare pot fi găsite uşor din $\lambda = c/\nu$. În tabela 47-1 sînt date cîteva lungimi de undă calculate în acest fel; ele trebuiesc comparate cu atenţie cu figurile 47-18 şi 47-19.

Tabela 47.1

SPECTRUL HIDROGENULUI
(O PARTE DIN LINII)

Numele seriei	Numărul cuantic		Lungimea de undă, Å
	j (starea inferioară)	k (starea superioară)	
Lyman	1	2	1 216
	1	3	1 026
	1	4	970
	1	5	949
	1	6	940
	1	∞	912
Balmer	2	3	6 563
	2	4	4 861
	2	5	4 341
	2	6	4 102
	2	7	3 970
	2	∞	3 650
Paschen	3	4	18 751
	3	5	12 818
	3	6	10 938
	3	7	10 050
	3	9	9 546
	3	∞	8 220

Exemplul 5. Calculați din ecuația 47-28 energia de legătură a atomului de hidrogen (energia ce leagă electronul de nucleu).

Energia de legătură este numeric egală cu energia stării de cea mai joasă energie din figura 47-19. Valoarea negativă cea mai mare a lui E se găsește din ecuația 47-28 pentru $n=1$. Aceasta este

$$E=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}=\frac{(9{,}11\cdot10^{-31}\,\text{kg})(1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{C})^4}{(8)(8{,}85\cdot10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)^2(6{,}63\cdot10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}=$$

$$=-2{,}17\cdot10^{-18}\ \text{J}=-13{,}6\ \text{eV}$$

care concordă bine cu valoarea energiei de legătură pentru atomul de hidrogen determinată experimental.

47-9 Principiul de corespondență

Deși toate teoriile din fizică sînt aplicabile numai în anumite limite, de obicei ele nu își pierd valabilitatea în mod brusc ci treptat, ducînd la rezultate ce sînt confirmate din ce în ce mai puțin de experiență. Astfel, rezultatele mecanicii lui Newton sînt din ce în ce mai puțin precise pe măsură ce viteza se apropie de cea a luminii. O legătură similară trebuie să existe între fizica cuantică și fizica clasică; rămîne să determinăm condițiile în care ultima teorie se dovedește a fi un caz special al primei.

Raza stării de cea mai joasă energie din atomul de hidrogen (așa-numita *stare fundamentală*) se găsește punînd $n=1$ în ecuația 47-27; această valoare este $5{,}3\cdot10^{-11}$ m. Dacă $n=10\,000$, raza este de $(10\,000)^2$ ori mai mare, adică 5,3 mm. Acest „atom" este atît de mare încît comportarea lui ar trebui să fie corect descrisă de fizica clasică. Să verificăm aceasta calculînd frecvența luminii emise pe baza ambelor ipoteze: clasice și cuantică. Aceste calcule trebuie să difere pentru numerele cuantice mici dar trebuie să concorde pentru numere cuantice mari. Faptul că *fizica cuantică se reduce la fizica clasică pentru numere cuantice mari* poartă numele de *principiul de corespondență*. Acest principiu, formulat de Niels Bohr s-a dovedit foarte folositor în anii de dezvoltare a fizicii cuantice. În adevăr, Bohr s-a bazat în elaborarea teoriei atomului de hidrogen pe argumentele principiului de corespondență.

Din punct de vedere clasic, frecvența luminii emise de un atom este egală cu ν_0, frecvența sa de rotație* pe orbita sa. Aceasta poate fi exprimată în funcție de numărul cuantic n, combinînd ecuațiile 47-23 și 47-27, obținîndu-se

$$\nu_0=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\,\frac{2}{n^3} \qquad (47\text{-}30)$$

---

* Există și multiplii întregi ai frecvenței, dar aceștia pot fi neglijați fără a afecta raționamentul dat.

Tabela 47.2

PRINCIPIUL DE CORESPONDENȚĂ APLICAT LA ATOMUL DE HIDROGEN

Numărul cuantic n	Frecvența de rotație pe orbită (ecuația 47.30) Hz	Frecvența tranziției spre starea imediat următoare de energie mai mică (ecuația 47.31) Hz	Diferența, %
2	$8{,}20 \cdot 10^{14}$	$24{,}6 \cdot 10^{14}$	67
5	$5{,}26 \cdot 10^{13}$	$7{,}38 \cdot 10^{13}$	29
10	$6{,}57 \cdot 10^{12}$	$7{,}72 \cdot 10^{12}$	14
50	$5{,}25 \cdot 10^{10}$	$5{,}42 \cdot 10^{10}$	3
100	$6{,}578 \cdot 10^{9}$	$6{,}677 \cdot 10^{9}$	1,5
1 000	$6{,}5779 \cdot 10^{6}$	$6{,}5878 \cdot 10^{6}$	0,15
10 000	$6{,}5779 \cdot 10^{3}$	$6{,}5789 \cdot 10^{3}$	0,015

Fizica cuantică spune că frecvența ν a luminii emise este dată de ecuația 47-29. Considerînd o tranziție între o orbită cu numărul cuantic $k=n$ și alta cu $j=n-1$, se obține

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left[\frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}\right] \qquad (47\text{-}31)$$

Cînd $n \to \infty$ expresia din paranteza dreaptă tinde către $2/n^3$ astfel că $\nu \to \nu_0$ cînd $n \to \infty$. Tabela 47-2 ilustrează acest exemplu al principiului de corespondență.

Întrebări

1. „Cavitățile" formate de cărbuni într-un foc de cărbuni par mai strălucitoare decît cărbunii înșiși. Este temperatura acestor cavități mult mai mare decît temperatura suprafeței porțiunilor neacoperite ale cărbunilor?

2. Relația $R = \sigma T^4$ (ecuația 47-2) este corectă pentru cavități reale și este valabilă pentru orice temperatură. De ce nu folosim această relație ca bază de definire a temperaturii de, să zicem, 100°C?

3. Este valabilă legea dependenței de temperatură la puterea a patra pentru toate solidele incandescente, după cum s-ar părea că sugerează ecuația 47-3?

4. Un orificiu în peretele unei cavități radiante este numit uneori *corp negru*. De ce?

5. Se afirmă că dacă privim în interiorul unei cavități a cărei pereți sînt menținuți la o temperatură constantă, în interior nu se observă nici un detaliu. Este logic acest lucru?

6. Cum poate fi energia unui *foton* egală cu $E=h\nu$ (ecuația 47-10) cînd însăși prezența frecvenței ν în această formulă implică faptul că lumina este o *undă*?

7. De ce, existența unei frecvențe de prag în efectul fotoelectric pledează în favoarea teoriei fotonice și împotriva teoriei ondulatorii?

8. De ce măsurătorile fotoelectrice sînt atît de sensibile la natura suprafeței materialului folosit în efectul fotoelectric?

9. Teoria efectului fotoelectric a lui Einstein, în care se postulează că lumina este de natură corpusculară (foton) infirmă experiența de interferență a lui Young?

10. Enumerați și comentați cu atenție ipotezele făcute de Planck în problema cavității radiante, de Einstein în legătură cu efectul fotoelectric și de Bohr în problema atomului de hidrogen.

11. Care este implicația faptului că energia potențială este negativă și mai mare în valoare decît energia cinetică, în teoria lui Bohr a orbitelor atomului de hidrogen?

12. Poate absorbi un atom de hidrogen, un foton de energie mai mare decît energia sa de legătură (13,6 eV)?

13. Discutați exemplul 1 folosind principiul de corespondență.

14. Conform mecanicii clasice, momentul cinetic al unui electron ce se mișcă pe o orbită poate avea orice valoare. Totuși, conform teoriei lui Bohr a atomului de hidrogen, momentul cinetic este cunatificat și anume $L = n\,h/2\pi$ Puneți de acord aceste două afirmații folosind principiul de corespondență.

Probleme

1. Care este lungimea de undă pentru care o cavitate radiantă la 6 000°K radiază cel mai intens pe unitatea de lungime de undă? Rezolvați analitic sau grafic.

2. Verificați, folosind figura 47-1, că emisivitatea tungstenului la 2 000°K este 0,259.

3. O cavitate radiantă la 6 000°K are în perete un orificiu cu diametrul de 0,10 mm. Care este numărul de fotoni cuprinși în intervalul 5 500 Å și 5 510 Å care ies prin acest orificiu în unitatea de timp?

4. O cavitate a cărei pereți sînt ținuți la temperatura de 4 000°K are un orificiu cu diametrul de 5,0 mm. (a) Care este energia din domeniul vizibil (definit ca fiind cuprins între 0,40 și 0,70 μm) care iese prin acest orificiu în unitatea de timp? (b) Ce fracțiune din energia totală ce iese din cavitate reprezintă aceasta? Rezolvați fie analitic, fie grafic.

5. Arătați că legea lui Wien (p. 540) este un caz special al legii lui Planck (ecuația 47-6) pentru cazul lungimilor de undă mici sau al temperaturilor scăzute.

6. Radiația solară ce cade pe Pămînt este de $1{,}4 \times 10^3$ W/m². Cîți fotoni/cm²·min reprezintă aceasta, presupunînd o lungime de undă medie de 5 500 Å?

7. Una din liniile spectrale de emisie importante în radioastronomie are lungimea de undă de 21 cm. Care este energia fotonului corespunzător?

8. Energia necesară pentru a scoate un electron din sodiu este de 2,3 eV. Prezintă sodiul efect fotoelectric dacă este iluminat cu lumină portocalie, cu $\lambda = 6\,800$ Å.

9. Pe o suprafață de aluminiu cade un fascicul de lumină cu lungimea de undă egală cu 2 000 Å. Pentru a scoate un electron din aluminiu sînt necesari 4,2 eV. Care este energia cinetică (a) a celui mai rapid fotoelectron și (b) a celui mai lent fotoelectron emis? (c) Care este potențialul de frînare? (d) Care este lungimea de undă de prag pentru aluminiu?

10. Lucrul mecanic de extracție pentru o suprafață curată de litiu este de 2,3 eV. Reprezentați grafic aproximativ potențialul de frînare V_0 în funcție de frecvența luminii incidente pentru această suprafață.

11. Să presupunem că în exemplul 2 „ținta" este un atom izolat de gaz cu raza de 1,0 Å și că intensitatea sursei de lumină este micșorată la 10^{-5} W. Dacă energia de legătură a

electronului cel mai slab legat din atom este 20 eV, care este decalajul de timp pentru efectul fotoelectric ce trebuie să apară pe baza teoriei ondulatorii a luminii?

12. O lampă cu vapori de sodiu de 100 W radiază uniform în toate direcțiile. (a) La ce distanță de lampă, densitatea medie a fotonilor este de $10/cm^3$? (b) Care este densitatea medie a fotonilor la 2,0 m de lampă? Presupunem că lumina este monocromatică cu $\lambda = 5\,890$ Å.

13. Arătați, analizînd ciocnirea dintre un foton și un electron liber (folosind mecanica relativistă) că este imposibil ca fotonul să cedeze *toată* energia sa electronului liber. Cu alte cuvinte, efectul fotoelectric nu poate apare pentru electroni complet liberi: electronii trebuie să facă parte dintr-un corp solid sau dintr-un atom.

14. Calculați variația procentuală a energiei unui foton ce suferă o ciocnire Compton cu un unghi φ egal cu 90° (vezi figura 47-11) pentru o radiație din (a) domeniul de microunde, cu $\lambda = 3{,}0$ cm, (b) domeniul vizibil, cu $\lambda = 5\,000$ Å, (c) domeniul radiațiilor X, cu $\lambda = 1{,}00$ Å și (d) domeniul radiațiilor gamma, cu fotoni gamma de energie 1,0 MeV. Ce concluzii puteți trage despre importanța efectului Compton pentru aceste domenii din spectrul electromagnetic, doar din punctul de vedere al pierderii de energie într-o singură ciocnire Compton?

15. Efectuați calculele algebrice necesare pentru a elimina pe v și θ din ecuațiile 47-13, 47-15 și 47-16 pentru a obține relația de deplasare Compton (ecuația 47-17).

16. (a) Calculați cele trei radiații cu lungimea de undă cea mai mare din seria Balmer, folosind formula lui Bohr. (b) Care este domeniul de lungimi de undă pe care îl acoperă seria Balmer?

17. Este dat un atom de hidrogen, în starea fundamentală. Care sînt, conform teoriei lui Bohr, (a) numărul cuantic, (b) raza orbitei, (c) momentul cinetic, (d) impulsul, (e) viteza unghiulară, (f) viteza lineară, (g) forța ce acționează asupra electronului, (h) accelerația electronului, (i) energia sa cinetică, (j) energia sa potențială și (k) energia sa totală?

18. Cum variază mărimile de la (b) la (k) din problema 17 cu numărul cuantic?

19. Care este energia necesară pentru a îndepărta dintr-un atom de hidrogen un electron ce se află într-o stare cu $n=8$?

20. Un atom de hidrogen este excitat dintr-o stare cu $n=1$ într-o stare cu $n=4$. (a) Calculați energia pe care trebuie să o absoarbă atomul. (b) Calculați și reprezentați pe o diagramă a nivelelor de energie, diferitele energii ale fotonilor ce pot fi emiși cînd atomul revine pe starea sa cu $n=1$. (c) Calculați viteza de recul a atomului de hidrogen presupus inițial în repaus, considerînd că tranziția de la $n=4$ la $n=1$ se efectuează într-o singură etapă.

21. Un atom de hidrogen ce se află într-o stare cu o *energie de legătură* (aceasta este energia necesară pentru a îndepărta un electron) de 0,85 eV suferă o tranziție într-o stare corespunzătoare unei *energii de excitare* (aceasta este diferența dintre energia stării respective și cea a stării fundamentale) de 10,2 eV. (a) Găsiți energia fotonului emis. (b) Reprezentați această tranziție pe o diagramă a nivelelor de energie ale atomului de hidrogen, indicînd numerele cuantice corespunzătoare.

22. Indicați pe o diagramă a nivelelor de energie ale atomului de hidrogen numerele cuantice corespunzătoare tranziției pentru care lungimea de undă a fotonului emis este de 1 216 Å.

23. Un neutron cu o energie cinetică de 6,0 eV, se ciocnește cu un atom de hidrogen în repaus ce se află

pe starea fundamentală. Arătaţi că această ciocnire trebuie să fie elastică (adică, energia *cinetică* trebuie să se conserve).

24. Aplicaţi teoria lui Bohr unui ion de heliu odată ionizat, adică, unui atom de heliu din care s-a îndepărtat un electron. Ce relaţie există între acest spectru şi spectrul atomului de hidrogen?

25. Calculaţi, folosind teoria lui Bohr, energia necesară pentru a îndepărta electronul din heliul odată ionizat.

26. *Pozitroniul.* Aplicaţi teoria lui Bohr pozitroniului. Acesta este format dintr-un electron pozitiv şi unul negativ ce se rotesc în jurul centrului lor de masă ce se află la jumătatea distanţei dintre ei. (a) Ce legătură există între acest spectru şi spectrul atomului de hidrogen? (b) Care este raza orbitei stării fundamentale? (Indicaţie: Deoarece acest „atom" nu are nucleu, este necesar să se analizeze această problemă de la început, fără a folosi rezultatele din text; ambele particule se rotesc în jurul unui punct situat la jumătatea distanţei dintre ele).

27. *Mezoatomul.* Aplicaţi teoria lui Bohr unui atom mezonic. Acest atom este format dintr-un nucleu de sarcină Ze în jurul căruia se roteşte un mezon miu negativ (μ^-) (o particulă elementară cu sarcina $-e$ şi masa m care este de 207 ori mai mare decît masa electronului; vezi anexa F). Calculaţi (a) raza primei orbite Bohr, (b) energia de ionizare, şi (c) lungimea de undă a fotonului de cea mai mare energie ce poate fi emis. Presupuneţi că miuonul se roteşte în jurul unui nucleu de hidrogen ($Z=1$).

28. Dacă un electron se roteşte pe o orbită cu o frecvenţă ν_0, electromagnetismul clasic cere ca el să radieze energie nu numai cu această frecvenţă, ci şi cu frecvenţele $2\,\nu_0$, $3\,\nu_0$, $4\,\nu_0$, etc.; vezi nota de subsol de la pagina 557. Arătaţi că aceasta rezultă şi din teoria lui Bohr a atomului de hidrogen în cazul limită al numerelor cuantice mari.

29. Arătaţi că în tabela 47-2, valorile din ultima coloană sînt date de

$$\frac{100(\nu-\nu_0)}{\nu} \cong \frac{150}{n}$$

pentru numere cuantice mari.

30. Dacă momentul cinetic al Pămîntului datorat mişcării sale în jurul Soarelui ar fi cuantificat conform relaţiei lui Bohr $L=nh/2\pi$, care ar fi acest număr cuantic? Dacă această cuantificare ar exista, ar putea fi ea detectată?

Capitolul 48

Unde şi particule

48-1. Unde de Broglie

În 1924 francezul Louis de Broglie a raţionat în felul următor: (a) în multe privinţe natura prezintă o simetrie uimitoare; (b) universul nostru observabil se compune în întregime din lumină şi substanţă; (c) dacă natura luminii este dualistă: ondulatorie şi corpusculară s-ar putea ca şi substanţa să aibă acest caracter. Deoarece substanţa este considerată ca fiind compusă din particule, de Broglie a presupus că putem atribui particulelor proprietăţi ondulatorii.

Ipoteza lui de Broglie nu ar fi fost primită cu atîta atenţie dacă el nu ar fi indicat şi care ar fi trebuit să fie lungimea de undă a acestor aşa-numite unde de materii. Reamintim că pe la 1680 Huygens a dat o teorie ondulatorie a luminii care nu a fost unanim acceptată, în parte deoarece Huygens nu a putut arăta care trebuie să fie lungimea de undă a luminii. Cînd în 1800 Thomas Young a corectat acest defect, teoria ondulatorie nu a mai întîmpinat nici o rezistenţă.

De Broglie a presupus că lungimea de undă a undelor de materie prezise este dată tot de relaţia ce este valabilă pentru lumină, adică ecuaţia 47-14

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (48\text{-}1)$$

care leagă lungimea de undă a unei unde luminoase de impulsul fotonilor corespunzători. Natura dualistă a luminii reiese clar din această ecuaţie cît şi din ecuaţia 47-10 ($E=h\nu$). În fiecare din aceste ecuaţii intră atît mărimi ondulatorii (ν şi λ) cît şi mărimi corpusculare (E şi p). *De Broglie a presupus că lungimea de undă a undelor asociate particulelor trebuie să fie dată tot de ecuaţia 48-1, în care p va reprezenta acum impulsul particulei.*

Exemplul 1. Care este din ecuația 48-1 lungimea de undă corespunzătoare unui fascicul de electroni cu o energie cinetică de 100 eV?

Viteza electronilor se obține din $E_c = \frac{1}{2} mv^2$, sau

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(100\ \text{eV})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}{9{,}1 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5{,}9 \times 10^6\ \text{m/s}$$

Impulsul rezultă din

$$p = mv = (9{,}1 \times 10^{-31}\ \text{kg})\ (5{,}9 \times 10^6\ \text{m/s}) = 5{,}4 \times 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Lungimea de undă (numită *lungime de undă de Broglie*) se obține din ecuația 48-1

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}6 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{5{,}4 \times 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}} = 1{,}2\ \text{Å}$$

Este de același ordin de mărime cu dimensiunea unui atom sau cu distanța dintre planele adiacente de atomi dintr-un solid.

Elsasser a arătat în 1926 că s-ar putea verifica natura ondulatorie a substanței în același mod în care s-a verificat natura ondulatorie a radiațiilor X și anume, trimițînd un fascicul de electroni cu o energie adecvată pe un solid cristalin. Atomii cristalului joacă în acest caz pentru „unda“ electronului rolul unei rețele tridimensionale de centre de difracție; în mod analog difracției radiațiilor X, trebuie să obținem maxime de difracții intense în anumite direcții bine determinate.

Această idee a fost verificată de C. J. Davisson și L. H. Germer în Statele Unite și de G. P. Thomon în Scoția*. În figura 48-1 este ară-
călzit sînt accelerați într-o diferență de potențial variabilă V și ies din
tată instalația lui Davisson și Germer. Electronii dintr-un filament în-
„tunul electronic“ T cu energia cinetică eV. Acest fascicul de electroni

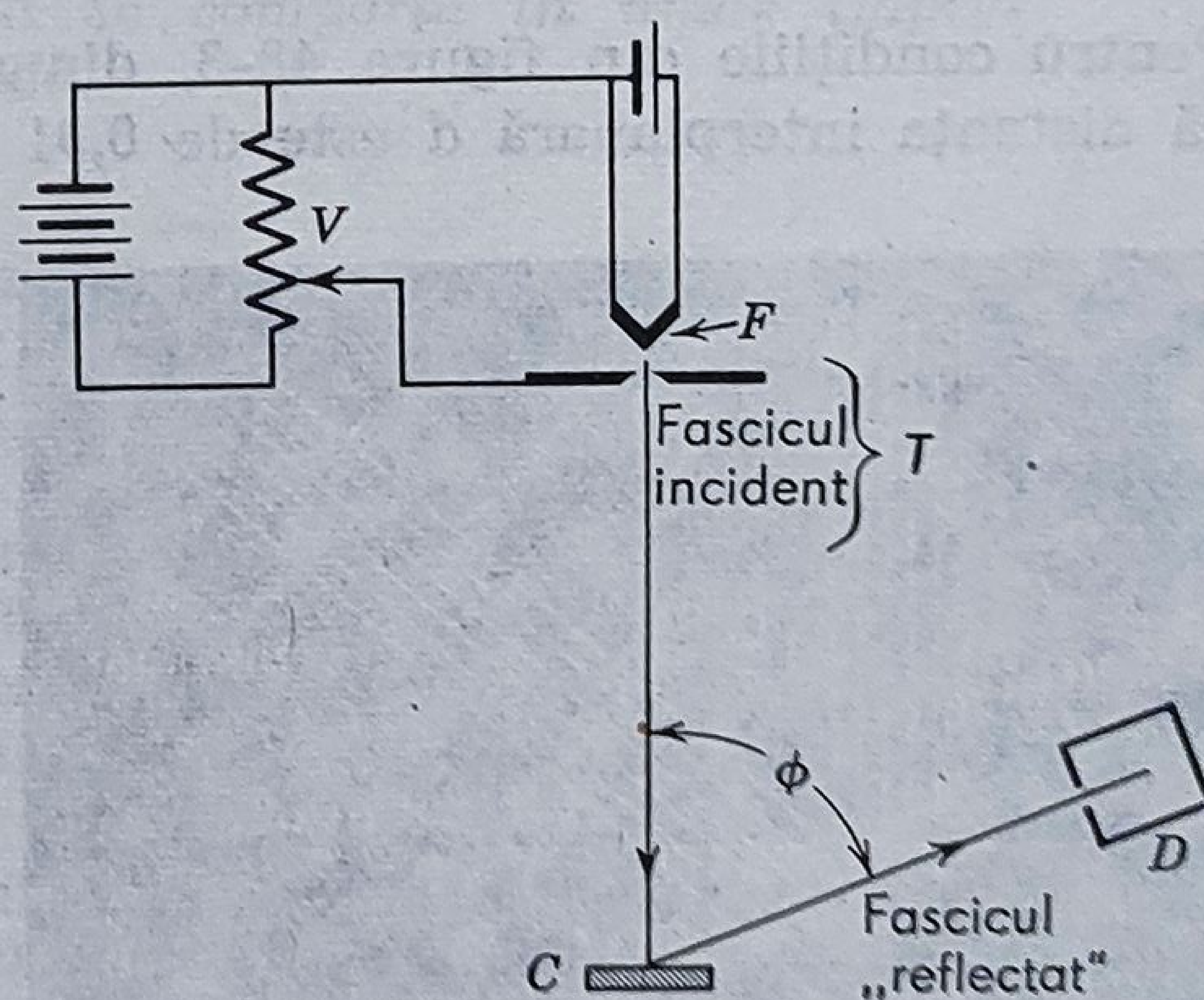


Figura 48-1. Schema experienței lui Davisson și Germer. Electronii din filamentul F sînt accelerați în diferența de potențial variabilă V. După „reflexia" pe cristalul C ei sînt colectați de detectorul D.

* Pentru o privire istorică asupra lucrărilor lui Thomson, vezi „Primele lucrări de difracție de electroni“ de Sir George Thomson, p. 821, Am. J. Phys., December, 1961.

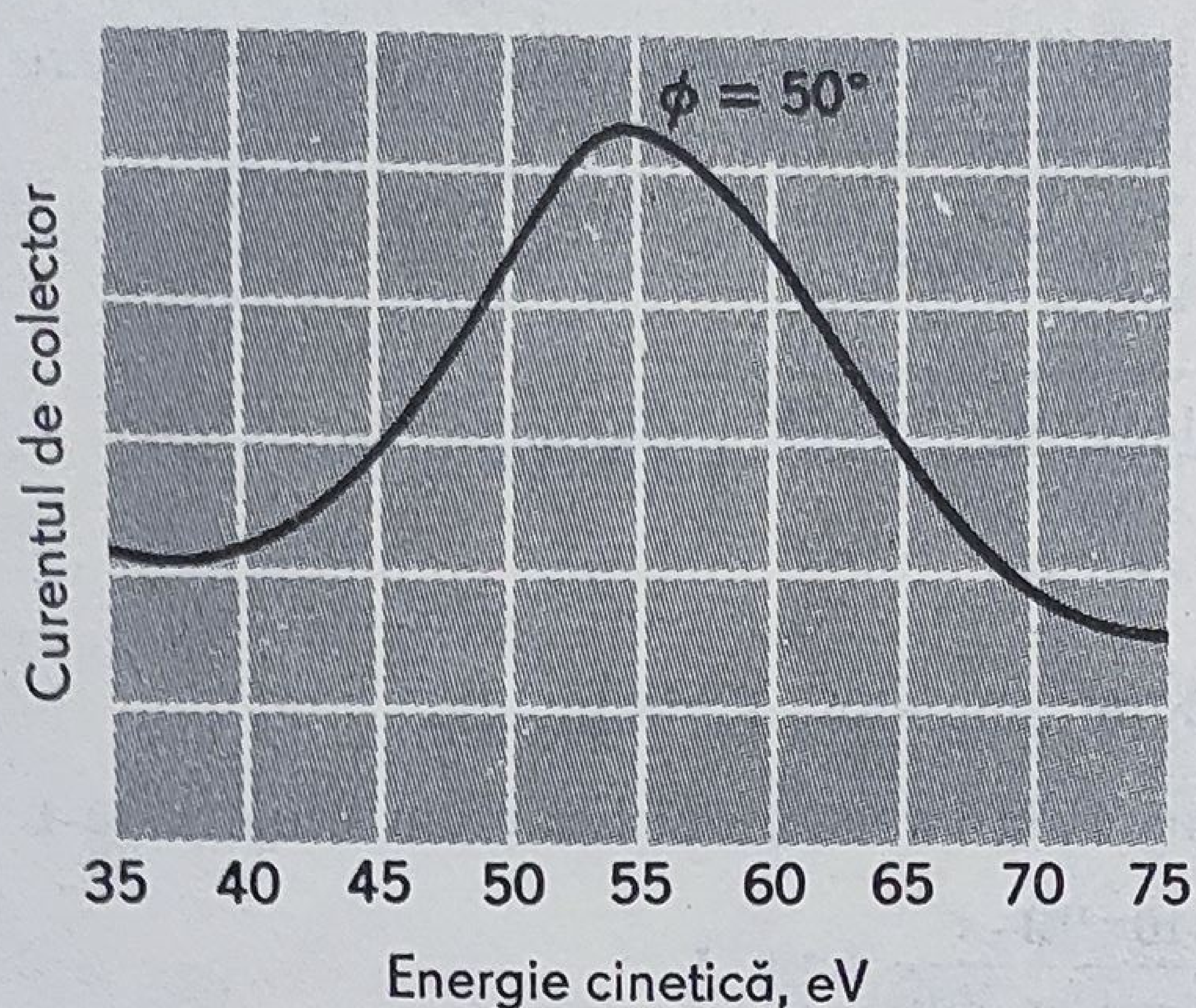


Figura 48-2. Curentul de colector din detectorul D din figura 48-1 în funcție de energia cinetică a electronilor incidenți; se vede un maxim de difracție. Unghiul Φ din figura 48-1 este ajustat la 50°. Dacă s-ar lua o valoare apreciabil mai mică sau mai mare, maximul de difracție ar dispare.

cade normal pe un monocristal de nichel C. Detectorul D este montat la un anumit unghi Φ, iar intensitatea fasciculului „reflectat“ este măsurată pentru diferite valori ale potențialului de accelerare V. În figura 48-2 se arată că la $\Phi=50°$ pentru $V=54$ V se înregistrează un fascicul intens.

Toate aceste fascicule intense, „reflectate“ pot fi explicate considerînd că fasciculul de electroni are o lungime de undă dată de $\lambda=h/p$ și că pe anumite familii de plane atomice se produc „reflexii Bragg“ perfect analoage cu cele descrise pentru radiațiile X în paragraful 45.5.

În figura 48-3 este arătată o astfel de reflexie Bragg, ce satisface relația Bragg

$$m\lambda=2d \sin \theta \qquad m=1, 2, 3, \ldots \tag{48-2}$$

Pentru condițiile din figura 48-3, din analiza de radiații X, se găsește că distanța interplanară d este de 0,91 Å. Deoarece Φ este egal cu 50°,

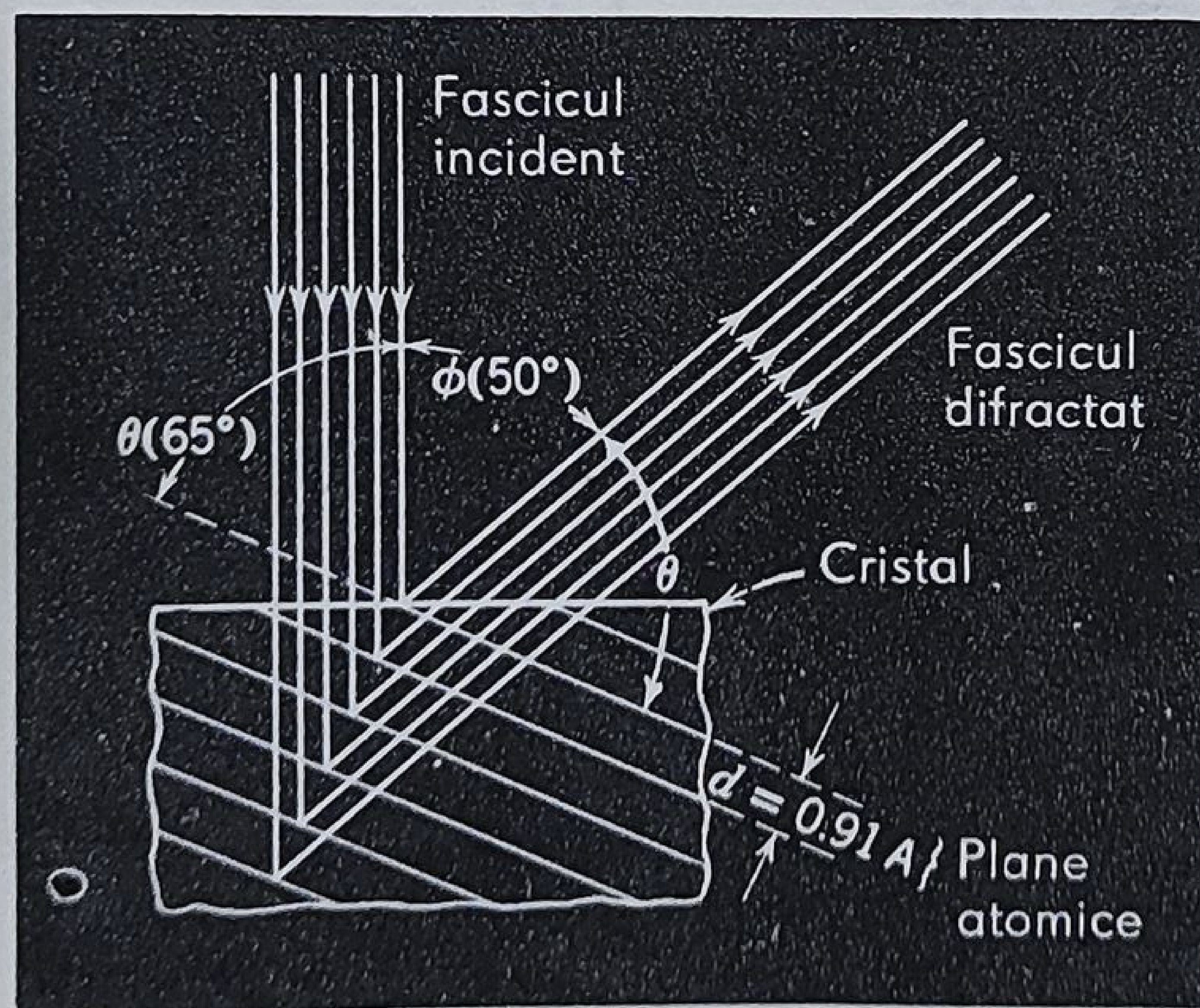


Figura 48-3. Fasciculul intens difractat la $\Phi=50°$ pentru $V=54$ V se produce datorită „reflexiei“ de tip ondulatoriu pe familia de plane atomice reprezentate în figură, pentru d=0,91 Å. Unghiul Bragg θ este 65° Pentru simplificare refracția undei difractate cînd părăsește suprafața este neglijată.

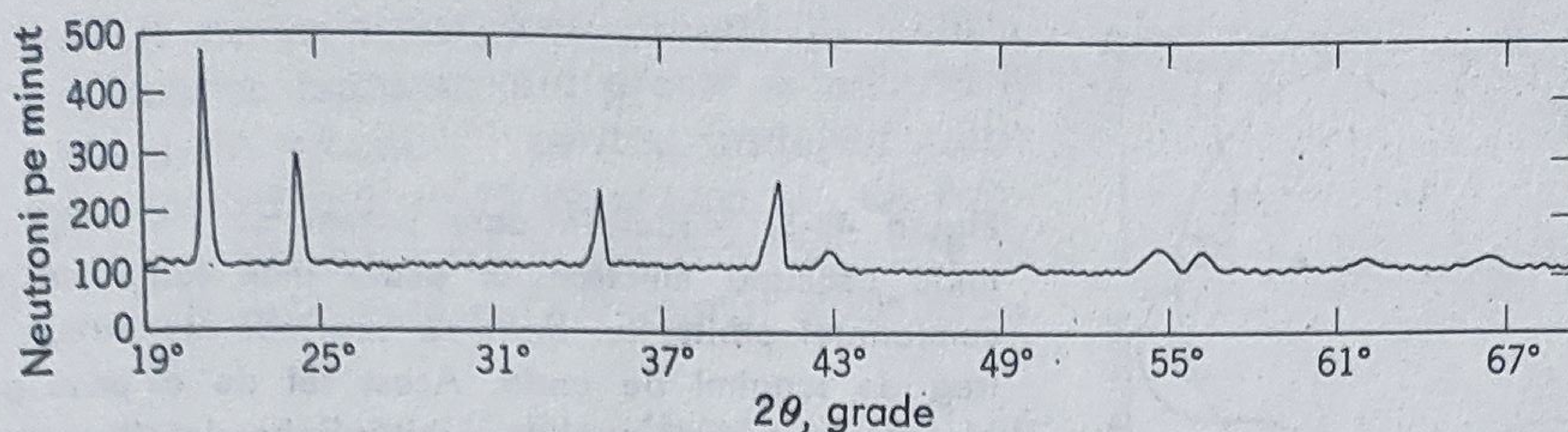


Figura 48-4. Figura de difracție a unei pulberi de plumb, obținută folosind un fascicul monocromatic de neutroni de la un reactor nuclear. Maximele reprezintă reflexii Bragg" pe diferite plane atomice, θ fiind „unghiul Bragg" corespunzător.

rezultă că θ este egal cu $90° - \frac{1}{2} \times 50°$ deci 65°. Lungimea de undă calculată din ecuația 48-2, presupunînd $m=1$, este

$$\lambda = 2d \sin \theta = 2(0{,}91 \text{ Å}) (\sin 65°) = 1{,}65 \text{ Å}$$

Lungimea de undă calculată din relația lui de Broglie $\lambda = h/p$ este, pentru electronii de 54 eV (vezi exemplul 1), de 1,64 Å. Această concordanță excelentă, împreună cu alte experiențe similare este un argument convingător că în anumite condiții electronii se comportă ca o undă.

Nu numai electronii ci și toate celelalte particule, fie că au sau nu sarcină electrică, posedă caracteristici de undă. Fasciculul de neutroni obținut într-un reactor nuclear este folosit în mod curent la investigarea structurii atomice a solidelor. În figura 48-4 este arătată o „figură de difracție de neutroni" pe o pulbere fină de plumb.

Dovada existenței undelor de Broglie cu lungimea de undă dată de ecuația 48-1 este în adevăr foarte puternică. Totuși și dovada că substanța este compusă din particule rămîne la fel de puternică, vezi figura 10.10. Astfel, pentru substanță, ca și pentru lumină, trebuie să admitem un caracter dualist: *substanța se comportă în unele împrejurări ca o particulă, iar în altele ca o undă.*

48-2 Structura atomică și undele staționare

Mișcarea electronilor într-un fascicul nu este mărginită sau limitată în direcția lor de mișcare. Putem face o analogie cu o undă sonoră în lungul unui tub plin cu un gaz, cu o undă ce se propagă în lungul unei corzi lungi sau cu o undă electromagnetică într-un ghid de undă lung. Toate aceste patru exemple pot fi descrise prin unde progresive corespunzătoare și fapt important este că se pot propaga unde de *orice* lungime de undă (într-un anumit domeniu).

Să presupunem că în ultimele trei exemple undele sînt *limitate* prin impunerea unor restricții de natură fizică. Pentru unda sonoră aceasta înseamnă introducerea unui perete transversal într-un tub lung umplut cu gaz, formîndu-se astfel o cavitate rezonantă acustică (paragraful 38-5). Pentru undele în lungul corzii aceasta înseamnă scurtarea corzii și fixarea extremităților ei, analog corzilor unei viori (paragra-

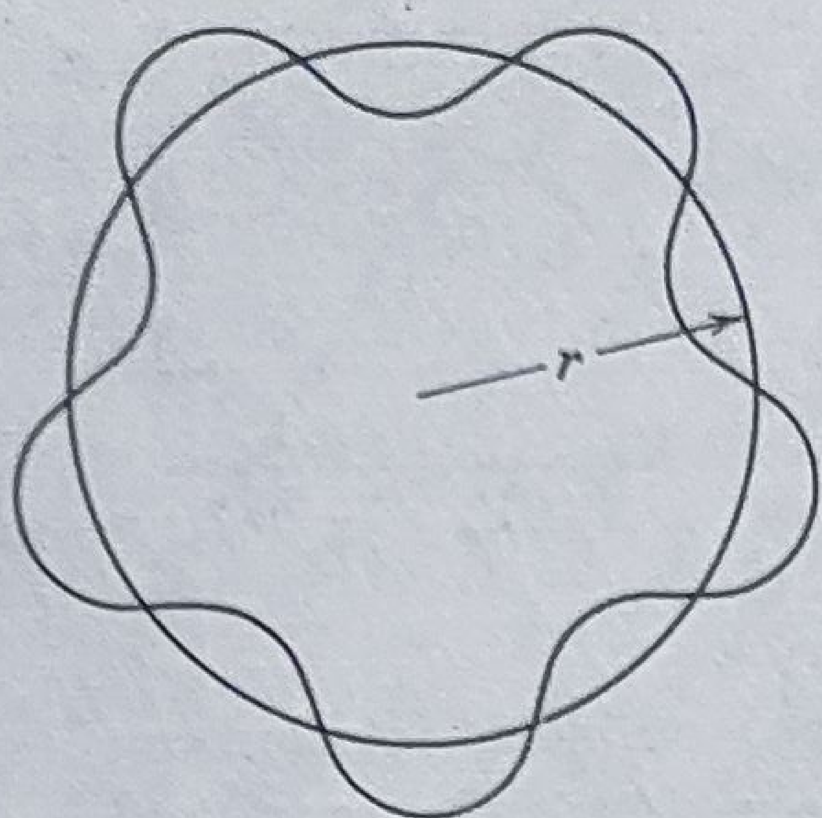


Figura 48-5. Modul în care putem să ne imaginăm unda asociată electronului astfel încît lungimea circumferinței orbitei lui Bohr să cuprindă un număr întreg de lungimi de undă. Acest fel de a privi problema, ca și noțiunea de orbită Bohr sînt în prezent depășite, fiind prea simpliste.

ful 20-5). Pentru unda electromagnetică aceasta înseamnă închiderea la ambele capete a unui ghid de undă de lungime finită, formîndu-se astfel o cavitate rezonantă electromagnetică (paragraful 38-6).

În acest fel se produc două modificări importante: (a) mișcarea este acum reprezentată prin unde *staționare* nu progresive și (b) *acum pot exista numai anumite lungimi de undă* (sau frecvențe). Această *cuantificare* a lungimii de undă este un rezultat direct al mărginirii sau limitării undei. Ne așteptăm ca dacă mișcarea electronilor este limitată, ei fiind localizați într-un atom, atunci (a) mișcarea unui electron poate fi reprezentată printr-o undă staționară de Broglie și (b) energia electronului va deveni cuantificată, adică va putea lua numai anumite valori discrete.

De Broglie a putut deduce condiția de cuantificare Bohr pentru momentul cinetic aplicînd *condiții la frontieră* potrivite undelor de Broglie pentru atomul de hidrogen. În figura 48-5 este dată „imaginea“ la un moment de timp dat a unei unde de Broglie staționare corespunzătoare unei orbite de rază r. Lungimea de undă de Broglie ($\lambda = h/p$) a fost astfel aleasă încît orbita de rază r să conțină un număr întreg n de unde de Broglie sau

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{(h/p)} = n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aceasta duce imediat la

$$L = pr = n\,\frac{h}{2\pi} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

care este condiția de cuantificare Bohr pentru L.

48-3 Mecanice ondulatorie

Ideea că stările staționare din atom corespund undelor asociate staționare a fost preluată de Erwin Schrödinger în 1926 și folosită de el ca bază a *mecanicii ondulatorii,* una din formulările echivalente ale fizicii cuantice.

O mărime importantă în mecanica ondulatorie este *funcția de undă* ψ care este o măsură a stării de vibrație a undelor asociate. Pentru

undele ce se propagă în lungul unei corzi deplasarea transversală y este o măsură a „stării de vibrație"; pentru undele sonore ea poate fi măsurată prin variația de presiune p; pentru undele electromagnetice ea poate fi măsurată prin vectorul cîmp electric E.

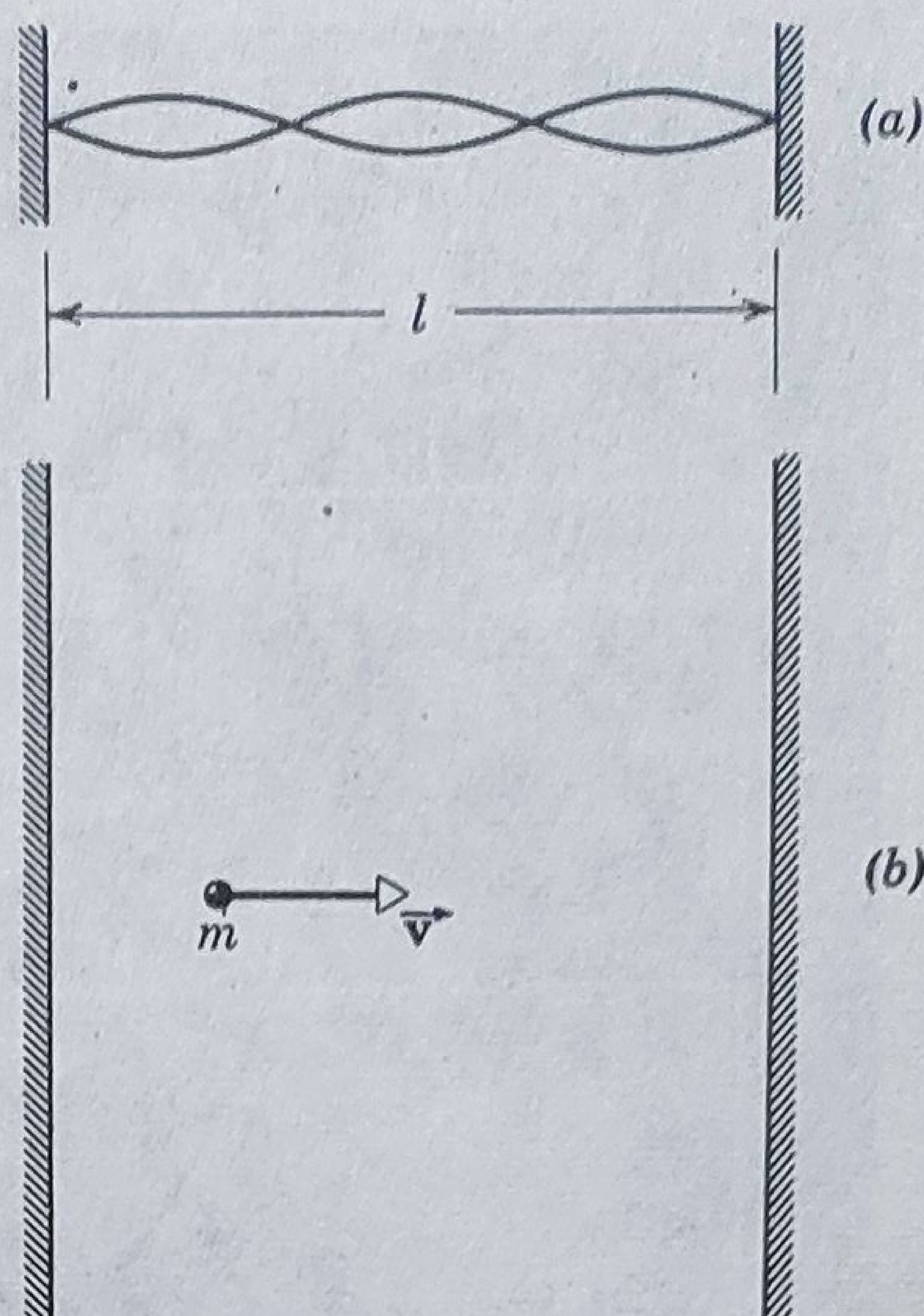


Figura 48-6. (*a*) O coardă întinsă de lungime *l* prinsă între doi suporți rigizi. (*b*) O particulă de masă *m* și viteză *v* constrînsă să se miște între pereți rigizi la distanța *l* unul de altul.

Despre semnificația fizică a stării de vibrație ondulatorii ψ vom discuta în paragraful 48-4. Pînă atunci vom studia funcția de undă $\psi(x, t)$ pentru un caz simplu, unidimensional, acela al mișcării posibile ale unei particule de masă m constrînsă să se miște între doi pereți rigizi la distanța l unul de altul, ca în figura 48-6, b. Funcția de undă poate fi obținută prin analogie cu problema cunoscută din mecanică, a modurilor de vibrație a unei corzi de lungime l prinsă la ambele capete, ca în figura 48.6, a.

În cazul corzii ce vibrează, condițiile la frontieră cer ca la capete să existe noduri. Aceasta înseamnă că lungimea de undă λ trebuie astfel aleasă ca

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

sau că lungimea de undă λ este „cuantificată" prin condiția ca

$$\lambda = \frac{2l}{n} \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{48-3}$$

Vibrația corzii este reprezentată printr-o undă staționară a cărei ecuație este, după cum am arătat în paragraful 19-9

$$y = 2y_m \sin kx \cos \omega t$$

unde $\omega\,(=2\pi\nu)$ este frecvența unghiulară a undei iar $k\,(=2\pi/\lambda)$ este numărul de undă. Deoarece λ este cuantificat și k va trebui să fie cuantificat, deci

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

care duce la

$$y = \left[2y_m \sin\frac{n\pi x}{l}\right] \cos \omega t \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{48-4}$$

Din ecuația 48-4 se vede că indiferent de valoarea lui n, există noduri în punctele $x=0$ și $x=1$, conform condițiilor la frontieră impuse. În

figura 48-7 este reprezentată mărimea din parantezele drepte ale acestei ecuații (amplitudinea undei staționare) pentru modurile de vibrație ale corzii corespunzătoare lui $n=1$, 2 și 3.

Să considerăm acum particula închisă între pereți rigizi. Deoarece am presupus că pereții sînt perfect rigizi, particula nu poate trece prin ei, astfel că ψ, care reprezintă într-un mod nespecificat încă clar (vezi paragraful 48-4) mișcarea particulei, trebuie să tindă spre zero în punctele $x=0$ și $x=l$. Lungimile de undă permise ale undelor de Broglie vor fi date de ecuația 48-3, sau

$$\lambda=\frac{2l}{n}$$

Înlocuind pe λ cu h/p (vezi ecuația 48-1) obținem

$$p=\frac{nh}{2l} \tag{48-5}$$

care arată că *impulsul* particulei este cuantificat. Impulsul $p\,(=mv)$ este legat de energia E (care este formată numai din energie cinetică și este egală cu $\frac{1}{2}mv^2$) prin

$$p=\sqrt{2mE} \tag{48-6}$$

Combinînd ecuațiile 48-5 și 48-6 se obține condiția de cuantificare pentru E

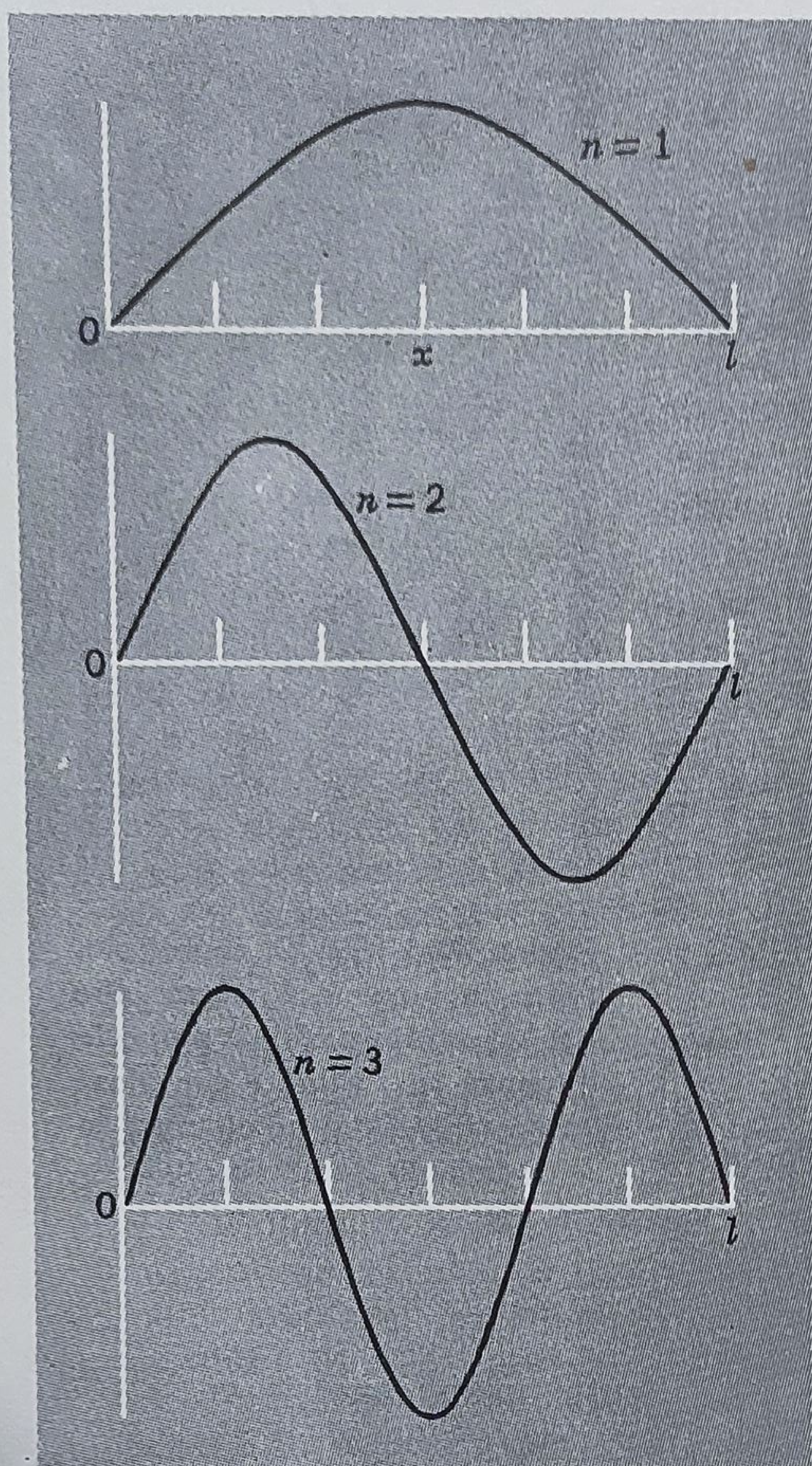


Figura 48-7. Trei moduri de vibrație cuantificată ale corzii din figura 48-6, a. Figura reprezintă și trei din funcțiile de undă cuantificate ale particulei din figura 48-6, b. În primul caz în ordonată este reprezentată amplitudinea deplasării iar în al doilea amplitudinea funcției de undă.

$$E=n^2\frac{h^2}{8ml^2} \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{48-7}$$

Particula nu poate avea orice energie, așa cum ne-am aștepta din punct de vedere clasic ci, numai energiile date de ecuația 48-7.

Unda de Broglie este descrisă, în analogie directă cu ecuația 48-4, de

$$\psi=\left[\psi_m \sin\frac{n\pi x}{l}\right]\cos\omega t \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{48-8}$$

Figura 48-7 poate fi folosită și pentru a vedea cum variază amplitudinea undelor de Broglie staționare ale stărilor de mișcare corespunzătoare lui $n=1$, 2 și 3 în interiorul cutiei. Din această problemă se vede clar cum localizarea sau mărginirea unei particule are ca rezultat cuantificarea energiei ei.

Exemplul 2. Să considerăm un electron ($m=9,1\cdot10^{-31}$ kg) constrîns de forțe electrice să se miște între doi „pereți" rigizi situați la distanța de $1,0\cdot10^{-9}$ m unul de altul (care reprezintă aproximativ cinci diametre atomice). Găsiți valorile cuantificate ale energiei pentru primele trei stări staționare de cea mai joasă energie.

Din ecuația 48-7, pentru $n=1$ avem

$$E=n^2\frac{h^2}{8ml^2}=(1)^2\frac{(6,6\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})^2}{(8)(9,1\times10^{-31}\ \mathrm{kg})(1,0\times10^{-9}\ \mathrm{m})^2}=6,0\times10^{-20}\ \mathrm{J}=0,38\ \mathrm{eV}.$$

Energiile următoarelor două stări ($n=2$ și $n=3$) sînt $2^2\times0,38$ eV= 1,5 eV și $3^2\times0,38$ eV=3,4 eV.

Exemplul 3. Să considerăm un fir de praf ($m=1,0\ \mu\mathrm{g}=1,0\times10^{-9}$ kg) constrîns să se miște între doi pereți rigizi situați la distanța de 0,1 mm ($=10^{-4}$ m) unul de altul. Viteza sa este de numai 10^{-6} m/s, astfel că pentru a parcurge distanța dintre pereți sînt necesare 100 s. Care este numărul cuantic ce descrie această mișcare?

Energia este

$$E\ (=E_c)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(10^{-9}\ \mathrm{kg})\ (10^{-6}\ \mathrm{m/s})^2=5\times10^{-22}\ \mathrm{J}$$

Rezolvînd ecuația 48-7 în funcție de n obținem

$$m=\sqrt{8mE}\,\frac{l}{h}=\sqrt{(8)(10^{-9}\ \mathrm{kg})(5\times10^{-22}\ \mathrm{J})}\left(\frac{10^{-4}\ \mathrm{m}}{6,6\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}\right)3\times10^{14}$$

Chiar în aceste condiții extreme, natura cuantificată a mișcării nu se va putea pune în evidență; nu putem deosebi din punct de vedere experimental cele două stări: $n=3\cdot10^{14}$ și $n=3\cdot10^{14}+1$. Fizica clasică care este complet depășită pentru problema din exemplul 2, în această problemă dă rezultate excelente.

48-4 Semnificația lui ψ

Max Born a fost cel care a presupus pentru prima oară că mărimea ψ^2 într-un punct oarecare este o măsură a *probabilității ca o particulă să se găsească în apropierea acelui punct*. Mai exact, dacă se ia un element de volum dV în jurul punctului dat, probabilitatea ca particula să se găsească în elementul de volum la un moment de timp dat este $\psi^2\,dV$. Această interpretare a lui ψ asigură o legătură din punct de vedere statistic între undă și particula asociată; ne spune unde *este probabil să se găsească particula* și *nu unde se găsește*.

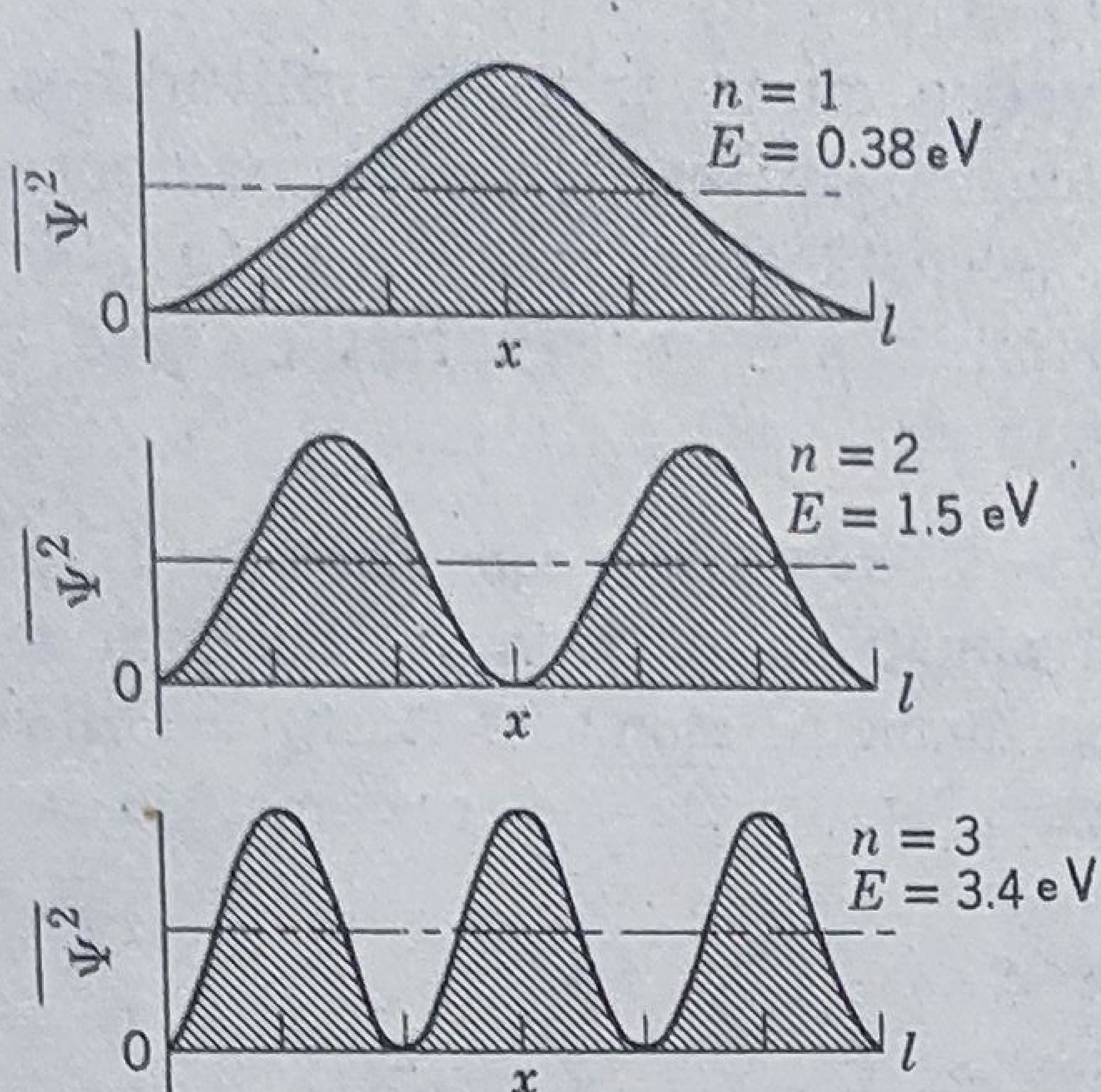


Figura 48-8. „Funcțiile de probabilitate" pentru trei stări de mișcare ale particulei din figura 48-6, b, împreună cu energiile cuantificate corespunzătoare condițiilor din exemplul 2. Liniile orizontale reprezintă rezultatele mecanicii clasice, în care funcția de probabilitate este constantă pentru orice poziție a particulei.

Pentru particula închisă între pereți rigizi, probabilitatea ca particula să se găsească între două plante situate la distanța x și $x+dx$ de unul din pereți (vezi figura 48-8) este dată de

$$\psi^2 dx = \psi_m^2 \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \cos^2 \omega t \, dx$$

Deoarece ne interesează mai mult localizarea spațială a particulei decît comportarea ei în timp, vom media pe ψ^2 pe o perioadă de mișcare. Aceasta este echivalent cu a înlocui pe $\cos^2 \omega t$ prin valoarea sa medie pe o perioadă, respectiv pe o jumătate,

$$\overline{\psi^2} = \frac{1}{2} \psi_m^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{48-9}$$

În figura 48-8 este dat ψ^2 pentru stările staționare ce corespund lui $n=1$, 2 și 3. Se observă că pentru $n=1$ este mai probabil ca particula să se găsească în apropierea centrului decît la capete. Aceasta este în contradicție netă cu rezultatele fizicii clasice conform căreia particula are aceeași probabilitate de a se găsi în oricare din punctele dintre pereți, după cum este arătat în figura 48-8 prin linia orizontală.

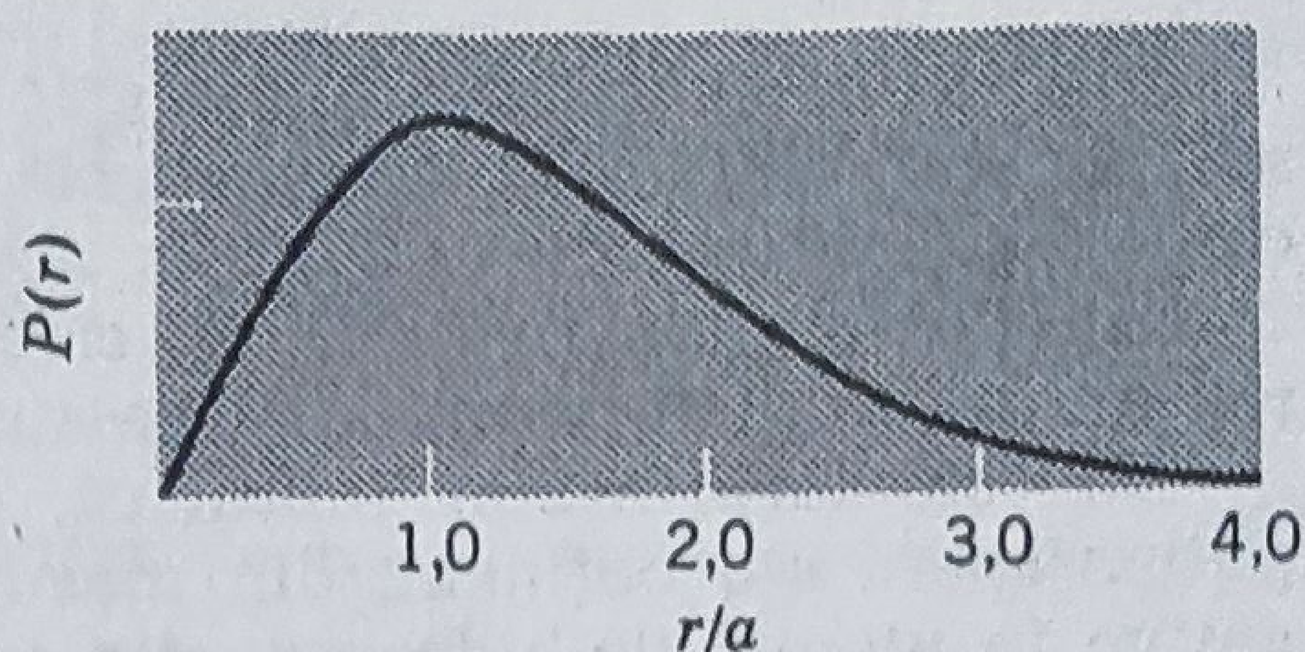
Problema particulei ce se mișcă între pereți rigizi are puține aplicații practice în fizică. Am prefera să ilustrăm mecanica ondulatorie a lui Schrödinger aplicînd-o unei situații mai des întîlnită experimental, cum este de exemplu, atomul de hidrogen. Dar complexitatea tratării matematice ne împiedică să o facem. Afirmăm fără să demonstrăm că rezolvînd această problemă prin mecanica ondulatorie, mișcarea unui electron ce se află în atom, în starea fundamentală, definită ca avînd $n=1$ în ecuația 47-28, este descrisă de următoarea funcție de undă

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} e^{-r/a} \cos \omega t \tag{48-10}$$

unde

$$a = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2}$$

Figura 48-9. Funcția de probabilitate a stării fundamentale a atomului de hidrogen, calculată pe baza mecanicii ondulatorii. Distanța dintre nucleu și electron este r; a raza primei orbite Bohr ($0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m) am folosit-o aici ca o unitate convenabilă de distanță.



Punînd $n=1$ în ecuația 47-27 se vede că a este raza orbitei stării fundamentale în teoria lui Bohr. Acest rezultat este puțin folosit în mecanica cuantică; a este introdus aici mai mult cu scopul de a introduce o unitate convenabilă de lungime specifică pentru problemele din fizica atomică avînd valoarea de 0,529 Å.

Exemplul 4. Considerăm două pături sferice ipotetice centrate pe nucleul unui atom de hidrogen, cu razele r și $r+dr$. Care este probabilitatea $P(r)$ în funcție de r ca electronul să se găsească între aceste pături?

Această probabilitate este $\psi^2 dV$, unde dV este volumul dintre pături și este egal cu $4\pi r^2 dr$. Astfel

$$\psi^2 dV = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}\, e^{-r/a} \cos \omega t\right)^2 (4\pi r^2 dr) = P(r)dr$$

Mediind în timp $\left(\text{adică înlocuind } \cos^2 \omega t \text{ cu } \frac{1}{2}\right)$ probabilitatea $\overline{P(r)}$ va fi

$$\overline{P(r)} = \frac{4r^2}{a^3}\, e^{-2r/a}$$

În figura 48-9 este reprezentată această funcție. Observați că probabilitatea cea mai mare de localizare a electronului corespunde primei raze Bohr. Astfel, în mecanica ondulatorie nu spunem că electronul în starea $n=1$ în atomul de hidrogen se mișcă în jurul nucleului pe o orbită circulară cu raza de 0,529 Å ci numai că probabilitatea cea mai mare de găsire a electronului se află la această distanță de nucleu și nu la o distanță mai mică sau mai mare.

48-5 Principiul de incertitudine

În fizică au semnificație numai acele mărimi care pot fi măsurate. Dacă am putea focaliza un „super“ microscop asupra unui electron dintr-un atom pentru a-l vedea rotindu-se pe o orbită, am declara că astfel de orbite au o semnificație fizică. Dar, vom arăta că *o astfel de observație este fundamental imposibil de realizat* — chiar cu cel mai perfecționat instrument ce ar putea fi construit vreodată. În concluzie, declarăm că astfel de orbite nu au nici o semnificație fizică.

Noi observăm că Luna se mișcă în jurul Pămîntului prin intermediul luminii solare pe care o reflectă spre noi. Lumina cedează un impuls obiectului de care este reflectată. În principiu, lumina reflectată va perturba mișcarea Lunii pe orbita sa, deși, un raționament sumar ne arată că efectul acestei perturbări este neglijabil.

În cazul electronilor situaţia este cu totul diferită. Şi aici putem spera să „vedem" electronul numai dacă trimitem lumină sau o altă particulă care să se reflecte de el. Dar, în acest caz reculul pe care îl suferă electronul cînd lumina (fotonul) se ciocneşte cu el modifică complet mişcarea electronului, într-un mod ce nu poate fi evitat sau măcar corectat.
Nu este surprinzător faptul că, informaţia cea mai detaliată pe care putem spera s-o obţinem, din măsurători, despre distribuţia sarcinii negative în atomul de hidrogen este curba de probabilitate din figura 48-9. Dacă orbite de felul celor presupuse de Bohr există, ele ar înceta să mai existe ca urmare a încercărilor noastre de a verifica existenţa lor. În aceste condiţii, preferăm să spunem că funcţia de probabilitate şi nu orbita electronului reprezintă o realitate fizică.

Incapacitatea noastră principială de a descrie mişcarea electronului cu ajutorul fizicii clasice este exprimată cel mai bine de *principiul de incertitudine*, enunţat de Werner Heisenberg în 1927. Pentru a formula acest principiu să considerăm un fascicul de electroni monoenergetici de viteză v_0 ce se mişcă de la stînga la dreapta în figura 48-10. Ne propunem să măsurăm poziţia pe verticală (y) a unui electron dat şi de asemenea componenta pe verticală a vitezei sale v_y. Dacă vom reuşi să efectuăm aceste măsurători cu o precizie oricît de mare, vom putea afirma că am stabilit poziţia şi mişcarea electronului (sau cel puţin o componentă a ei) cu precizie. Totuşi, vom vedea că *este imposibil să se efectueze simultan aceste două măsurători cu o precizie oricît de mare.*

Pentru a măsura pe y limităm fasciculul cu un ecran absorbant A prevăzut cu o fantă de lăţime Δy. Dacă un electron trece prin fantă, poziţia lui verticală va putea fi cunoscută cu această precizie. Îngustînd fanta putem mări oricît de mult dorim precizia cu care măsurăm această poziţie verticală.

Deoarece electronul este o undă, la trecerea prin fantă el va fi difractat. Dacă în figura 48-10 se pune în B o placă fotografică, pe ea se va obţine o *figură de difracţie tipică*. Existenţa acestei figuri de difracţie înseamnă existenţa unei incertitudini, imprecizii, în cunoaşterea valorilor lui v_y ale electronilor ce trec prin fantă. Fie v_{ya} valoarea lui v_y ce corespunde unui electron ce ajunge la primul

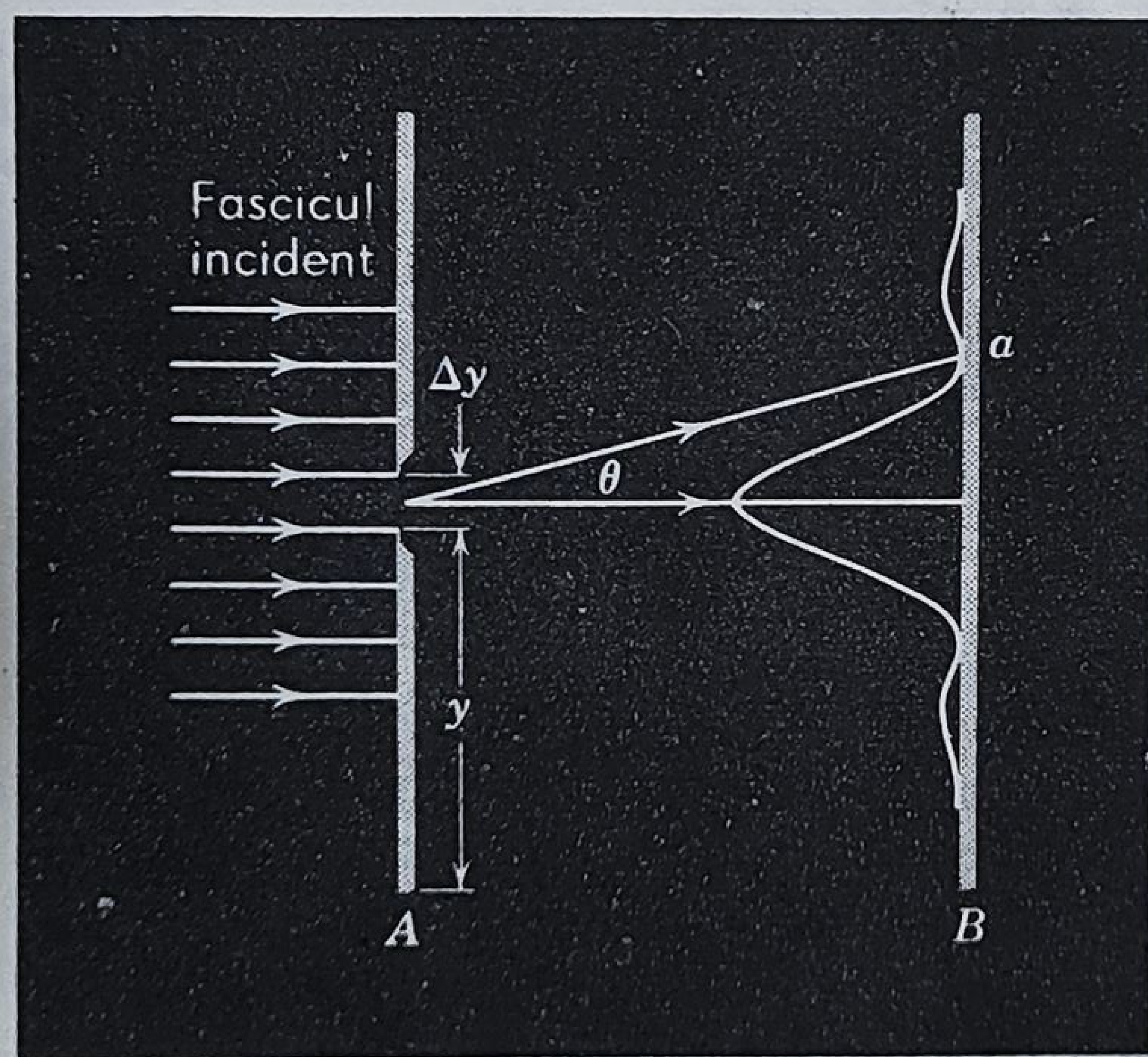


Figura 48-10. Un fascicul incident de electroni este difractat atunci cînd cade pe fanta din ecranul A, formînd o figură tipică de difracţie pe ecranul B. Dacă fanta se micşorează, figura de difracţie se lărgeşte.

minim pe ecran, notat cu a şi descris de unghiul θ_a. Considerăm pe v_{ya} ca o măsură *aproximativă* a impreciziei Δv_y în cunoaşterea lui v_y a electronilor ce trec prin fantă.

Primul minim din figura de difracţie este dat de ecuaţia 44-2

$$\sin \theta_a \frac{\lambda}{\Delta y}$$

Dacă presupunem că θ_a este suficient de mic, această ecuaţia poate fi scrisă sub forma

$$\theta_a \approx \frac{\lambda}{\Delta y} \tag{48-11}$$

Pentru a ajunge în punctul a, v_{ya} $(-\Delta v_y)$ trebuie să fie astfel ca

$$\theta_a \approx \frac{\Delta v_y}{v_0} \tag{48-12}$$

Combinînd ecuaţiile 48-11 şi 48-12 obţinem

$$\frac{\Delta v_y}{v_0} = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

pe care o scriem sub formă

$$\Delta v_y \Delta y \approx \lambda v_0 \tag{48-13}$$

Dar λ, lungimea de undă a fasciculului de electroni, este dată de h/p sau h/mv_0; introducînd aceasta în ecuaţia 48-13 obţinem

$$\Delta v_y \Delta y \approx \frac{hv_0}{mv_0}$$

Preferăm să o scriem sub forma

$$\Delta p_y \Delta y \approx h \tag{48-14}$$

În ecuaţia 48-14 Δp_y $(=m\Delta v_y)$ este imprecizia cu care putem cunoaşte componenta pe verticală a impulsului electronilor; Δy este imprecizia cu care putem cunoaşte poziţia lor pe verticală. Această ecuaţie ne spune, că, deoarece produsul acestor imprecizii este o constantă, *nu putem măsura p_y şi y simultan cu o precizie oricît de mare.*

Dacă dorim să măsurăm mai precis pe y (adică dacă dorim să reducem pe Δy), putem folosi o fantă mai îngustă. Dar (vezi ecuaţia 48-11) aceasta va produce o figură de difracţie mai largă. O figură de difracţie mai largă înseamnă că precizia cu care cunoaştem componenta pe verticală a impulsului electronului a scăzut sau cu alte cuvinte Δp_y a crescut; aceasta este exact ce ne spune ecuaţia 48-14.

Limitările asupra măsurătorilor noastre impuse de ecuaţia 48-14 nu au nimic de a face cu imperfecţiunea instrumentelor noastre de măsură. Putem presupune că posedăm cel mai perfecţionat echipament de măsură ce poate fi imaginat. Ecuaţia 48-14 reprezintă o limitare *fundamentală*, impusă de natură.

Ecuaţia 48-14 este o exprimare, pentru un caz special, a unui principiu general, cunoscut sub numele de *principiul de incertitudine*. Aplicat la măsurarea poziţiei şi impulsului, se afirmă că

$$\begin{aligned} \Delta p_x \Delta x &\geqslant h \\ \Delta p_y \Delta y &\geqslant h \\ \Delta p_z \Delta z &\geqslant h \end{aligned} \tag{48-15}$$

Astfel, nici o componentă a mişcării unui electron, liber sau legat, nu poate fi descrisă cu o precizie oricît de mare.

Modul în care apare constanta lui Planck h în aceste relații (48-15) pare să aibă o semnificație fizică mult mai puțin profundă decît în relațiile anterioare. Totuși, dacă acest produs ar fi zero și nu h, ideile din fizica clasică despre particule și orbite ar fi corecte; în acest caz ar fi posibil să măsurăm atît poziția cît și impulsul cu o precizie oricît de mare. Faptul că apare h ne arată că ideile fizicii clasice nu mai sînt corecte; mărimea lui h ne spune în ce măsură fizica clasică trebuie înlocuită cu cea cuantică. Gamow* a speculat într-o poveste fantastică interesantă și plină de fantezie, modul cum ar arăta lumea noastră dacă constanta h ar fi mult mai mare decît este ea, astfel încît ideile neclasice să devină perceptibile simțurilor noastre.

Exemplul 5. Un electron are viteza de 300 m/s, măsurată cu o precizie de 0,01%. Cu ce precizie maximă putem determina poziția acestui electron?

Impulsul electronului este

$$p=mv=(9{,}1\times10^{-31}\ \text{kg})\ (300\ \text{m/s})=2{,}7\times10^{-28}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Ni se spune că imprecizia în valoarea impulsului este de 0,01% din această valoare, deci

$$\Delta p=(0{,}0001)\ (2{,}7\times10^{-28}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})=2{,}7\times10^{-32}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Imprecizia minimă în determinarea poziției este, din ecuația 48-15

$$\Delta x=\frac{h}{\Delta p}=\frac{6{,}6\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2{,}7\times10^{-32}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}=2{,}4\ \text{cm}$$

Dacă impulsul electronului a fost într-adevăr determinat experimental cu precizia menționată, nu este posibil ca poziția lui să fie cunoscută cu o precizie mai mare ca cea determinată, adică de 2,5 cm. Conceptul de electron ca o particulă punctiformă în acest caz nu este aplicabil.

Exemplul 6. Un glonte are o viteză de 300 m/s, cunoscută cu o precizie de 0,01%. Care este precizia maximă cu care putem determina poziția sa? Masa sa este de 50 g (=0,05 kg).

Acest exemplu este identic cu cel din exemplul 5 cu singura deosebire că masa particulei este alta. Impulsul este

$$p=mv=(0{,}05\ \text{kg})\ (300\ \text{m/s})=15\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

iar

$$\Delta p=(0{,}0001)\ (15\ \text{kg}\cdot\text{m/s})=1{,}5\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Din ecuația 48-15 se obține

$$\Delta x=\frac{6{,}6\times10^{-34}\ \text{Js}}{1{,}5\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}=4{,}4\times10^{-31}\ \text{m}.$$

Aceasta depășește pînă în prezent posibilitățile noastre experimentale (diametrul nucleului este de numai 10^{-15} m), astfel că putem afirma că pentru obiecte grele ca de exemplu gloanțe, principiul de incertitudine nu limitează în nici un fel metodele noastre de măsură. Încă o dată, principiul de corespondență ne arată cum în anumite condiții, fizica cuantică se reduce la fizica clasică.

Relația de incertitudine ne arată cum de este posibil ca atît lumina cît și substanța să aibe o natură dualistă undă-particulă. Aceasta deoarece aceste două

---

* Domnul Tompkins în țara minunilor, Macmillan, 1940.

imagini atît de fundamental diferite una de cealaltă nu pot fi aduse niciodată față în față în aceeași experiență. Dacă imaginăm o experiență care forțează electronul să-și manifeste puternic caracterul său ondulatoriu, caracterul său corpuscular va fi întotdeauna obligatoriu estompat. Dacă modificăm experiența astfel ca să scoatem în evidență mai puternic caracterul corpuscular, caracterul ondulatoriu va fi în mod obligatoriu mai estompat. Substanța și lumina pot fi comparate cu fețele unei monede, care pot fi privite după voie cînd una cînd cealaltă, dar niciodată amîndouă deodată. Niels Bohr a fost cel care a arătat pentru prima oară în *principiul de complementaritate* dat de el, cum imaginile de undă și de particulă nu se contrazic ci se completează reciproc.

Intrebări

1. Cum este posibil ca *lungimea de undă* a unui electron să fie dată de $\lambda=h/p$ cînd însăși prezența impulsului p în această formulă arată că electronul este o particulă?

2. Cum au putut fi siguri Davisson și Germer că maximul de la „54 V" din figura 48-2 este un maxim de difracție de ordinul întîi, adică că $m=1$ în ecuația 48-2?

3. Într-o experiență de tip Thomson de măsurare a raportului e/m pentru electron (vezi paragraful 33-8), un fascicul, de electroni de 10^4 eV a fost colimat trecîndu-l printr-o fantă de lățime 0,50 mm. De ce la trecerea prin fantă electronii și-au păstrat caracterul de fascicul și nu s-a produs difracția undei electronice?

4. De ce în experiența noastră zilnică nu ne dăm seama mai pregnant de natura ondulatorie a substanței?

5. Aplicați principiul de corespondență problemei particulei obligate să se miște între pereți rigizi, arătînd că aceste caracteristici ce par „ciudate" (adică, cuantificarea energiei și neuniformitatea funcției de probabilitate din figura 48-8) nu mai pot fi puse în evidență experimental pentru numere cuantice mari.

6. Fiind dată o particulă obligată să se miște între pereți rigizi în modul $n=1$, care este probabilitatea ca particula să se găsească într-un element de volum mic situat la suprafața unuia din pereți?

7. O undă staționară poate fi considerată ca rezultatul suprapunerii a două unde progresive. Puteți aplica aceasta la problema particulei obligate să se miște între pereți rigizi, interpretînd analog mișcării electronului?

8. Care este semnificația fizică a funcției de undă ψ?

9. De ce, conceptul de orbită Bohr violează principiul de incertitudine?

10. De ce rezultatele mecanicii ondulatorii sînt atît de exacte cu toate că singura informație pe care o avem despre poziția electronului este statistică?

11. Dați cîteva exemple numerice pentru a arăta că în experiențe cu obiecte cu o masă de aproximativ 1 g principiul de incertitudine nu se manifestă.

12. În figura 48-8 se vede că pentru $n=3$ funcția de probabilitate pentru o particulă ce se mișcă între pereți rigizi este zero în două puncte între cei doi pereți. Cum poate totuși particula trece prin aceste puncte? (Indicație: considerați implicațiile principiului de incertitudine).

13. Principiul de incertitudine poate fi formulat și în funcție de mă-

rimi unghiulare (comparați cu ecuația 48-15),

$$\Delta L \, \Delta\varphi \geq h$$

unde ΔL este imprecizia în cunoașterea momentului *cinetic* iar $\Delta\varphi$ imprecizia în poziția *unghiulară*. Pentru electronii din atom momentul cinetic are valori cuantificate bine definite, neflind vorba de nici o imprecizie. Ce concluzie putem trage despre imprecizia în poziția unghiulară și asupra validității conceptului de orbită?

Probleme

1. Un glonte cu masa de 40 g are viteza de 1 000 m/s. (a) Care este lungimea de undă pe care putem să i-o asociem? (b) De ce nu se manifestă natura ondulatorie a glontelui prin apariția unor efecte de difracție?

2. Care este lungimea de undă pe care o asociem unui fascicul de neutroni cu energia de 0,025 eV?

3. Un electron și un foton au aceeași lungime de undă, egală cu 2,0 Å. Care sînt (a) impulsurile lor și (b) energiile lor?

4. Acceleratorul de electroni de 50 BeV ce va fi construit la Stanford va produce un fascicul de electroni de lungime de undă mică, adecvat pentru a pune în evidență detaliile fine ale structurii nucleare prin experiențe de împrăștiere. Care este această lungime de undă și cît este în comparație cu dimensiunea unui nucleu mediu? (Indicație: la aceste energii trebuie folosită relația ultra-relativistă dintre impuls și energie și anume $p=E/c$. Aceasta este aceeași relație cu cea folosită pentru lumină (paragraful 40-2) și este justificată folosirea ei ori de cîte ori energia cinetică a particulei este mult mai mare decît energia sa de repaus m_0c^2, ca în acest caz).

5. Considerăm experiența lui Davisson și Germer. (a) Care sînt unghiurile la care apar fasciculele difractate de ordinul doi și trei corespunzătoare maximului intens din figura 48-2, presupunînd că sînt prezente și (b) care este unghiul la care se produce fasciculul difractat de ordinul întîi dacă potențialul de accelerare se modifică de la 54 la 60 V? Cristalul poate fi rotit.

6. Reprezentați lungimea de undă de Broglie în funcție de energia cinetică pentru (a) electroni și (b) protoni. Restrîngeți domeniul valorilor energiei la acelea pentru care mecanica clasică se aplică suficient de bine. Un criteriu convenabil poate fi ca energia cinetică maximă pentru fiecare reprezentare să fie de numai aproximativ, să zicem 5% din energia de repaus m_0c^2 a particulei date.

7. Care este lungimea de undă a unui atom de hidrogen ce se mișcă cu o viteză corespunzătoare energiei cinetice medii de echilibru termic la 20°C?

8. Dacă un electron trece dintr-o stare reprezentată prin $n=3$ în figura 48-8 într-o stare reprezentată prin $n=2$ în aceeași figură, printr-un proces în care se emite radiație electromagnetică, care este (a) energia fotonului emis (presupunînd că se emite un singur foton)? și (b) lungimea de undă corespunzătoare?

9. O partriculă este obligată să se miște între pereți rigizi situați la distanța l unul de altul. Care este probabilitatea de a fi găsită la distanța 1/3 de unul din pereți (a) pentru $n=1$, (b) pentru $n=2$, (c) pentru $n=3$ și (d) pe baza fizicii clasice?

10. Este dat un atom de hidrogen în stare fundamentală. Arătați că probabilitatea P_r ca electronul să se gă-

sească într-o sferă de rază r este dată de

$$P_r = 1 - e^{-2\,r/a}\left(\frac{2r^2}{a^2} + \frac{2r}{a} + 1\right)$$

Se obțin valori așteptate pentru (a) $r=0$ și (b) $r=\infty$? (c) Arătați clar diferența dintre semnificația fizică a acestei expresii și a celei date în paragraful 48-4.

11. Considerăm un atom de hidrogen în stare fundamentală. Care este probabilitatea ca electronul să se găsească într-o sferă de rază egală cu cea a primei orbite Bohr?

12. Imprecizia în poziția unui electron este de aproximativ 0,5 Å, care este chiar raza primei orbite Bohr în hidrogen. Care este imprecizia în impulsul electronului?

13. Arătați că dacă imprecizia în localizarea unei particule este egală cu lungimea sa de undă de Broglie, imprecizia în determinarea vitezei sale este egală cu viteza sa.

14. Puterea de rezoluție cea mai mare ce poate fi atinsă de un microscop este limitată doar de lungimea de undă folosită; adică, cel mai mic detaliu ce poate fi pus în evidență este aproximativ egal cu lungimea de undă folosită. Să presupunem că vrem să „vedem" în interiorul unui atom. Presupunînd că atomul are un diametru de 1,0 Å, aceasta înseamnă că dorim să punem în evidență un detaliu de aproximativ 0,1 Å. (a) Dacă se folosește un microscop electronic, care este energia minimă necesară pentru electroni? (b) Dacă se folosește un microscop optic, care este energia minimă necesară pentru fotoni? (c) Care microscop pare mai adecvat acestui scop din punct de vedere practic? Explicați.

15. Un microscop care folosește fotoni este întrebuințat pentru a localiza un electron dintr-un atom cu o precizie de 0,1 Å. Care este imprecizia în determinarea impulsului electronului localizat în acest fel?

Ecuaţiile lui Maxwell sub forma diferenţială şi ecuaţia undelor electromagnetice

V-1 Introducere

În capitolul 39 am încercat să facem plauzibilă existenţa undelor electromagnetice arătînd că astfel de unde satisfac ecuaţiile lui Maxwell după cum este arătat în tabela 38-3. Acum încercăm ca pornind de la ecuaţiile lui Maxwell să deducem o ecuaţie diferenţială a cărei soluţie să descrie undele electromagnetice. Vom arăta în mod direct că viteza c a acestor unde este dată de ecuaţia 39-15 sau că $c=1/\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$

Am urmat o cale similară în anexa III pentru cazul undelor mecanice în lungul unei corzi întinse. Pornind de la legile de mişcare ale lui Newton am dedus o ecuaţie diferenţială (ecuaţia III-1) a cărei soluţie (ecuaţia III-2) descrie astfel de unde. Am arătat în continuare că viteza v a acestor unde este dată de ecuaţia III-3 sau $v=\sqrt{F/\mu}$

În tabela 38-3 am scris ecuaţiile lui Maxwell sub forma

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=q \tag{V-1}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=0 \tag{V-2}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(i+\varepsilon_0 d\Phi_E/dt) \tag{V-3}$$

şi

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-d\Phi_B/dt \tag{V-4}$$

Spunem că aceste ecuaţii sînt sub formă integrală. Variabilele legate de cîmp $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, care de obicei sînt mărimile necunoscute, apar sub integrală. Numai în cîteva

cazuri ce posedă o simetrie ridicată (vezi paragraful 28-6 și 43-2, de exemplu), ele pot fi scoase de sub integrală. În problemele mai generale aceasta nu se poate face.
noaștem masa m și volumul v. În cazul general acestea sînt legate prin ecuația integrală
ecuația integrală

$$m=\int \rho \, dv$$

Numai dacă ρ este constant în tot volumul, îl putem scoate de sub integrală și scrie $\rho=m/v$.

Pentru a ne atinge scopul propus este preferabil să avem ecuațiile lui Maxwell sub forma unor egalități ce se aplică în fiecare *punct* din spațiu și nu sub formă integrală ce se aplică diferitelor *regiuni* din spațiu. Cu alte cuvinte, dorim să trecem ecuațiile lui Maxwell din formă integrală (ecuațiile V-1 pînă la V-4) în *formă diferențială*, pentru a putea lega pe $\vec{E}$ și $\vec{B}$ într-un punct, de densitatea de sarcină și de densitatea de curent din acel punct.

V-2 Operatorul ∇

Pentru a trece ecuațiile lui Maxwell în formă diferențială avem nevoie de cunoștințe mai aprofundate de analiză vectorială și în particular de operatorul vectorial ∇

În paragraful 29-7 am arătat cum se pot obține componentele cîmpului electrostatic $\vec{E}$ (sub formă vectorială) într-un punct oarecare plecînd de la funcția potențială (sub formă scalară) $V(x, y, z)$ prin derivare parțială. Astfel,

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \text{și} \quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

astfel că, putem scrie cîmpul electrostatic

$$\vec{E}=\vec{i}\,\vec{E}_x+\vec{j}\,\vec{E}_y+\vec{k}\,\vec{E}_z$$

sub forma

$$\vec{E}=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial V}{\partial x}+\vec{y}\,\frac{\partial V}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{V-5}$$

Ecuația V-5 poate fi scrisă într-o notație vectorială, compactă, sub forma

$$\vec{E}=-\nabla V$$

unde ∇ este un operator vectorial definit prin

$$\nabla=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{y}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{V-6}$$

Acest operator este folositor atunci cînd avem de-a face cu cîmpuri scalare și vectoriale (pentru exemple de astfel de cîmpuri vezi paragrafele 16-8 și 18-7).

---

* Operatorul ∇ se numește „nabla". În original, „del". (N.R.)

Fiind dat un cîmp scalar oarecare ψ putem forma un cîmp vectorial, numit gradientul lui ψ şi scris grad ψ sau $\nabla\psi$, pur şi simplu aplicînd operatorul ∇ lui ψ. Fiind dat un cîmp vectorial $\vec{U}=U_x\vec{i}+U_y\vec{j}+U_z\vec{k}$ îi putem aplica operatorul ∇ în două moduri diferite. Unul constă în a forma produsul scalar al lui ∇ şi $\vec{U}$, obţinînd un cîmp scalar numit divergenţa lui $\vec{U}$ şi scris div $\vec{U}$ *sau* $\nabla\cdot\vec{U}$. Celălalt mod constă în a forma produsul vectorial a lui ∇ şi $\vec{U}$, obţinînd un cîmp vectorial numit rotorul lui U şi scris rot $\vec{U}$ sau $\nabla\times\vec{U}$. Aceste operaţii pot fi deci:

$$\text{grad}\ \psi \equiv \nabla\psi = \vec{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \vec{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\text{div}\ \vec{U} \equiv \nabla\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}\ \vec{U} \equiv \nabla\times\vec{U} = \vec{i}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \vec{y}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)$$

Observaţi că grad ψ şi rot $\vec{U}$ sînt vectori pe cînd div $\vec{U}$ este scalar. Studentul se poate familiariza cu aceste operaţii făcînd următoarele exerciţii: (1) arătaţi că rot (grad ψ)=0 şi (2) arătaţi că div (rot $\vec{U}$)=0.

Un alt operator frecvent întîlnit este ∇^2 („nabla pătrat").* Este pur şi simplu $\nabla\cdot\nabla$, sau, după cum studentul poate arăta din ecuaţia V-6

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Cînd aplicăm ∇^2 unui cîmp scalar ψ, obţinem

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad \text{(V-10)}$$

Pentru un cîmp vectorial $\vec{U}$, operaţia $\nabla^2\vec{U}$ este definită ca

$$\nabla^2\vec{U} = \vec{i}\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \vec{y}\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \vec{k}\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \qquad \text{(V-11)}$$

Ca exerciţiu, studentul poate arăta că rot (rot $\vec{U}$)=— $\nabla^2\vec{U}$+grad (div $\vec{U}$).

V-3 Ecuaţiile lui Maxwell sub formă diferenţială — I (Ecuaţiile V1 şi V2)

În acest paragraf vom arăta cum pot fi trecute primele două ecuaţii ale lui Maxwell (ecuaţiile V-1, 2) sub formă diferenţială. Să aplicăm ecuaţia V-1 unul element de volum infinit mic de forma unui paralelipiped drept ce conţine punctul P în care (şi în vecinătatea lui) există un cîmp electric (vezi figura V-1 a). Punctul P are coordonatele x, y, z în sistemul de referinţă din figura V-1 b, iar laturile paralelipipedului au lungimile dx, dy şi dz.

* Numit „laplaceian" şi notat cu Δ (N.R.).

Putem scrie vectorul ariei feței posterioare a paralelipipedului sub forma $d\vec{S}=-\vec{i}\,dy\,dz$. Semnul minus apare deoarece $d\vec{S}$ este definit ca avînd sensul normalei spre *exterior* care este definită prin $-\vec{i}$. Pentru fața anterioară avem $d\vec{S}=+\vec{i}\,dy\,dz$.

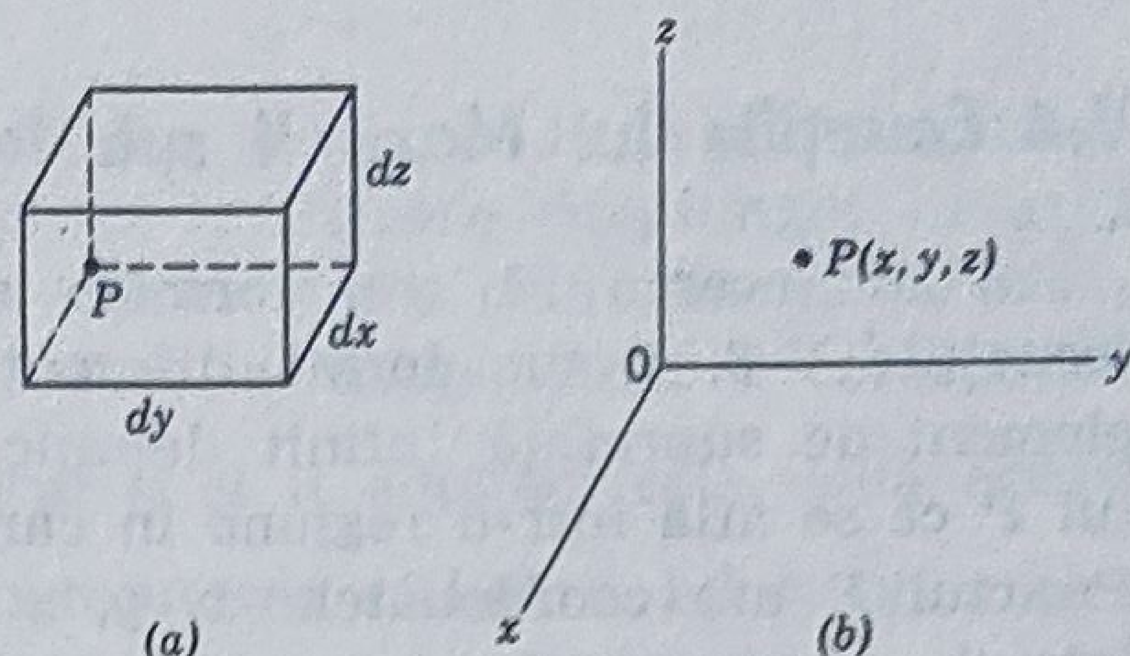


Figura V-1.

Dacă cîmpul electric la fața posterioară este $\vec{E}$, atunci la fața anterioară, care este la distanța dx de cea posterioară, este $\vec{E}+(\partial\vec{E}/\partial x)\,dx$; ultimul termen reprezintă variația lui $\vec{E}$ corespunzătoare variației dx.

Fluxul prin întreaga suprafață a paralelipipedului este $\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}$, iar contribuția la acest flux numai a acestor două suprafețe este

$$(\vec{E})\cdot(-\vec{i}\,dy\,dz)+\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\,dx\right)\cdot(+\vec{i}\,dy\,dz)=$$

$$=dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\vec{i}\right)=dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}\cdot\vec{i})=$$

$$=dx\,dy\,dz\,\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Considerînd contribuțiile similare și a celorlalte patru fețe, fluxul electric total devine

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

Folosind ecuația V-8, putem scrie această ecuația sub forma

$$\oint\vec{E}\cdot dS=dx\,dy\,dz\,\mathrm{div}\,\vec{E} \qquad \text{(V-12)}$$

Membrul drept al ecuației V-1, care dă sarcina închisă în suprafață, poate fi scris sub forma generală $q=\int\rho\,dv$ și în particular, pentru elementul de volum infinit de mic din jurul punctul P, este

$$q=\rho\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(V-13)}$$

unde ρ este sarcina în unitatea de volum în punctul P. Introducînd ecuațiile V-12 și V-13 în ecuația V-1 și simplificînd factorul comun $dx\,dy\,dz$, avem în final

$$\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}=\rho \qquad \text{(V-14)}$$

care este prima ecuație a lui Maxwell (ecuația V-1) sub formă diferențială.

Folosind aceeași tehnică, putem scrie a doua ecuație a lui Maxwell (ecuația V-2) sub formă diferențială

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0 \qquad \text{(V-15)}$$

V-4 Ecuațiile lui Maxwell sub formă diferențială — II (Ecuațiile V_3 și V_4)

Vom încerca să transformăm ecuațiile a treia și a patra a lui Maxwell (ecuațiile V-3, 4) sub formă diferențială. Începem prin a aplica ecuația V-3 unui element de suprafață infinit de mic, de formă dreptunghiulară ce conține punctul P ce se află într-o regiune în care există un cîmp magnetic (vezi figura V-2 a). Punctul P are coordonatele x, y, z în sistemul de referință din figura V-2 b iar laturile dreptunghiului care este paralel cu planul x-y, au lungimea dx și dy. Mergînd de-a lungul conturului, după cum indică săgețile, avem

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{B} \cdot (-\vec{j} \cdot \mathrm{d}y) + \quad \text{(latura posterioară)}$$

$$+\vec{B} \cdot (+\vec{i}\,\mathrm{d}x) + \quad \text{(latura din stînga)}$$

$$+\left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\mathrm{d}x\right) \cdot (+\vec{j} \cdot \mathrm{d}y) + \quad \text{(latura anterioară)}$$

$$+\left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \cdot (-\vec{i} \cdot \mathrm{d}x) \quad \text{(latura din dreapta)}$$

unde $\vec{B}$ este inducția magnetică în punctul P.

Grupînd termenii obținem

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cdot \vec{j} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cdot \vec{i}\right) =$$

$$= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{B} \cdot \vec{j}) - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{B} \cdot \vec{i})\right] =$$

$$= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \tag{V-16}$$

În membrul drept al ecuației V-3 i este curentul din interiorul conturului, iar $\mathrm{d}\Phi_E/\mathrm{d}t$ este variația fluxului electric prin suprafața închisă. Deoarece $\vec{J}$ reprezintă densitatea de curent, iar $\mathrm{d}\vec{S}$ $(=\vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$ vectorul ariei suprafeței, putem scrie

$$i = \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{J} \cdot (\vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,J_z \tag{V-17}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot (\vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E_z}{\partial t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{V-18}$$

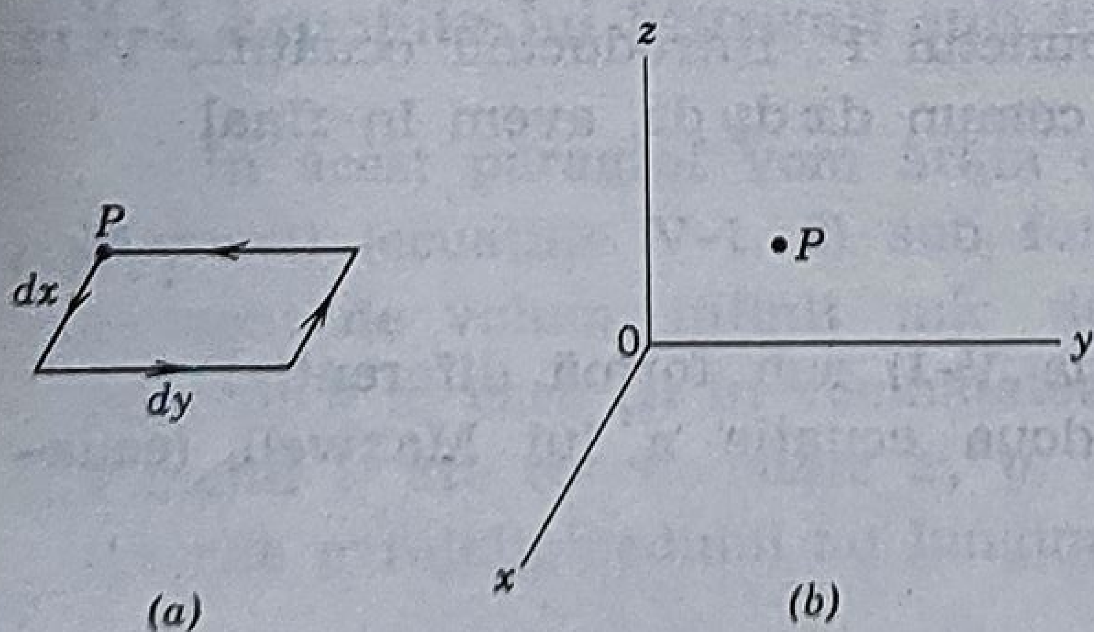


Figura V-2.

Introducînd ecuațiile V-16, V-17 și V-18 în ecuația V-3, obținem, după simplificări,

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = J_z + \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{V-19}$$

Am fi putut proceda exact ca mai sus dacă am fi pornit de la un dreptunghi paralel cu planul $y—z$ sau paralel cu planul $z—x$. Fiecare dreptunghi ne-ar fi dat o altă componentă a unei suprafețe infinit mici ce trece prin punctul P, orientată arbitrar. Este clar că ecuația V-19 este ecuația componentei z corespunzătoare ecuației V-3. Dacă o înmulțim cu vectorul $\vec{k}$ și îi adunăm cele două ecuații vectoriale similare, ce pot fi obținute prin permutarea ciclică a lui x, y, z și $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, ce corespund ecuațiilor componentei x și componentei y, obținem

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t) \quad \text{(V-20)}$$

care este a treia ecuație a lui Maxwell sub formă diferențială.

Similar, pornind de la ecuația V-4, putem arăta că

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \quad \text{(V-21)}$$

care este a patra ecuație a lui Maxwell sub formă diferențială.

Am dedus patru ecuații diferențiale (vezi mai jos V-22 pînă la V-25) din patru ecuații integrale (V-1 pînă la V-4). Se poate arăta că ecuațiile integrale pot fi deduse din ecuațiile diferențiale, adică că cele două seturi de ecuații sînt *echivalente*.

V-5 Ecuația undelor

Am obținut cele patru ecuații fundamentale din electromagnetism, ecuațiile lui Maxwell, sub formă diferențială pornind de la forma lor integrală. Corespunzător ecuațiilor sub formă integrală, ecuațiile V-1, V-2, V-3 și V-4, respectiv avem:

$$\varepsilon_0 \text{ div } \vec{E} = \rho \quad \text{(V-22)}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{(V-23)}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t) \quad \text{(V-24)}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \quad \text{(V-25)}$$

care sînt patru ecuații diferențiale cu derivate parțiale, cuplate. Ele se aplică într-un punct oarecare din spațiu ce se află într-un cîmp electromagnetic.

Vom deduce acum ecuația undelor pentru undele electromagnetice în spațiul liber. În spațiul liber, densitatea de sarcina ρ și densitatea de curent $\vec{J}$ sînt zero, astfel ca ecuațiile lui Maxwell devin

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$$

și

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$$

Să aplicăm rotorul ecuației rot $\vec{E}$; obținem

$$\text{rot rot}\vec{E} = -\text{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot }\vec{B}$$

Dar rot $\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)$ astfel că

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{(V-26)}$$

Din exercițiul V-2 știm că rot rot $\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} + \text{grad div }\vec{E}$, iar de mai sus știm că div $\vec{E} = 0$. Astfel,

$$\text{rot rot } E = -\nabla^2 E \qquad \text{(V-27)}$$

Combinînd ecuațiile V-26 și V-27 obținem în final

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{(V-28 a)}$$

Studentul, procedînd ca mai sus, poate arăta că $\vec{B}$ satisface aceeași ecuație

$$\nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad \text{(V-28 b)}$$

Ecuațiile V-28 sînt ecuațiile de mișcare pentru undele electromagnetice. Fiind ecuații vectoriale, ele sînt echivalente cu șase ecuații scalare, cîte una pentru fiecare din componentele lui $\vec{E}$ și lui $\vec{B}$.

Există multe soluții ale ecuațiilor V-28, corespunzătoare diferitelor tipuri de unde electromagnetică — plane, sferice și cilindrice ca să dăm doar trei exemple. Să considerăm o soluție pentru care două din componentele lui $\vec{E}$ și două ale lui $\vec{B}$ sînt egale cu zero, adică în care

$$E_x = E_z = 0 \quad \text{și} \quad B_x = B_y = 0$$

Ecuațiile V-28 sînt satisfăcute în aceste condiții. Pentru componentele E_y și B_z diferite de zero, ecuațiile V-28 se reduc la (vezi ecuația V-11)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \text{(V-29 a)}$$

și

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad \text{(V-29 b)}$$

Dacă facem presupunerea suplimentară că E_y și B_z sînt funcție numai de x și t, ecuația undelor simplificată pe care o obținem

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad \text{(V-29 c)}$$

este similară ecuației III-1 pentru coarda vibrantă.

O soluție a acestor ecuații, după cum studentul poate verifica prin înlocuire, este

$$E_y = E_m \sin(kx - \omega t) \tag{V-30 a}$$

și

$$B_z = B_m \sin(kx - \omega t) \tag{V-30 b}$$

Interpretăm ecuațiile V-30 ca o undă electromagnetică ce se propagă în sensul lui x pozitiv, ca în figura 39-11, cu o viteză $c = \omega/k$. Studentul poate arăta că introducînd ecuația V-30 a în ecuația V-29 a (sau ecuația V-30 b în ecuația V-29 b) se obține

$$c = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

care (vezi ecuația 39-15) dă viteza undelor electromagnetice în spațiul liber.

Probleme suplimentare

Capitolul 26

1. Două sarcini punctiforme libere $+q$ și $+4\,q$ se găsesc la distanța l una de cealaltă. O a treia sarcină este astfel plasată încît întregul sistem se află în echilibru. Găsiți poziția, mărimea și semnul celei de-a treia sarcini.

2. Dacă cele două mingi din figura 26-7 ar fi conductoare, ce s-ar întîmpla dacă una din ele nu ar fi încărcată? Găsiți noua distanță de echilibru dintre ele.

3. Două sfere conductoare identice, cu sarcini de semne opuse se atrag reciproc cu o forță de 0,108 N cînd se găsesc la distanța de 0,5 m una de cealaltă. Sferele se unesc printr-un fir conductor care este apoi îndepărtat. După aceasta ele se resping cu o forță de 0,036 N. Care este sarcina inițiale de pe sfere?

4. O particulă de sarină $-q$ și masă m se mișcă pe o orbită circulară în jurul unei sarcini fixe $+Q$. (a) Arătați că este satisfăcută legea

$$r^3 = \frac{Qq}{16\pi^3\varepsilon_0 m} T^2$$

Observați că, constanta de proporționalitate depinde de proprietățile (q/m) ale particulei ce se mișcă pe orbită. (b) Care este situația gravitațională corespunzătoare?

5. Un electron este proiectat cu o viteză inițială de $3{,}24 \cdot 10^5$ m/s direct spre un proton care se găsește în repaus. Dacă electronul se afla inițial la distanță foarte mare de proton, la ce distanță de proton viteza instantanee a electronului este de două ori mai mare decît valoarea sa inițială? (Indicație: folosiți legea de conservare a energiei).

6. Un „dipol" este format dintr-o bară de lungime $2a$ și din două sarcini $+q$ și $-q$. Doi astfel de dipoli sînt orientați după cum este arătat în figura 26-9, cen-

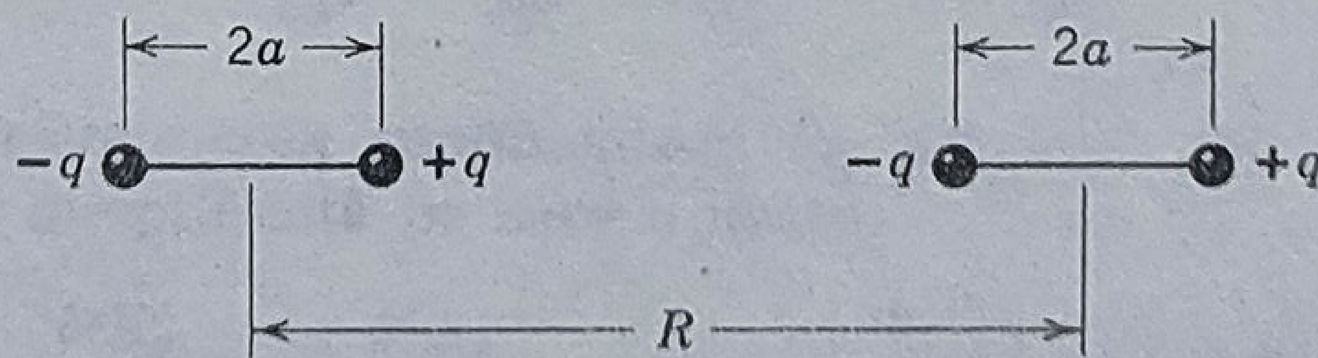


Figura 26-9.

trele lor găsindu-se la distanța R. (a) Calculați forța exercitată asupra dipolului din stînga. (b) Arătați că, pentru $R \gg a$, mărimea forței exercitate asupra dipolului din stînga este dată aproximativ de

$$F = \frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 R^4}$$

unde $p=2\,qa$ este „momentul dipolului".

Capitolul 27

1. În spațiul dintre două plăci paralele mari se stabilește un cîmp vertical uniform $\vec{E}$. În acest cîmp se suspendă de un fir de lungime l o sferă conductoare mică de masă m. Găsiți perioada acestui pendul presupunînd că sfera are sarcina $+q$ iar placa inferioară este încărcată (a) pozitiv și (b) negativ.

2. O sarcină $q=3{,}0\cdot10^{-6}$ C se află la 30 cm de un mic dipol, în lungul mediatoarei sale. Forța ce acționează asupra sarcinii este $5{,}0\cdot10^{-6}$ N. Arătați grafic (a) direcția și sensul forței ce acționează asupra sarcinii, (b) direcția și sensul forței asupra dipolului și (c) determinați mărimea forței ce acționează asupra dipolului.

3. O bară subțire de sticlă este curbată în formă de semicerc de rază R. Pe suprafața exterioară este distribuită uniform o sarcină $+Q$ iar pe suprafața interioară este distribuită uniform o sarcină $-Q$, după cum este indicat în figura 27-25. Găsiți cîmpul electric $\vec{E}$ în punctul P, centrul semicercului.

4. Pe o bară izolatoare „semi-infinită" (vezi figura 27-26) se află distribuită uniform o sarcină pe unitatea de lungime de mărime λ. Arătați că în punctul P cîmpul electric face un unghi de 45° cu bara. Acest rezultat este independent de distanța R.

5. Găsiți frecvența de oscilație a unui dipol electric de impuls $\vec{p}$ și de moment de inerție I, pentru amplitudini mici de oscilație în jurul poziției sale de echilibru, într-un cîmp electric uniform de intensitate E.

6. Un dipol electric de moment $\vec{p}$ este plasat paralel cu una din liniile cîmpului electric, în lungul axei y, într-un cîmp electric neuniform (vezi figura 27-27). Mărimea cîmpului $\vec{E}$ variază uniform în lungul direcției y după cum este arătat în figură. (a) Arătați că mărimea forței ce acționează asupra dipolului este $p\,dE/dy$. (b) Care sînt direcția și sensul forței?

7. Un „cuadrupol electric" este format din patru sarcini situate în vîrfurile unui pătrat de latură $2a$. Arătați că în punctul P situat la distanța R de

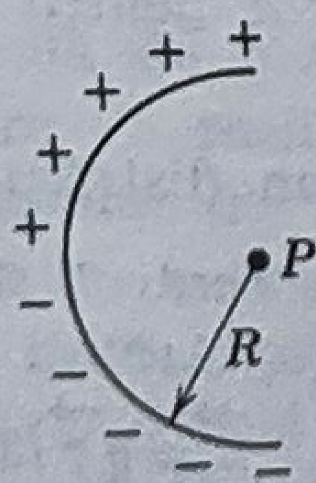


Figura 27-25.

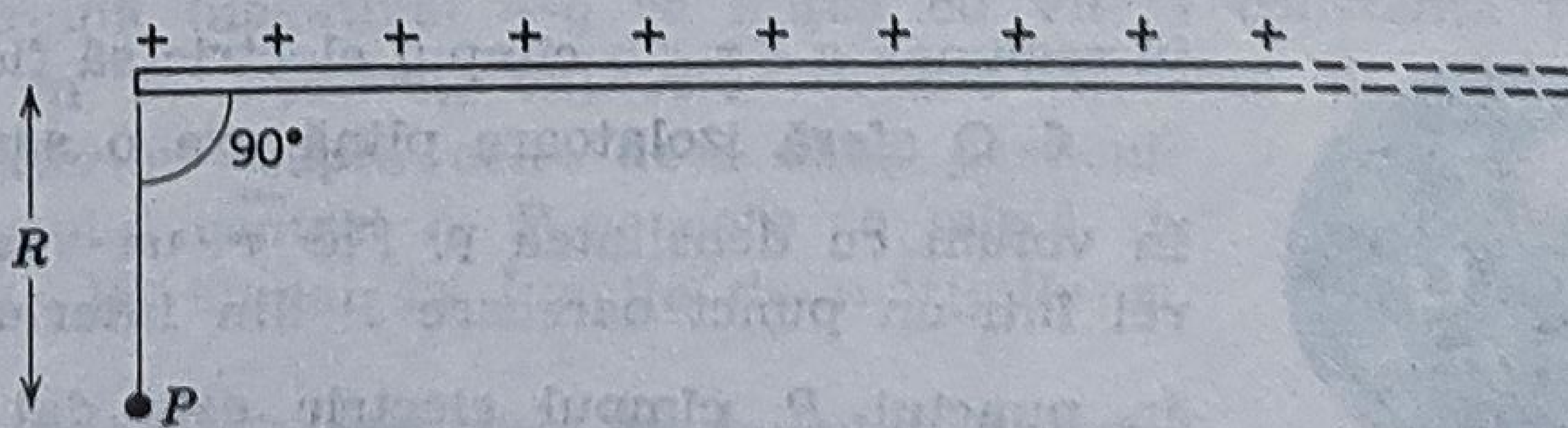


Figura 27-26.

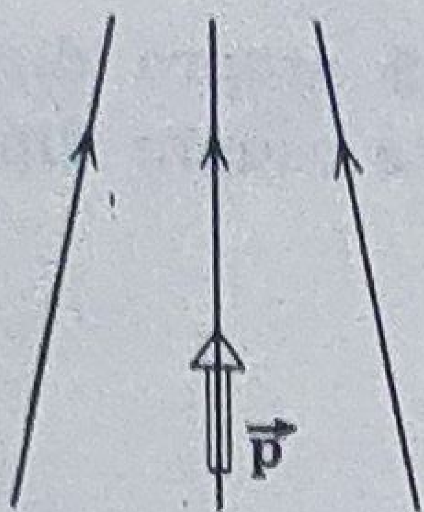


Figura 27-27.

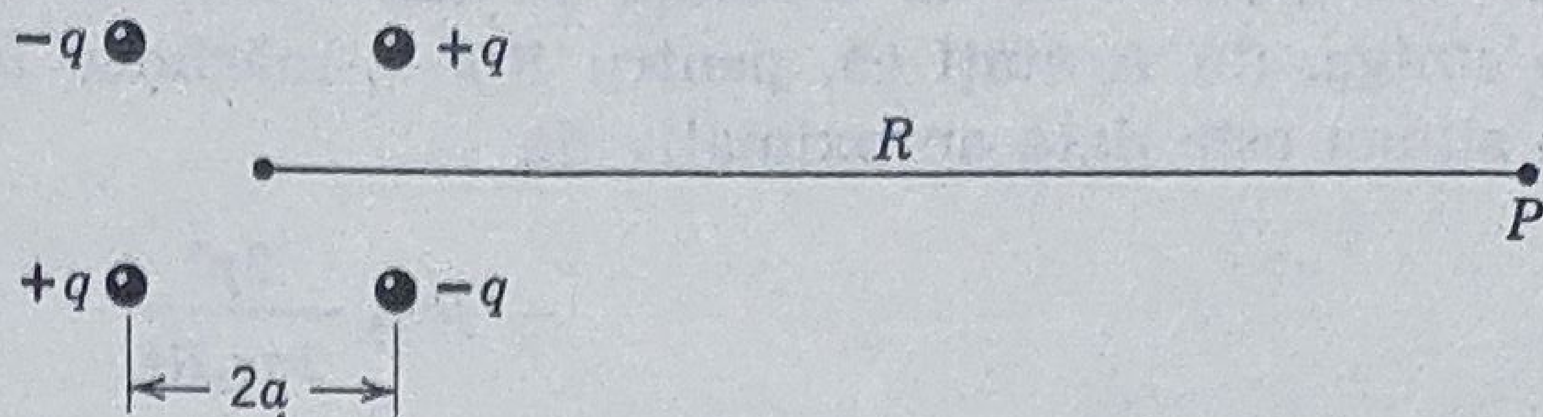


Figura 27-28.

centrul cuadrupolului pe o linie paralelă cu două din laturile cuadrupolului (vezi figura 27-28), cîmpul electric este aproximativ egal cu

$$E=\frac{3(2qa^2)}{4\pi\varepsilon_0 R^4}$$

pentru $R \gg a$. (Indicație: Considerați cuadrupolul ca format din doi dipoli).

Capitolul 28

1. S-a constatat experimental că pentru o regiune întinsă din atmosfera Pămîntului cîmpul electric are sensul vertical în jos. La altitudinea de 300 m cîmpul este de 60 N/C iar la altitudinea de 200 m este de 100 N/C. Calculați cantitatea totală de sarcină conținută într-un cub cu latura de 100 m situat între altitudinile de 200 m și 300 m. Neglijați curbura Pămîntului.

2. Presupunem că într-o anumită regiune cîmpul electric este constant în direcție și sens dar scade în intensitate în lungul acestei direcții! Ce concluzie puteți trage asupra sarcinii existente în această regiune?

3. Două sfere conductoare concentrice au razele $R_1=0{,}145$ m și $R_2=0{,}207$ m. Pe sfera interioară se găsește o sarcină de $-6{,}00\cdot10^{-2}$ C. Un electron părăsește sfera interioară cu o viteză neglijabilă. Calculați viteza cu care electronul se ciocnește de sfera exterioară considerînd că în spațiul dintre sfere este vid.

4. (a) Două sfere identice neconductoare de rază r se găsesc la distanța R una de alta, unde $R>2r$ (R fiind măsurat între centrele lor). Dacă fiecare sferă are o sarcină totală q *uniform distribuită* pe suprafața sa, care este mărimea forței electrice pe care fiecare sferă o exercită asupra celeilalte? (b) Presupuneți că sferele sînt conductoare iar sarcina totală de pe fiecare este tot q. În aceste condiții forța electrică pe care fiecare din sfere o exercită asupra celeilalte va fi mai mare, mai mică sau egală cu cea din cazul (a)? Explicați.

5. În regiunea sferică $a<r<b$ se găsește o sarcină pe unitatea de volum egală cu $\rho=A/r$ unde A este o constantă. În centrul ($r=0$) cavității închise de această regiune se află o sarcină punctiformă Q. Ce valoarea trebuie să aibă A pentru ca în regiunea $a<r<b$ cîmpul electric să fie constant?

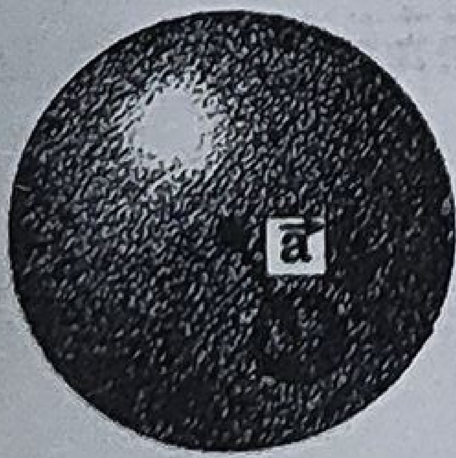


Figura 28-25.

6. O sferă izolatoare plină are o sarcină uniform distribuită în volum cu densitatea ρ. Fie $\vec{r}$ un vector dus din centrul sferei într-un punct oarecare P din interiorul sferei. (a) Arătați că în punctul P cîmpul electric este dat de relația $\vec{E}=\rho\vec{r}/3\varepsilon_0$. (b) Din sferă se îndepărtează o „cavitate" sferică, după cum este indicat în figura 28.25. Arătați, folosind principiul suprapunerii,

că în toate punctele din interiorul cavității cîmpul electric este $\vec{E} = \rho \vec{a}/3\varepsilon_0$ (cîmp uniform), unde $\vec{a}$ este vectorul ce unește centrul sferei cu centrul cavității. Observați că ambele rezultate sînt independente de raza sferei și a cavității.

Capitolul 29

1. Care este densitatea de sarcină de pe suprafața unei sfere conductoare de rază 0,15 m ce se află la un potențial de 200 V?

2. Două sfere conductoare identice de rază $r=0{,}15$ m se găsesc la distanța $a=10{,}0$ m una de cealaltă. Care este sarcina de pe fiecare sferă dacă potențialul uneia este de +1 500 V iar al celeilalte de —1 500 V?

3. Două sfere conductoare identice una de rază 6,0 cm iar cealaltă de rază 12,0 cm, ce posedă fiecare o sarcină de $3\cdot10^{-8}$ C se găsesc la o distanță foarte mare una de cealaltă. Dacă sferele se unesc printr-un fir conductor, găsiți (a) sensul de deplasare și mărimea sarcinii transferate și (b) sarcina finală și potențialul fiecărei sfere.

4. Lungimile laturilor dreptunghiului din figura 29-29 sînt 5,0 cm și 15,0 cm iar $q_1=-5{,}0\cdot10^{-6}$ C și $q_2=+2{,}0\cdot10^{-6}$ C. (a) Care este potențialul electric în colțul B al dreptunghiului? Dar în colțul A? (b) Care este lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o a treia sarcină $q_3=+3{,}0\cdot10^{-6}$ C din B în A de-a lungul diagonalei dreptunghiului? (c) În acest proces lucrul mecanic exterior se transformă în energie potențială electrostatică sau invers? Explicați.

5. Arătați că energia potențială a unui ansamblu de patru sarcini fiecare de mărime q, dispuse în vîrfurile unei piramide triunghiulare de latură a_0, este $6\cdot(q^2/a_0)/4\pi\varepsilon_0$.

6. Trei sarcini de +0,1 C fiecare sînt situate în vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura de 1,0 m. Dacă se furnizează în mod continuu o putere de 1kW, cîte zile vor fi necesare pentru a deplasa una din sarcini într-un punct situat la mijlocul distanței dintre celelalte două?

7. Arătați, pe baza faptului că un cîmp electrostatic este un cîmp conservativ, că nu se poate crea un cîmp electric în care toate liniile de forță să fie linii drepte paralele, a căror densitate (numărul de linii pe unitatea de suprafață transversală) variază perpendicular pe liniile de forță.

8. Două distribuții liniare de sarcină sînt paralele cu axa z; una din ele, ce are sarcina $+\lambda$ pe unitatea de lungime, se află la distanța a la dreapta axei iar cealaltă ce are sarcina $-\lambda$ pe unitatea de lungime se află la distanța a la stînga axei (distribuțiile liniare și axa z fiind în același plan). Reprezentați cîteva din suprafețele echipotențiale ale acestui sistem.

9. O particulă de sarcină (pozitivă) Q este fixă în punctul P. O a doua particulă de masă m și sarcină (negativă) $-q$ se mișcă cu viteză constantă pe un cerc de rază r_1 centrat în P. Deduceți expresia lucrului mecanic W ce trebuie executat de un agent exterior asupra celei de-a doua particule pentru a crește raza cercului centrat în P pe care se mișcă, de la r_1 la r_2. Exprimați pe W numai în funcție de mărimile m, r_1, r_2, q, Q și ε_0.

10. O particulă de sarcină Q este fixă în punctul P iar o a doua particulă de masă m și aceeași sarcină Q este inițial ți-

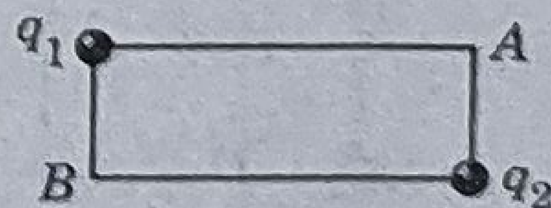


Figura 29-29.

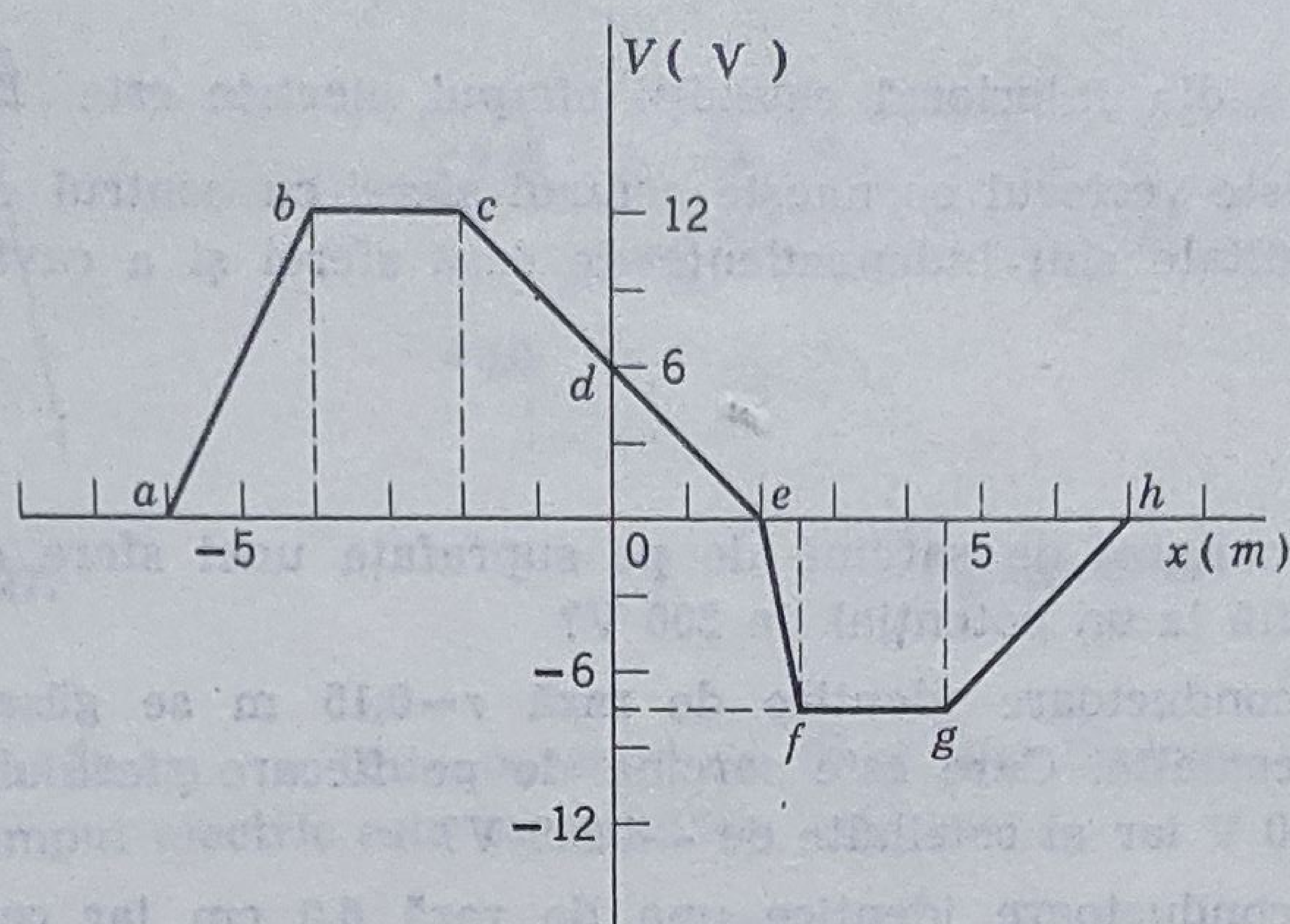


Figura 29-30.

nută în repaus la distanţa r_1 de punctul P. Apoi a doua particulă este eliberată şi este respinsă de prima sarcină. Determinaţi viteza sa în momentul în care se află la distanţa r_2 de punctul P. Fie

$Q=3{,}1\cdot10^{-6}$ C, $m=2{,}0\cdot10^{-5}$ kg, $r_1=9{,}0\cdot10^{-4}$ m şi $r_2=25\cdot10^{-4}$ m.

11. O particulă de masă m, sarcină $q>0$ şi energie cinetică iniţială E_c este proiectată (de la „infinit") spre un nucleu greu de sarcină Q presupus fix în sistemul nostru de referinţă. (a) Dacă ciocnirea este frontală, care va fi distanţa minimă de apropiere a celor două particule? (b) Într-o ciocnire necentrală, distanţa minimă de apropiere de nucleu este *dublul* distanţei determinate în (a). Determinaţi *viteza* particulei la această distanţă minimă de apropiere.

12. Potenţialul electric variază în lungul axei x conform graficului din figura 29-30. Determinaţi componenta x a cîmpului electric şi reprezentaţi E_x funcţie de x, pentru fiecare din intervalele indicate (neglijaţi comportarea în punctele finale ale intervalelor).

13. Sarcina pe unitatea de lungime λ este distribuită uniform în lungul unui segment de linie dreaptă de lungime L. (a) Determinaţi potenţialul electrostatice (considerat egal cu zero la infinit) în punctul P la distanţa y de una din extremităţile segmentului încărcat şi colinear cu el (vezi figura 29-31). (b) Folosind rezultatul din (a) calculaţi componenta y (în lungul liniei) a intensităţii cîmpului electric în

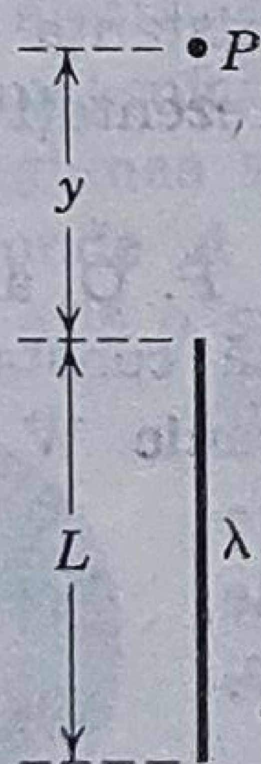


Figura 29-31.

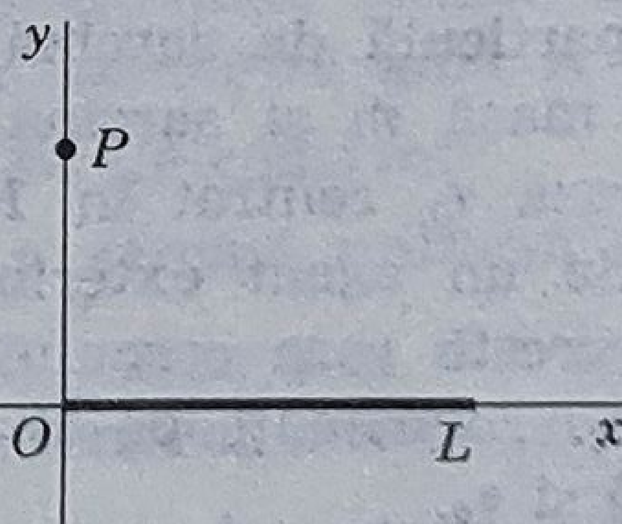


Figura 29-32.

punctul P. (c) Determinați componenta perpendiculară pe linia dreaptă a intensității cîmpului electric în punctul P.

14. O bară subțire de lungime L situată în lungul axei x cu una din extremitățile în origine ($x=0$) (vezi figura 29-32), este încărcată cu o sarcină pe unitatea de lungime, dată de $\lambda=kx$ unde k este o constantă. (a) Determinați pe V în punctul P de pe axa y considerînd potențialul electrostatic la infinit egal cu zero. (b) Determinați componenta verticală E_y a intensității cîmpului electric în punctul P atît din rezultatul obținut la punctul (a) cît și prin calcul direct. (c) De ce nu poate fi găsită E_x, componenta orizontală a cîmpului electric în punctul P, folosind rezultatul de la punctul (a)?

Capitolul 30

1. Arătați că, două sfere metalice de aceeași rază, încărcate cu sarcini de semn opus, au capacitatea egală cu jumătate din capacitatea unei sfere izolate.

2. Două sfere metalice, de raze a și b sînt legate printr-un fir subțire. Distanța dintre ele este mare în comparație cu dimensiunile lor. În acest sistem este adusă sarcina Q. (a) Ce sarcină există pe fiecare din sfere? (b) Aplicați definiția capacității pentru a arăta că acest sistem are capacitatea $C=4\pi\varepsilon_0(a+b)$.

3. N picături de lichid identice, sferice sînt încărcate cu același potențial V. Combinîndu-le se obține o picătură mare. Arătați că potențialul picăturii mari este $N^{2/3}V$.

4. Pe condensatorii legați în serie de capacitate C_1, C_2, C_3 sînt plasate sarcinile q_1, q_2, q_3 respectiv, ca în figura 30-28. Apoi întrerupătorul I este închis. Care sînt sarcinile finale q_1', q_2', q_3' de pe condensatori?

5. Cînd comutatorul C din figura 30-29 este rotit spre stînga, plăcile condensatorului de capacitate C_1 ating o diferență de potențial V_0. Inițial C_2 și C_3 sînt neîncărcați. Apoi întrerupătorul este rotit spre dreapta. Care sînt sarcinile finale q_1, q_2, q_3 de pe condensatorii corespunzători?

6. Un contor Geiger este format din doi cilindri metalici, lungi, concentrici, între care se găsește un gaz cu constanta dielectrică k. Folosiți teorema lui Gauss pentru a calcula capacitatea acestei configurații, neglijind efectele de la capete. Cilindrul central are raza a, cel exterior are raza b iar lungimea $l \gg b$.

7. Suprafața plăcilor unui condensator plan paralel este de 0,12 m² iar distanța dintre ele este de 1,2 cm. O baterie încarcă plăcile la o diferență de potențial de 120 V iar apoi este deconectată. Apoi între plăci este plasată simetric o placă dielectrică de grosime 0,4 cm și de constantă dielectrică 4,8. În funcție de ε_0 (a) calculați capacitatea înaintea introducerii plăcii dielectrice. (b) care este capacitatea în prezența plăcii dielectrice? (c) care este sarcina liberă q înainte și după

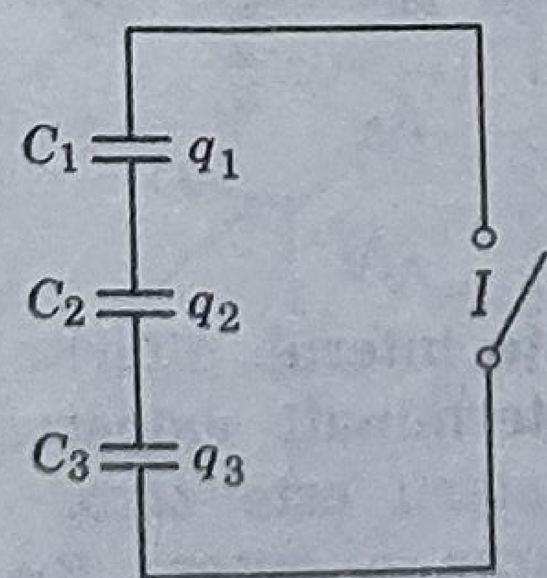


Figura 30-28.

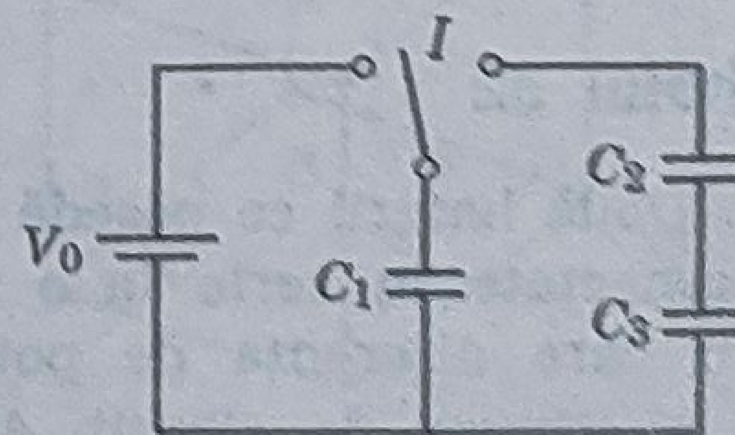


Figura 30-29.

introducerea plăcii? (d) determinaţi intensitatea cîmpului electric în spaţiul dintre plăci şi dielectric, (e) care este intensitatea cîmpului electric în dielectric? (f) care este diferenţa de potenţial dintre plăci în prezenţa plăcii dielectrice? (g) care este lucrul mecanic exterior necesar pentru introducerea plăcii dielectrice?

Capitolul 31

1. Un flux constant de particule alfa ($q=2e$) ce se deplasează cu o energie cinetică constantă de 20 MeV reprezintă un curent de $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ A. (a) Dacă fasciculul este perpendicular pe o suprafaţă plană, cîte particule alfa lovesc suprafaţa în 3,0 s? (b) Cîte particule alfa există într-o porţiune de fascicul de 20 cm, lungime, în orice moment? (c) Care este diferenţa de potenţial necesară pentru a accelera particulele alfa aflate iniţial în repaus pînă la energia de 20 MeV?

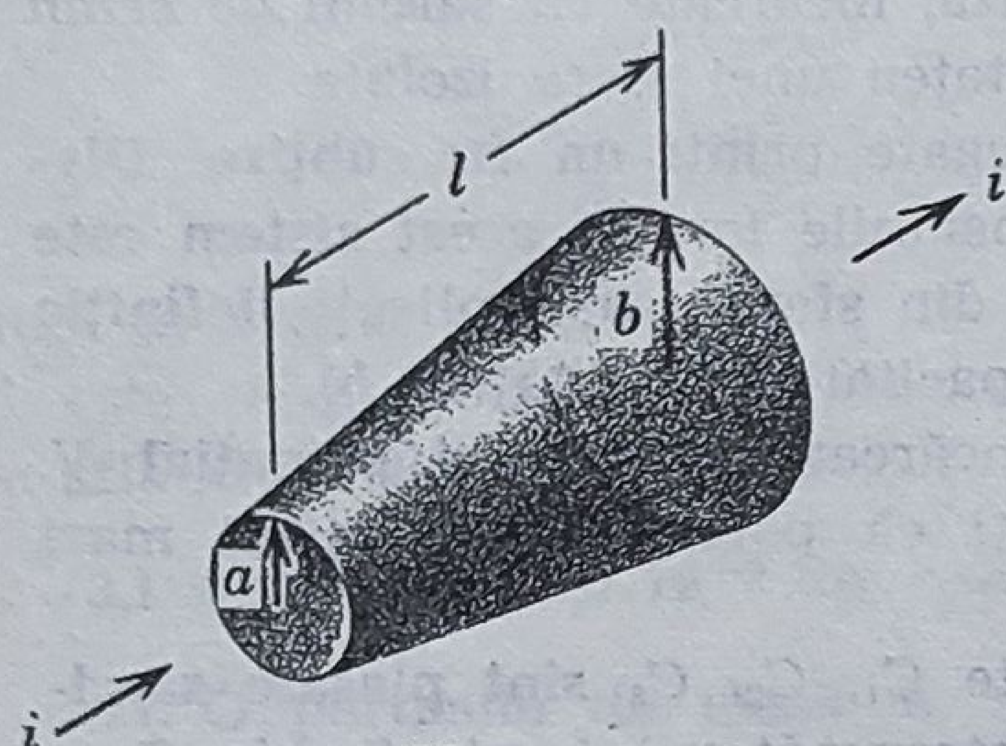


Figura 31-10.

2. Enumeraţi asemănările şi deosebirile dintre deplasarea unor sarcini şi curgerea unui fluid; dintre deplasarea unor sarcini şi propagarea căldurii.

3. Explicaţi de ce impulsul pe care electronii de conducţie îl cedează ionilor dintr-un conductor metalic nu dă naştere unei forţe rezultante asupra conductorului.

4. Un rezistor are forma unui trunchi de con drept (figura 31.10). Razele bazelor sînt a şi b iar înălţimea l. Dacă razele celor două baze nu diferă mult, putem presupune că densitatea de curent este uniformă pe toată suprafaţa unei secţiuni transversale. (a) Calculaţi rezistenţa acestui rezistor. (b) Arătaţi că răspunsul dumneavoastră se reduce la $\rho\ (l/A)$ pentru cazul special cînd $a=b$.

5. Doi conductori A şi B cu lungimea de 40 m şi cu secţiunea de 0,10 m² egală, sînt legaţi în serie, iar la capete se aplică un potenţial de 60 V. Rezistenţele firelor sînt 40 şi 20 Ω respectiv. Determinaţi: (a) rezistivităţile celor două fire; (b) mărimea cîmpului electric în fiecare fir; (c) densitatea de curent prin fiecare fir; (d) diferenţa de potenţial aplicată fiecărui conductor.

6. Un radiator de 1 250 W este construit pentru 115 V. (a) Care este curentul prin radiator? (b) Care este rezistenţa radiatorului? (c) Cîte kilocalorii se produc într-o oră?

7. Un fir de fier (cu diametrul de 1 mm şi lungimea de 10 cm) este plasat într-o incintă vidată. Estimaţi temperatura de echilibru a firului dacă prin el trece un curent de 10 A. Presupuneţi că întregul transfer de căldură se face prin radiaţie iar că suprafaţa firului radiază conform ecuaţiei 47-2. Consideraţi că temperatura pereţilor incintei este de 27°C. Enumeraţi ipotezele suplimentare pe care le-aţi folosit.

Capitolul 32

1. Două baterii ce posedă aceeaşi t.e.m. $\mathcal{E}$ dar rezistenţe interne diferite r_1 şi r_2 sînt conectate în serie la o rezistenţă exterioară R. Determinaţi valoarea lui R pentru care diferenţa de potenţial la capetele primei baterii este zero.

2. Secţiunea de circuit AB (vezi figura 32-26) absoarbe o putere $P=50{,}0$ W iar prin ea trece un curent $i=1{,}0$ A în sensul indicat în figură. (a) Care este dife-

rența de potențial dintre A și B? (b) Care este t.e.m. a elementului C considerînd că nu are rezistență internă? (c) Care este polaritatea sa?

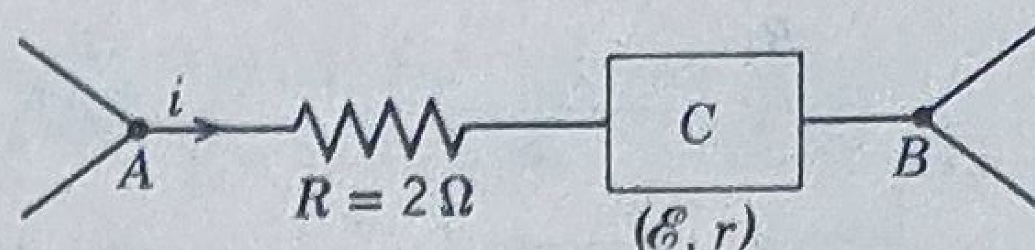


Figura 32-26.

3. Două becuri, unul de rezistență R iar celălalt de rezistență r ($<R$) sînt legate (a) în paralel și (b) în serie. Care bec este mai strălucitor?

4. N baterii identice de t.e.m. $\mathcal{E}$ și rezistență internă r sînt conectate toate în serie sau toate în paralel. Arătați că în ambele cazuri curentul prin rezistența exterioară R este același dacă $R=r$.

5. Doisprezece rezistori, cu o rezistența de R ohmi fiecare, formează un cub (vezi figura 32-27). (a) Determinați R_{AB}, rezistența unei laturi. (b) Determinați R_{BC}, rezistența echivalentă a unei fețe. (c) Determinați R_{AC}, rezistența echivalentă a diagonalei cubului.

6. Se dă o cutie cu N borne. Cum trebuiesc conectați rezistorii din interior (indiferent de numărul lor) pentru ca rezistența între două borne oarecare să fie de 2 Ω (vezi figura 32-28)?

7. Pentru determinarea a două rezistențe necunoscute R_1 și R_2 cu ajutorul unui voltmetru și a unui ampermetru se folosesc cele două metode indicate în figura 32-29. Rezistența voltmetrului este de 307 Ω iar rezistența ampermetrului este de 3,62 Ω; cu metoda (a) ampermetrul indică 0,317 A iar voltmetrul 38,1 V, pe cînd cu metoda (b) ampermetrul indică 0,356 A iar voltmetrul 23,7 V. Calculați R_1 și R_2.

8. Un circuit RC este descărcat închizînd întrerupătorul la momentul $t=0$. Diferența de potențial inițială la bornele condensatorului este de 100 V. Dacă după 10 s diferența de potențial a scăzut la 1,0 V (a) care va fi diferența de potențial după 20 s de la $t=0$? (b) Care este constanta de timp a circuitului?

9. Un condensator cu capacitatea $C=1{,}0\,\mu$ F și energia inițială înmagazinată $U_0=0{,}5$ J este descărcat printr-o rezistență $R=1{,}0\cdot10^6\ \Omega$. (a) Care este sarcina inițială de pe condensator? (b) Care este curentul prin rezistor la începutul descărcării? (c) Determinați V_c, tensiunea la bornele condensatorului și V_R, tensiunea la bornele rezistorului, în funcție de timp. (d) Exprimați căldura joule ce apare în rezistor în unitatea de timp, în funcție de timp.

10. În circuitul din figura 32-30, $\mathcal{E}=1\,200$ V, $C=6{,}50\,\mu$ F, $R_1=R_2=R_3=7{,}30\cdot10^5\ \Omega$. C nefiind încărcat, întrerupătorul I este închis brusc ($t=0$). (a) Determinați curenții prin fiecare rezistor pentru $t=0$ și $t=\infty$. (b) Reprezentați calitativ variația căderii de potențial V_2 la capetele lui R_2 de la $t=0$ la $t=\infty$

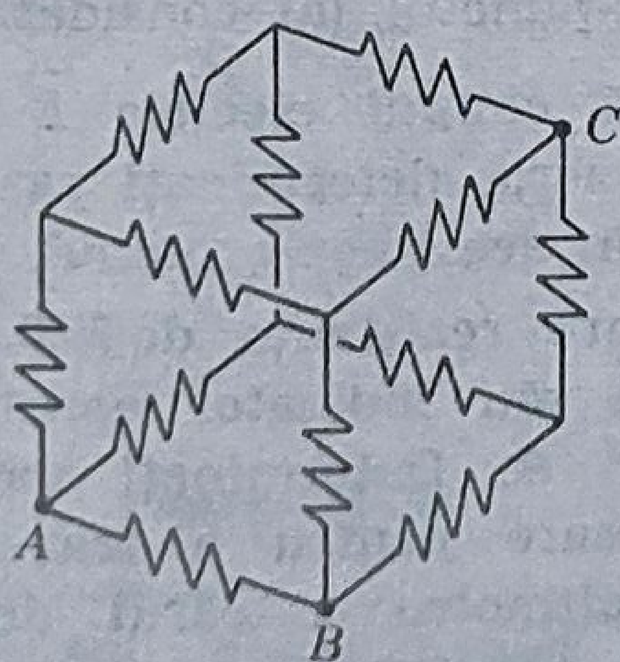
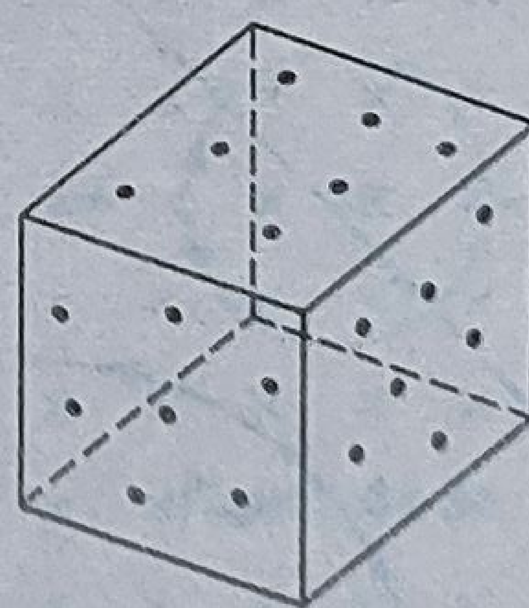
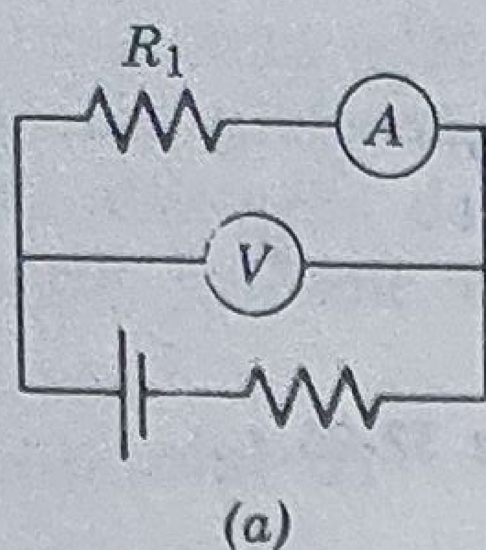


Figura 32-27.


Figura 32-28.



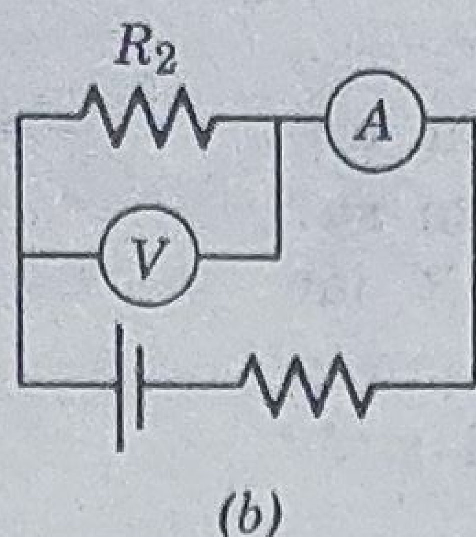


Figura 32-29.

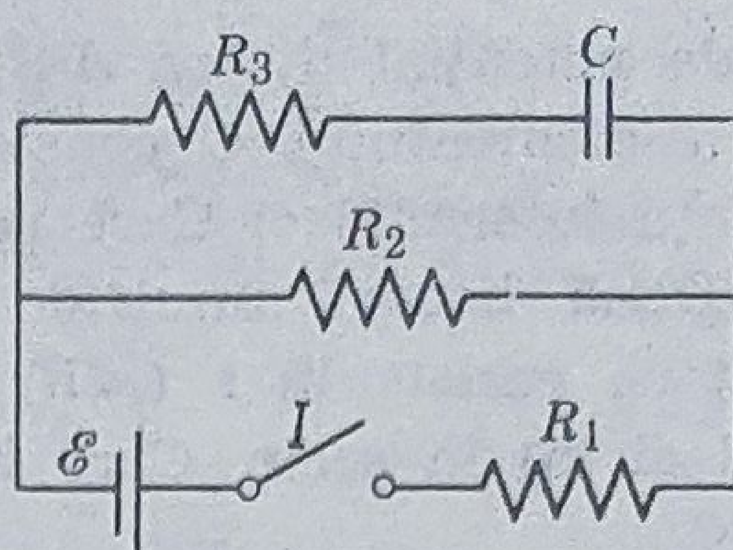


Figura 32-30.

(c) Care sînt valorile numerice ale lui V_2 la $t=0$ și $t=\infty$? (d) Arătați care este sensul fizic al lui „$t=\infty$" și dați valoarea numerică minimă aproximativă în secunde pentru „$t=\infty$" în acest caz.

Capitolul 33

1. Particulele 1, 2 și 3 trecînd prin cîmpul magnetic din figura 33-25 au traiectoriile indicate. Ce concluzii se pot trage despre fiecare particulă?

2. (a) Care este viteza pe care trebuie să o aibe un proton pentru a se roti în jurul Pămîntului pe la ecuator, considerînd că în toate punctele traiectoriei liniile cîmpului magnetic pămîntesc sînt orizontale și au direcția meridianului geografic local. Considerați că mărimea cîmpului magnetic pămîntesc la ecuator este $0{,}41\cdot10^{-4}$ T. (b) Reprezentați vectorul viteză și vectorul inducție magnetică corespunzători acestei situații.

3. Un electron accelerat într-o diferență de potențial de 1 000 V intră în spațiul dintre două plăci paralele la distanța de 0,02 m una de cealaltă între care se găsește o diferență de potențial de 100 V. Dacă viteza electronului este perpendiculară la cîmpul electric dintre plăci, care este cîmpul magnetic normal la traiectoria electronului și la cîmpul electric necesar ca electronul să se miște în linie dreaptă?

4. O sarcină punctiformă pozitivă Q se mișcă în linie dreaptă cu viteză constantă printr-o regiune vidată în care există un cîmp electric uniform $\vec{E}$ și un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$. (a) Dacă $\vec{E}$ este vertical în sus iar sarcina se mișcă orizontal de la nord la sud cu viteza v, determinați cea mai mică valoare pe care o poate avea $\vec{B}$, direcția și sensul său. (b) Explicați de ce $\vec{B}$ nu este unic determinat atunci cînd sînt dați numai $\vec{E}$ și $\vec{v}$. (c) Presupuneți că sarcina este un proton ce intră în această regiune după ce a fost accelerat printr-o diferență de potențial de $3{,}10\cdot10^5$ V. Calculați valoarea lui B de la punctul (a) considerînd că $E=1{,}90\cdot10^5$ V/m. (d) Dacă cîmpul electric $\vec{E}$ de la punctul (c) este egal cu zero, determinați raza r a cercului pe care se mișcă în acest caz protonul.

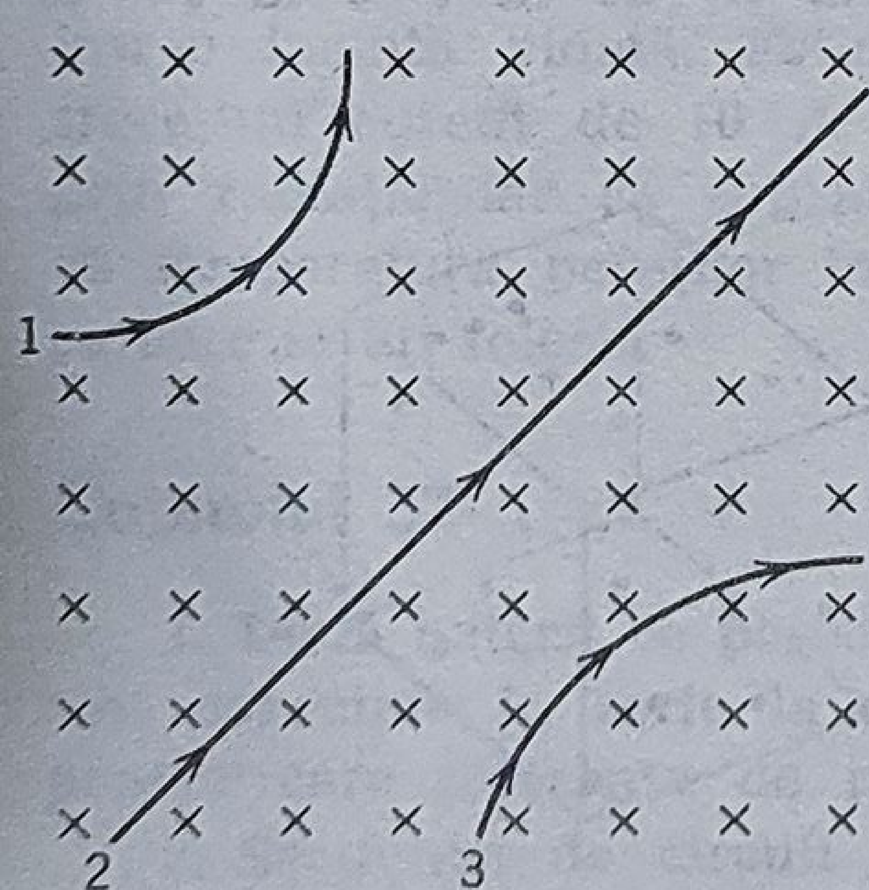


Figura 33-25.

5. Un galvanometru are rezistența de 75,3 Ω; deviația maximă a acului său indicator corespunde unui curent de $1{,}62\cdot10^{-3}$ A. Determinați valoarea rezistenței auxiliare necesare pentru a transforma galvanometrul într-un voltmetru a cărui deviație maximă să corespundă la 1 000 V. Cum trebuie legată această rezistență? (b) Determinați valoarea

rezistenței auxiliare necesare pentru a transforma galvanometrul într-un ampermetru a cărui deviație maximă să corespundă la 0,0500 A. Cum trebuie conectată această rezistență?

6. Într-o experiență de efect Hall un curent de 3,0 A ce trece în lungul unui conductor lat de 1,0 cm, lung de 4,0 cm și gros de 10^{-3} cm produse o tensiune transversală Hall (în latul probei) de $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ V atunci cînd conductorul subțire se găsește într-un cîmp magnetic de 1,5 T, perpendicular pe el. Din aceste date calculați (a) viteza de transport a purtătorilor de sarcină și (b) numărul de purtători pe centimetru cub. (c) Reprezentați grafic polaritatea tensiunii Hall pentru un curent și un cîmp magnetic date, presupunînd că purtătorii de sarcină sînt electroni (negativi).

7. (a) Care este frecvența ciclotronică a unui electron cu energia de 100 eV în cîmpul magnetic pămîntesc de $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ T? (b) Care este raza de curbură a traiectoriei acestui electron dacă viteza sa este normală la cîmpul magnetic?

Capitolul 34

1. Opt fire de curent străbat pagina perpendicular, prin punctele indicate în figura 34-32. Prin firul notat cu numărul întreg k ($k=1, 2, \ldots 8$) trece curentul ki_0. Prin firele cu k impar curentul iese din pagină iar prin firele cu k par curentul intră în pagină. Evaluați $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ de-a lungul conturului închis, în sensul indicat de săgeată.

2. Doi conductori rectilinii lungi, normali între ei se află unul în apropierea celuilalt. Descrieți ce se petrece cînd prin ele trece un curent, presupunînd că se pot deplasa liber.

3. Presupuneți că toți curenții din figura 34-25 au același sens. Care este forța pe metru ce acționează asupra fiecărui fir (mărime, direcție și sens)? În cazul analog al mișcării paralele a particulelor încărcate într-o plasmă acesta poartă numele de efect „pinch" (de contracție)*.

4. Un conductor rectiliniu lung cu secțiune circulară de rază R este străbătut de curentul i. În interiorul conductorului există o cavitate cilindrică de rază a cu axa paralelă cu axa conductorului la distanța b de ea. Deduceți o expresie pentru inducția magnetică $\vec{B}$ în interiorul cavității folosind principiul de suprapunere.

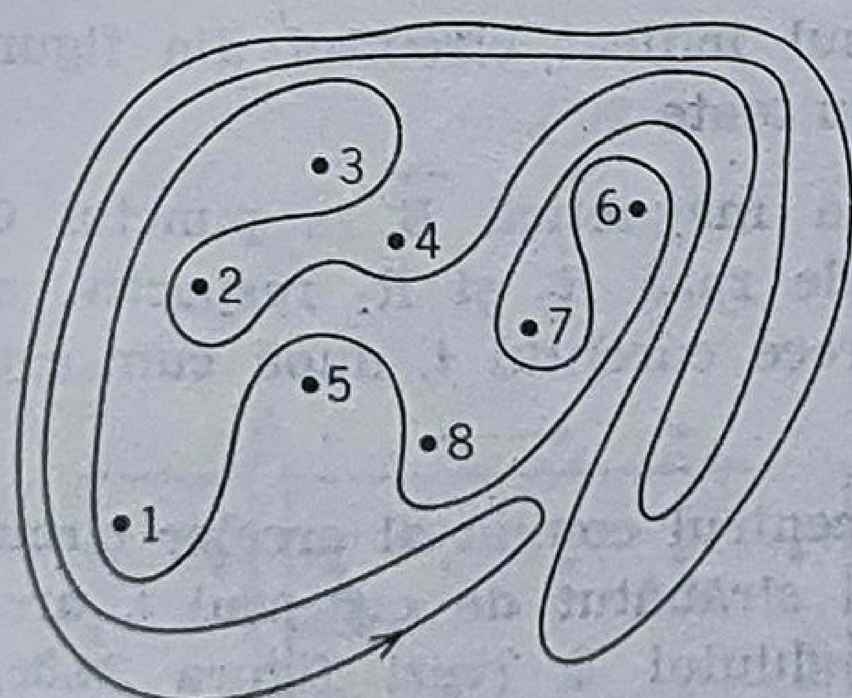


Figura 34-32.

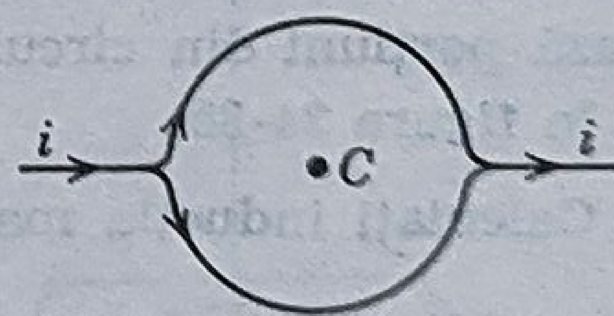


Figura 34-33.

* Efectul „pinch" constă în micșorarea secțiunii unui fascicul de particule, de intensitate mare, datorită forțelor de atracție ce apar între „firele" de curent. Este un efect de contracție observat la curenți foarte mari prin plasmă. (N.T.)

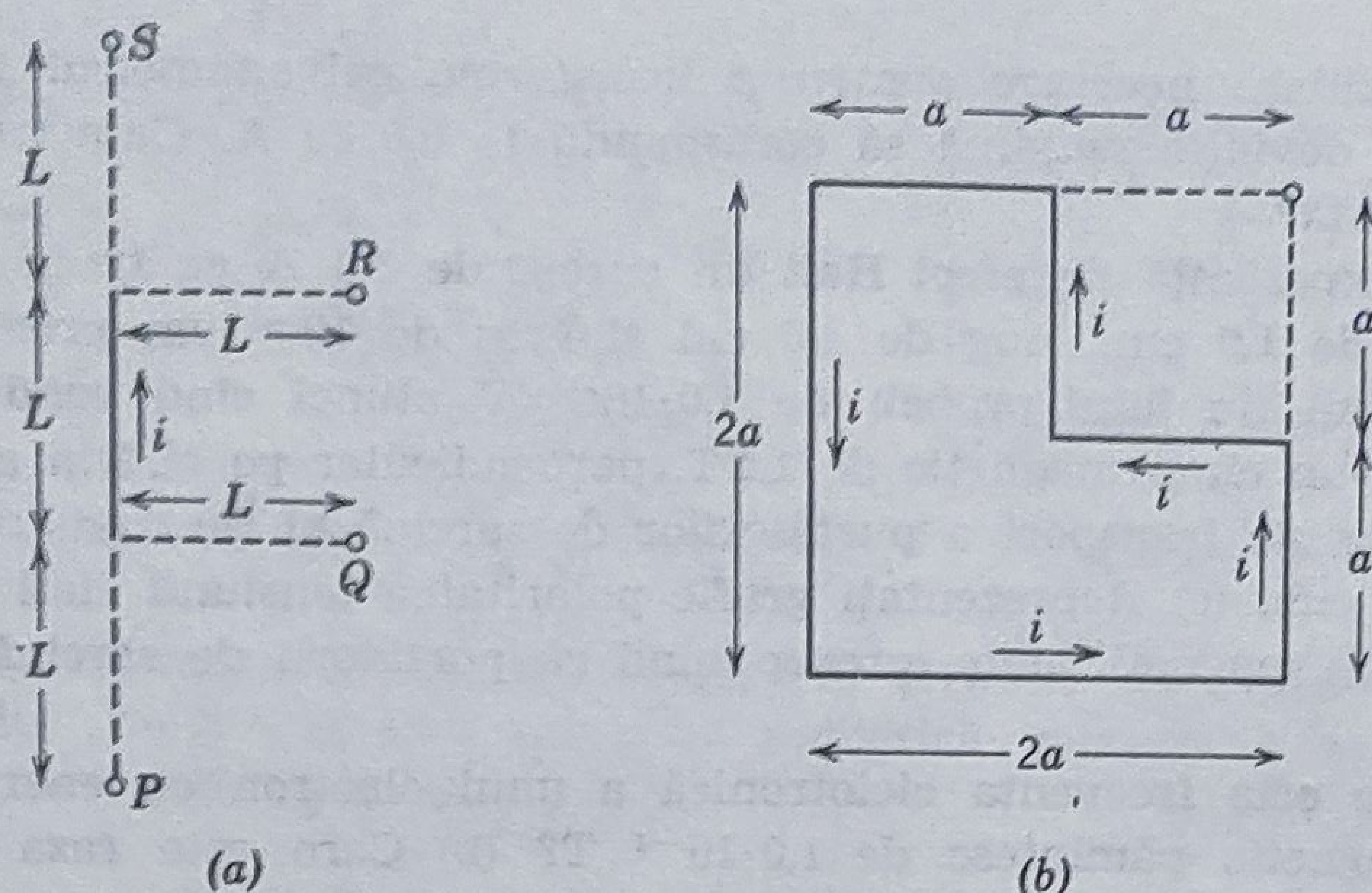


Figura 34-34.

5. Un conductor rectiliniu este tăiat în două spire identice semicirculare ca în figura 34-33. Care este cîmpul magnetic în centrul C al spirei circulare obţinute astfel?

6. (a) Printr-un fir rectiliniu de lungime L trece un curent i în sensul indicat în figura 34-34 a. Plecînd de la legea Biot-Savart, determinaţi inducţia magnetică rezultantă ($\vec{B}_P$, $\vec{B}_Q$, $\vec{B}_R$, $\vec{B}_S$, respectiv mărimea, direcţia şi sensul în fiecare caz) în cele patru puncte P, Q, R, S (toate coplanare cu firul). (b) Folosind rezultatele de la punctul (a) calculaţi inducţia magnetică $\vec{B}$ (mărimea, direcţia şi sensul) pro-

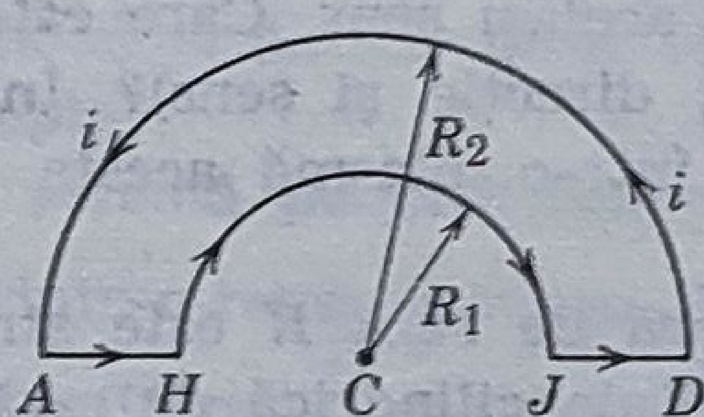


Figura 34-35.

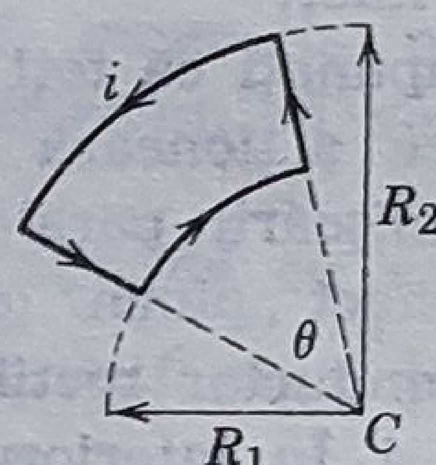


Figura 34-36.

dusă în punctul T de curentul ce străbate în sensul indicat circuitul din figura 34-34 b. (Totul se află în acelaşi plan iar unghiurile au toate 90°).

7. Calculaţi, folosind legea Biot-Savart, inducţia magnetică $\vec{B}$ în punctul C, centrul comun al arcelor semicirculare AD şi HJ, de rază R_2 şi R_1 respectiv, ce formează porţiuni din circuitul $ADJHA$ prin care trece curentul i, după cum este arătat în figura 34-35.

8. Calculaţi inducţia magnetică $\vec{B}$ în punctul C, centrul comun al arcelor circulare din circuitul străbătut de curentul i, arce ce corespund unghiului θ (vezi figura 34.36).

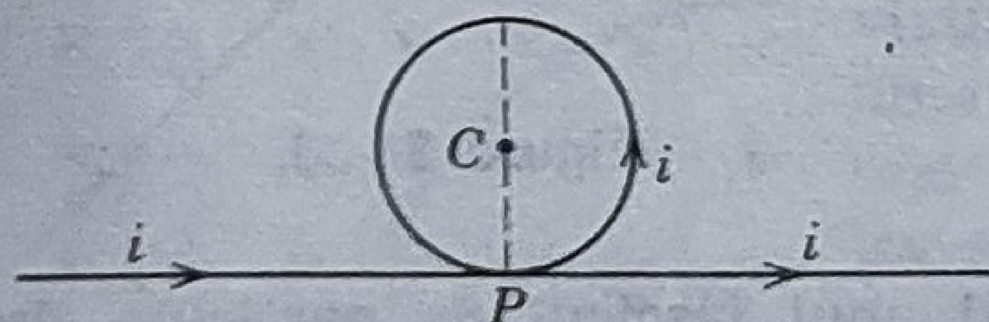


Figura 34-37.

9. (a) Un conductor lung este modelat ca în figura 34-37 (în punctul P firele nu se ating). Determinaţi mărimea, direcţia şi sensul lui $\vec{B}$ în centrul C al porţiunii circulare din circuit cînd sensul curentului este cel indicat.

(b) Porţiunea circulară a circuitului este rotită fără a fi distorsionată în jurul diametrului său (punctat) perpendicular pe porţiunea rectilinie a firului. Momentul magnetic asociat spirei circulare are acum direcţia şi sensul curentului prin porţiunea rectilinie a firului. Determinaţi pe $\vec{B}$ produs în acest caz în punctul C.

Capitolul 35

1. Arătaţi că t.e.m. are aceleaşi dimensiuni ca şi variaţia în unitatea de timp a fluxului magnetic.

2. În figura 35-39, $l=2{,}0$ m iar $v=50$ cm/s. $\vec{B}$ este cîmpul magnetic al Pămîntului ce iese perpendicular din pagină şi care în acest loc are valoarea de $6{,}0\cdot10^{-5}$ T. Rezistenţa circuitului $ADCB$ presupusă constantă (explicaţi cum poate fi realizată aproximativ această) este $R=1{,}2\cdot10^{-5}\Omega$. (a) Care este t.e.m indusă în circuit? (b) Care este intensitatea cîmpului electric în firul AB? (c) Care este forţa ce acţionează asupra fiecărui electron din fir, produsă de mişcarea firului în cîmpul magnetic? (d) Care este mărimea şi sensul curentului prin fir? (e) Care este forţa pe care trebuie s-o exercite un agent exterior pentru ca firul să se deplaseze cu această viteză constantă? (f) Calculaţi lucrul mecanic executat de agentul exterior în unitatea de timp. (g) Calculaţi cantitatea de energie electrică ce este transformată, în unitatea de timp, în energie calorică.

3. În figura 35-40 sînt arătate două spire de curent ce au aceeaşi axă. Spira mai mică este situată deasupra celei mai mari, la o distanţă x, mare în comparaţie cu raza R a spirei mari. Deci, inducţia magnetică, produsă de curentul i ce străbate spira mare în sensul indicat, este aproximativ constantă în toate punctele suprafeţei plane πr^2 mărginită de spira mică. Presupuneţi că x nu este constant ci variază cu o viteză constantă $dx/dt=v$. (a) Determinaţi fluxul magnetic prin suprafaţa delimitată de spira mică în funcţie de x. (b) Calculaţi t.e.m. generată în spira mică în momentul în care $x=NR$. (c) Determinaţi sensul curentului indus în spira mică presupunînd că $v>0$.

4. O spiră închisă este formată din două semicercuri egale, de rază 3,70 cm, situate în plane perpendiculare unul de altul. Spira a fost formată prin îndoirea

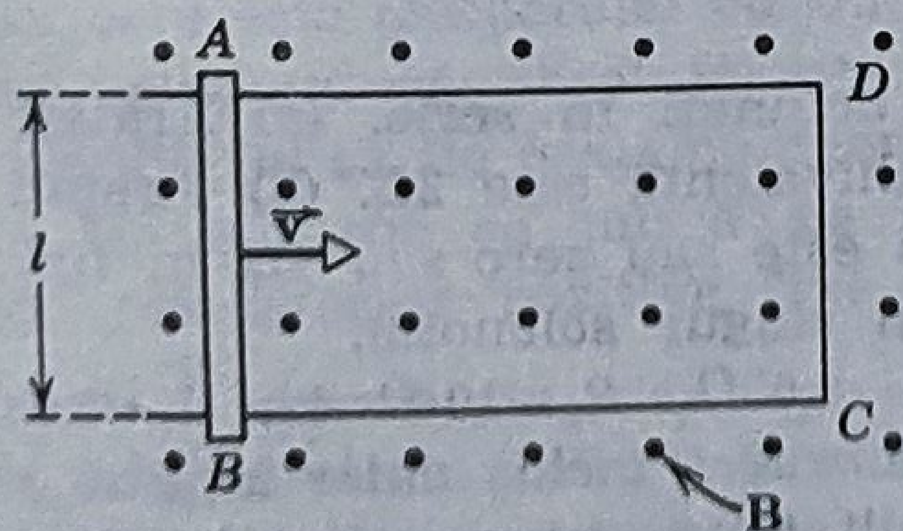


Figura 35-39.

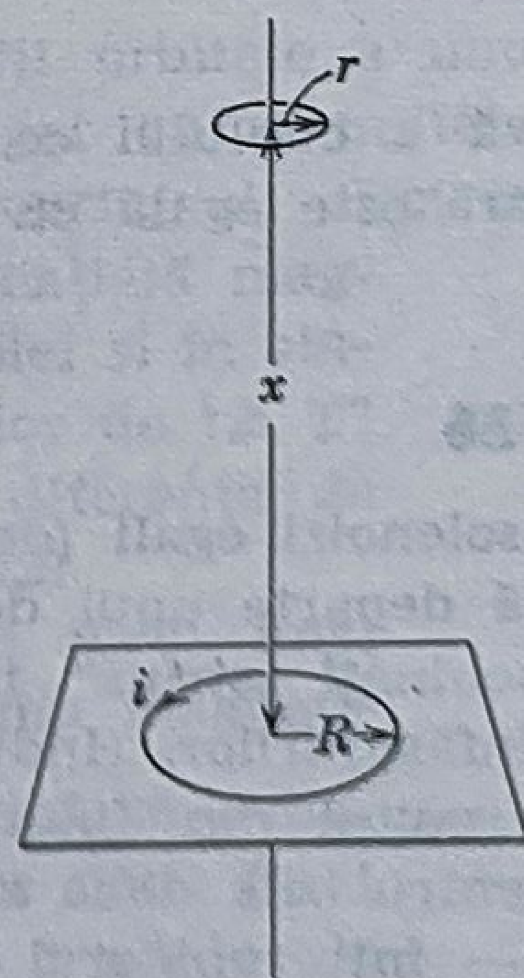


Figura 35-40.

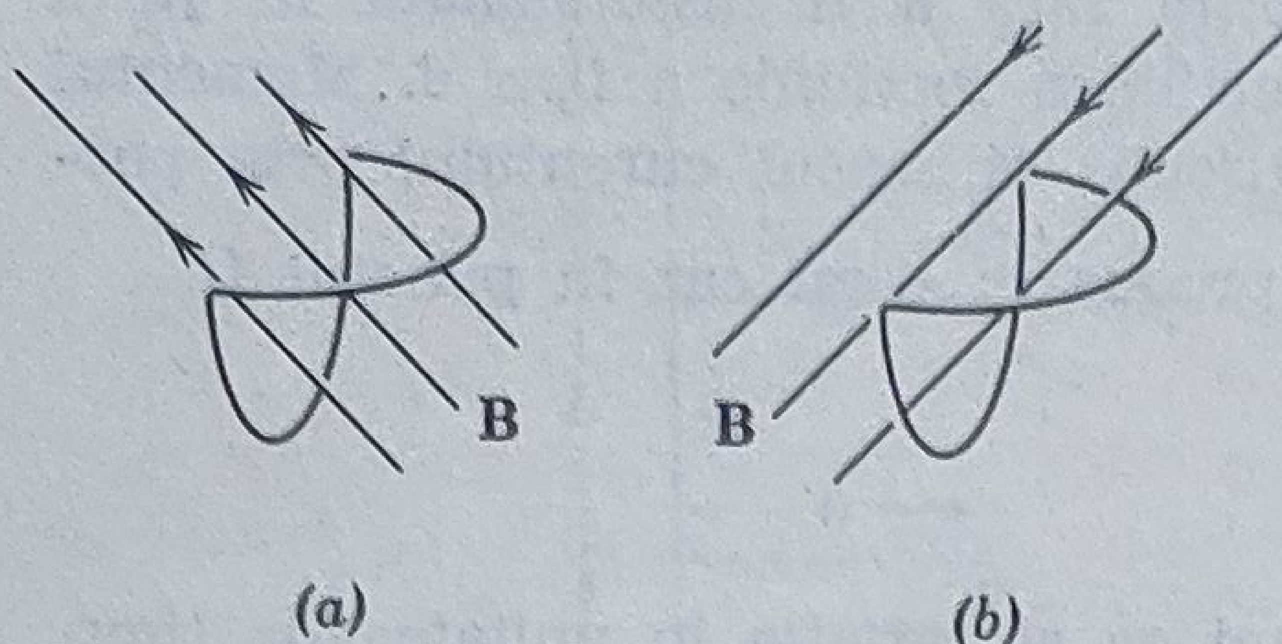


Figura 35-41.

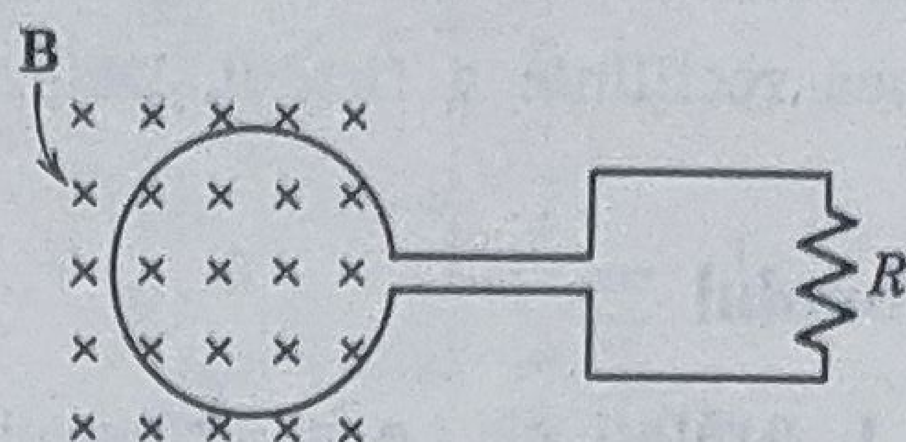


Figura 35-42.

unei spire circulare în lungul unui diametru, pînă ce cele două jumătăţi au devenit perpendiculare. Spira este introdusă într-un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ de 76 mT perpendicular pe diametrul în jurul căruia s-a efectuat rotirea şi care face unghiuri egale (45°) cu planele semicercurilor, după cum este indicat în figura 35-41 a. (a) Cîmpul magnetic scade uniform în timp pînă la zero într-un interval de timp de $4{,}50 \cdot 10^{-3}$ s. Determinaţi mărimea t.e.m. induse în sensul curentului indus în spiră în acest interval de timp. (b) Cum se modifică răspunsul în cazul cînd direcţia lui $\vec{B}$ este cea din figura 35-41 b, normală pe direcţia anterioară dar tot perpendicular pe diametrul de îndoire.

5. O spiră de arie A este conectată la o rezistenţă R. Spira se găseşte într-un cîmp $\vec{B}$ variabil în timp (vezi figura 35-42). (a) Deduceţi o expresie pentru sarcina *netă* ce trece prin rezistor între $t=t_1$ şi $t=t_2$. Arătaţi că răspunsul dumneavoastră este proporţional cu diferenţa $\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)$ şi este independent de modul în care variază $\vec{B}$. (b) Presupuneţi că variaţia fluxului, $\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)$ este zero. Rezultă de aici că în acest interval de timp nu se produce încălzire prin efect joule?

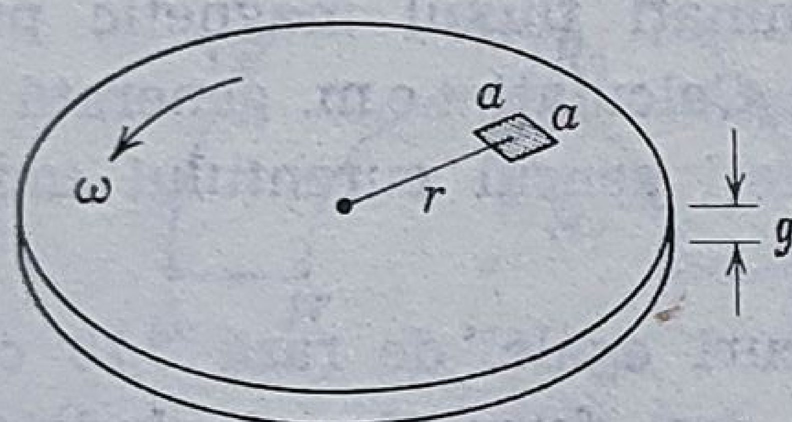


Figura 35-43.

6. O frînă electromagnetică cu curenţi de inducţie este formată dintr-un disc de conductivitate σ şi grosime g ce se roteşte în jurul unei axe ce trece prin centrul ei şi care se găseşte într-un cîmp magnetic $\vec{B}$ perpendicular pe planul discului pe o suprafaţă mică a^2 (vezi figura 35.43). Deduceţi o expresie aproximativă a cuplului ce tinde să frîneze discul în momentul în care viteza sa unghiulară este egală cu ω, presupunînd că suprafaţa a^2 se află la distanţa r de axă.

Capitolul 36

1. Doi solenoizi egali (de inductanţă L) sînt bobinaţi în serie. (a) Arătaţi că dacă se află departe unul de altul, inductanţa echivalentă este $2L$. (b) Arătaţi că dacă sînt bobinaţi „strîns", inductanţa echivalentă este sau zero sau $4L$, în funcţie de sensul înfăşurărilor. (Indicaţie: ei formează un singur solenoid).

2. În circuitul din figura 36-8, $\mathcal{E}=10$ V, $R_1=5{,}0\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$ iar $L=5{,}0$ H. Calculaţi pentru cele două situaţii: 1 — întrerupătorul I închis chiar în acel moment şi 2 — întrerupătorul I închis de foarte mult timp, (a) curentul i_1 prin R_1, (b) curentul i_2 prin R_2, (c) curentul i prin întrerupător, (d) tensiunea la capetele lui R_2, (e) tensiunea la capetele lui L şi (f) di_2/dt.

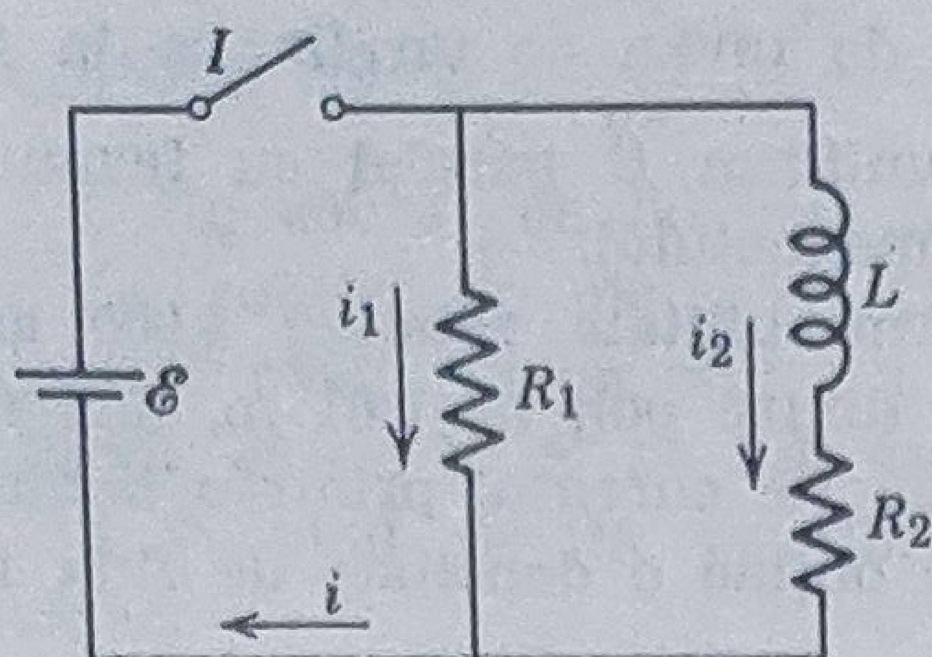


Figura 36-8.

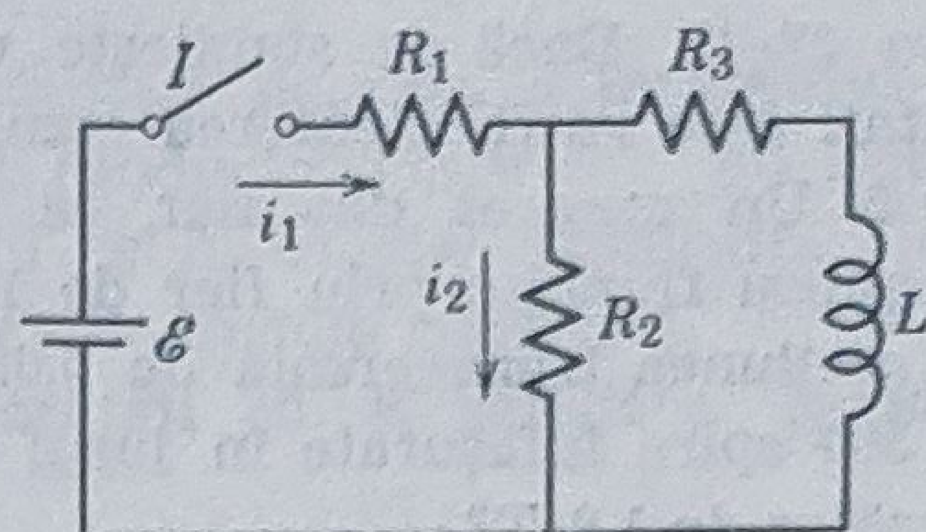


Figura 36-9.

3. În figura 36-9, $\varepsilon=100$ V, $R_1=10\,\Omega$, $R_2=20\,\Omega$, $R_3=30\,\Omega$ și $L=2$ H. Determinați valorile lui i_1 și i_2: (a) imediat după ce I este închis; (b) după un interval lung de timp; (c) imediat după ce I este deschis din nou; (d) după un interval lung de timp de la deschidere.

4. Un cablu coaxial (raza interioară a, raza exterioară b) este folosit ca linie de transmisie între o baterie $\mathscr{E}$ și un rezistor R. Cablul joacă atît rol de condensator cît și de bobină. Dacă energiile electrică și magnetică înmagazinată sînt egale, arătați că R trebuie să fie

$$R=\frac{377}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\Omega$$

(Valoarea de 377 Ω este uneori numită *impedanța spațiului liber*).

5. Fiecăreia din unitățile de măsură ce urmează: (a) C m/Wb (b) V.s, (c) C.A/F, (d) kg.V.m²/(H.A)², (e) (H/F)$^{1/2}$ îi corespunde o unitate de măsură din lista următoare: m, s, kg, număr fără dimensiuni, N, J, V, Ω, W, C, A, Wb, H. F. Găsiți corespondențele.

Capitolul 37

1. O sarcină totală q este distribuită uniform pe, un inel dielectric de rază r, Dacă inelul se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe, ce trece prin centrul său, normală pe planul său, determinați mărimea, direcția și sensul momentului său magnetic rezultant.

2. (a) Care este momentul magnetic asociat mișcării orbitale a unui electron dintr-un atom dacă momentul cinetic orbital este egal cu o unitate cuantică ($=\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}$ J·s). Momentul magnetic de spin propriu al electronului este $0{,}928\cdot10^{-23}$ A·m². Care este diferența între energia potențială magnetică U în starea în care momentul magnetic este paralel și în starea în care este antiparalel cu un cîmp magnetic exterior de 1,2 T? (c) Ce temperatură absolută este necesară pentru ca diferența de energie din (b) să fie egală cu energia termică medie $kT/2$?

3. Un electron se mișcă pe o orbită circulară în jurul unei sarcini punctiforme pozitive fixe, în prezența unui cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ normal la planul de mișcare. Forța electrică ce acționează asupra electronului este exact de N ori mai mare decît forța magnetică. (a) Determinați cele două viteze unghiulare posibile ale mișcării electronului. (b) Evaluați numeric aceste viteze considerînd că $B=0{,}427$ T iar $N=100$.

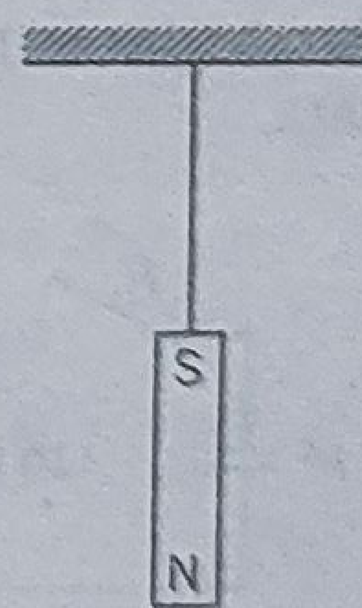


Figura 37-23.

4. Un magnet în formă de bară este suspendat de tavan de un fir, ca în figura 37-23. Dacă se stabilește un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ paralel cu tavanul, arătați care va fi orientarea rezultantă a firului și a magnetului.

5. Un magnet din fier ce conține fier cu permeabilitate relativă 5 000 are lungimea fluxului prin fier de 1,0 m iar prin aerul dintre poli de 0,01 m, ambele cu secțiunea transversală de 0,02 m². Care trebuie să fie curentul printr-o bobină de 500 spire înfășurate în jurul fierului pentru a se obține o densitate de flux în întrefier de 1,8 T?

Capitolul 38

1. Inițial condensatorul de 900 μF din figura 38-13 este încărcat la 100 V iar condensatorul de 100 μF este neîncărcat. (a) Arătați în amănunt cum poate fi încărcat la 300 V condensatorul de 100 μF folosind întrerupătoarele I_1 și I_2. (b) Descrieți în detaliu analogul mecanic al acestei probleme (format dintr-o masă și un arc).

2. *O proprietate de autocorelare a două din ecuațiile lui Maxwell.* Două paralelipipede adiacente au o față comună, după cum este arătat în figura 38-14. (a) Putem aplica $\varepsilon_0 \oint \vec{E}.d\vec{S}=q$ separat fiecăreia din cele două suprafețe închise. Arătați că, folosindu-vă doar de aceasta, rezultă că $\varepsilon_0 \oint \vec{E}.d\vec{S}=q$ este satisfăcută în mod *automat* pentru suprafața închisă totală a celor două paralelipipede. (b) Repetați aceasta folosind $\oint \vec{B}.d\vec{S}=0$.

3. *O proprietate de autocorelare a două din ecuațiile lui Maxwell.* Două contururi închise adiacente *abcda* și *efcbe* au o latură comună *bc* (vezi figura 38-15). (a) Putem aplica $\oint \vec{E}.d\vec{l}=-d\Phi_B/dt$ separat fiecăruia din aceste contururi închise. Arătați că, folosindu-vă doar de aceasta, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-d\Phi_B/dt$ este satisfăcută în mod *automat* pentru conturul închis total *abefcda*. (b) Repetați folosind $\frac{1}{\mu_0}\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=i+\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$.

4. Folosind definiția fluxului, a densității de sarcină de volum ρ și a densității de curent $\vec{j}$, scrieți cele patru ecuații ale lui Maxwell astfel încît fluxurile, curenții și sarcinile să apară toate sub forma unor integrale de volum sau de suprafață.

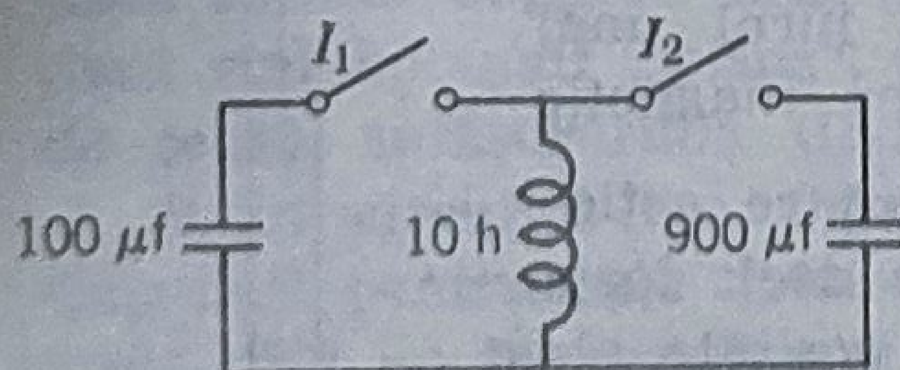
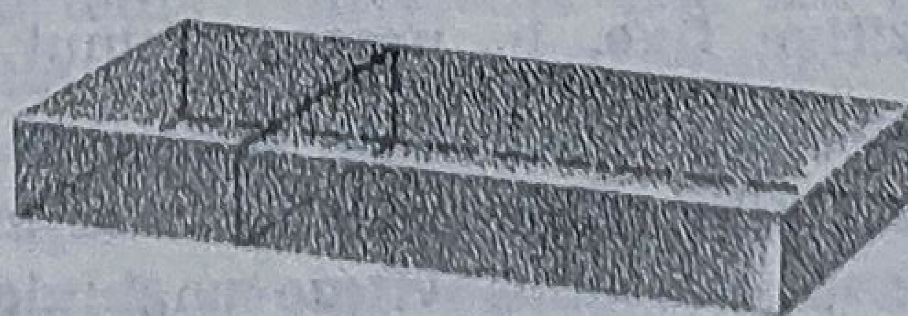


Figura 38-13.


Figura 38-14.

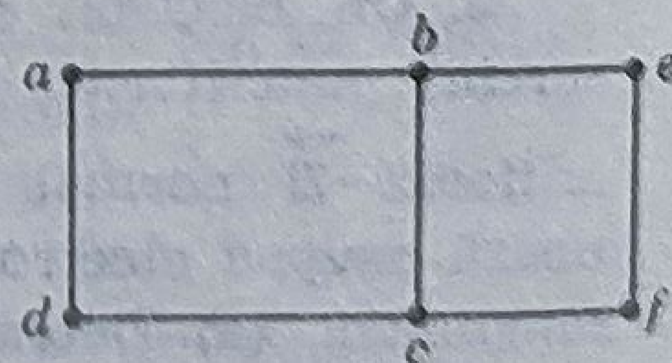


Figura 38-15.

Capitolul 39

1. Un cablu coaxial este format dintr-un fir central de rază a înconjurat de un tub subțire de metal de rază b. Între cei doi conductori este aer. (a) Determinați capacitatea pe unitatea de lungime a acestui cablu coaxial. (Indicație: Considerați, că pe fir și pe tub există sarcini egale dar de semne contrare).

2. Pornind de la ecuațiile 39-10 și 39-13, arătați că E satisface „ecuația undelor"

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$\vec{B}$ satisface și el ecuația undelor?

3. Arătați că relațiile (a) pînă la (d) de mai jos satisfac ecuațiile 39-10 și 39-13. În toate A este considerat. (a) $E = Ac(x - ct)$, $B = A(x - ct)$. (b) $E = Ac(x + ct)^{15}$, $B = -A(x + ct)^{15}$. (c) $E = Ace^{(x - ct)}$, $B = Ae^{(x - ct)}$. (d) $E = Ac \ln (x + ct)$, $B = -A \ln (x + ct)$. (e) Generalizați aceste exemple pentru a arăta că $E = A cf(x - ct)$, $B = A f(x - ct)$ este o soluție, unde f este o funcție *oarecare* de $(x - ct)$. Care este situația corespunzătoare pentru funcții de $(x + ct)$?

4. Considerați următoarele „unde staționare":

$$E = E_m(\sin \omega t)(\sin kx)$$

$$B = B_m(\cos \omega t)(\cos kx)$$

(a) Arătați că acestea satisfac ecuațiile 39-10 și 39-13 cu condiția ca E_m să fie legat de B_m iar ω de k în mod corespunzător. Care sînt aceste relații? (b) Determinați vectorul Poynting (instantaneu). (c) Arătați că puterea mediată în timp ce trece prin orice suprafață este zero. (d) Descrieți transportul de energie în această problemă.

5. Un avion ce zboară la distanța de 10 km de un post de radio emisie recepționează un semnal de puterea egală cu 10,0 μ W/m^2. Calculați (a) cîmpul electric (mediu) produs de acest semnal la antena avionului; (b) cîmpul magnetic (mediu) la antena avionului; (c) puterea totală radiată de emițător, presupunînd că emițătorul radiază izotrop iar Pămîntul este un absorbant perfect.

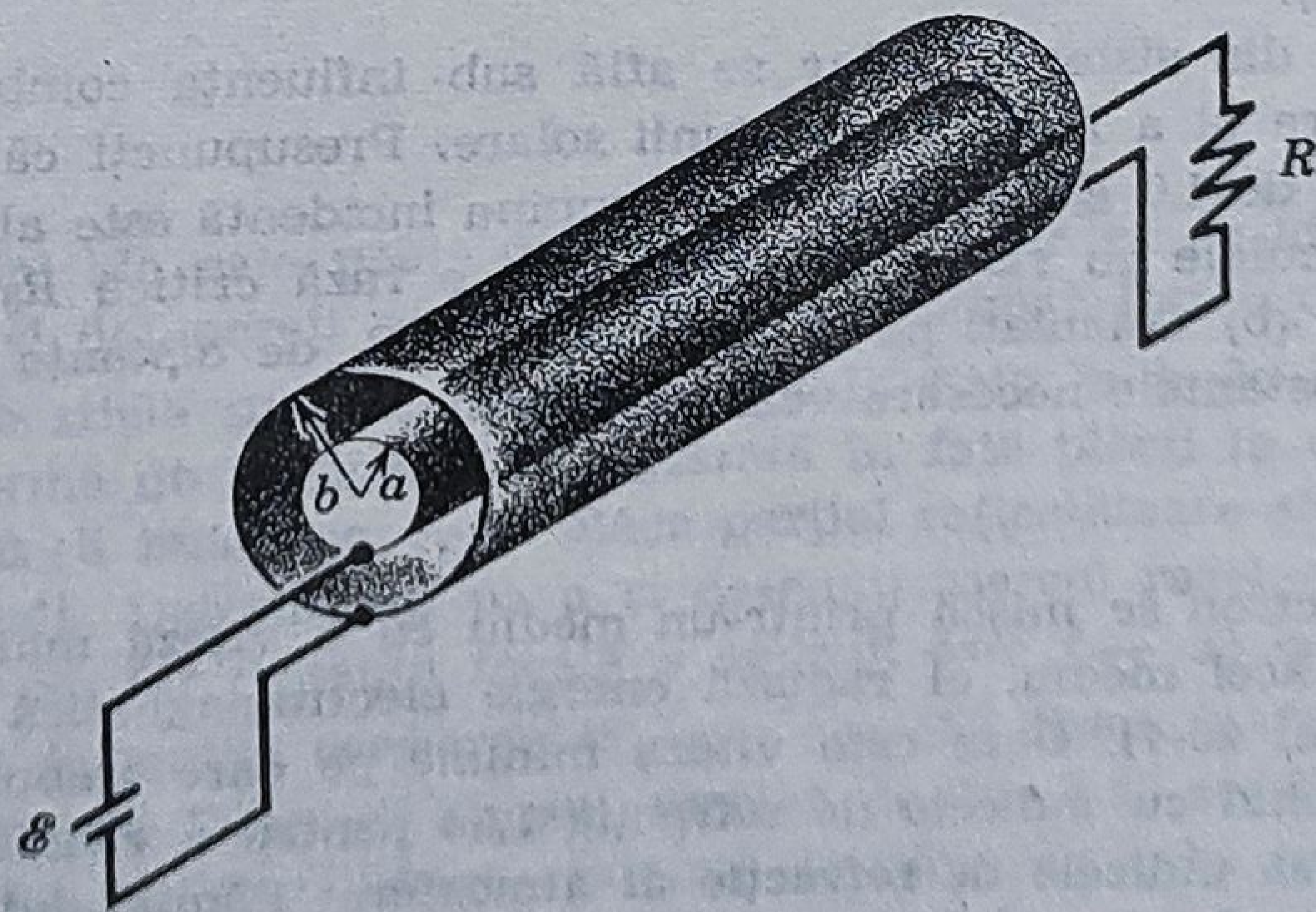


Figura 39-18.

6. Un cablu coaxial (raza interioară a, iar raza exterioară b) este folosit ca o linie de transmisie între o baterie $\mathscr{E}$ și un rezistor R (vezi figura 39-18). (a) Calculați $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pentru $a < r < b$, (b) Calculați vectorul Pointing $\vec{S}$ pentru $a < r < b$, (c) Integrînd adecvat vectorul Pointing, arătați că puterea totală transportată prin suprafața inelară $a < r < b$ este $\mathscr{E}^2/R$. Este posibil aceasta? (d) Arătați că sensul lui $\vec{S}$ este întotdeauna dinspre baterie spre rezistor, indiferent cum este conectată bateria.

7. Un cilindru lung, gol (de rază R și lungime l) are pe suprafață o sarcină σ uniformă pe unitatea de suprafață. Un cuplu exterior aplicat asupra cilindrului îi imprimă o mișcare de rotație cu o accelerație constantă $\omega(t)=\alpha t$. (a) Determinați pe $\vec{B}$ în interiorul cilindrului (considerîndu-l ca un solenoid). (b) Determinați pe E la suprafața interioară a cilindrului. (c) Determinați pe $\vec{S}$ la suprafața interioară a cilindrului. (d) Arătați că fluxul lui $\vec{S}$ ce pătrunde în interiorul volumului cilindrului este egal cu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R^2 l}{2\mu_0} B^2\right)$. (Comparați cu problema 18).

Capitolul 40

1. O undă electromagnetică plană cu lungimea de undă de 3,0 m se propagă în spațiul liber în direcția lui $+x$, cu un vector electric $\vec{E}$ în lungul axei y, de amplitudine 300 V/m. (a) Care este frecvența ν a undei? (b) Care este direcția și amplitudinea cîmpului $\vec{B}$ asociat undei? (c) Dacă $E=E_m \sin(kx-\omega t)$ care sînt valorile lui k și ω pentru această undă? (d) Care este puterea medie în timp pe unitate de suprafață corespunzătoare acestei unde? (e) Dacă unda cade pe o foaie perfect absorbantă de arie A, care va fi momentul transferat pe secundă foii și care va fi presiunea exercitată de radiație asupra foii?

2. Arătați că $\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$ are dimensiunea $\frac{\text{impuls}}{\text{suprafață, timp}}$, pe cînd $\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ are dimensiunea $\frac{\text{energie}}{\text{suprafață}\cdot\text{timp}}$. (Vectorul $\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$ poate fi folosit la calculul transferului de impuls în același mod în care $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ este folosit la calculul transportului de energie).

3. O particulă din sistemul solar se află sub influența combinată a atracției gravitaționale solare și a radiației presiunii solare. Presupuneți că particula este o sferă cu densitatea de 1,0 g/cm³ și că toată lumina incidentă este absorbită. (a) Arătați că toate particulele cu raza mai mică decît o rază critică R_0 vor fi aruncate din sistemul solar. (b) Calculați pe R_0. (c) Depinde R_0 de distanța de la Pămînt la Soare? (Pentru constantele necesare vezi anexele.)

Capitolul 41

1. Cînd un electron se mișcă printr-un mediu cu o viteză mai mare decît viteza luminii prin acel mediu, el radiază energie electromagnetică (efectul Cerenkov, vezi paragraful 20-7). Care este viteza minimă pe care trebuie să o aibe un electron într-un lichid cu indicele de refracție 1,54 pentru a radia?

2. Presupuneți că indicele de refracție al atmosferei Pămîntului variază, numai cu altitudinea, de la valoarea unu la marginea atmosferei la o valoare mai mare

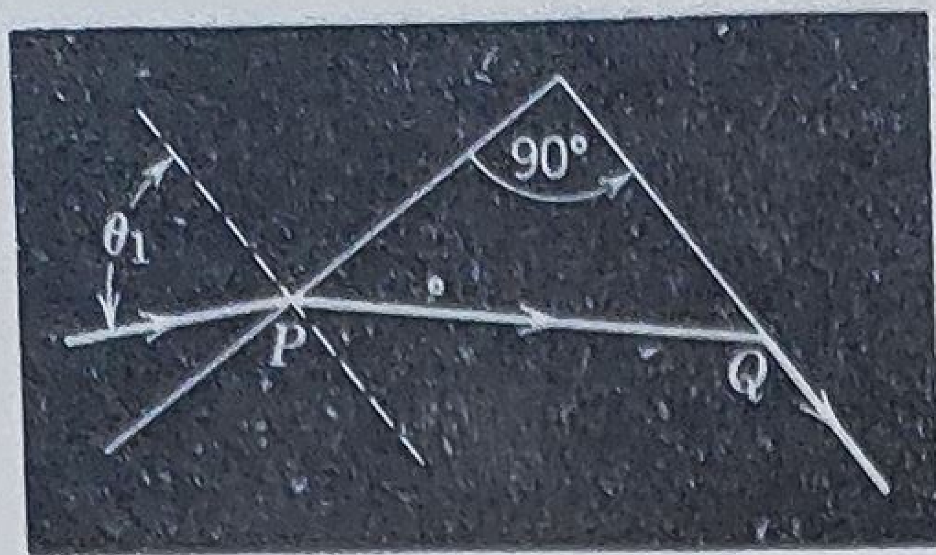


Figura 41-24.

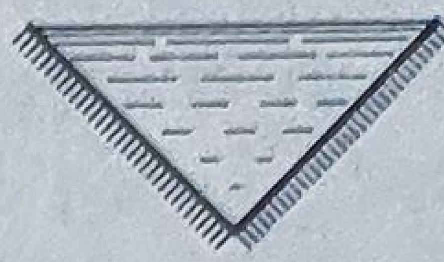


Figura 41-25.

la suprafața Pămîntului. (a) Arătați, neglijînd curbura Pămîntului, că unghiul aparent al unei stele față de direcția zenitului este independent de felul în care variază indicele de refracție al atmosferei cu altitudinea și depinde numai de valoarea lui n la suprafața Pămîntului. (Indicație: Comparați o atmosferă uniformă, cu una formată din strate cu indicele de refracție crescător.) (b) Care este efectul curburii Pămîntului?

3. O sursă punctiformă se află la 80 cm sub suprafața apei. Determinați diametrul celui mai mare cerc de la suprafață prin care lumina poate ieși din apă.

4. Un bazin de înot are între fund și marginea superioară 2,0 m iar între suprafața apei și marginea superioară 0,5 m. Lumina Soarelui cade sub un unghi de 45°. Care este lungimea umbrei marginii bazinului pe fundul său?

5. O rază de lumină monocromatică, inițial în aer, cade pe o prismă de 90° în punctul P (vezi figura 41-24). După ce este refractată în punctele P și Q iese în aer în punctul Q paralel cu suprafața din dreapta a prismei. (a) Determinați indicele de refracție față de aer al prismei pentru această lungime de undă în funcție de unghiul de incidență θ_1. (b) Determinați valoarea numerică maximă a indicelui de refracție al prismei. (c) Arătați cu ajutorul unei diagrame a mersului razelor care ar fi situația dacă unghiul de incidență în P ar fi puțin mai mare sau puțin mai mic decît θ_1.

6. Două oglinzi perpendiculare una pe alta formează fețele unui vas plin cu apă (vezi figura 41-25). O rază de lumină cade de deasupra, normal pe suprafața apei. (a) Arătați că raza emergentă este paralelă cu raza incidentă. Presupuneți că există două reflexii la suprafețele oglinzilor. (b) Repetați analiza pentru cazul incidenței oblice, considerînd că raza se găsește în planul figurii. (c) Folosind trei oglinzi, enunțați și rezolvați analogul tridimensional al acestei probleme.

Capitolul 42

1. Cîte imagini ale sale poate vedea un observator ce se află într-o încăpere în care tavanul și doi pereți adiacenți sînt din oglinzi? Explicați.

2. O placă de sticlă subțire, plană, se află la distanța b de o oglindă convexă. O sursă punctiformă de lumină S este plasată în fața plăcii la distanța a (vezi figura 42-33) astfel că imaginea ei în placa parțial reflectătoare să coincidă cu imaginea sa în oglindă. Determinați pe a și desenați mersul razelor de lumină considerînd că $b=7{,}5$ cm iar distanța focală a oglinzii este $f=-30$ cm.

3. (a) O lupă (o lentilă convergentă) este așezată direct în fața ochiului pentru a examina un obiect. Desenați mersul razelor de lumină, arătînd imaginea finală de pe retina ochiului. (b) Distanța minimă la care un ochi normal poate vedea clar un obiect este de 25 cm. Folosiți acest rezultat împreună cu diagrama mersu-

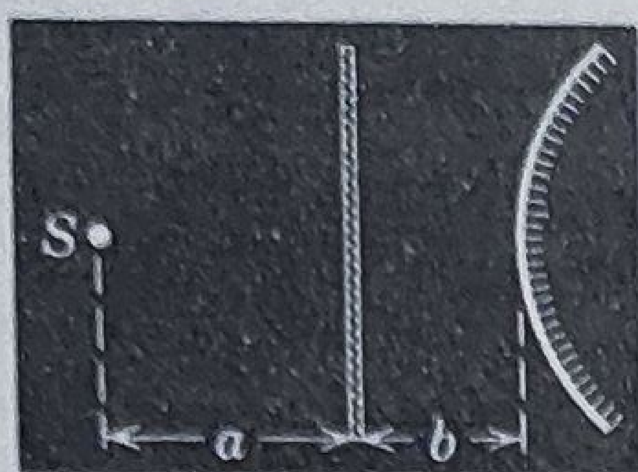
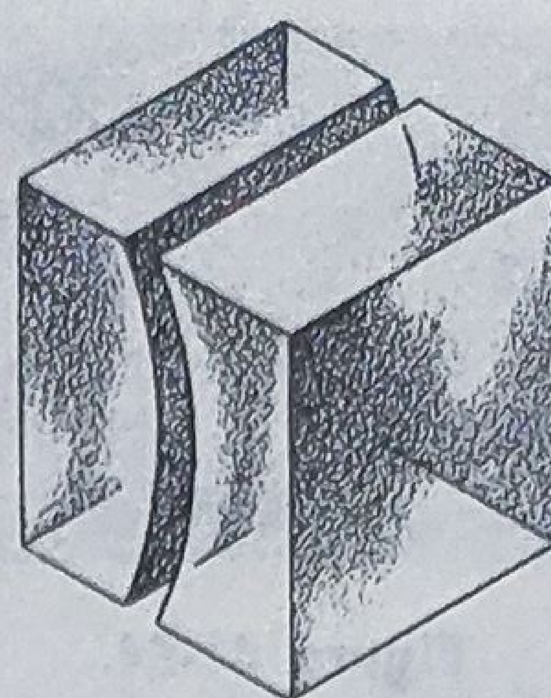


Figura 42-33.


Figura 42-34.

lui razelor de lumină pentru a arăta că mărirea (unghiulară) a unei lupe simple este $(25/f)+1$, unde f este distanța focală a lupei.

4. Două lentile subțiri, una cu $f=+12{,}0$ cm și alta cu $f=-10{,}0$ cm se află la distanța de 7,0 cm una de alta. Un obiect mic este plasat la 43,5 cm de centrul sistemului de lentile, pe axa principală, întîi de o parte, apoi de alta. Determinați poziția imaginii finale în ambele cazuri.

5. Arătați că o lentilă convergentă subțire de distanță focală f urmată de o lentilă divergentă subțire de distanță focală $-f$, vor focaliza lumina paralelă dincolo de cea de a doua lentilă dacă distanța L dintre lentile satisface condiția $0<L<f$. (b) Dacă lentilele se schimbă între ele, se modifică această proprietate? (c) Ce se întîmplă cînd $L=0$?

6. Dintr-un bloc de sticlă cu fețe plan paralele sînt tăiate două lentile: una concavă și alta convexă, ca în figura 42-34. Discutați mersul razelor unui fascicul de raze paralele incident (a) pe lentila concavă și (b) pe lentila convexă, atunci cînd distanța dintre lentile crește de la zero (contact) la o valoare foarte mare.

7. Un obiect este plasat la 1,0 m în fața unei lentile convergente de distanță focală 0,5 m ce se află la 2,0 m în fața unei oglinzi plane. (a) Unde se află imaginea finală, măsurată de la lentilă, ce este văzută de un observator ce privește spre oglindă prin lentilă? (b) Imaginea finală este reală sau virtuală? (c) Imaginea finală este dreaptă sau răsturnată? (d) Care este mărirea transversală?

Capitolul 43

1. Într-o experiență de interferență cu două fante, distanța dintre fante este de 5,0 μm iar fantele se află la 1,0 m de ecran. Pe ecran apar două figuri de difracție: una produsă de un fascicul de lumină de 4 800 Å iar cealaltă de 6 000 Å. Care este distanța pe ecran dintre franjele de interferență de ordinul trei ale celor două figuri diferite de difracție?

2. Într-o experiență de interferență a lui Young, într-o cuvă cu un lichid, două surse coerente de vibrație se găsesc la 12 cm una de alta (vezi fig. 43-4). Distanța dintre maxime la 2,0 m depărtare de surse este de 18,0 cm. Dacă viteza de propagare a undelor de suprafață este de 25,0 cm/s, găsiți frecvența vibratorilor.

3. Într-o experiență de interferență cu două fante, una din fante este acoperită cu o placă subțire de sticlă cu indice de refracție 1,4 iar cealaltă cu o placă subțire de sticlă cu indice de refracție 1,7. Punctul de pe ecran în care se află maximul central înaintea introducerii plăcilor de sticlă este acum ocupat de a

cincea franje luminoasă dinaintea introducerii plăcilor. Presupunînd că $\lambda=4\,800$ Å iar că plăcile cu aceeaşi grosime g, determinaţi valoarea lui g.

4. Sursa din figura 43-25 emite lumină monocromatică de lungime de undă λ. În ecranul opac I se află o fantă foarte îngustă F. La distanţa h sub F se află o oglindă plană a cărei suprafaţă se găseşte pe axa optică a lentilei. În planul focal al lentilei se află un al doilea ecran II. (a) Determinaţi condiţia de apariţie pe ecranul II a maximelor şi minimelor în funcţie de unghiul θ, lungimea de undă λ şi de distanţa h. (b) Franjele apar numai în regiunea A (deasupra axei lentilei), numai în regiunea B (sub axa lentilei) sau în ambele regiuni A şi B? Explicaţi (Indicaţie: consideraţi imaginea în oglindă a fantei F).

5. Fie $f_1(t)=A_1 \sin(\omega t+\varphi_1)$ şi $f_2(t)=A_2 \sin(\omega t+\varphi_2)$. Presupunem că dorim să calculăm media în timp a produsului lor:

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f_1(t)\, f_2(t)\, dt \qquad\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

(Ne putem întîlni cu o astfel de problemă dacă f_1 reprezintă un curent iar f_2 o tensiune; în acest caz f_1f_2 reprezintă puterea *instantanee*). Arătaţi că această medie este egală cu jumătate din produsul scalar al fazorilor corespunzători.

6. Consideraţi problema determinării sumei

$$A_1 \sin(\omega t+\varphi_1)+A_2 \sin(\omega t+\varphi_2)+\ldots A_n \sin(\omega t+\varphi_n)$$

prin metoda fazorilor.

(a) Arătaţi că suma poate fi scrisă întotdeauna sub forma

$$B \sin \omega t+C \cos \omega t$$

(b) Arătaţi că $B^2+C^2 \leqslant (A_1+A_2+\ldots A_n)^2$.

(c) Cînd este valabil semnul egal în (b)?

7. O peliculă subţire de acetonă (indice de refracţie 1,25) este întinsă pe suprafaţa unei plăci de sticlă groase (indice de refracţie 1,50). Pe această peliculă cad sub incidenţă normală unde luminoase plane de lungime de undă variabilă. Cînd privim undele reflectate observăm că minimul de interferenţă apare la 6 000 Å iar maximul de interferenţă la 7 000 Å. Calculaţi grosimea peliculei de acetonă.

8. Dorim să acoperim o piesă plană de sticlă ($n=1{,}50$) cu un material transparent ($n=1{,}25$) astfel ca lumina cu lungimea de undă de 6 000 Å (în vid) incidentă normal să nu fie reflectată. Cum se poate realiza aceasta?

9. Un fascicul de lumină de 6 300 Å cade sub o incidenţă normală pe un strat subţire sub formă de pană cu indicele de refracţie de 1,5. Pe suprafaţa stratului

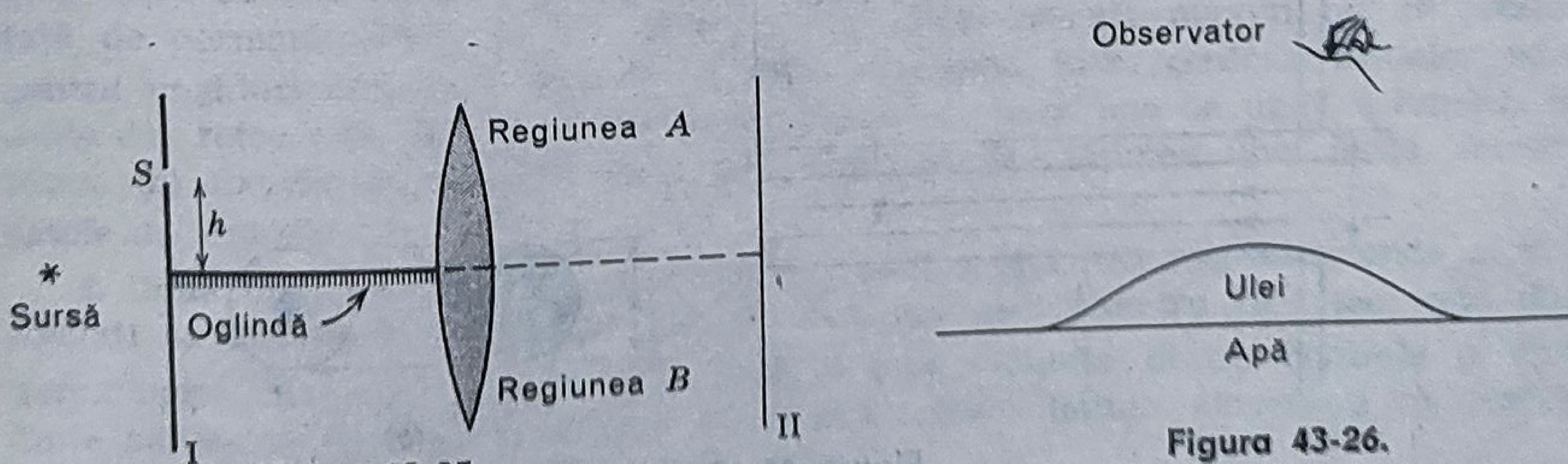


Figura 43-25.

Figura 43-26.

se formează zece franje luminoase şi nouă franje întunecoase. (Cu cît variază grosimea stratului pe acest interval de franje?)

10. O picătură de ulei ($n=1,20$) ce pluteşte pe suprafaţa apei ($n=1,33$) este observată de deasupra ei prin lumină reflectată (vezi figura 43-26). (a) Regiunea de la marginea picăturii (de cea mai mică grosime) corespunde unei regiuni luminoase sau întunecoase? (b) Care este grosimea aproximativă a picăturii de ulei în regiunea celei de a treia franje albastre, considerată de la marginea picăturii? (c) De ce culorile dispar treptat pe măsură ce grosimea picăturii de ulei creşte?

Capitolul 44

1. Se poate arăta că, un obstacol circular produce aceeaşi figură de difracţie ca şi un orificiu circular de acelaşi diametru cu excepţia cazului $\Theta=0$. Mai mult, dacă există multe asemenea obstacole distribuite la întîmplare, efectele de interferenţă dispar, rămînînd numai difracţia produsă de un *singur* obstacol. (a) Explicaţi de ce într-o zi cu ceaţă se observă un „inel" în jurul Lunii. (b) Calculaţi mărimea picăturilor de apă din aer atunci cînd inelul luminos ce apare în jurul Lunii are diametrul de 1,5 ori faţă de cel al Lunii.

2. Un fascicul monocromatic de lumină paralelă este incident pe un orificiu de „colimare" cu diametrul $x \gg \lambda$. Punctul P se află în regiunea de umbră geometrică pe un ecran situat la mare distanţă (vezi figura 44-15 a). Peste orificiul de colimare se aşază succesiv două obstacole (vezi figura 44-15 b). A este un obstacol circular opac cu un orificiu în el iar B este „negativul fotografic" al lui A. Folosind principiul de superpoziţie, arătaţi că intensitatea în punctul P este identică pentru fiecare din cele două obiecte A şi B ce produc difracţia (*principiul lui Babinet*).

3. Un cosmonaut ce se află într-un satelit afirmă că abia poate distinge două surse punctiforme de pe suprafaţa Pămîntului la distanţa de 161 km de el. Care este distanţa dintre ele, presupunînd că se află în condiţii ideale? Consideraţi diametrul pupilei de 5,0 mm iar $\lambda=5\,500$ Å.

4. Presupunînd condiţii ideale, estimaţi distanţa minimă dintre două obiecte de pe suprafaţa planetei Marte ce mai pot fi văzute separat de un observator de pe Pămînt, (a) folosind ochiul liber, (b) folosind telescopul de 508 cm de pe muntele Palomar. Pentru aceasta folosiţi următoarele date: distanţa Pămînt—Marte$=80,47 \cdot 10^6$ km; diametrul pupilei$=5,0$ mm; lungimea de undă a luminii$=5\,500$ Å.

5. Se poate construi un sistem de două surse sonore punctiforme folosind două difuzoare puse în faţa a două fante (distanţa dintre fante d, lărgimea unei fante a), ca în figura 44-16. Folosind o sursă de audiofrecvenţă şi un bloc de în-

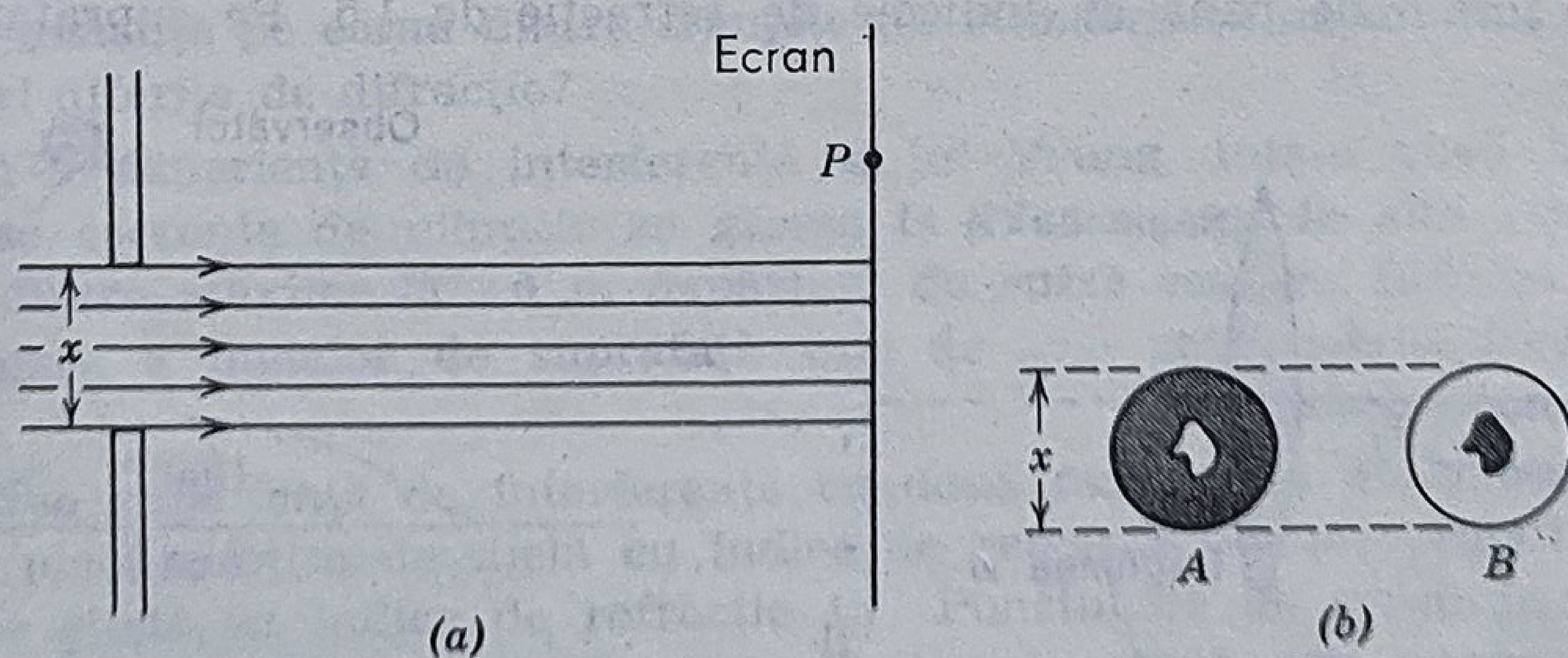


Figura 44-15.

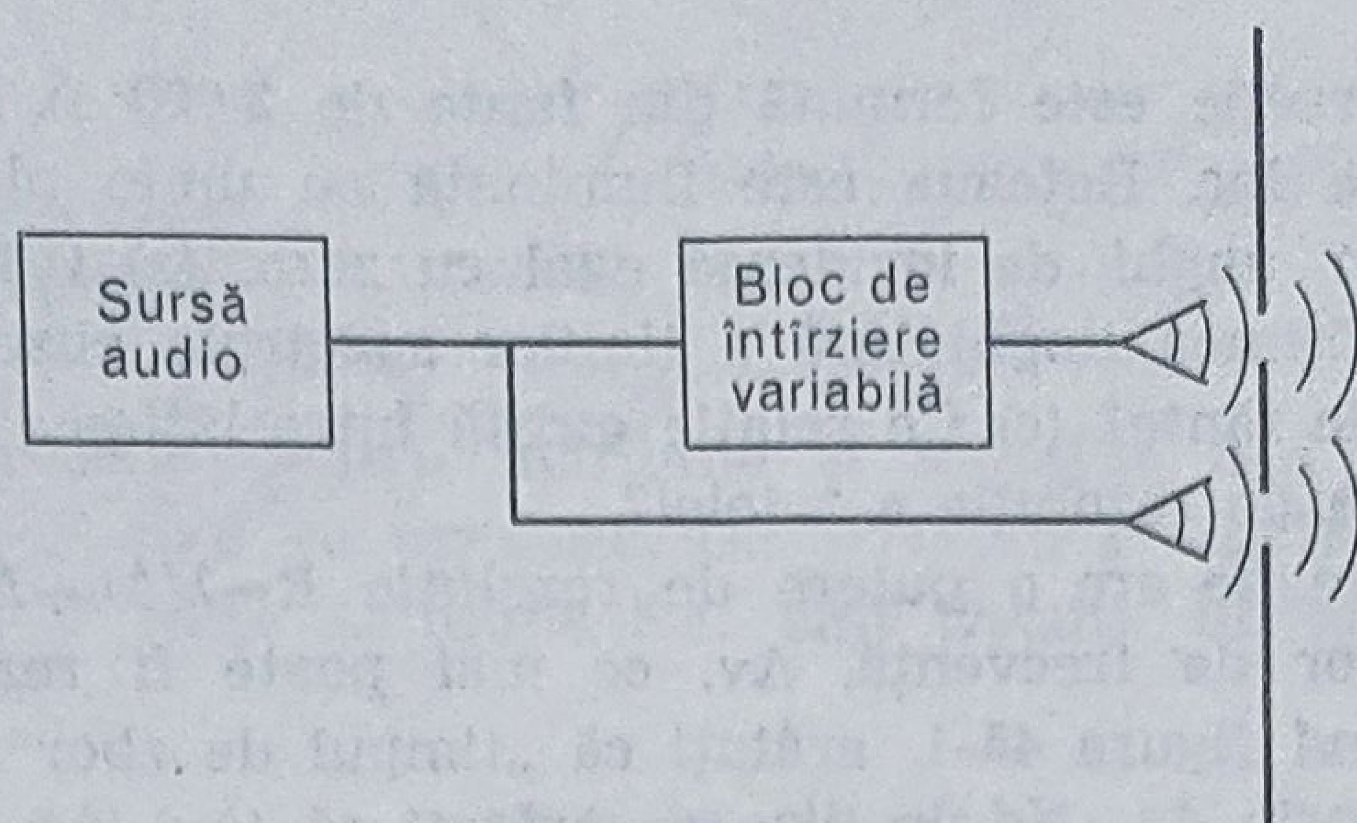


Figura 44-16.

tîrziere variabilă, faza unuia dintre difuzoare poate fi variată. Descrieţi în amănunt modificările ce se produc în distribuţia de intensităţi la mare distanţă, atunci cînd diferenţa de fază este variată de la zero la 2. Luaţi în considerare atît efectele de interferenţă cît şi cele de difracţie.

Capitolul 45

1. O reţea de difracţie are un mare număr de fante N fiecare de lăţime d. Fie I_{max} intensitatea unui maxim principal iar I_k intensitatea maximului secundar adiacent de ordinul k. (a) Dacă $k \ll N$, arătaţi folosind metoda fazorilor că aproximativ $\cdot I_k/I_{max}=1/\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$. (Comparaţi aceasta cu formula pentru cazul unei singure fante.) (b) Arătaţi, pentru acele maxime secundare care se află aproximativ la jumătatea distanţei dintre două maxime principale adiacente, că aproximativ $I_k/I_{max}=1/N^2$. (c) Consideraţi maximul principal central şi acele maxime secundare adiacente pentru care $k \ll N$. Arătaţi că această parte din figura de difracţie seamănă din punct de vedere cantitativ cu figura de difracţie produsă de o singură fantă de lăţime Nd.

2. Un fascicul de lumină dintr-un tub cu descărcare în gaz, cade sub incidenţă normală pe o reţea de difracţie ce are distanţa de $1{,}732\cdot10^{-4}$ cm între centrele fantelor adiacente. O radiaţie luminoasă verde prezintă maxime la următoarele unghiuri de transmisie măsurate $\theta=\pm17{,}6°$, $37{,}3°$, $-37{,}1°$, $65{,}2°$ şi $-65{,}0°$. (a) Calculaţi lungimea de undă a radiaţiei verzi care corespunde cel mai bine acestor date experimentale.

3. Un fascicul îngust de lumină monocromatică cade sub incidenţă normală pe o reţea de difracţie; ca urmare se produc maxime nete la următoarele unghiuri faţă de normală: 6°40′, 13°30′, 20°20′, 35°40′. Nici un alt maxim nu se produce pentru unghiuri cuprinse între 0° şi 35°40′. Distanţa între centrele fantelor adiacente din reţea este de $5{,}04\cdot10^{-4}$ cm. (a) Calculaţi lungimea de undă a luminii folosite. (b) Exprimaţi *cantitativ*, cît mai exact posibil lăţimea unei fante, folosind datele de mai sus.

4. Două linii spectrale au lungimile de undă λ şi $\lambda+\Delta\lambda$ respectiv, unde $\Delta\lambda \ll \lambda$. Arătaţi că separarea lor unghiulară $\Delta\theta$ într-un spectrometru cu reţea, este dată aproximativ de $\Delta\theta=\Delta\lambda/\sqrt{(d/m)^2-\lambda^2}$ unde d este distanţa dintre centrele a două fante adiacente iar m este ordinul în care se observă linia. Observaţi că separarea unghiulară creşte cu ordinul de difracţie.

5. O rețea de difracție este formată din fante de 3 000 Å lărgime cu 9 000 Å distanța între centrele lor. Rețeaua este iluminată cu unde plane monocromatice cu $\lambda = 6\,000$ Å, sub un unghi de incidență egal cu zero. (a) Cîte linii de difracție apar? (b) Care este lățimea unghiulară a liniilor spectrale observate, presupunînd că rețeaua are 1 000 de fante? (c) Ce relație există între lățimea unghiulară a liniilor spectrale și puterea de rezoluție a rețelei?

6. O rețea de difracție are o putere de rezoluție $R = \lambda/\Delta\lambda = Nm$. (a) Arătați că domeniul corespunzător de frecvență, $\Delta\nu$, ce mai poate fi rezolvat este dat de $\Delta\nu = c/Nm\lambda$. (b) Folosind figura 45-1, arătați că „timpul de zbor" al celor două radiații extreme diferă prin $\Delta t = Nd \sin\theta/c$. (c) Arătați că $(\Delta\nu)(\Delta t) = 1$, această relație fiind independentă de diferiții parametri ai rețelei de difracție.

7. Considerăm o rețea pătratică bidimensională infinită, ca în figura 45-14 b. Una din distanțele interplanare este clar chiar a_0. (a) Calculați următoarele cinci distanțe interplanare mai mici, folosind figuri similare figurii 45-16 a. (b) Arătați că răspunsurile dumneavoastră verifică formula generală

$$d = a_0/\sqrt{h^2 + k^2}$$

unde h, k sînt amîndouă numere întregi ce nu au un multiplu comun (singurul lor factor comun fiind unitatea).

Capitolul 46

1. Un fascicul de lumină este un amestec de unde plan polarizate cu planele de polarizație așezate la întîmplare*. Dacă este trecut printr-o placă polaroid** se constată că intensitatea transmisă variază cu un factor cinci în funcție de orientarea plăcii. Determinați intensitățile relative ale acestor două componente ale fasciculului incident.

2. Dorim să rotim cu 90° planul de polarizare al unui fascicul de lumină plan polarizat. (a) Cum putem realiza aceasta folosindu-ne numai de plăci polaroid? (b) Cîte astfel de plăci sînt necesare pentru ca pierderea totală de intensitate să fie mai mică de 5%? Presupunem că fiecare placă polaroid este ideală.

3. O placă polaroid și o placă sfert-de-undă sînt lipite împreună astfel încît, dacă această combinație este plasată cu fața A spre o monedă strălucitoare, putem vedea fața monedei dacă iluminăm cu o lumină de lungime de undă corespunzătoare. Cînd această combinație este plasată cu cealaltă față spre monedă, moneda nu poate fi văzută. Care din componente se află pe fața A și care este orientarea relativă a celor două componente?

4. Un fascicul de lumină polarizată circular dreapta este reflectat de o oglindă. (a) Fasciculul reflectat este polarizat circular drept sau stîng? (b) Se modifică direcția și sensul impulsului asociat luminii? (c) Se modifică direcția și sensul momentului cinetic asociat fasciculului? (d) Descrieți reacția „simțită" de oglindă.

---

* Sau natural polarizate. (N.T.)

** Vezi pagina 513

Factori de transformare

Factorii de conversie pentru mărimile şi unităţile mai mult sau mai puţin uzuale sînt date în tabelele ce urmează. De exemplu $1° = 2{,}778 \times 10^{-3}$ ture, astfel că $16{,}7° = 16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ ture. Unităţile S.I. sînt trecute în tabele cu litere mari.

UNGHI PLAN

	°	′	″	RAD	rot
1 grad=	1	60	3 600	$1{,}745 \cdot 10^{-2}$	$2{,}778 \cdot 10^{-3}$
1 min=	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	60	$2{,}909 \cdot 10^{-4}$	$4{,}630 \cdot 10^{-5}$
1 sec=	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	$4{,}848 \cdot 10^{-6}$	$7{,}716 \cdot 10^{-7}$
1 RADIAN=	57,30	3 438	$2{,}063 \cdot 10^{5}$	1	0,1592
1 rotaţie=	360	$2{,}16 \cdot 10^{4}$	$1{,}296 \cdot 10^{6}$	6,283	1

1 rot $= 2\pi$ rad. $= 360°$ $1° = 60' = 3\,600''$

Unghi solid

1 unghi solid total $= 4$ steradiani $= 12{,}566$ Sr

Lungime

	inch	m	milă	a.l
1 inch=	1	$5{,}540 \cdot 10^{-2}$	$1{,}578 \cdot 10^{-5}$	$2{,}6848 \cdot 10^{-18}$
1 METRU=	39,370	1	$1{,}214 \cdot 10^{-4}$	$1{,}057 \cdot 10^{-16}$
1 milă=	$6{,}336 \cdot 10^{4}$	$1{,}609 \cdot 10^{3}$	1	$0{,}8707 \cdot 10^{-12}$
1 an lumină=	$3{,}725 \cdot 10^{17}$	$9{,}461 \cdot 10^{15}$	$1{,}1485 \cdot 10^{12}$	1

1 foot (ft) $= 0{,}305$ m
1 unitate astronomică (UA) $= 1{,}495 \cdot 10^{11}$ m
1 parsec (pc) $= 3{,}048 \cdot 10^{16}$ m
1 unitate x (ux) $= 10^{-13}$ m
1 angstrom (Å) $= 10^{-10}$ m
1 milimicron (mμ) $= 1$ pm $= 10^{-9}$ m
1 micron (μ) $= 1\mu$ m $= 10^{-6}$ m

*) Adaptat în parte după G. Shortley şi D. Willims, *Elemente de Fizică*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Yersey, Ediţia a 2-a 1955. Aducerea la zi a fost efectuată după I. Iscrulescu, Gh. Ispăşoiu, V. Petrescu, *Sistemul internaţional de unităţi de măsură*, Ed. tehnică, 1970. (N.T.)

Arie

	m^2	cm^2	km^2	ha
1 METRU PĂTRAT=	1	10^4	10^{-6}	1
1 cm pătrat=	10^{-4}	1	10^{-10}	10^{-8}
1 km pătrat=	10^6	10^{10}	1	10^2
1 hectar=	10^4	10^8	10^{-2}	1

1 barn $= 10^{-28}$ m^2
1 inch pătrat $= 6{,}452 \cdot 10^{-4} m^2$
1 ar $= 10^2$ m^2
1 acre $= 4{,}047 \cdot 10^3$ m^2

Volum

	m^3	cm^3	l
1 METRU CUB=	1	10^6	10^3
1 cm^3=	10^{-6}	1	10^3
1 litru=	10^{-3}	10^3	1

1 litru = volumul a 1 kg de apă la densitatea maximă $= 1000{,}028$ cm^3

Masă

	kg	g	u	t
1 KILOGRAM=	1	10^3	$6{,}024 \cdot 10^{26}$	10^{-3}
1 gram=	10^{-3}	1	$6{,}024 \cdot 10^{23}$	10^{-6}
1 unitate atomică de masă=	$1{,}660 \cdot 10^{-24}$	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$	1	$1{,}660 \cdot 10^{-30}$
1 tonă=	10^3	10^6	$6{,}024 \cdot 10^{29}$	1

Densitate

	kg/m^3	g/cm^3
1 KG pe $METRU^3$=	1	10^{-3}
1 gram pe centimetru cub=	10^3	1

Timp

	a	d	h	min	s
1 an=	1	265,2	$2{,}766 \cdot 10^3$	$5{,}259 \cdot 10^5$	$3{,}156 \cdot 10^7$
1 zi=	$2{,}738 \cdot 10^{-3}$	1	24	1 440	$8{,}640 \cdot 10^4$
1 oră=	$1{,}741 \cdot 10^{-4}$	$4{,}167 \cdot 10^{-2}$	1	60	3 600
1 minut=	$1{,}901 \cdot 10^{-6}$	$6{,}944 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^2$	1	60
1 SECUNDĂ=	$3{,}169 \cdot 10^{-8}$	$1{,}157 \cdot 10^{-5}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1

Energie

	J	erg	cal	kWh	eV
1 JOULE=	1	10^7	0,2389	$2,778\cdot10^{-7}$	$6,242\cdot10^{18}$
1 erg=	10^{-7}	1	$2,389\cdot10^{-8}$	$2,778\cdot10^{-14}$	$6,242\cdot10^{11}$
1 cal=	4,186	$4,186\cdot10^7$	1	$1,163\cdot10^{-6}$	$2,613\cdot10^{19}$
1 kWh=	$3,6\cdot10^6$	$3,6\cdot10^{13}$	$8,601\cdot10^5$	1	$2,247\cdot10^{25}$
1 eV=	$1,602\cdot10^{-19}$	$1,602\cdot10^{-12}$	$3,827\cdot10^{-20}$	$4,450\cdot10^{-26}$	1

1 kgf—m=9,807 J
1 Ws=1 J=1 N·m

1 CPh=$2,6478\cdot10^6$ J
1 Wh=$3,6000\cdot10^3$ J

1 GeV=10^9 eV
1 MeV=10^6 eV
1 keV=10^3 eV

Dacă se foloseşte relaţia masă-energie a lui Einstein $E=mc^2$, atunci se pot calcula următoarele echivalenţe masă-energie:

$$1\ \text{kg} \leftrightarrow 8,987\cdot10^{16}\ \text{J}=5,610\cdot10^{35}\ \text{eV}$$
$$1\ \text{u} \leftrightarrow 1,492\cdot10^{-10}\ \text{J}=931,0\ \text{MeV}$$
$$1\ \text{J} \leftrightarrow 1,113\cdot10^{-17}\ \text{kg}=6,705\cdot10^{9}\ \text{u}$$

De asemenea se poate face o legătură între energie şi temperatură folosind relaţia: $E=kT$

$$1\ \text{eV} \leftrightarrow 1,1605\cdot10^4\ {}^\circ\text{K}$$

Putere

W	kW	Cal/s	kcal/h	erg/s
1 WATT=1	10^{-3}	0,2389	0,8598	10^7
1 kW=10^3	1	238,9	$8,598\cdot10^4$	10^{10}
1 cal/s=4,1868	$4,186\cdot10^{-3}$	1	3,60000	$4,1868\cdot10^7$
1 kCal/h=1,1630	$1,1631\cdot10^{-3}$	0,2778	1	$1,1630\cdot10^7$
1 erg/s=10^{-7}	10^{-10}	$2,3885\cdot10^{-8}$	$8,5984\cdot10^{-8}$	1

Aceste unităţi pentru putere sînt folosite ca unităţi şi pentru fluxul termic (debitul de căldură).

Sarcină electrică

	C	A·h	F	stat coulomb
1 COULOMB=	1	$2,778\cdot10^{-4}$	$1,036\cdot10^{-5}$	$2,998\cdot10^9$
1 Amper-oră=	3600	1	$3,730\cdot10^{-2}$	$1,079\cdot10^{13}$
1 Faraday=	$9,652\cdot10^4$	26,81	1	$2,893\cdot10^{14}$
1 statcoulomb=	$3,336\cdot10^{-10}$	$9,266\cdot10^{-14}$	$3,456\cdot10^{-15}$	1

1 sarcină elementară=$1,602\cdot10^{-19}$ C

Viteză

	km/s	km/h	m/s	cm/s
1 km/s =	1	$3{,}6\cdot10^{3}$	10^{3}	10^{5}
1 km/h =	$2{,}7778\cdot10^{-4}$	1	0,2778	27,778
1 METRU pe SECUNDA =	10^{-3}	3,6	1	100
1 cm/s =	10^{-5}	$3{,}6\cdot10^{-2}$	10^{-2}	1

Forţă

	N	kgf	dy
1 NEWTON =	1	0,1020	10^{5}
1 kilogram forţă =	9,807	1	$9{,}807\cdot10^{-5}$
1 dynă	10^{-5}	$1{,}020\cdot10^{-6}$	1

Presiune

	N/m^2	kgf/m^2	Torr	at	atm
1 NEWTON pe METRU² =	1	$4{,}015\cdot10^{-3}$	$7{,}5006\cdot10^{-3}$	$1{,}0197\cdot10^{-5}$	$9{,}8692\cdot10^{-6}$
1 kgf/m² a) =	9,8066	1	$7{,}3556\cdot10^{-2}$	10^{-4}	$9{,}6784\cdot10^{-5}$
1 mm Hg (=1 Torr) a)	$1{,}3332\cdot10^{2}$	13,5951	1	$1{,}3595\cdot10^{-3}$	$1{,}3158\cdot10^{-3}$
1 atmosferă tehnică (kgf/cm²) a)	$9{,}8066\cdot10^{4}$	10^{4}	$0{,}7356\cdot10^{3}$	1	0,9678
1 atmosferă fizică =	$1{,}0132\cdot10^{5}$	$1{,}0332\cdot10^{4}$	$0{,}7600\cdot10^{3}$	1,0332	1

1 psi $=7{,}042\cdot10^{-2}$ atm $=7{,}135\cdot10^{3}$ N/m^2; 1 bar $=10^{6}$ $dyne/cm^2=10^{5}$ N/m^2

a) unde acceleraţia gravitaţiei are valoare standard de $g=9{,}80665$ m/s^2

Rezistivitatea electrică

	Ωm	Ωcm	$\Omega\,\frac{mm^2}{m}$
1 OHM-METRU =	1	10^{2}	10^{6}
1 ohm-centimetru =	10^{-2}	1	10^{4}
1 ohm-milimetru² pe metru =	10^{-6}	10^{-4}	1

Capacitate

	F	mF	μF	pF
1 FARAD=	1	10^6	10^9	10^{12}
1 milifarad=	10^{-6}	1	10^3	10^6
1 microfarad=	10^{-9}	10^{-3}	1	10^3
1 picofarad	10^{-12}	10^{-6}	10^{-3}	1

Inductanță

	H	mH	H
1 HENRY=	1	10^3	10^6
1 milihenry=	10^{-3}	1	10^3
1 microhenry=	10^{-6}	10^{-3}	1

Inducția magnetică

	T	Gs
1 TESLA	1	10^4
1 Gauss=	10^{-4}	1

1 Tesla=1 Weber/m^2

Intensitatea cîmpului magnetic

	A/m	Oe
1 AMPER pe METRU=	1	$1{,}257 \cdot 10^{-2}$
1 Oersted=	79,58	1

TABELA PARTICULELOR FUNDAMENTALE

Numele familiei	Numele particulei	Simbolul	Masa	Spinul	Stranietatea [b]	Sarcina	Antiparticula [c]	Numărul de particule	Viața medie [d] în s	Transformările cele mai probabile.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Leptoni	Foton	γ (radiație gamma)	0	1	0	0	Aceeași particulă	1	Infinit	—
	Electron	e^-	1	$\frac{1}{2}$	—	$-e$	e^+	2	Infinit	—
	Neutrin electronic	ν_e	0	$\frac{1}{2}$	—	0	$\bar{\nu}_e$	2	Infinit	—
	Miuon	μ^-	206,77	$\frac{1}{2}$	—	$-e$	μ^+	2	$2{,}212 \cdot 10^{-6}$	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
	Neutrin miuonic	ν_μ	0 (?)	$\frac{1}{2}$	—	0	$\bar{\nu}_\mu$	2	Infinit	—
Mezoni	Pion	π^+ π^0	273,2 264,2	0 0	0 0	$+e$ 0	π^- π^0	3	$2{,}212 \cdot 10^{-8}$ $1{,}9 \cdot 10^{-16}$	$\mu^+ + \nu_\mu$ $\gamma + \gamma$
	Kaon	K^+ K°	966,6 974	0 0	+1 +1	$+e$ 0	$\bar{K}^+$ $\bar{K}^\circ$	4	$1{,}22 \cdot 10^{-8}$ $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ și $6 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^\circ$ $\pi^+ + \pi^-$

Barioni	Nucleon	p^+ (proton)	1 836,12	$\frac{1}{2}$	0	+e	$\overline{p}^+$	4	Infinit	
		n° (neutron)	1 838,65	$\frac{1}{2}$	0	0	$\overline{n}^\circ$		1 013	$p+e^-+\overline{\nu}_e$
	Particulă lambda	Λ°	2 183,8	$\frac{1}{2}$	—1	0	$\overline{\Lambda}^\circ$	2	$2{,}51\cdot10^{-10}$	$p+\pi^-$
	Particulă sigma	Σ^+	2 327,7	$\frac{1}{2}$	—1	+e	$\overline{\Sigma^+}$	6	$8{,}1\cdot10^{-11}$	$n+\pi^+$
		Σ^-	2 340,5	$\frac{1}{2}$	—1	—e	$\overline{\Sigma^-}$		$1{,}6\cdot10^{-10}$	$n+\pi^-$
		Σ°	2 332	$\frac{1}{2}$	—1	0	$\overline{\Sigma}^\circ$		$\sim 10^{-20}$	$\Lambda^\circ+\gamma$
	Particula hi	Ξ^-	2 580	$\frac{1}{2}$	—2	—e	$\overline{\Xi^-}$	4	$1{,}3\cdot10^{-10}$	$\Lambda^\circ+\pi^-$
		Ξ°	2 570	$\frac{1}{2}$	—2	0	$\overline{\Xi}^\circ$		$\sim 10^{-10}$	$\Lambda^\circ+\pi^\circ$

a. Adaptat și modificat după „Lumea particulelor elementare“ de Kenneth W. Ford.

b. Acesta este un „număr cuantic“ a cărui cunoaștere ne permite înțelegerea interacțiilor reciproce ale particulelor.

c. Antiparticulele au aceeași masă și spin ca particular dar au sarcină și număr de stranietate de semn opus.

d. Mezonul K° are două valori diferite pentru viața medie; toate celelalte particule au doar o valoare

LAUREAȚI AI PREMIULUI NOBEL PENTRU FIZICĂ

An	Laureat	Ani de viață	Realizare
1901	Wilhelm Konrad Röntgen (german)	1845—1923	Descoperirea radiațiilor X
1902	Hendrik Antoon Lorentz (olandez)	1853—1928	Influența magnetismului asupra radiației emise de atomi
	Pieter-Zeeman (olandez)	1865—1943	
1903	Henry Becquerel (francez)	1852—1908	Descoperirea radiactivității naturale și a elementelor radioactive radiu și poloniu
	Pierre Curie (francez)	1850—1906	
	Marie Curie (francez)	1867—1934	
1904	John W. Strutt (Rayleigh) (englez)	1842—1919	Descoperirea aragonului
1905	Philipp Lenard (german)	1862—1947	Studii asupra radiațiilor catodice
1906	Sir Joseph John Thomson (englez)	1856—1940	Trecerea curentului electric prin gaze rarefiate
1907	Albert A. Michelson (american)	1852—1931	Invenția interferometrului și studii spectroscopice și meteorologice
1908	Gabriel Lippmann (francez)	1845—1921	Fotografia color
1909	Guglielmo Marconi (italian)	1874—1937	Dezvoltarea telegrafiei fără fir
	Karl Ferdinand Braun (german)	1850—1918	
1910	Johannes Diderik van der Walls (olandez)	1837—1923	Ecuația de stare a gazelor și a fluidelor
1911	Wilhelm Wien (german)	1864—1928	Legea radiației termice
1912	Nils Gustaf Dalén (suedez)	1869—1937	Procedeu de aprindere automată a farurilor marine
1913	Heike Kamerlingh-Onnes (olandez)	1853—1926	Proprietățile materiei la temperaturi scăzute; producerea heliului lichid
1914	Max von Laue (german)	1879—1960	Difracția radiațiilor X pe cristale
1915	Sir William Henry Bragg (englez)	1862—1942	Studiul structurii cristalelor cu ajutorul radiațiilor X
	Sir Villiam Lawrence Bragg (englez, fiul lui)	1890—	
1916	nu s-a atribuit		
1917	Charles Glover Barkla (englez)	1877—1944	Descoperirea radiațiilor X caracteristice ale elementelor; polarizarea razelor X
1918	Max Planck (german)	1858—1947	Noțiunea de cuantă de energie
1919	Johannes Stark (german)	1874—1957	Descoperirea efectului Doppler pentru radiațiile canal și despicării liniilor spectrale în cîmp electric
1920	Charles Edouard Guillaume (elvețian)	1861—1938	Descoperirea anomaliilor aliajelor de nichel-oțel
1921	Albert Einstein (german)	1879—1955	Descoperirea legii efectului fotoelectric
1922	Niels Bohr (danez)	1885—1963	Cercetări asupra structurii atomilor și a radiațiilor emise de atomi
1923	Robert Andreews Millikan (american)	1868—1953	Lucrări asupra sarcinii electronului și a efectului fotoelectric
1924	Karl Manne G. Siegbahn (suedez)	1886—	Cercetări în spectroscopia radiațiilor X

1925 James Franck (german)	1882—1964	Legile care guvernează ciocnirile electron-atom și fluorescența provocată
Gustav Hertz (german)	1887—	
1926 Jean Perrin (francez)	1870—1942	Lucrări asupra structurii discontinue a materiei și descoperirea echilibrului sedimentației
1927 Arthur H. Compton (american)	1892—1962	Descoperirea împrăștierii Compton a radiațiilor X pe sarcinile electrice
Charles T. R. Wilson (englez)	1869—1959	Inventarea camerei cu ceață pentru vizualizarea traiectoriei particulelor încărcate
1928 Sir Owen Willams Richardson (englez)	1879—1959	Descoperirea legii emisiei electronilor de către metalele incandescente, lege ce-i poartă numele
1929 Luis-Victor de Broglie (francez)	1892—	Descoperirea proprietăților ondulatorii ale electronului
1930 Sir Chandrasekhara Raman (indian)	1888—1970	Lucrări asupra împrăștierii luminii și descoperirea fenomenului de împrăștiere combinată a luminii (efectul Raman)
1931 nu s-a atribuit		
1932 Werner Heisenberg (german)	1901—	Crearea mecanicii cuantice
1933 Paul Adrien Maurice Dirac (englez)	1902—	Descoperiri noi în exprimarea teoriei atomice
Erwin Schrödinger (austriac)	1887—1961	
1934 nu s-a atribuit		
1935 James Chadwick (englez)	1891—	Descoperirea neutronului
1936 Victor Hess (austriac)	1883—1964	Descoperirea radiației cosmice
Carl David Anderson (american)	1905—	Descoperirea positronului
1937 Clinton Joseph Davisson (american)	1881—1958	Descoperirea difracției electronilor prin cristale
George P. Thomson (englez)	1892—	
1938 Enrico Fermi (italian)	1901—1954	Identificarea de noi elemente radioactive produse prin iradiere cu neutroni
1939 Ernest Orlando Lawrence (american)	1901—1958	Invenția ciclotronului
1940–1942 } nu s-a atribuit		
1943 Otto Stern (american)	1888—1969	Lucrări cu fascicule moleculare și descoperirea momentului magnetic al protonului
1944 Isidor Isaac Rabi (american)	1898—	Rezonanța magnetică nucleară
1945 Wolfgang Pauli (austriac)	1900—1958	Descoperirea principiului de excluziune
1946 Percy Williams Bridgman (american)	1882—1961	Fizica presiunilor înalte
1947 Sir Edward Appleton (englez)	1892—1965	Fizica straturilor superioare ale atmosferei și descoperirea stratului Appleton
1948 Patrick Maynard Stuart Blackett (englez)	1897—	Descoperiri în radiația cosmică și fizica nucleară
1949 Hideki Yukawa (japonez)	1907—	Prezicerea existenței mezonului

Anul	Laureat	Ani de viață	Contribuție
1950	Cecil Frank Powell (englez)	1903—	Studiul fotografic al proceselor nucleare și descoperiri în legătură cu mezonii
1951	Sir John Dpuglas Cockroft (englez)	1897—1967	Transmitația nucleelor atomice cu ajutorul acceleratoarelor de particule
	Ernest Thomas Sinton Walton (irlandez)	1903—	
1952	Felix Block (american)	1905—	Măsurători de cîmpuri magnetice nucleare
	Edward Mills Purcel (american)	1912—	
1953	Frits Zernike (olandez)	1888—1966	Invenția microscopului cu contrast de fază
1954	Max Born (englez)	1882—1970	Lucrări în domeniul mecanicii cuantice și interpretarea statistică a funcției de undă
	Walter Bothe (german)	1891—1957	Studiul radiației cosmice prin metode de coincidență
1955	Willis E. Lamb Jr. (american)	1913—	Structura fină a nivelelor hidrogenului
	Polykarp Kusch (american)	1911—	Momentul magnetic al electronului
1956	John Bardeen (american)	1908—	Invenția și dezvoltarea tranzistorului
	Walter H. Brattain (american)	1902—	
	William B. Shockley (american)	1910—	
1957	Chen Ning Yang (chinez)	1922—	Neconservarea parității și lucrări în domeniul fizicii particulelor elementare
	Tsung Dao Lee (chinez)	1926—	
1958	Pavel A. Cerenkov (sovietic)	1904—	Descoperirea și interpretarea efectului Cerenkov produs de particulele de mare viteză ce străbat materia
	Ilia M. Frank (sovietic)	1908—	
	Igor E. Tamm (sovietic)	1895—	
1959	Owen Chamberlain (american)	1920—	Descoperirea antiprotonului
	Emilio Gino Segrè (american)	1905—	
1960	Donald Arthur Glaser (american)	1926—	Invenția camerei cu bule
1961	Robert L. Hofstadter (american)	1915—	Structura electromagnetică a nucleonilor
	Rudolf Ludwig Mössbauer (german)	1929—	Descoperirea absorbției de rezonanță fără recul a radiației gamma de către nuclee
1962	Lev Davidovici Landau (sovietic)	1908—	Teoria materiei condensate; fenomenele de suprafluiditate și supraconductibilitate
1963	Eugene Paul Wigner (american)	1902—	Contribuții la fizica teoretică atomică și nucleară
	Maria Goeppert-Mayer (american)	1906—	Teoria modelului păturilor nucleare și a numerelor magice
	J. Hans Daniel Jensen (german)	1907—	
1964	Charles Hard Townes (american)	1915—	Crearea maserilor și laserilor; teoria radiației atomice coerente (electronica cuantică)
	Nikolai Ghennadievici Basov (sovietic)	1922—	
	Alexandr Prohorov (sovietic)	1916—	
1965	Richard Phillips Feynman (american)	1918—	Contribuții la dezvoltarea electrodinamicii cuantice
	Julian Seymour Schwinger (american)	1918—	
	Shin Ichiro Tomonaga (japonez)	1906—	
1966	Alfred Kastler (francez)	1902—	Studiul pompajului optic și a spectroscopiei hertziene

1967 Hans Albrecht Bethe (american)	1906—	Producerea energiei în stele
1968 Louis Walter Alvarez (american)	1911—	Perfecționarea camerei cu bule
1969 Murray Gell-Mann (american)	1929—	Clasificarea particulelor elementare
1970 Hannesolof Gosta Alfrén (suedez)	1908—	Cercetări fundamentale în magnetohidrodinamică
Louis Néel (francez)	1904—	Teoria fenomenelor antiferomagnetice
1971 Dennis Gabor (american)	1900—	Tehnica holografiei
1972 John Bardeen (american)	1908—	Teoria cuantică a supraconductibilității
Leon N. Cooper (american)	1938—	
John R. Schriffer (american)	1931—	
1973 Ivar Giaever (american)	1929—	Rezultate deosebite în studiul efectului tunel
Brian D. Josephson (eglez)	1940—	
Léo Esaki (american)	1925—	
1974 Sir Martin Ryle (englez)	1918—	Cercetări de pionierat în radioastrofizică
Anthony Hewish (englez)	1924—	Cercetări decisive în descoperirea pulsarilor
1975 Aage Bohr (danez, fiul lui N. Bohr)	1926	Descoperirea relației între mișcările de ansamblu și cele ale particulelor în nucleele atomice și elaborarea unei teorii a structurii nucleului.
Ben R. Mottelson (danez)	1922	
James Rainwater (american)	1918	

Răspunsul la problemele cu număr impar

Cap. 26

1. 0,82 A

3. $\pm 2{,}4 \times 10^{-8}$ C.

5. $2{,}3 \times 10^{-8}$ C

7. (*a*) $Q = -2\sqrt{2}\,q$,
(*b*) nu

9. (*a*) $5{,}7 \times 10^{13}$ C
(*b*) nu
(*c*) 660 t

11. $3{,}8 \times 10^{-5}$ C
$1{,}2 \times 10^{-5}$ C

13. (*b*) In lungul diagonalei corpului

15. (*a*) $6{,}3 \times 10^{11}$,
(*b*) $7{,}3 \times 10^{-13}$

17. (*a*) 510 N
(*b*) $7{,}7 \times 10^{28}$ m/s^2

Cap. 27

5. $6{,}6 \times 10^{-11}$ C

9. (*a*) Sarcina mai mare produce un cîmp de 13×10^4 N/C în punctul în care se află sarcina mai mică; sarcina mai mică produce un cîmp de $5{,}3 \times 10^4$ N/C în punctul celei mai mari
(*b*) $1{,}1 \times 10^{-2}$ N, repulsivă

11. $\vec{E}$ se găsește în planul median și este radial

13. $1{,}1 \times 10^5$ N/C, în sus

17. $E = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$, în lungul axei de simetrie, dinspre emisferă

21. (*a*) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$,
(*b*) $E = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{(q_1-q_2)a}{(a^2+x)^{3/2}}$

25. (*a*) $1{,}5 \times 10^3$ N/C,
(*b*) $2{,}4 \times 10^{-16}$ N (în sus)
(*c*) $1{,}6 \times 10^{-26}$ N
(*d*) $1{,}5 \times 10^{10}$

27. (*a*) 7,1 cm
(*b*) $2{,}9 \times 10^{-8}$ s
(*c*) 11%

29. $\frac{dE}{dz} = -\frac{8q}{\pi\varepsilon_0 l^3}$, l — distanța dintre sarcini; da.

31. $1{,}64 \times 10^{-19}$ C.

Cap. 28

1. $\pi R^2 E$ (rezultat aşteptat)
3. $EA \cos\theta$
7. (a) $4,0\times10^6$ N/C
   (b) $E=0$
9. (a) $E=\tau/\varepsilon_0$, spre stînga
   (b) $E=0$
   (c) $E=\tau/\varepsilon_0$, spre dreapta
11. $4,9\times10^{-10}$ C
13. 0,44 mm
19. (a) $E=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 lr}$ (radial înspre interior), l — lungimea cilindrilor
    (b) — q pe suprafaţa interioară şi — q se suprafaţa exterioară
    (c) $E=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 lr}$ (radial înspre exterior)
21. $2,5\times10^{-9}$ C/m²
23. $1,9\times10^2$ N,
    $2,9\times10^{28}$ m/s²
25. (a) 1,1 $N\cdot m^2/c$
    (b) $9,3\times10^{-12}$ C

Cap. 29

1. 0,89 mm
3. 900 V
5. (a) Între sarcini distanţa de 25 cm de la $+q$ şi în afara sarcinilor la 50 cm de $+q$.
   (b) În afara sarcinilor la 140 cm de $+q$
7. $V_A-V_B=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{d}{a(a+d)}$
9. $1,9\times10^{-29}$ C·m; valoarea din text ($0,61\times10^{-29}$ C·m) este mai mică şi corectă; presupunerile făcute în problemă sînt simplificatoare.
11. 99 t
13. $-6,4\times10^{-7}$ J
15. (a) — 0,12 V
    (b) $1,8\times10^{-8}$ N/C, radial înspre interior
17. 2 900 V
21. Nu
23. (a) — 180 V
    (b) +2 900 V şi —9 000 V
27. $-0,21\ q^2/\varepsilon_0 a$
29. (a) $1,1\times10^{17}$ V/m,
    (b) $4,6\times10^{21}$ V/m, presupunînd o rază a nucleului de 5×10^{-15} m
31. (a) $2,6\times10^5$ V
    (b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot c=9,745\ c$
33. 9,0 kW
35. (a) $3,2\times10^{-13}$ J
    (b) $1,6\times10^{-13}$ J
    (c) proton

Cap. 30

1. (a) $q_2=q_8=4,8\times10^{-4}$ C
       $V_2=240$ V
       $V_8=60$ V
   (b) $q_2=2,0\times10^{-4}$ C
       $q_8=7,7\times10^{-4}$ C
       $V_2=V_8=96$ V;
   (c) $q_2=q_8=0$,
       $V_2=V_8=0$
3. 43 pF

11. 3,2 μ F

13. 4 μ F

15. 7,3 μ F

21. Mică

23. Presupunînd $k=5,4$:
   (a) 10^4 V/m
   (b) $+5,0\times10^{-9}$ C, pe placa pozitivă,
   (c) $-4,1\times10^{-9}$ C, în fața plăcii pozitive

25. 0,63 m^2

27. 0,11 J/m^3

31. (a) $1,3\times10^{-7}$ J
   (b) nu

33. $7,0\times10^{-6}$ C

35. 7,0 cenți

37. (a) $q_1=q_2=3,3\times10^{-4}$ C
   $q_3=4,0\times10^{-4}$ C
   (b) $V_1=33$ V
   $V_2=67$ V
   $V_3=100$ V
   (c) $U_1=5,4\times10^{-3}$ J
   $U_2=10,9\times10^{-3}$ J
   $U_3=2,0\times10^{-2}$ J

Cap. 31

1. (a) 1 200 C.
   (b) $7,5\times10^{21}$ electroni

3. (a) 2,4, fierul fiind mai mare
   (b) nu.

5. $6,7\times10^{-6}$ C/m²

7. 54Ω

9. (a) $2,2\times10^{-7}\Omega$
   (b) nichel ($\rho=6,8\times10^{-8}\Omega\cdot$m)

11. (a) 260°C
   (b) da

13. 0,39% (ρ)
   0,0017% (l)
   0,0034% (A)

17. 11 Ω

19. (a) $4,9\times10^6$ A/m²
   (b) $8,4\times10^{-2}$ V/m
   (c) 26 V
   (d) 640 W

21. 620 W.

23. (a) 8,7%
   (b) mai mic

Cap. 32

1. $1,1\times10^4$ J

3. —0,62%

7. (a) 990Ω
   (b) $9,9\times10^{-4}$ W

9. $V_d-V_c=1,3$ V

11. (a) 120Ω
   (b) $i_1=0,051$ A
   $i_4=0,013$ A
   $i_2=i_3=0,019$ A

13. (a) $R=\frac{1}{2}r$
   (b) $E^2/2r$

17. 38Ω

19. (a) 10Ω
   (b) 14Ω
   (c) 10Ω

21. serie: $i=\frac{2\mathcal{E}}{R+2r}$
   paralel: $i=\frac{2\mathcal{E}}{2R+r}$

Dispunerea în serie dă *întotdeauna* un curent mai mare.

23. (a) Puneţi pe R_1 aproximativ la mijlocul domeniului lui de variaţie; variaţi curentul aproximativ cu ajutorul lui R_2; faceţi corecţia fină cu R_1.
(b) Variaţii procentuale relativ mari ale lui R_1 determină doar mici variaţii procentuale în rezistenţă într-o dispunere a lor în paralel, permiţînd astfel o reglare fină. Raportul este de 1 la 21.

27. 2,7%

29. 4,6 constante de timp

33. (a) $9,6\times10^{-7}$ C/s
(b) $1,1\times10^{-6}$ W
(c) $2,7\times10^{-6}$ W
(d) $3,8\times10^{-6}$ W

Cap. 33

1. (a) Est
(b) $6,3\times10^{14}$ m/s^2
(c) 3,00 mm

3. 7,5 N, perpendicular pe fir şi pe $\vec{B}$

5. Vezi anexa F.

7. 3,8 C

9. 450 Gs$=4,5\cdot10^{-2}$ T, perpendicular pe bară şi înclinat cu 31° faţă de normala la planul traiectoriei

11. $4,3\times10^{-3}$ N·m. Vectorul cuplu este paralel cu laţura lungă a bobinei şi este îndreptat în jos.

15. (a) $1,4\times10^{-4}$ m/s,
(b) $4,5\times10^{-23}$ N (în jos)
(c) $2,8\times10^{-4}$ V/m (în jos)
(d) $5,7\times10^{-6}$ V (sus+, jos—),
(e) la fel ca (b).

17. (a) $E_p=E_d=(1/2)E_\alpha$,
(b) $R_d=14$ cm.
(c) $R_\alpha=14$ cm.

19. (a) $2,6\times10^{7}$ m/s,
(b) $1,1\times10^{-7}$ s,
(c) 14 MeV,
(d) $7,0\times10^{6}$ V.

23. $1,6\times10^{-8}$ Wb/m^2, orizontal şi normal la ecuator.

25. $T=3,6\times10^{-10}$ s,
$p=0,17$ mm,
$r=1,5$ mm.

27. $2,11\times10^{-25}$ Kg sau 127 m_p.

29. (a) Creşte,
(b) Descreşte.

31. (a) 8,5 MeV,
(b) 0,80 Wb/m^2,
(c) 34 MeV,
(d) 24 MHz,
(e) 34 MeV, 1,6 Wb/m^2,
34 MeV, 12 MHz.

33. 1,4

35. 3 800 m/s.

Cap. 34

1. $7,9\times10^{-3}$ Wb/m^2.

3. (a) $3,2\times10^{-16}$ N, paralel cu curentul;
(b) $3,2\times10^{-16}$ N, radial, înspre exterior dacă $\vec{v}$ este paralel cu curentul;
(c) zero.

7. $1{,}0 \times 10^{-6}$ Wb/m

9. $\vec{B}=0$ în lungul unei linii, paralelă cu firul, la 4,0 mm de el. Dacă curentul este orizontal și îndreptat spre observator, iar cîmpul exterior este orizontal de la stînga spre dreapta, linia se găsește exact deasupra firului.

11. $8{,}0 \times 10^{-5}$ Wb/m², în sus.

13. $3{,}2 \times 10^{-3}$ N, către firul lung.

23. (a) $1{,}0 \times 10^{-3}$ Wb/m², iese din figură;
 (b) $8{,}0 \times 10^{-4}$ Wb/m², iese din figură.

27. (a) $9{,}4 \times 10^{-5}$ Wb/m²,
 (b) $1{,}5 \times 10^{-6}$ Nm.

Cap. 35

1. $2{,}0 \times 10^{-2}$ C.

3. Zero.

9. $Vm=\pi^2 BR^2 f$,
 $i_m=\pi^2 BR^2 f/R_M$

11. $3{,}0 \times 10^{-4}$ V.

13. (a) $3{,}1 \times 10^{-2}$ Wb/s,
 (b) de la stînga la dreapta

17. (a) $3{,}6 \times 10^{7}$ m/s², spre dreapta;
 (b) zero;
 (c) $4{,}4 \times 10^{7}$ m/s², spre stînga.

Cap. 36

1. Lăsînd să treacă 10 A/s

7. $1{,}0 \times 10^{-7}$ Wb.

12. 12 s.

13. 27 A/s.

15. (a) 10 A,
 (b) 100 J.

17. 0,63 J/m³.

21. (a) $2{,}5 \times 10^{-6}$ J/m,
 (b) 14×10^{-6} J/m,
 (c) $0{,}8 \times 10^{-6}$ J/m.

23. $1{,}5 \times 10^{8}$ V/m.

Cap. 37

1. (a) $5{,}0 \times 10^{7}$ A,
 (b) da,
 (c) nu.

3. (a) $1{,}4 \times 10^{11}$ V/m
 (b) $2{,}8 \times 10^{-3}$ Wb/m².

5. (a) 7,6 Am²,
 (b) 11 Nm.

9. $7{,}5 \times 10^{-6}$ Wb/m².

11. (a) 1,8 Wb/m²,
 (b) $6{,}5 \times 10^{-23}$ J.

Cap. 38

1. 600, 710, 1 100, și 1 300 Hz.

13. (a) 35 Hz.
 (b) 38 și 33 Hz.

15. $\omega=1/\sqrt{L_1C_1}=1/\sqrt{L_2C_2}$

19. $i_d=\varepsilon_0\pi r^2 \dfrac{dE}{dt}$ $(r\leq R)$,
 $i_d=\varepsilon_0\pi R^2 \dfrac{dE}{dt}$ $(r\geq R)$.

21. (a) $1{,}4 \times 10^{14}$ V/ms,
 (b) $9{,}9 \times 10^{-6}$ Wb/m².

Cap. 39

3. 4,9 cm, $5{,}2\times10^8$ m/s$-1{,}7$ c.

9. 18 cm, 12 cm.

13. (a) a^2EB/μ_0 pentru fețele paralele cu planul xy și zero pentru celelalte; (b) zero.

15. 1 000 V/m, $3{,}4\times10^{-6}$ Wb/m^2.

Cap. 40

1. (a) 5 100 A și 6 100 A,
   (b) $5{,}5\times10^{14}$ Hz și $1{,}8\times10^{-15}$ s.

3. $F_{rad}-6{,}0\times10^8$ N,
   $F_{gr}-3{,}6\times10^{22}$ N.

7. $1{,}3\times10^{-7}$ N/m^2.

11. 0,13.

13. (b) 7,3 (Hz)/(mile/h)$-16{,}3$ Hz/(m/s)$-4{,}5$ Hz/(Km/h).

15. $3{,}8\times10^{-2}$ A.

17. Galben portocaliu.

Cap. 41

3. $2{,}05\times10^8$ m/s.

5. 1,56

15. (b) 0,17.

19. Acoperiți centrul fiecărei fețe cu un cerc de rază 0,33 cm. Fracțiunea acoperită este 0,35.

Cap. 42

1. (a) 7,
   (b) 5,
   (c) 2,

3. 40 cm.

6. Pe coloane, alternativ:
   (a) +, +40, —20, +2, nu, da;
   (b) concav, +40, +60, —2, da, nu;
   (e) convex, —20, +20, +0,5, nu, da;
   (g) —20, —, —, +5, +0,80, nu da.

7. Obiectul în centrul de curbură.

9. 4,24 cm.

10. Pe coloane, alternativ:
    (a)—18, nu;
    (c) +71, da;
    (e) +30, nu;
    (g) —26, nu.

11. Pe coloane, alternativ:
    (a) +, X, X, +20, X, —1, da, nu;
    (c) convergent, +, X, X, —10, X, nu, da;
    (e) convergent, +30, —15, +1,5, nu, da;
    (g) divergent, —120, —9,2, +0,92, nu, da;
    (i) convergent, +3,3, X, X, +5, X, —, nu

17. 4,5 cm, 9,0 cm.

19. Presupunînd că lumina vine din stînga, la distanța de $-\frac{(rn-2)}{2(n-1)^2}$ spre dreapta de la marginea din dreapta a sferei.

21. (a) R' este negativ iar R'' este pozitiv,
(b) $i = \frac{-2r}{n+1}$,
(c) virtuală şi dreaptă.
23. (a) În aceeaşi poziţie cu obiectul dar mai mare de 5,0 ori,
(c) virtuală şi inversă.

Cap. 43

1. Fanta trebuie să fie de 0,034 mm.
3. 0,15°.
5. $6{,}6\times10^{-3}$ mm.
7. 3,0 mm.
9. $I = \frac{I_m}{9}\left[1+8\cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)\right]$
11. $y = 17{,}4 \sin(\omega t + 13{,}3°)$.
13. 80 milioane.
14. 1,21.
17. 4 800 Å (albastru)
19. 6 700 Å.
23. 5 880 Å.
25. 6 057,8021 Å.

Cap. 44

1. 0,17 mm.
3. (a) $\lambda_a = 2\lambda_b$,
(b) coincidenţa are loc atunci cînd $m_b = 2m_a$.
5. 79,7°.
7. (a) 52,9°,
(b) 10,2°,
(c) 5,1°.
9. 9 100 m.
11. (a) 0,16 sec de arc,
(b) $7{,}4\times10^{7}$ Km,
(c) $2{,}2\times10^{-4}$ mm.
15. 3.
17. (a) trebuie ca $d = 4a$,
(b) lipseşte fiecare a patra franje.

Cap. 45

1. Trei ordine complete.
5. Intensitatea va atinge maximul pentru al douăzecelea ordin pentru albastru şi al optulea ordin pentru roşu. Ordinele se vor suprapune astfel încît va apare aproape alb.
7. Toate lungimile de undă sub 6 300 Å.
9. 0°, ±10°, ±21°, ±32,° ±45°, şi ±62°.
11. 5 200Å la 6 200 Å.
17. (a) 0,0032°/A,
0,0077°/A,
0,024°/A;
(b) 40 000,
80 000,
120 000.
19. 3 600 linii.
21. (a) $4{,}6\times10^{-2}$ A.
(b) Nu. Rezoluţia poate fi crescută în mod normal mergînd la ordine mai mari de difracţie, dar în acest caz $m = 3$ corespunde ordinului maxim ce poate să existe (presupunînd că lumina cade normal pe reţea).

23. (a) 6×10^4 A,
(b) $1,5\times10^4$ A,
(c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9,. Ordinul al zece-lea se află la $\theta=90°$.

25. 33°, 20°, 5,2° (toate în sensul acelor ceasornicului), 14° (în sens invers acelor ceasornicului).

27. Da, $n=3$ pentru $\lambda=1,29$ Å, $n=4$ pentru $\lambda=0,97$ Å.

Cap. 46

1. (a) $\pm55°$,
(b) $\pm35°$.

3. Presupunînd că se folosește un sistem de coordonate drept,
(a) circular, în sens contrar acelor ceasornicului, privind spre sursă;
(b) eliptic, în sens contrar acelor ceasornicului, privind spre sursă, axa mare a elipsei fiind de-a lungul dreptei $y=x$;
(c) plan, de-a lungul dreptei $y=-x$.

5. 55°30′ pînă la 55°46′.

11. $2,7\times10^{-14}$ kgm²/s², 2,1 h.

Cap. 47

1. 4.8 Å

3. $6,2\times10^{23}$ fotoni/s.

7. $5,9\times10^{-6}$ eV.

9. (a) 2,0 eV,
(b) zero,
(c) 2,0 V,
(d) 3 000 Å.

11. 100 ani.

17. (a) 1,
(b) $5,3\times10^{-11}$ m,
(c) $1,1\times10^{-34}$ Js,
(d) $2,0\times10^{-24}$ kg m/s,
(e) $4,1\times10^{15}$ rad/s,
(f) $2,2\times10^{6}$ m/s
(g) $8,2\times10^{-8}$ N,
(h) $9,0\times10^{22}$ m/s²,
(i) +13,6 eV,
(j) —27, 2 eV,
(k) —13,6 eV.

19. +0,21 eV

21. 2,6 eV.

25. + 54 eV, presupunînd că electronul se găsea inițial în stare fundamentală.

27. (a) $2,6\times10^{-13}$ m,
(b) 2 800 eV,
(c) 4,4 Å.

Cap. 48

1. (a) $1,7\times10^{-35}$ m.

3. (a) $3,3\times10^{-24}$ kg m/s, fiecare;
(b) 38 eV pentru electroni și 6 200 eV pentru foton.

5. (a) Ordine superioare nu pot exista pentru acest potențial de accelerare și pentru aceste plane.

(b) 59°; cristalul trebuie să fie rotit în raport cu fasciculul incident, pentru a satisface legea lui Bragg pentru noua lungime de undă.

7. 1,5 Å.

9. (a) 0,20,
(b) 0,40,
(c) 0,33,
(d) 0,33.

11. 0,32.

15. $6,6\times10^{-23}$ Kg m/s.

Răspunsul la problemele suplimentare cu număr impar

Cap. 26

1. $-4/9\,q$, la distanța $l//3$ de $+q$.

3. $\pm1,0\times10^{-6}$ C, $\mp3,0\times10^{-6}$ C

5. $1,61\times10^{-9}$ m.

Cap. 27

1. $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-\dfrac{q}{m}E}}$, $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+\dfrac{q}{m}E}}$

3. $\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$, vertical în jos.

5. $2\pi\sqrt{\dfrac{pE}{I}}$,

Cap. 28

1. $+3,54\times10^{-8}$ C

3. $1,98\times10^{7}$ m/s.

5. $A-Q/2\pi a^2$.

Cap. 29

1. $1,2\times10^{-8}$ C/m^2.

3. (a) $1,0\times10^{-8}$ C de la sfera mică la sfera mare
(b) sfera mică: 2×10^{-8} C, 3 000 V; sfera mare: 4×10^{-8} C, 3 000 V.

9. $W-+\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right]$:

11. (a) $qQ/4\pi\varepsilon_0 E_c$.
(b) $\sqrt{\dfrac{E_c}{m}}$

13. (a) $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{y+L}{y}\right)$,
(b) $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{L}{y(y+L)}$.
(c) Zero.

Cap. 30

5. $q_1-C_1V_0\,\dfrac{C_1C_2+C_1C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}$

$q_2-q_3-C_1V_0\,\dfrac{C_1C_2}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}$

7. (a) $10\varepsilon_0$F,
(b) $13,6\ \varepsilon_0$F,

(c) 1 200 ε_0C, 1 200 ε_0C,
(d) 10^4 V/m,
(e) $2{,}1\times10^3$ V/m,
(f) 88 V,
(g) 19×10^3 ε_0J.

Cap. 31

1. (a) $2{,}3\times10^{12}$,
   (b) $5{,}0\times10^3$,
   (c) 10^7 V.

5. (a) $\rho_A=0{,}12\ \Omega\cdot$m, $\rho_B=0{,}05\,\Omega\cdot$m,
   (b) $E_A=1{,}0$ V/m, $E_B=0{,}50$ V/m,
   (c) $j_A=j_B=10$ A/m^2,
   (d) $V_A=40$ V, $V_B=20$ V.

7. $T=130°$ C.

Cap. 32

1. $R=r_1-r_2$.
3. (a) r,
   (b) R.
5. (a) 7 $R/12$,
   (b) 3 $R/4$,
   (c) 5 $R/6$.
7. (a) 85,0 Ω
   (b) 85,0 Ω
9. (a) $1{,}0\times10^{-3}$ C,
   (b) $1{,}0\times10^{-3}$ A,
   (c) $V_C=V_R=1\,000\ e^{-t}$ V,
   (d) e^{-2t} W.

Cap. 33

1. 1 este încărcată pozitiv, 2 este neutră, iar 3 este încărcată negativ.
3. $2{,}7\times10^{-4}$ Wb/m^2.
5. (a) 542 Ω, serie,
   (b) 2,52 Ω, paralel.
7. (a) 2,8 MHz,
   (b) 0,34 m.

Cap. 34

1. $-10\mu_0 i_0$.
3. $\dfrac{3\sqrt{2}\mu_0 i^2}{4\pi a}$, către centrul pătratului.
5. Zero.
7. $\dfrac{\mu_0 i}{4}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$, în pagină.
9. (a) $\dfrac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right)$, dinspre pagină.
   (b) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi R}\sqrt{1+\pi^2}$, dinspre pagină la un unghi de 18° cu pagina.

Cap. 35

3. (a) $\dfrac{\mu_0 i\pi r^2 R^2}{2x^3}$,
   (b) $\dfrac{3\mu_0\pi i r^2 v}{2R^2N^4}$,

(c) În acelaşi sens ca şi curentul din spira mai mare.

5. (a) $q = -\frac{1}{R}[\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)]$,

(b) Nu. Cîmpul B putea să varieze în acest interval inducînd curenţi.

Cap. 36

3. (a) $i_1 = 3{,}3$ A, $i_2 = 3{,}3$ A;
(b) $i_1 = 4{,}5$ A, $i_2 = 2{,}7$ A;
(c) $i_1 = 0$, $i_2 = 1{,}8$ A;
(d) $i_1 = 0$, $i_2 = 0$

5. (a), metru, (b) weber, (c) watt,
(d) coulomb (d) ohm.

Cap. 37

1. $\frac{q\omega r^2}{2}$, paralel cu $\vec{\omega}$.

2. (a) $(N \pm 1)\frac{eB}{m}$,
(b) 744×10^{10} rad/s ; 759×10^{10} rad/s.

5. 29 A.

Cap. 38

1. Fie T_1 perioada circuitului format de inductanţă şi condensatorul de 900 μ F şi T_2 perioada circuitului format din inductanţă şi condensatorul de 100 μ F. Efectuăm următoarele operaţii: (a) închidem pe I_2, şi aşteptăm $T_1/4$; (b) apoi, rapid închidem pe I_1 şi îl deschidem pe I_2; (c) aşteptăm $T_2/4$ apoi deschidem pe I_1.

Cap. 39

1. (a) $\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$
(b) $\frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi}$

5. (a) $6{,}3 \times 10^{-2}$ V/m,
(b) $2{,}1 \times 10^{-10}$ Wb/m^2,
(c) $1{,}3 \times 10^4$ W.

7. (a) $B = \mu_0 \sigma R \omega$.
(b) $E = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma R^2 \alpha$.
(c) $S = \frac{\mu_0}{2}\sigma^2 R^3 \omega \alpha$
(d) Ambele sînt $\mu_0 \pi \sigma^2 R^4 l \omega \alpha$.

Cap. 40

1. (a) $1{,}0 \times 10^8$ Hz,
(b) $1{,}0 \times 10^{-6}$ Wb/m^2,
(c) $2{,}1$ m^{-1}, $6{,}3 \times 10^8$ rad/s,
(d) 120 W/m^2,
(e) $4{,}0 \times 10^{-7}$ AN, $4{,}0 \times 10^{-7}$ N/m^2.

3. (b) Aproximativ 6×10^{-7} m (comparabil cu lungimea de undă a luminii).
(c) Nu.

Cap. 41

1. $1{,}95 \times 10^8$ m/s.
3. 180 cm.
5. (a) $\sqrt{1+\sin^2\theta_1}$
   (b) $\sqrt{2}$

Cap. 42

1. 6.
5. (b) Nu.
   (c) Tariectoria razei este nedeviată prin sistem.

Cap. 43

1. 0,072 mm.
3. 8 μm
7. 8 400 Å.
9. 1,89 μm

Cap. 44

1. (a) Picăturile acționează ca un obstacol difractator care produce inelul observat.
   (b) 0,20 mm.
3. 2,13 m.

Cap. 45

3. (a) 5 860 Å.
   (b) Deoarece lipsește al patrulea maxim, fanta trebuie să fie între 1,00 și 1,69 μm
5. (a) O linie de fiecare parte a maximului central
   (b) $1{,}44 \times 10^{-4}$ rad.
   (c) $\Delta\theta = \dfrac{1}{R}$

Cap. 46

1. 67% polarizată, 33% nepolarizată.
3. Fața *A* are Polaroidul, iar axa Polaroidului trebuie să facă 45° cu axa principală a plăcii sfert de undă.

INDICE ALFABETIC

D

E

N

O

P

R

S

T

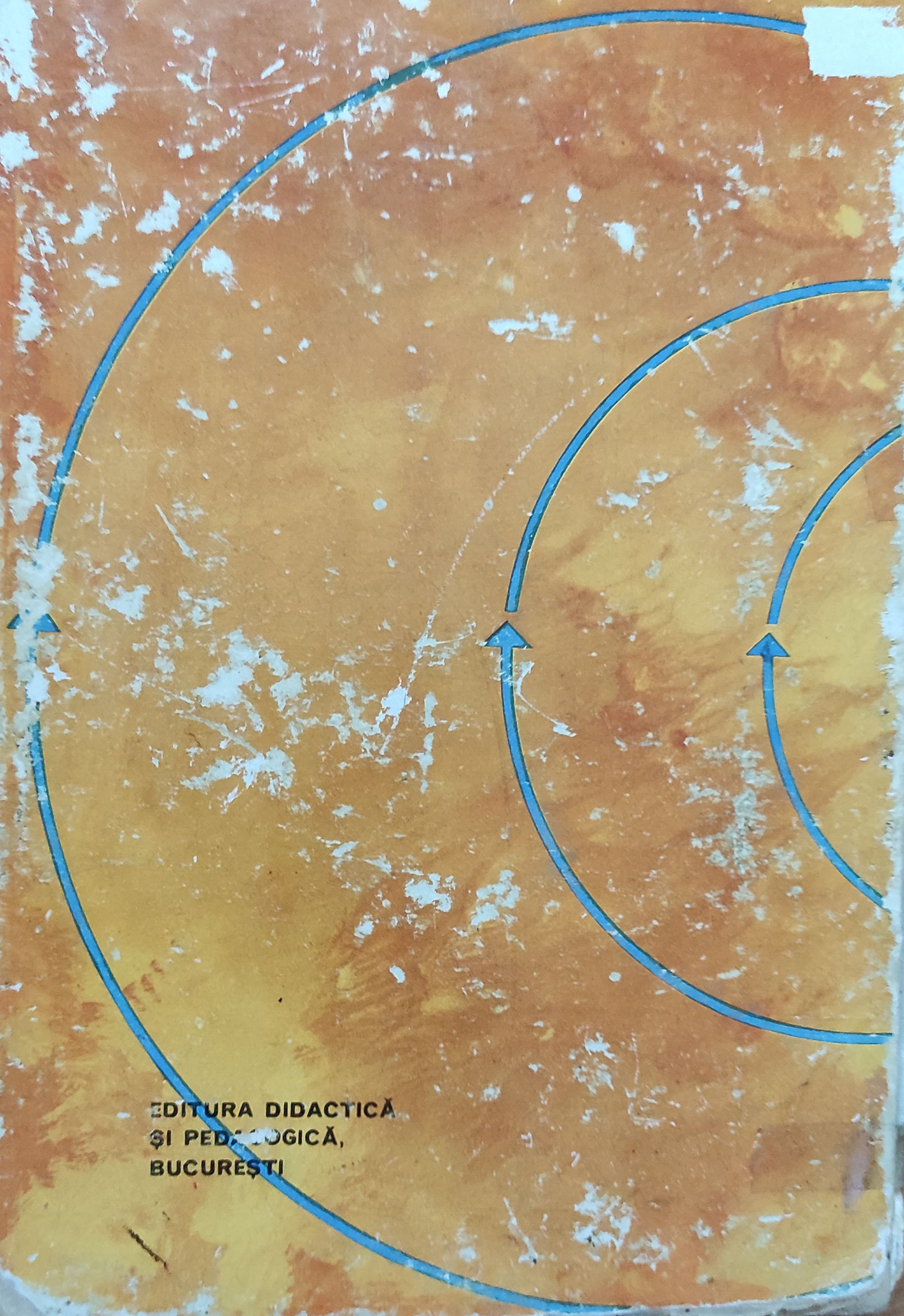
U

V

W

Y

Z



EDITURA DIDACTICĂ
ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI